

J-INTEGRAALI MURTUMISMEKANIIKASSA

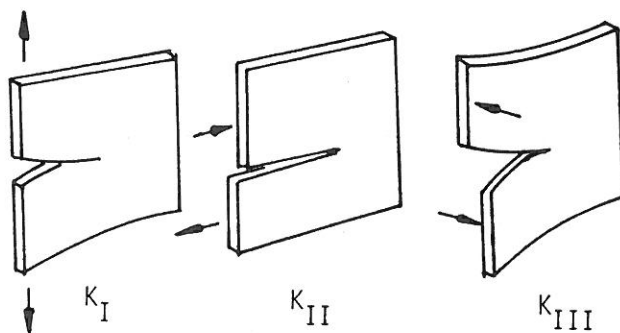
Kari Ikonen

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 13
No. 4 1980 s. 21...36

YHTEENVETO: Artikkelissa esitetään murtumismekaniikassa viime aikoina laajasti käytetyn J-integraalin matemaattinen ja fysikaalinen sisältö ja kaavat J-integraalin laskemiseksi elementtimenetelmällä. Se on lyhennelmä Valtion teknillisen tutkimuskeskuksen ydinvoimatekniikan laboratoriossa tehdystä, aihetta käsittelevästä tiedonannosta.

JOHDANTO

Materiaaliin valmistuksen tai käytön aikana syntyneiden vikojen vaikutusta rakenteen väsymis- ja murtumisilmiöön kuvataan kuormitettuun säröön liittyvillä parametreilla. Nämä parametrit on pyrittävä valitsemaan siten, että ne suoraan ja yksiselitteisesti kuvaavat vian ja kuormituksen materiaalille



Kuva 1. Murtumisen kolme muotoa.

aiheuttamaa murtumisriskiä. Tällaisen parametrin kriittisen arvon tulisi olla vakio (materiaalivakio) ja siis etukäteen kokeellisesti mitattavissa.

Linearisessa murtumismekaniikassa on yleisesti käytössä jännitysintensiiteettikerroin K , jolla on kolme arvoa K_I , K_{II} ja K_{III} kuormitustavan mukaan (kuva 1).

Jännitysintensiiteettikerroimen käytössä on kirjoitettu lehden aikaisemmassa numerossa /3/, joten asiaa ei enää tässä käsitellä.

Jännitysintensiiteettikerrointa yleispätevämpi särön ominaisuuksia kuvaava suure on Ricen ja Cherepynovin esittämä J-integraali, joka tasotapausta koskevina määritellään viivaintegraalina (viite /1/)

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right), \quad (1)$$

jossa

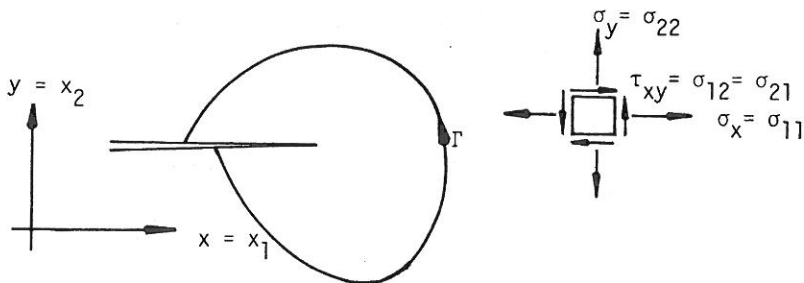
$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad \text{on muodonmuutosenergiatiheys}$$

$$\left(= \int_0^{\epsilon_{11}} \sigma_{11} d\epsilon_{11} + \int_0^{\epsilon_{12}} \sigma_{12} d\epsilon_{12} + \int_0^{\epsilon_{21}} \sigma_{21} d\epsilon_{21} + \int_0^{\epsilon_{22}} \sigma_{22} d\epsilon_{22} \right),$$

T_i on integrointitien Γ reunalla vaikuttava vetojännityskomponentti, joka määritellään voimana integrointitien pituusyksikköä kohti,

u_i on siirtymävektorin komponentti ja

ds on integrointitien Γ kaarialkio.



Kuva 2. J-integraalin laskemisessa käytettävä koordinaatisto ja jännitystila.

Integrointi suoritetaan positiiviseen kiertosuuntaan pitkin mielivaltaisesti särön alapinnalta yläpinnalle kulkevaa käyrää Γ pitkin (kuva 2). Jotta J-integraalin tärkein ominaisuus, riippumattomuus integrointitiestä, säilyisi, tulee x -akselin olla särön suuntainen.

PERUSTELUT J-INTEGRAALIN KÄYTÖLLE

J-integraalin pääasiallisin käyttötarkoitus on arvioida se kuormituksen arvo, jolla särö tulee murtumisen suhteen kriittiseksi. J-integraalia ei voida soveltaa, jos säröä kuormitetaan plastisella alueella kuormaa välillä voimakkaasti pienentäen. J-integraalin käyttö on perusteltavissa seuraavista syistä:

1. J-integraali on yleispätevämpi kuin muut tähän mennessä esitetyt säröä kuvaavat parametrit. Jännitysintensiteettikerroin K lineaarisella alueella on vain erikoistapaus J-integraalista.
2. J-integraalille on olemassa potentiaalienergiaan perustuva tulkinta, jonka kautta J-integraali on alkuaan löydetty ja joka mahdollistaa J-integraalin fysikaalisen havainnollistamisen.
3. Kokeellinen J-arvo voidaan määrittää pienillä koekappaleilla toisin kuin lineaarisen jännitysintensiteettikertoimen K kokeellista arvoa määritettäessä. Lisäksi yhdelläkin koekappaleella on mahdollista saada luotettava tulos ja laskelmat voidaan suorittaa myös lovelle, jolla on äärellinen pyöristyssäde.

4. J-integraali soveltuu hyvin laskettavaksi numeerisilla menetelmillä, kuten elementtimenetelmällä.
5. Linearisella alueella jännitysintensiteettikerroin K voidaan laskea J-integraalin avulla muita menetelmiä tarkemmin, mikä jo sinänsä riittää perusteluksi J-integraalin käyttöönotolle.

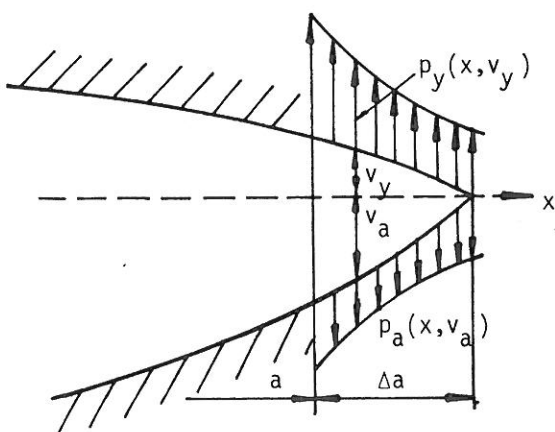
J-INTEGRAALIN JA POTENTIAALIENERGIAN VÄLINEN YHTEYS

Tarkastellaan rakenteessa olevan särön pituuden a pientä muutosta Δa , johon liittyvä energiansäilymissyhtälö muodostetaan. Särön kasvun Δa tapahtuessa jännitykset, jotka vaikuttavat Δa :n matkalla, vapautuvat ja tekevät samalla tasokappaleen yksikköpaksuutta kohti työn ΔW_c . Derivaatta dW_c/da on luonnollinen säröön liittyvä suure ja voidaan osoittaa, että tietyin jäljempänä esitettävien edellytyksien

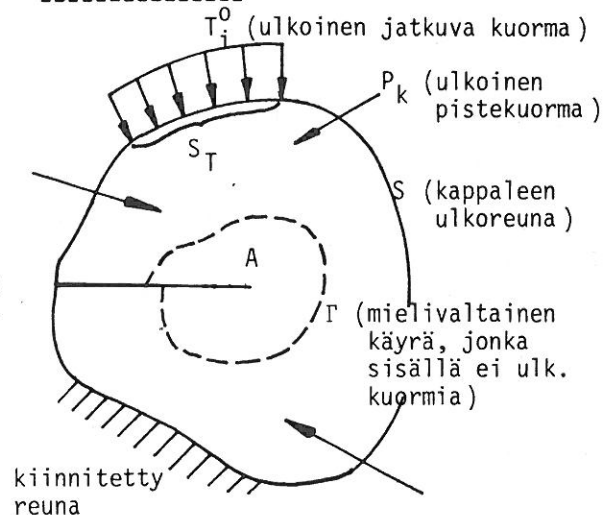
$$J = - \frac{dW_c}{da} .$$

Särön pitenemisessä Δa :n verran vapautuvan energian ΔW_c voidaan ajatella muodostuvan seuraavasti. Ennen särön kasvua vaikuttaa Δa :n matkalla särön ylä- ja alapinnalla sellainen jännitys jakauma p (sisältää yleisessä tapauksessa myös leikkausjännityskomponentin), että särön ylä- ja alapinta koskettavat toisiaan Δa :n matkalla. Tämän jälkeen annetaan jännityksen p hävitä, jol-

a) suurennus särön kärkialueelta



b) koko kappale



Kuva 3. Särön avautuminen Δa :n matkalla.

loin särö avautuu Δa :n matkalla, koko kappale muuttua hieman muotoaan (reunaehdot pysyvät voimassa) ja kuvan 3 merkinnöillä vapautuu yksikköpaksuutta kohti energiamäärä ΔW_c

$$\Delta W_c = \int_a^{a+\Delta a} \left[\int_0^{v_y} p_y(x, v_y) dv_y + \int_0^{v_a} p_a(x, v_a) dv_a \right] dx.$$

Energian muutoksen lausekkeelle ΔW_c saadaan toinen esitysmuoto energiansäilymisehdosta (kuva 3b)

$$\Delta W_c = \int_{A_0} \Delta W dA - \int_{S_T} T_i^0 \Delta u_i^0 dS - \sum_{k=1}^N F_k \Delta u_k, \quad (2)$$

jossa ΔW on muodonmuutosenergiatiheyden muutos, A_0 on koko tarkasteltavan tasokappaleen pinta-ala, T_i^0 on ulkoinen mekaaninen kuorma, joka pysyy vakiona särön avautuessa ja Δu_i^0 kuormaan liittyvä siirtymän muutos. S_T on tasokappaleen reunakäyrän se osa, jolla kuorma T_i^0 vaikuttaa. F_k on ulkoinen piste-kuorma ja u_k on vastaava siirtymä. Todetaan, että kaavan oikea puoli on sama kuin potentiaalienergian muutos ΔU .

Kuvitellaan kuvassa 3b esitetty kappale jaetuksi kahteen osaan pitkin mielivaltaista käyrää Γ , jonka sisäpuolelle ei jää ulkoisia kuormia. Sisäosan reunalla vaikuttavaa jännitystä merkitään T_i :llä ja ulko-osan reunalla vaikuttavaa jännitystä merkitään T_i' :llä. Vastaavat siirtymän muutokset ovat Δu_i ja $\Delta u_i'$. Osien yhteensopivuuden vuoksi

$$\Delta u_i' = \Delta u_i$$

ja

$$T_i' = -T_i.$$

Kaava (2) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\Delta W_c = \Delta U = \int_A \Delta W dA - \int_{\Gamma} T_i \Delta u_i dS + \int_{A_0 - A} \Delta W dA - \int_{S_T} T_i^0 \Delta u_i^0 dS - \int_{\Gamma} T_i' \Delta u_i dS - \sum_{k=1}^N F_k \Delta u_k,$$

jossa A on käyrän Γ sisälle jäävä pinta-ala. Aluetta $A_0 - A$ koskevat yllä olevan yhtälön oikean puolen neljä viimeistä termiä häviävät, koska ulkoisten voimien tekemä työ muuttuu muodonmuutosenergiaksi. Saadaan näin ollen tulos

$$\Delta W_c = \Delta U = \int_A \Delta W dA - \int_{\Gamma} T_i \Delta u_i dS.$$

Tämän yhtälön oikea puoli on riippumaton integrointitiestä ja sen sisälle jäävästä pinta-alasta. Raja-arvoksi tulee

$$\frac{dW_c}{da} = \frac{dU}{da} = \int_A \frac{dW}{da} dA - \int_{\Gamma} T_i \frac{du_i}{da} dS. \quad (3)$$

Tämä tulos pätee riippumatta kuormitushistoriasta tai plastisista muodonmuutoksista.

Jos alueen A annetaan kutistua riittävän pieneksi, voidaan katsoa kappaleen reunojen olevan äärettömän kaukana särön kärjestä verrattuna alueen A

dimensioihin. Toisaalta särön kärki vaikuttaa tunnetusti erittäin määräävästi lähiympäristönsä jännitystilaan. Voidaan tällöin olettaa, että särön kasvaessa hieman muodonmuutos- ja jännitystila pysyvät särön kärjen suhteen muuttumattomina edellyttäen, että plastisia (pysyviä) muodonmuutoksia ei synny. Myös plastisessa muodonmuutoksessa muodonmuutos- ja jännityskentän säilyminen särön kärjen suhteen muuttumattomana toteutuu, jos särön pituuden kasvu ei ole todellista, vaan verrataan toisiinsa kahta ainoastaan särön pituuden osalta eroavaa kappaletta, joita molempia on kuormitettu jännityskentästä alkutilasta lähtien. Myös silloin, kun samanmuotoisena toistuvan kuormituksen aikana särö on kasvanut alkuperäisestä mitastaan selvästi ja kun tarkastellaan tästä tilasta pientä särön kasvua samanlaisena pysyvän kuormituksen vaikutuksesta, saadaan kuormituksen pahimmalla arvolla jännityskentät plastisoituvine alueineen särön kärjen suhteen samanlaisiksi.

Edellä esitetyn perusteella siirtymän muutos du_i on

$$du_i = u_i(x-da, y) - u_i(x, y) = - \frac{\partial u_i}{\partial x} da ,$$

koska siirtymä u_i pisteessä (x, y) käyrällä Γ särön kärjen siirtymän jälkeen on sama kuin se oli pisteessä $(x-da, y)$ ennen siirtymää.

Tätä tulosta

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial a} = - \frac{\partial(\quad)}{\partial x} \quad (4)$$

ei tietenkään voida soveltaa, jos tarkastelualueella on lämpötilakenttä siten, että $\frac{\partial T}{\partial x} \neq 0$, koska lämpövenymiä aiheuttava lämpötilakenttä ei siirry särön kärjen mukana. Tarkastelualueella ei ylipäänsä saa olla minkäänlaisia kuormia, jotta kaava (4) olisi voimassa särön kärjen lähialueella. Soveltamalla tulosta yhtälöön (3) saadaan

$$\frac{dW_c}{da} = \frac{dU}{da} = \frac{1}{da} \int_A dWdA + \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dS .$$

Termin $\int_A dWdA$ laskemiseksi ajatellaan särön pituudella a laskettua muodonmuutosenergiatiheyskenttää W siirretyksi da :n verran oikealle, jolloin kärjet yhtyvät, identtiset muodonmuutosenergiatiheyskentät menevät päällekkäin ja kumoavat toisensa muualla paitsi alueen reunalla, jolta saadaan kuvan 4 perusteella

$$\int_A dWdA = \int_{y_1}^{y_2} W_1 dady - \int_{y_1}^{y_2} W_2 dady = - da \int_{\Gamma} W dy .$$

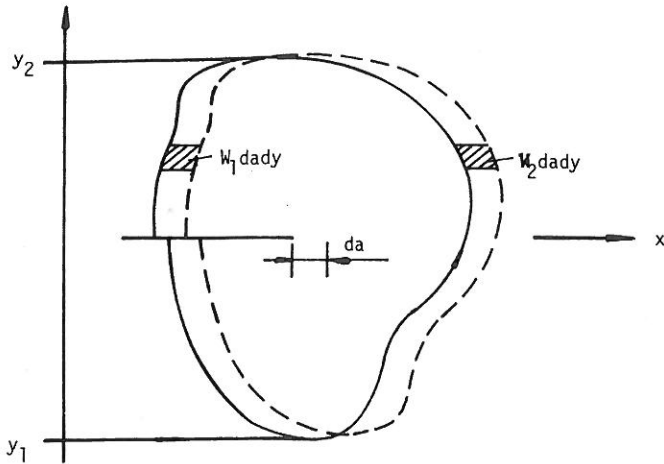
Potentiaalienergian muutokselle saadaan lauseke

$$dU = - da \int_{\Gamma} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds .$$

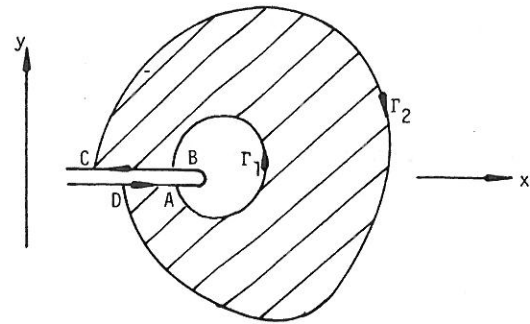
Kaavaan (1) vertaamalla todetaan, että

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) = - \frac{dW_c}{da} = - \frac{dU}{da} . \quad (5)$$

Tätä kaavaa voidaan käyttää hyväksi J-integraalin kokeellisessa määrittämisessä.



Kuva 4. Muodonmuutosenergiatiheyskentän siirtyminen särön kärjen mukana.



Kuva 5. Integrointi pitkin suljettua tietä ABCDA.

J-INTEGRAALIN RIIPPUMATTOMUUS INTEGROINTITIESTÄ

Riippumattomuus integrointitiestä (ks. /1/) perustuu yksinkertaisesti siihen, että J-integraali häviää laskettuna suljettua tietä Γ^* pitkin (kuvassa 5 tie ABCDA). Osoituksessa muunnetaan viivaintegraali

$$J = \oint_{\Gamma^*} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (6)$$

Greenin teoreeman (Stokesin lauseen) avulla käyrän Γ^* rajoittaman pinta-alan A yli ulotetuksi pintaintegraaliksi, jossa integrandi häviää. Kaavan (6) oikean puolen ensimmäiseksi termiksi tulee

$$\oint_{\Gamma^*} W dy = \int_A \frac{\partial W}{\partial x} dx dy . \quad (7)$$

Edelleen on

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x}$$

ja, koska

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

ja

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) ,$$

saadaan

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} .$$

Kaavan (6) jälkimmäistä termiä varten on

$$T_i = \sigma_{ij} n_j ,$$

jossa kuvan 6 perusteella

$$n_1 = \frac{dy}{ds}$$

ja

$$n_2 = - \frac{dx}{ds}$$

ovat käyrän Γ ulospäin osoittavan yksikön pituuden normaalivektorin komponentit. Kaavan (6) jälkimmäiseksi termiksi saadaan

$$\begin{aligned} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds &= \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \\ &= (\sigma_{i1} dy - \sigma_{i2} dx) \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ &= (-\sigma_{i2} \vec{i} + \sigma_{i1} \vec{j}) \frac{\partial u_i}{\partial x} d\vec{s} , \end{aligned}$$

jossa i ja j ovat koordinaattiakselien x ja y suuntaiset yksikkövektorit.

Greenin teoreemaa soveltaen on

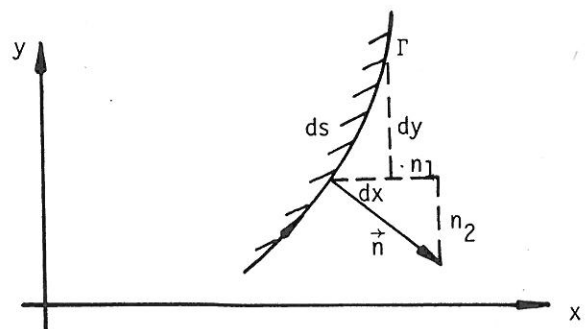
$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma^*} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds &= \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sigma_{i1} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sigma_{i2} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \right] \\ &= \int_A \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dA \\ &= \int_A \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dA . \end{aligned}$$

Koska alueella ei vaikuta tilavuuskuormia oletuksen mukaan, on

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 ,$$

jolloin

$$\oint_{\Gamma^*} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx dy .$$



Kuva 6. Integrointitiehen liittyviä merkintöjä.

Yhdistämällä termit nähdään, että viivaintegraali suljettua käyrää Γ^* pitkin häviää, ts.

$$\oint_{\Gamma^*} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) = 0 .$$

Kuvan 5 perusteella on siis

$$\oint_{\Gamma^*} = \int_{\Gamma_1} + \int_{BC} - \int_{\Gamma_2} + \int_{DA} = 0 ,$$

jossa kiertosuunta on valittu positiiviseksi vastapäivään.

Koska suorilla BC ja DA on $dy = 0$ ja $\dot{T} = 0$ ($\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{33} = 0$), saadaan

$$\int_{BC} = \int_{DA} = 0$$

ja

$$\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2} .$$

J-integraalin riippumattomuus integrointitiestä merkitsee, että kuvassa 5 esitettyjen käyrien Γ_1 ja Γ_2 rajoittama viivoitettu alue ei vaikuta välittömästi J-integraalin arvoon. J-integraalissa pelkistyy särön kärjen vaikutus.

J-integraalin riippumattomuus integrointitiestä osoitettiin edellä tasojännitystilassa. Tarkastelu pätee myös tasomuodonmuutostilassa, sillä tasoa vastaan kohtisuorasti vaikuttava normaalijännitys $\epsilon_{33} = 0$ ei vaikuta muodonmuutosenergian W lausekkeeseen, koska vastaava venymä $\epsilon_{33} = 0$.

Viitteessä /2/ on esitetty laskentakaavat pyörähdyssymmetriselle tapaukselle ja myös sellaiselle tapaukselle, jossa särö sijaitsee vinosti pääkoordinaatistoon nähden.

SÄRÖN YMPÄRISTÖN LÄMPÖVENYMIEN VAIKUTUS J-INTEGRAALIIN

Sovellettaessa J-integraalin alkuperäistä laskentakaavaa

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right)$$

tapaukseen, jossa tarkastelualueella on lämpökuormia, lakkaa tiestäriippumattomuus olemasta voimassa. Lisäämällä kaavan oikealle puolelle lämpövenymistä aiheutuva pintaintegraali seuraavassa esitettävällä tavalla saadaan kuitenkin 'yleistetty' tiestäriippumaton laskentakaava.

J-integraalin ensimmäinen termi $\int_{\Gamma^*} W dy$ pitkin suljettua käyrää Γ^* on

$$\oint_{\Gamma^*} W dy = \int_A \frac{\partial W}{\partial x} dx dy .$$

Nyt on muodonmuutosenergiatiheys

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^T} \sigma_{ij} d(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^T),$$

jossa ϵ_{ij} on todellinen venymä ja ϵ_{ij}^T on lämpövenymä, Näiden venymien ajatellaan kehittyvän samanaikaisesti. Derivoimalla saadaan

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sigma_{ij} \left(\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x} \right).$$

Kaavan (7) perusteella on

$$\oint_{\Gamma^*} W dy = \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx dy - \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x} dx dy,$$

jossa u_i on todellinen siirtymä.

Lämpökuormituksenkin tapauksessa J-integraalin jälkimmäinen termi on

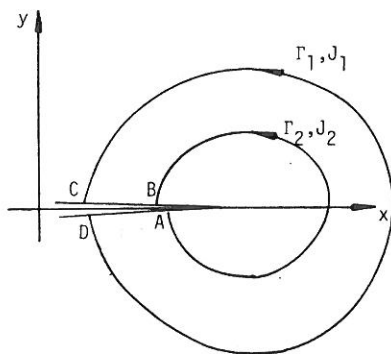
$$\oint_{\Gamma^*} T_i \frac{du_i}{\partial x} ds = \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx dy.$$

Integraali $J(\Gamma)$ suljettua käyrää Γ pitkin ei siis häviä, vaan saa arvon

$$J(\Gamma^*) = \int_{\Gamma^*} \left(W dy - T_i \frac{du_i}{\partial x} ds \right) = - \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x} dx dy.$$

Sovelletaan tätä tulosta kuvan 7 suljettuun käyrään ABCDA:

$$J(\Gamma^*) = \int_{\Gamma_1} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) - \int_{\Gamma_2} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) = - \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x} dx dy.$$



Kuva 7. Lämpökuormitustapauksessa J-integraaliin liittyviä merkintöjä.

Pintaintegraali, joka liittyy käyrien Γ_1 ja Γ_2 väliseen alueeseen, on toisaalta

$$\int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x} dx dy = \int_{A_1} \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x} dx dy - \int_{A_2} \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x} dx dy,$$

jossa A_1 on käyrän Γ_1 ja A_2 käyrän Γ_2 sisälle jäävä alue. Saadaan näin ollen

tulos

$$\bar{J} = \int_{\Gamma} \left(w dy - T_i \frac{du_i}{\partial x} ds \right) + \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x} dx dy . \quad (8)$$

Integraali \bar{J} on siis tiestä riippumaton. Mutta kysymyksessä ei ole puhdas viivaintegraali, vaan kaavaan sisältyy pintaintegraali, joka ilmeisesti kuitenkin häviää, jos $A \rightarrow 0$, koska σ_{ij} on rajoitettu plastisoitumisen takia.

Jos lämpötilakenttä ja lämpöpitenemisominaisuudet ovat sellaiset, että

$$\frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x} = 0 ,$$

pintaintegraali häviää.

J-INTEGRAALIN LASKEMINEN ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ

Seuraavassa muutetaan kaava (8) elementtimenetelmällä suoritettavaa laskentaa varten sopivaan muotoon. Elementtinä käytetään tehokkaaksi osoittunutta isoparametristä 8-solmuista elementtiä.

Tarkastellaan aluksi kaavan (8) oikean puolen ensimmäistä termiä, joka on yksityiskohtaisesti kirjoitettuna

$$J = \int_{\Gamma} \left[w dy - (\sigma_{11} dy - \sigma_{12} dx) \frac{\partial u}{\partial x} - (\sigma_{21} dy - \sigma_{22} dx) \frac{\partial v}{\partial x} \right] . \quad (9)$$

Elementin alueella jännitykset ovat tarkimmillaan elementin integrointipisteissä. Näiden lukumääräksi on kuvan 8 elementeissä valittu 9. J-integraalia laskettaessa on edullista valita integrointitie kulkemaan elementin integrointipisteiden kautta. Integrointitie voi kulkea joko suoraan elementin läpi tai kääntyä elementin keskellä. Kuljettaessa integrointipisteiden kautta on elementin paikallisista koordinaateista ξ ($-1 \leq \xi \leq 1$) ja η ($-1 \leq \eta \leq 1$) toinen vakio (= 0). Oletetaan, että kuljetaan ξ -koordinaatin suunnassa. Tällöin kaavassa (4) x ja y ovat vain ξ :n funktioita, ts.

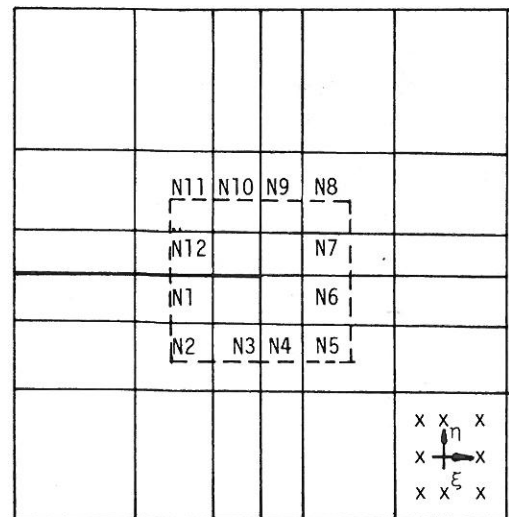
$$x = x(\xi) ,$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi ,$$

$$y = y(\xi)$$

ja

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi$$



Kuva 8. Särön ympäristön elementtimalli.

Sijoittamalla nämä kaavaan (9) saadaan elementin alueella

$$\Delta J = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[W \frac{\partial y}{\partial \xi} - \left(\sigma_{11} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \sigma_{12} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\sigma_{21} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \sigma_{22} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] d\xi, \quad \eta = 0.$$

Vastaavasti, jos $\xi = 0$, saadaan

$$\Delta J = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left[W \frac{\partial y}{\partial \eta} - \left(\sigma_{11} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \sigma_{12} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\sigma_{21} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \sigma_{22} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] d\eta.$$

Derivaattojen $\frac{\partial u}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial x}$ laskemiseen käytetään ketjusääntöä

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} a_{11} + \frac{\partial u}{\partial y} a_{12} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} a_{21} + \frac{\partial u}{\partial y} a_{22} \end{cases},$$

josta ratkaisemalla

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix},$$

jossa $[J]$ on Jacobin matriisi. Sijoittamalla kaavassa u :n paikalle v saadaan kaava derivaattojen $\frac{\partial v}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial y}$ laskemiseksi.

LÄMPÖVENYMISTÄ AIHEUTUVAN PINTAINTEGRAALIN LASKEMINEN

Jos särön alueella on lämpövenymäeroja, saadaan kaavan (8) pintaintegraalille lauseke

$$\Delta J = \int_{\Delta A} \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x} dA = \alpha \int_{\Delta A} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \frac{\partial T}{\partial x} |J| d\xi d\eta,$$

jossa pintaintegraali on muutettu paikalliseen $\xi\eta$ -koordinaatistoon ja ΔA on tarkasteltavan elementin pinta-ala tai osa siitä, jos elementti ei jää kokonaan integrointitien sisäpuolelle. x on särön suunta ja tasojännitystapauksessa $\sigma_z = 0$. Materiaalin on oletettu olevan termisesti isotrooppista sekä sen termisten ominaisuuksien vakioita elementteittäin.

Edellä esitetyn derivaattoja koskevan koordinaatistomuunnoksen avulla saadaan pintaintegraaliksi

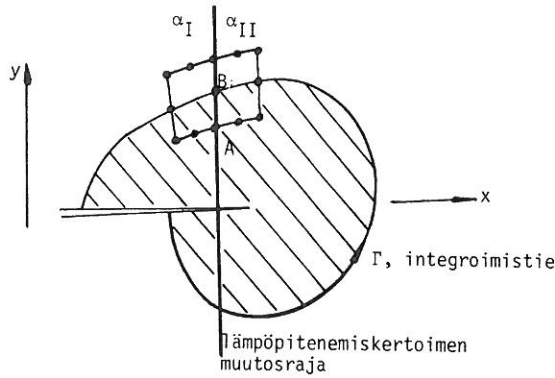
$$\Delta J = \alpha \int_{\Delta A} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \left[a_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} + a_{12} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] |J| d\xi d\eta.$$

LÄMPÖPITENEMISKERTOIMEN EPÄJATKUVUUDEN HUOMIOONOTTAMINEN INTEGROINTIALUEELLA

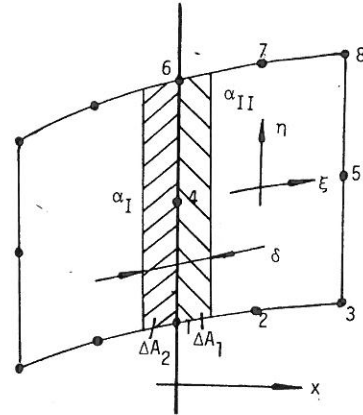
Integrointitien kulkiessa eri lämpöpitenumiskertoimen omaavien materiaalien rajapinnan ylitse on pintaintegraalin

$$\int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x} dA$$

arvon laskemisessa otettava huomioon seuraava lisäpiirros. Tällainen tilanne



Kuva 9. Lämpöpitenumiskertoimen epäjatkuvuus integrointi-alueella.



Kuva 10. Lämpöpitenumiskertoimen muuttuminen elementistä toiseen.

voi esiintyä käytännössä ruostumattomalla teräksellä vuoratussa paineastian seinämässä.

Lämpöpitenumiskertoimen epäjatkuvuuskohtassa derivaatta suureen $\frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x} dA$ arvo saadaan raja-arvotarkastelulla olettaen aluksi rajapinnan paksuus δ (kuva 10) äärelliseksi sekä lämpöpitenumiskertoimen muuttuminen lineaarisesti arvosta α_I arvoon α_{II} .

Tarkastellaan vain rajapinnan oikealla puolella olevaa elementtiä. Koska lämpöpitenumiskerroin on paikan funktio eikä riipu suunnasta, pätee

$$\Delta J = \int_{\Delta A} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \left[a_{11} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial \xi} + a_{12} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial \eta} \right] |J| d\xi d\eta .$$

η -akselin suuntaisella rajapinnalla, kuten kuvassa 10, voidaan äärelliselle rajapinnalle kirjoittaa

$$\frac{\Delta(\alpha T)}{\Delta \xi} \Delta \xi = \left(\frac{\Delta \alpha}{\Delta \xi} T + \alpha \frac{\Delta T}{\Delta \xi} \right) \Delta \xi = \left(\frac{\alpha_{II} - \alpha_I}{\Delta \xi} T \right) \Delta \xi + \alpha \frac{\Delta T}{\Delta \xi} \Delta \xi \xrightarrow{\Delta \xi \rightarrow 0} (\alpha_{II} - \alpha_I) T$$

Tällöin saadaan lisätermi

$$\Delta J = \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) a_{11} T (\alpha_{II} - \alpha_I) |J| d\eta .$$

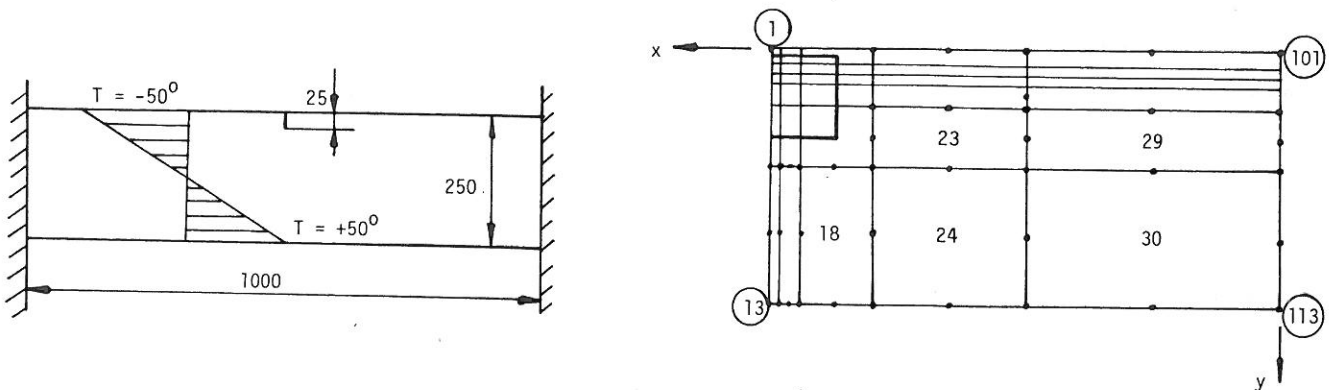
Vastaavasti ξ -akselin suuntaiselle rajaviivalle

$$\Delta J = \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) a_{12} T(\alpha_{II} - \alpha_I) |J| d\xi .$$

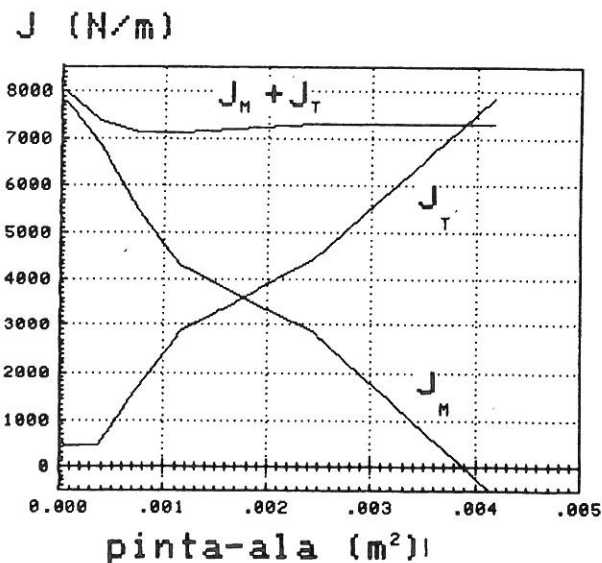
Viitteessä /2/ on esitetty yllä olevat kaavat sellaisessa yleisessä muodossa, että särö sijaitsee vinosti pääkoordinaatiston x-akseliin nähden ja rajapinta on kaareva.

LASKENTAESIMERKKI

Tarkastellaan kuvan 11a mukaista, reunoiltaan jäykästi kiinnitettyä, yksikön paksuista teräslevyä, jonka keskellä, yläreunassa on 25 mm:n pituinen särö. Levyä kuormittaa lineaarisesti levyn yläreunalta alareunalla muuttuva lämpötilajakauma. Materiaalin käyttäytyminen on nyt oletettu yksinkertaisuuden vuoksi lineaariseksi.



Kuva 11. Lämpötilajakauman kuormittama levy ja symmetrisen puoliskon elementtimalli.



Kuva 12. Viiva- ja pintaintegraalin riippuvuus integrointitien sisälle jäävästä pinta-alasta.

Koska elementtimenetelmällä saadaan jännitystila selville vain likimääräisesti, kannattaa J-integraali laskea useampaa kuin yhtä tietä pitkin. Eri teitä pitkin laskettujen J-arvojen eroavuudesta voidaan päätellä tuloksen tarkkuus. Jos J-arvot eroavat toisistaan paljon, voi syynä olla lähtötiedoissa olevien virheiden lisäksi liian harva elementtiverkko. Yleensä hyvin lähellä särön kärkeä kulkeva integrointitie johtaa epätarkkaan tulokseen. Esimerkkitapauksessa integrointiteiden lukumääräksi valittiin kuusi. Vain etäisin integrointitie on merkitty kuvaan 11b.

Kuvassa 12 on esitetty J-integraalin lausekkeen

$$J = \int_{\Gamma} \left(w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) + \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x} dx dy = J_n + J_T$$

viiva- ja pintaintegraalin ja näiden summan riippuvuus integrointitien sisäl-
le jäävästä pinta-alasta.

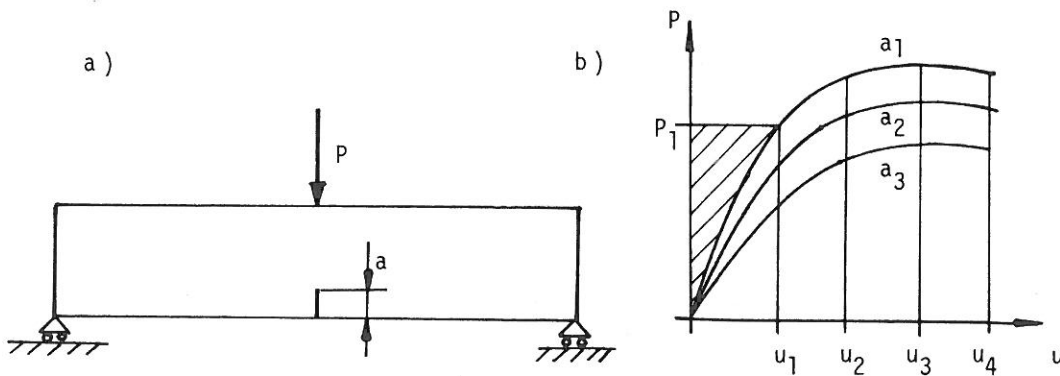
J-INTEGRAALIN KOKEELLISESTA MÄÄRITTÄMISESTÄ

J-integraalin ja sen arvon kokeellinen määrittäminen on laaja tutkimusala, jonka yksityiskohtia ei tässä tarkastella. Ainoastaan esitellään hieman kokeellisten menetelmien laskennallisia perusteita, jolloin J-integraali samalla havainnollistuu.

Tarkastellaan potentiaalienergian ja J-integraalin väliseen yhteyteen (kaava 5) perustuvia Begley-Landes -monisauvamenetelmää ja Ricen kaavaan perustuvaa menetelmää.

Begley-Landes -monisauvamenetelmä

Valmistetaan tutkittavasta materiaalista useita kuvassa 13a esitetyn mu-
kaisia koesauvoja, jotka eroavat toisistaan ainoastaan särön pituuden osalta.



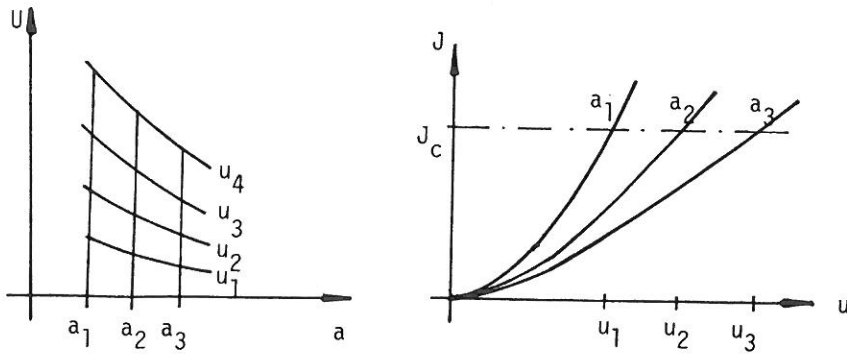
Kuva 13. Monisauvamenetelmän koejärjestely.

Kuormitetaan koekappaleita pistevoimalla P , jota vastaavaa siirtymää u mita-
taan. Potentiaalienergia U on nyt

$$U = \int_0^{u_1} P du - P u_1 = - \int_0^{u_1} u dP,$$

joka on graafisesti kuvassa 13b viivoitettu alue negatiivisena, jos särön pi-
tuus on a_1 . Kuvasta 14 ilmenee, että J-arvo on nyt

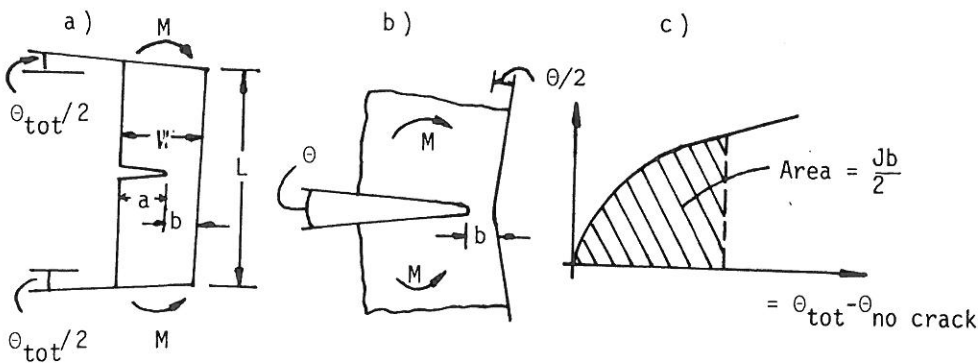
$$J = - \left. \frac{\partial U}{\partial a} \right|_{u = \text{vakio}}$$



Kuva 14. J-arvon määrittäminen koetuloksista.

Ricen alkuperäiskaava (viite /4/ s. 22)

Kuvan 15 mukaisessa yksikönpaksuisessa levyssä on syvä särö ($b \ll W$) ja levyä kuormitetaan momentilla M . Kokonaiskallistuma θ_{tot} voidaan esittää



Kuva 15. Ricen menetelmään liittyviä merkintöjä.

säröttömän kappaleen kallistuman ja särön vaikutuksesta aiheutuvan kallistuman θ summana

$$\theta_{tot} = \frac{12ML^2}{Ew^3} + \theta .$$

Dimensioanalyysillä voidaan päätellä, että kallistuma θ on riippuvainen momentista M ja kannaksesta b seuraavasti

$$\theta = f\left(\frac{M}{b^2}\right) .$$

Tämä oletus ei tietenkään vastaa tarkasti todellisuutta, mutta riittävällä tarkkuudella saadaan kuitenkin

$$J = - \frac{dU}{da} = \int_0^M \left(\frac{\partial \theta_{tot}}{\partial a} \right)_M dM = \int_0^M \left(\frac{\partial \theta}{\partial a} \right)_M dM$$

ja

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial a} \right)_M = - \left(\frac{\partial \theta}{\partial b} \right)_M = \frac{2M}{b^3} f' \left(\frac{M}{b^2} \right) = \frac{2M}{b} \left(\frac{\partial \theta}{\partial M} \right)_a ,$$

joten

$$J = \frac{2}{b} \int_0^M M \left(\frac{\partial \theta}{\partial M} \right) dM = \frac{2}{b} \int_0^{\theta} M d\theta .$$

J-integraali saadaan siis mittaamalla kuvassa 15c viivoitettu pinta-ala.

Keskeistä J-integraalin kokeellisessa tutkimuksessa on kriittisen J-arvon määrittäminen. Särön kasvamis kohdan selvittämiseen on kehitetty useita menetelmiä, joista mainittakoon suora mittaus murtopinnasta, joustomenetelmä ja ultraäänimittaus.

LOPPUSANAT

J-integraalia pidetään nykyään yhtenä parhaimmista särön kuormittumista kuvaavista suureista. Kriittinen J-arvo on materiaalivakio ja se määritetään kokeellisesti.

Todellista rakenteesta löydettävän särön J-arvo on laskettavissa vain tietokonetta käyttäen, koska monimutkaisia kuormitusolosuhteita, esimerkiksi lämpötransienttia, on aikaavieppää ja lähes mahdotonta muuten käsitellä. Tässä kirjoituksessa esitettyyn teoriaan perustuvalla tietokoneohjelmalla voidaan rutiininomaisesti laskea J-integraali monimutkaisissakin kuormitusolosuhteissa. Myös materiaalin epälineaarisuus voidaan käsitellä kohtuullisin tietokonekustannuksin.

Valtion teknillisen tutkimuskeskuksen metallilaboratorioon hankittu J-integraalin mittauslaitteisto yhdessä laskennallisten valmiuksien kanssa mahdollistaa entistä tarkempien murtumisriskianalyysien suorittamisen.

KIRJALLISUUTTA

- [1] Rice, J.R., A Path Independent Integral and the Approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, Transaction of the ASME (1968) s. 379-385.
- [2] Ikonen, K., J-integraali ja sen laskeminen elementtimenetelmällä. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Ydinvoimatekniikan laboratorio, tiedonanto 56, 1980, 54 s.
- [3] Tallgren, T., Murtumismekaniikan soveltaminen väsymislujuustarkasteluun. *Rakenteiden Mekaniikka*, Vol. 12, no. 3 (1979) s. 30-41.
- [4] Paris, P.C., *Fracture Mechanics in the Elastic-Plastic Regime, Flaw Growth and Fracture*, ASTM STP 631, American Society for Testing and Materials (1977) s. 3-27.

Kari Ikonen, tekn.lis., Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Ydinvoimatekniikan laboratorio