AJASTA RIIPPUVIEN ILMIÖIDEN NUMEERISISSA RATKAISUISSA KÄYTETYN AIKA-ASKELEEN VALINNASTA

Kari Ikonen

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 14
No. 1 1981 s. 1...9

YHTEENVETO: Sovellettaessa differenssimenetelmää ajasta riippuvia ilmiöitä kuvaavien vakiokertoimisten osittaisdifferentiaaliyhtälöiden numeerisessa ratkaisemisessa aika-askeleella on olemassa kriittinen pituus, jota pitemmillä askelilla numeerinen ratkaisu on epästabiili. Kirjoituksessa tarkastellaan 1-, 2- ja 3-dimensioista lämmönjohtumista, palkin aksiaali- ja taivutusvärähtelyjä sekä laatan värähtelyä kuvaavien eksplisiittisten differenssikaavojen stabiilisuusehtoja. Näin saatavia tuloksia voidaan käyttää suuntaa-antavina myös elementtimenetelmällä suoritettavissa laskelmissa.

LÄMMÖN JOHTUMINEN YKSIDIMENSIOISESSA TAPAUKSESSA

Yksidimensioisen lämmön johtumisen differentiaaliyhtälö on

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1}$$

jossa T on lämpötila, x on paikkakoordinaatti, c on materiaalin lämpökapasiteetti tilavuutta kohti, λ on lämmönjohtavuus ja t on aika.

Diskretoidaan yhtälö (1) käyttäen paikan suhteen keskeisdifferenssiapproksimaatiota ja ajan suhteen etuaskeldifferenssiapproksimaatiota:

$$\frac{T_{k-1,n} - 2T_{k,n} + T_{k+1,n}}{\Delta x^2} = \frac{c}{\lambda}\frac{T_{k,n+1} - T_{k,n}}{\Delta t} \tag{2}$$

Indeksi k viittaa diskretoituun paikkakoordinaattiin x ja indeksi n aikaan t. Differenssijako sekä paikan että ajan suhteen oletetaan tasaväliseksi.

Oletetaan lämpötilajakautuma tunnetuksi aikatasolla n. Ratkaisemalla $T_{k,n+1}$ yhtälöstä (2) saadaan

$$T_{k,n+1} = T_{k,n} + \frac{\lambda}{c}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(T_{k-1,n} - 2T_{k,n} + T_{k+1,n}\right). \tag{3}$$

Kaava on eksplisiittinen, koska aikatason $n+1$ lämpötilat voidaan laskea suoraan aikatason n arvoista.

Jos ratkaisussa on jollakin hetkellä häiriö, se pienenee, pysyy ennallaan tai kasvaa kaavan (3) kertoimen $\frac{\lambda}{c}\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ suuruudesta riippuen. Selvitetään aluksi oletetun häiriön aikariippuvuuden luonnetta tutkimalla differenssiyhtälön (2) ratkaisujen muotoa. Kokeillaan eksponenttifunktioyritettä

$$\bar{T}_{k,n} = f^{k\Delta x}\, g^{n\Delta t} , \tag{4}$$

jossa f ja g ovat vielä määräämättömiä vakioita. Sijoittamalla yrite yhtälöön (2) saadaan

$$\frac{f^{-\Delta x} - 2 + f^{\Delta x}}{\Delta x^2} = \frac{c}{\lambda}\,\frac{g^{\Delta t} - 1}{\Delta t} .$$

Koska tämän yhtälön vasen puoli on vain paikan funktio ja oikea puoli ainoastaan ajan funktio, on yhtälön ratkaisu olemassa vain, jos yhtälön molemmat puolet ovat jonkin vakion A suuruisia, ts.

$$\frac{f^{-\Delta x} - 2 + f^{\Delta x}}{\Delta x^2} = A ,$$

$$\frac{c}{\lambda}\,\frac{g^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = A .$$

Yhtälöiden ratkaisuiksi saadaan

$$f^{\Delta x}_{1,2} = 1 + \frac{\Delta x^2 A}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta x^2 A}{2}\right)^2 - 1} , \tag{5}$$

$$g^{\Delta t} = 1 + \frac{\lambda}{c}\,\Delta t A . \tag{6}$$

Suureella $f^{\Delta x}$ on kaksi arvoa, koska differenssiyhtälö (2) on paikan suhteen toista astetta.

Lineaarikombinaatio

$$\bar{T}_{k,n} = \left(D_1 f_1^{k\Delta x} + D_2 f_2^{k\Delta x}\right) g^{n\Delta t} ,$$

jossa $f_1^{\Delta x}$, $f_2^{\Delta x}$ ja $g^{\Delta t}$ ovat lausekkeiden (5) ja (6) mukaisia, on siis differenssiyhtälön ratkaisu. Ajasta riippuva termi $g^{n\Delta t}$ voidaan kirjoittaa jäljempänä tulevien laskelmien yksinkertaistamiseksi myös muotoon

$$g^{n\Delta t} = e^{\beta n\Delta t} , \tag{7}$$

jossa β on mielivaltainen reaalinen vakio.

Millä ajanhetkellä tahansa oletettu paikallinen häiriö voidaan esittää Fourier'n sarjana /1 s. 47/

$$\sum_{m=1}^{M} C_m e^{i\alpha_m k\Delta x} ,$$

jossa C_m ja α_m ovat vakioita, M on differenssipisteiden lukumäärä ja $i = \sqrt{-1}$. Häiriön käyttäytymistä tutkittaessa on riittävää tarkastella vain yhtä termiä

$$\bar{T}_{k,n} = e^{i\alpha k\Delta x} e^{\beta n\Delta t} .$$

Sijoittamalla tämä differenssikaavaan (2) saadaan, kun samalla jaetaan yhtälön molemmat puolet nollasta eriävillä yhteisillä tekijöillä

$$\frac{e^{-i\alpha\Delta x} - 2 + e^{i\alpha\Delta x}}{\Delta x^2} = \frac{c}{\lambda} \frac{e^{\beta\Delta t} - 1}{\Delta t} .$$

Eulerin kaavaa $e^{\pm i\phi} = \cos\phi \pm i \sin\phi$ soveltaen saadaan

$$e^{\beta\Delta t} = 1 + 2 \frac{\lambda}{c} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\cos \alpha\Delta x - 1) .$$

Jotta häiriö ei kasvaisi ajan funktiona, on oltava

$$|e^{\beta\Delta t}| \leqq 1 ,$$

sillä tällöin termi $e^{\beta n\Delta t} = (e^{\beta\Delta t})^n \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Vaatimus toteutuu, jos

$$\Delta t \leqq \frac{1}{2} \frac{c}{\lambda} \Delta x^2 . \tag{8}$$

Tämä on siis ehto lämmönjohtumisen differentiaaliyhtälön ratkaisemiseen käytetyn differenssikaavan (3) stabiilisuudelle. Kaavan (3) kerrointa $\frac{\lambda}{c} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ kutsutaan Fourier'n luvuksi. Mainittakoon, että edellä sovelletulla stabiilisuustarkastelulla voidaan osoittaa differenssikaava (vrt. kaava (2))

$$\frac{T_{k-1,n} - 2T_{k,n} + T_{k+1,n}}{\Delta x^2} = \frac{c}{\lambda} \frac{T_{k,n+1} - T_{k,n-1}}{2\Delta t}$$

epästabiiliksi kaikilla Δt:n arvoilla.

LÄMMÖN JOHTUMINEN KAKSI- JA KOLMIDIMENSIOISESSA TAPAUKSESSA

Kaksidimensioisen lämmönjohtumisen differentiaaliyhtälö on

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} .$$

Diskretoimalla (tasaväliseksi oletettu differenssijako paikkakoordinaattien ja ajan suhteen) saadaan, kun koordinaatin y suuntaan liittyvää indeksiä merkitään j:llä

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(T_{k-1,j,n} - 2T_{k,j,n} + T_{k+1,j,n}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(T_{k,j-1,n} - 2T_{k,j,n} + T_{k,j+1,n}\right) =$$

$$= \frac{c}{\lambda}\frac{1}{\Delta t}\left(T_{j,j,n+1} - T_{k,j,n}\right) .$$

Vastaavaan tapaan kuin yksidimensioisessa lämmönjohtumisessa voidaan nyt tarkastella häiriötermiä

$$\bar{T}_{k,j,n} = e^{i\alpha k\Delta x}\, e^{i\gamma j\Delta y}\, e^{\beta n\Delta t} ,$$

jossa α, β ja γ ovat mielivaltaisia vakioita. Sijoittamalla tämä edellä olevaan differenssikaavaan ja jakamalla yhteisillä tekijöillä saadaan

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(e^{-i\alpha\Delta y} - 2 + e^{i\alpha\Delta y}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(e^{-i\gamma\Delta y} - 2 + e^{i\gamma\Delta y}\right) = \frac{c}{\lambda}\frac{1}{\Delta t}\left(e^{\beta\Delta t} - 1\right) ,$$

josta seuraa

$$e^{\beta\Delta t} = 1 + 2\frac{\lambda}{c}\Delta t\left[\frac{1}{\Delta x^2}(\cos\alpha\Delta x - 1) + \frac{1}{\Delta y^2}(\cos\gamma\Delta y - 1)\right] .$$

Stabiilisuusehdosta $|e^{\beta\Delta t}| \leqq 1$ seuraa vaatimus

$$\Delta t \leqq \frac{c}{\lambda}\frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2}(1-\cos\alpha\Delta x) + \frac{1}{\Delta y^2}(1-\cos\gamma\Delta y)} \leqq \frac{1}{2}\frac{c}{\lambda}\frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} .$$

Jos $\Delta x = \Delta y$, on

$$\Delta t \leqq \frac{1}{4}\frac{c}{\lambda}\Delta x^2 .$$

Aika-askeleen tulee olla siis puolet lyhyempi kuin yksidimensioisessa lämmönjohtumisessa (vrt. kaava (8)).

Kolmidimensioisessa tapauksessa pätee vastaavanlainen tarkastelu kuin kaksidimensioisessa tapauksessa ja stabiilisuusehdoksi tulee

$$\Delta t \leqq \frac{1}{2}\frac{c}{\lambda}\frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{1}{\Delta z^2}} \; .$$

Jos $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, on oltava

$$\Delta t \leqq \frac{1}{6}\frac{c}{\lambda}\Delta x^2 \; .$$

Huomattakoon, että aika-askeleen valitseminen edellä esitettyjen sääntöjen mukaan takaa stabiilisuuden, mutta ei vielä sitä, että ratkaisu olisi riittävän tarkka. Tapauksesta riippuen on hilaväli Δx (ja mahdollisesti Δy ja Δz) valittava kyllin lyhyeksi, jotta diskretointivirhe saadaan riittävän pieneksi.

PALKIN AKSIAALINEN VÄRÄHTELY

Yksidimensioisen värähtelyn differentiaaliyhtälö kimmoisessa aineessa on

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, , \tag{9}$$

jossa $u(x,t)$ on siirtymä ja c on iskuaallon etenemisnopeus $= \sqrt{E/\rho}$, E on kimmokerroin ja ρ on tiheys.

Yksinkertainen diskretointi käyttäen keskeisdifferenssiapproksimaatioita (tasaväliseksi oletettu differenssijako paikan ja ajan suhteen) johtaa yhtälöön

$$u_{k,n+1} = 2u_{k,n} - u_{k,n-1} + c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(u_{k-1,n} - 2u_{k,n} + u_{k+1,n}\right) \; . \tag{10}$$

Sijoittamalla häiriötermi

$$U = e^{i\alpha k\Delta x} \, e^{\beta n\Delta t}$$

differenssikaavioon samaan tapaan kuin lämmönjohtumisen yhtälöä tarkasteltaessa saadaan

$$(e^{\beta\Delta t})^2 - 2\left[1 + c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(\cos \alpha\Delta x - 1)\right] e^{\beta\Delta t} + 1 = 0 \; .$$

Merkitään hakasulkulauseketta tunnuksella a, jolloin toisen asteen yhtälön ratkaisu on

$$e^{\beta \Delta t} = a \pm \sqrt{a^2 - 1} \, .$$

Stabiilisuusehto on

$$|a \pm \sqrt{a^2 - 1}| \leqq 1 \, . \tag{11}$$

Todetaan, että jos $a^2 - 1 > 0$ $(|a| > 1)$, on $|a \pm \sqrt{a^2 - 1}| > 1$ ja ehto (11) ei toteudu. Jos taas $a^2 - 1 \leqq 0$, saadaan

$$|a \pm \sqrt{a^2 - 1}| = |a \pm i\sqrt{1 - a^2}| = \sqrt{a^2 + 1 - a^2} = 1$$

ja ehto (11) toteutuu. On siis oltava $-1 \leqq a \leqq 1$, eli

$$-1 \leqq 1 + c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (\cos \alpha \Delta x - 1) \leqq 1 \, .$$

Tämän epäyhtälön oikeanpuoleinen ehto toteutuu aina. Vasemmanpuoleinen ehto toteutuu, jos

$$c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (1 - \cos \alpha \Delta x) \leqq 2 \, ,$$

josta seuraa aika-askeleen enimmäisarvoksi

$$\Delta t \leqq \frac{\Delta x}{c} \, . \tag{12}$$

Tämän ehdon mukaan aika-askeleen on oltava niin lyhyt, että aika-askeleen kuluessa äänen nopeudella etenevä häiriö saa edetä enintään differenssipisteiden välisen etäisyyden Δx verran. Tämä sääntö ei kuitenkaan välttämättä päde, jos differentiaaliyhtälön (9) ratkaisemiseen käytetään muuta kuin differenssikaavaa (10).

PALKIN TAIVUTUSVÄRÄHTELY

Taivutusvärähtelyn differentiaaliyhtälö on

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{A}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \, ,$$

jossa A on palkin poikkileikkauspinnan pinta-ala ja I taivutusjäyhyysmomentti.

Yksinkertainen diskretointi käyttäen keskeisdifferenssiapproksimaatiota johtaa yhtälöön

$$w_{k,n+1} = -w_{k,n-1} + 2w_{k,n} - \frac{EI}{\rho A}\frac{\Delta t^2}{\Delta x^4}\left(w_{k-2,n} - 2w_{k-1,n} + 6w_{k,n} - 4w_{k+1,n} + w_{k+2,n}\right) .$$

Sijoitetaan jälleen häiriötermi

$$W_{k,n} = e^{i\alpha k\Delta x}\, e^{\beta n\Delta t} ,$$

jolloin saadaan samaan tapaan kuin aiemmin

$$\left(e^{\beta\Delta t}\right)^2 - 2\left[1 - \frac{EI}{\rho A}\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\,(3 + \cos 2\alpha\Delta x - 4\cos\alpha\Delta x)\right] e^{\beta\Delta t} + 1 = 0 .$$

Merkitään hakasulkulauseketta tunnuksella a, jolloin stabiilisuusehto on (vrt. epäyhtälön (11) käsittelyyn)

$$-1 \leqq a \leqq 1 .$$

Koska termi $(2 + \cos 2\alpha\Delta x - 4\cos\alpha\Delta x)$ on aina ei-negatiivinen, on

$$\frac{EI}{\rho A}\frac{\Delta t^2}{\Delta x^4} \leqq \frac{2}{3 + \cos 2\alpha\Delta x - 4\cos\alpha\Delta x} \leqq \frac{2}{8} ,$$

josta aika-askeleen enimmäispituudelle tulee ehto

$$\Delta t \leqq \frac{1}{2}\,\Delta x^2\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta x}{c}\,\frac{\Delta x}{r} , \qquad (13)$$

jossa $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ on hitaussäde.

LAATAN VÄRÄHTELY

Laatan taivutusvärähtelyn differentiaaliyhtälö on

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\,\frac{\rho h}{K}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

jossa h on laatan paksuus ja taivutusjäykkyys

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} .$$

Sijoittamalla keskeisdifferenssimenetelmällä saatavaan yhtälöön häiriötermi

$$W_{k,j,n} = e^{i\alpha k\Delta x} e^{i\gamma j\Delta y} e^{\beta n\Delta t}$$

saadaan

$$(e^{\beta\Delta t})^2 - 2\left\{1 - \frac{K\Delta t^2}{\rho h}\left[\frac{1}{\Delta x^4}(\cos 2\alpha\Delta x - 4\cos\alpha\Delta x + 3)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4}{\Delta x^2\Delta y^2}(\cos\alpha\Delta x - 1)(\cos\gamma\Delta y - 1) + \frac{1}{\Delta y^4}(\cos 2\gamma\Delta y - 4\cos\gamma\Delta y + 3)\right]\right\} e^{\beta\Delta t} + 1 = 0 .$$

Merkitään aaltosulkulauseketta a:lla ja kuten aiemmin, on oltava voimassa ehto

$$-1 \leqq a \leqq 1 ,$$

josta seuraa

$$1 - \frac{K\Delta t^2}{\rho h}\left[\frac{8}{\Delta x^4} + \frac{16}{\Delta x^2\Delta y^2} + \frac{8}{\Delta y^4}\right] \geqq -1$$

ja sijoittamalla lyhenteen d lauseke

$$\Delta t \leqq \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)\rho}{E}}\ \frac{\Delta x^2\Delta y^2}{h(\Delta x^2 + \Delta y^2)} . \tag{14}$$

Jos esimerkiksi hilaväli Δy kasvaa suureksi hilaväliin Δx verrattuna, saadaan

$$\Delta t \leqq \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)\rho}{E}}\ \frac{\Delta x^2}{h} . \tag{15}$$

Sijoitamalla palkin poikittaisvärähtelyille aiemmin johdettuun kaavaan (13) (13) yksikön levyisen palkin poikkipinta-alan ja taivutusjäyhyysmomentin lausekkeet $A = h$ ja $I = h^3/12$ saadaan ehto

$$\Delta t \leqq \sqrt{\frac{3\rho}{E}}\ \frac{\Delta x^2}{h} ,$$

joka on sopusoinnussa tuloksen (15) kanssa. Jos taas $\Delta x = \Delta y$, saadaan kaavasta (14)

$$\Delta t \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(1-\nu^2)\rho}{E}}\ \frac{\Delta x^2}{h} . \tag{16}$$

Aika-askeleen tulee siis olla noin puolta lyhyempi kuin palkin taivutusvärähtelyssä. Tämä on vastaavanlainen tilanne kuin edellä yksi- ja kaksidimensioisessa lämmönjohtumisessa.

YHTEENVETOTAULUKKO TULOKSISTA

ilmiö	aika-askeleen enimmäispituus	merkintöjen selityksiä
lämmönjohtuminen	$\frac{1}{2}\frac{c}{\lambda}\frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{1}{\Delta z^2}}$	c lämpökapasiteetti λ lämmönjohtavuus
yksidimensioinen värähtely	$\frac{\Delta x}{c}$	$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ E kompressibiliteetti, jos väliaine kaasua
palkin taivutusvärähtely	$\frac{1}{2}\frac{\Delta x}{c}\frac{\Delta x}{r}$	$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$
laatan värähtely	$\sqrt{3(1-u^2)}\ \frac{1}{ch}\ \frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}}$	$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ h laatan paksuus

KIRJALLISUUTTA

[1] Ames, W.F., Numerical Methods for Partial Differential Equations. London, 1969. 291 s.

Kari Ikonen, tekn.lis., Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Ydinvoimatekniikan laboratorio