

VISKOOSIN VIRTAAUKSEN, LÄMMÖNSIIRTYMIS- JA -JOHTUMISONGELMIEN RATKAISEMINEN ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ, OSA II

Heikki Martikka

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 13
No. 4 1980 s. 21...39

YHTEENVETO: Kontinuumimekaanisten ongelmien ratkaisemista käsittelevän artikkelin toisessa osassa tarkastellaan suurehkon elementtimenetelmäohjelmiston (NACHOS) nykyversion soveltamista lähinnä hydrodynaamisten voitelu- ja virtausongelmien ratkaisussa. Tuloksia on verrattu analyyttisesti saatuihin ratkaisuihin. Ohjelma on osoittautunut luotettavaksi ja monipuoliseksi numeeriseksi työkaluksi ratkaistaessa ja tutkittaessa monia kontinuumimekaniikan ongelmia.

JOHDANTO

Elementtimenetelmä on osoittanut viime vuosina käyttökelpoisuutensa ratkaistaessa vaativiakin ongelmia, joissa esiintyy yhdistettyjä fysikaalisia ilmiöitä lämpötilasta ja paikasta riippuvien materiaaliominaisuuksin.

Virtaus- ja hydrodynaamisten voiteluongelmien numeerisessa ratkaisemisessa on elementtimenetelmä (EM) jo paljolti syrjäyttänyt differenssikeinon. Luottamusta menetelmään osoittaa, että esim. USA:ssa on alettu suunnitella kalliiden tuulitunnelimallikokeiden korvaamista suurimittaisella mutta halvemmalla EM-laskennalla. Kuitenkin on isompien ja pienempienkin elementti-ohjelmistojen luotettavuuden ja käyttökelpoisuuden rajat ensin testattava sopivan yksinkertaisilla ja varmoilla analyyttisesti ratkaistavilla testitapauksilla. Tässä mielessä on tässä kirjoituksessa tarkasteltu NACHOS-ohjelman /1/, /2/, /3/ antamia tuloksia tietyissä analyyttisesti hallituissa tapauksissa.

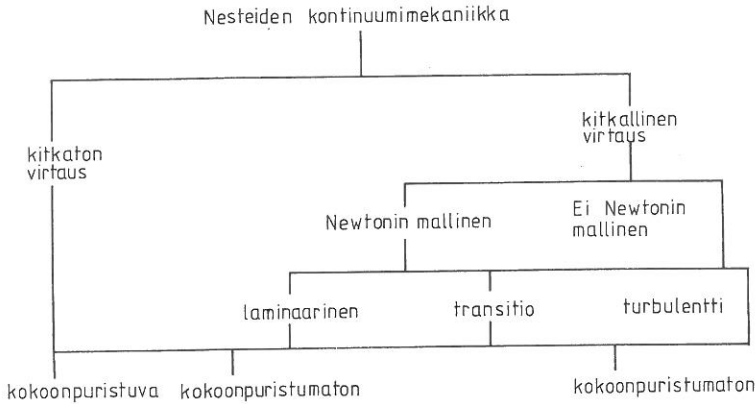
VOITELU- JA VIRTAAUSONGELMIEN LUOKITTELUA

Virtaus- ja voiteluongelmissa voi esiintyä hyvinkin erilaisia tapauksia. Nesteellä tarkoitetaan tässä yleisnimikettä sellaiselle aineelle (joko neste tai kaasu), joka jatkuvasti deformoituu vaikuttavien pintakuormajännitysten vaikutuksesta ja jossa ei vaikuta leikkausjännityksiä muulloin kuin sen deformoituessa. Kuvassa 1 näkyy eräs virtauksen luokittelu /4/.

Lisäksi virtauksia voidaan luokitella virtausrajoitusten mukaan:

- sisävirtaukset (esim. putken sisällä),

- ulkovirtaukset (esim. kappalten ohi),
- sisä-ulkovirtaukset (esim. putkessa olevan kappaleen ohi).



Kuva 1. Eräs nestevirtausten luokittelutapa.

Voiteluongelmat ovat eräs ohjelman ja tämän kirjoituksen kohteita. Voiteluongelmat ovat osoittautuneet yhä tärkeämmiksi pyrittäessä pitkän kestoian ja huoltovälin omaaviin koneisiin. Voiteluongelmien laskennollisena perusyhtälönä on Reynoldsin yhtälö. Se voidaan johtaa Navier-Stokesin liikeyhtälöstä

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} - B_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

tekemällä tiettyjä voiteluun liittyviä yksinkertaistuksia.

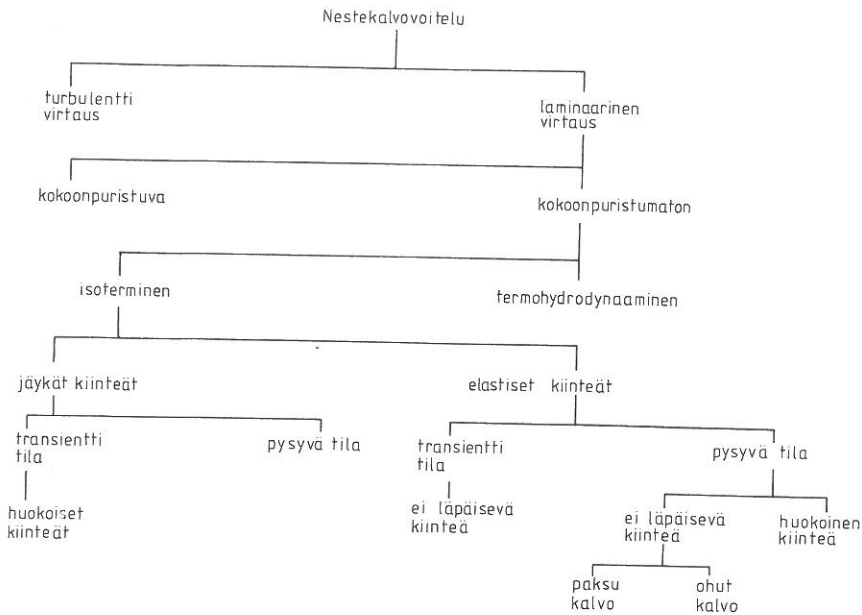
Ratkaistaessa analyttisesti voiteluongelmia tehdään usein useita yksinkertaistavia oletuksia kuten seuraavat /4/:

- Newtonin nestemalli ja kokoonpuristumaton neste,
- ohutkalvomallin mukaan oletetaan, että $u_{i,3} \gg u_{i,1}$ ja $u_{i,2}, B_3 \ll B_1$ ja $B_2, u_3 \ll u_1$ ja u_2 , jossa x_3 -akseli on kohtisuorassa kalvoa vastaan,
- inertia on pieni eli $\frac{Du_i}{Dt} \approx 0$,
- kaarevuuden vaikutus on pieni.

Todenmukaisia tilanteita vastaava analyttinen ratkaisu on usein liikaa yksinkertaistettu tai liian monimutkainen käyttää. Tällöin on avuksi kehitetty numeerisia ratkaisukeinoja. Näistä on elementtimenetelmä osoittautunut paljon tehokkaammaksi kuin muut aikaisemmin käytetyt, kuten differenssi-keino.

Kuvassa 2 näkyy nestekalvovoitelun tehtäväkentän luokittelutapoja /4/.

Hydrodynaaminen voitelu perustuu paineen ja sen tuoman kuormankantokyvyn kehittymiseen nestekalvossa, joka eroittaa kahta lähekkäistä pintaa, jotka liikkuvat toistensa suhteen.



Kuva 2. Nestekalvovoitelun tapausten ratkaisukohteita elementtimenetelmällä /4/.

Tätä painetta voi kehittyä neljän fysikaalisen ilmiön kautta:

- viskoosit ilmiöt,
- hitausvoima-ilmiöt,
- tilavuusvoima-ilmiöt,
- kokoonpuristuvuusilmiöt.

Joko kaikki tai osa näistä ovat merkittäviä eri laakereissa. Useimmissa öljy-laakereissa ovat viskoosit ilmiöt tärkeimpiä.

LAMINAARINEN VIRTAUS KAHDEN YHDENSUUNTAISEN LEVYN VÄLISSÄ

Kun kahden yhdensuuntaisen levyn välissä on viskoosia nestettä ja toinen pinnoista liikkuu toiseen nähden samansuuntaisena, syntyy ns. Couette-virtaus. Kuvan 3 mukaisessa tapauksessa saadaan virtausnopeudeksi /5/

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) + U_0 (1 - y/h), \quad (2)$$

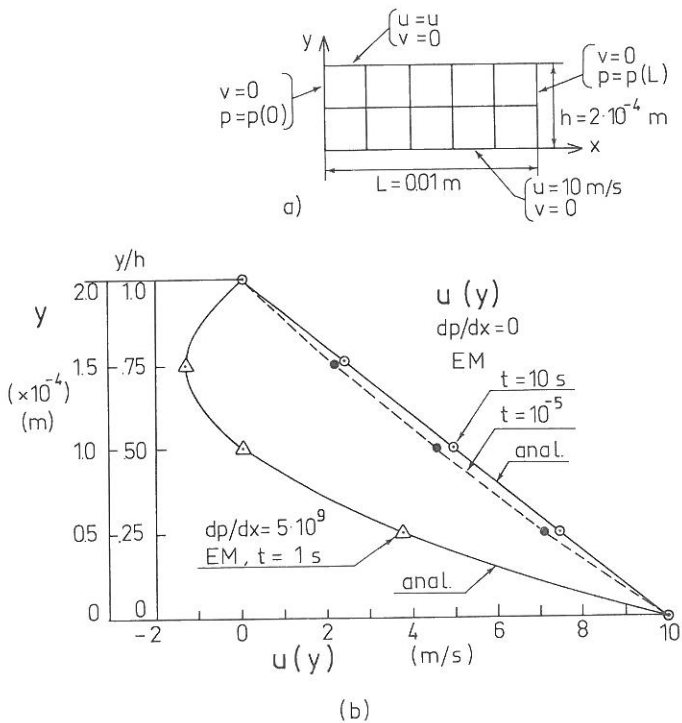
jossa

U_0 on alemman levyn ($y = 0$) liikenopeus +x-akselin suuntaan ylemmän ($y = h$) ollessa paikallaan,

h on levyjen välinen etäisyys, nestekalvon vakioepaksuus,
 p on paine levyjen välissä, $p = p(x)$.

Kuvassa 3a näkyy käytetty EM-malli tyypillisillä liukulaakerimitoilla. Voiteluaineena käytetyn öljyn materiaalitiedot ovat seuraavia: Tiheys $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$, viskositeetti $\mu = 0,05 \text{ PaS}$, ominaislämpökapasiteetti $c_p = 2000 \text{ J/(kaK)}$, lämmönjohtavuus $k = 0,15 \text{ W/(m K)}$, tiheyden muutoskerroin $\beta^p = 0$.

Kuvassa 3b näkyy laskettuja nopeusjakaumia. Painegradientin arvolla $dp/dx = 0$ virtausnopeus $u(y)$ on lähes lineaarinen jo ajan $t = 10^{-5} \text{ s}$ kuluttua alalevyn liikkeelle lähdöstä ja ajan $t = 10 \text{ s}$ kuluttua täysin lineaarinen. Painegradientin arvolla $dp/dx = 5 \cdot 10^9 \text{ Pa/m}$ on virtausnopeus kaavan (2) mukaan parabolinen.



Kuva 3. Laminaarinen virtaus kahden yhdensuuntaisen levyn välissä (Couette-virtaus). (a) EM-malli ja reunaehdot. (b) Virtausnopeusjakaumia ajan ja painegradientin eri arvoilla ja vertailu analyttisiin tuloksiin.

HYDRODYNAAMINEN LAAKERIVOITELU LIUKULAAKEREISSA

Seuraavassa tarkastellaan kiilauranmuotoista ja portaallista liukulaakera kahdessa ulottuvaisuudessa.

Kiilauranmuotoinen liukulaakeri

Kuvassa 4 näkyy kaaviollisesti kiilauran muotoinen liukulaakeri ja kuvassa 5 sen EM-malli. Tälle tapaukselle saadaan analyttinen ratkaisu kahdella tavalla. Ensin voidaan lähteä painegradientin yhtälöstä ja annetusta geometriasta. Toisella tavalla voidaan lähteä Reynoldsin yhtälön yleisestä muodosta. Molemmat tavat antavat saman tuloksen. Tätä verrataan numeeriseen ratkaisuun, joka saadaan NACHOS-ohjelmalla.

Kuvan 4 mukaisessa tapauksessa paine p muuttuu pitkin nestekalvoa. Tällöin sillä on yhdessä kohtaa $x = x'$, $h = h'$ maksimi, $p = p_{\max}$, jossa siis $dp/dx = 0$. Määritellään kuvan 4 mukaan alalevyn nopeudeksi $U_0 = -U'$ eli $-x$ -akselin suuntaan. Yhtälöstä (2) saadaan nyt

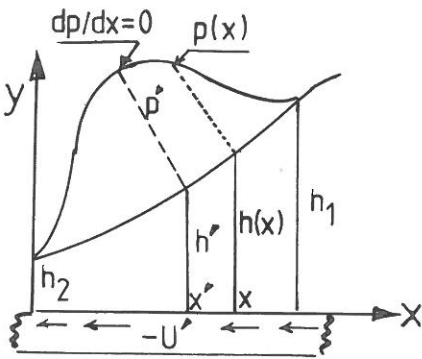
$$u'(y) = -U'(1 - y/h'). \quad (3)$$

Seuraavassa lasketaan painegradientti, kun nestepaksuus h muuttuu x -suunnassa. Tällöin käytetään nesteen jatkuvuusehtoa seuraavasti. Jokaisen poikkileikkauksen (korkeus h , leveys b) läpi virtaa sama tilavuusvirta

$$Q = \int_0^h u(y) b \, dy. \quad (4)$$

Sijoittamalla tähän u yhtälöstä (2) asettaen siinä $U_0 = -U'$ saadaan

$$Q = b \left(\frac{-1}{12\mu} \frac{dp}{dx} h^3 - \frac{U'h}{2} \right). \quad (5)$$



Tilavuusvirta Q on vakio, koska sivuvirtauksia ei ole. Kohdalla $x = x'$, $h = h'$ ja $p = p_{\max}$ on $dp/dx = 0$, jolloin

$$Q = \frac{-U'}{2} b h',$$

joista saadaan

$$dp/dx = +6\mu U' \left(\frac{h'-h}{h^3} \right). \quad (6)$$

Kuva 4. Painejakauma hydrodynaamisessa kalvossa.

Suoraviivaisen kiilauran tapauksessa kiilan paksuus h muuttuu lineaarisesti. Kuvan 5 mukaisin merkinnöin saadaan

$$h = h(x) = h_2 + \frac{x}{L}(h_1 - h_2) = h_2 \left(1 + m \frac{x}{L} \right) = h_2 H(x), \quad (7)$$

jossa

$$m = h_1/h_2 - 1 \text{ on yleensä } 0,5 \dots 2, \quad (8)$$

h_1, h_2 ovat suurempi ja pienempi kalvonpaksuus,

L = laakerin pituus.

Paineen maksimikohdalla kalvon paksuus on

$$h' = C h_2, \quad (9)$$

jossa $C > 1$.

Painegradientti saadaan nyt laskettua sijoittamalla lausekkeet (7) ja (9) yhtälöön (6), jolloin saadaan

$$dp/dx = 6 \mu U' \left(\frac{C h_2 - h_2 H(x)}{h^3 H(x)^3} \right). \quad (10)$$

Tästä voidaan ratkaista $p = p(x)$ integroimalla:

$$p(x) = \frac{+6 \mu U'}{m h_2^2} \left(\frac{C}{-2 H(x)^2} + \frac{1}{H(x)} + D \right). \quad (11)$$

Integroimisvakio D ja vakio C voidaan määrittää fysikaalisista reunaehdoista, joiden mukaan paine on nolla alku- ja loppupäissä kiilauraa eli

$$p = 0, \text{ kun } x = 0, \quad (12)$$

$$p = 0, \text{ kun } x = L.$$

Saadaan

$$C = \frac{2m + 2}{m + 2}, \quad (13)$$

$$D = - \frac{1}{m + 2} \quad (14)$$

ja paineen lausekkeeksi tulee /6/

$$p(x) = + \frac{6 \mu U' L}{h_2^2} K_p, \quad (15)$$

jossa kerroin K_p on

$$K_p = \frac{1}{m} \left(\frac{2m + 2}{-2(2+m)(1+m \frac{x}{L})^2} + \frac{1}{(1+m \frac{x}{L})} - \frac{1}{2+m} \right). \quad (16)$$

Sijoittamalla näihin kuvan 5 mukaiset arvot $\mu = 0,05$ Pas, $U' = 10$ m/s,
 $L = 0,01$ m, $h_1 = 2 h_2$, $h_2 = 1 \cdot 10^{-5}$ m yhtälöistä (15) ja (16) saadaan

$$p(x) = 3 \cdot 10^8 K_p = 10^8 \left(\frac{3}{1+s} - \frac{2}{(1+s)^2} - 1 \right) \quad (\text{N/m}^2), \quad (17)$$

jossa yhtälöstä (16)

$$K_p = 1/3 \left(\frac{3}{1+s} - \frac{2}{(1+s)^2} - 1 \right) \quad (18)$$

ja $s = x/L$.

Kuvasta 5c näkyy, että analyyttisen mallin ja EM-mallin painearvot ovat lähellä toisiaan. Ero oli enimmäkseen alle 1%. Kun painejakauma nyt tiedetään, voidaan laakerin kuormankantokyky laskea. Lasketaan ensin keskiarvopaine matkalla L

$$p_{av} = \frac{1}{L} \int_0^L p \, dx. \quad (19)$$

Sijoittamalla tähän $p(x)$ yhtälöstä (15) saadaan

$$p_{av} = \frac{+6 \mu U'}{h^2} K, \quad (20)$$

jossa

$$K = \frac{1}{m^2} \ln(1+m) - \frac{2}{m(2+m)}. \quad (21)$$

Kuormankantokyky on $W = p_{av}(b \cdot L)$

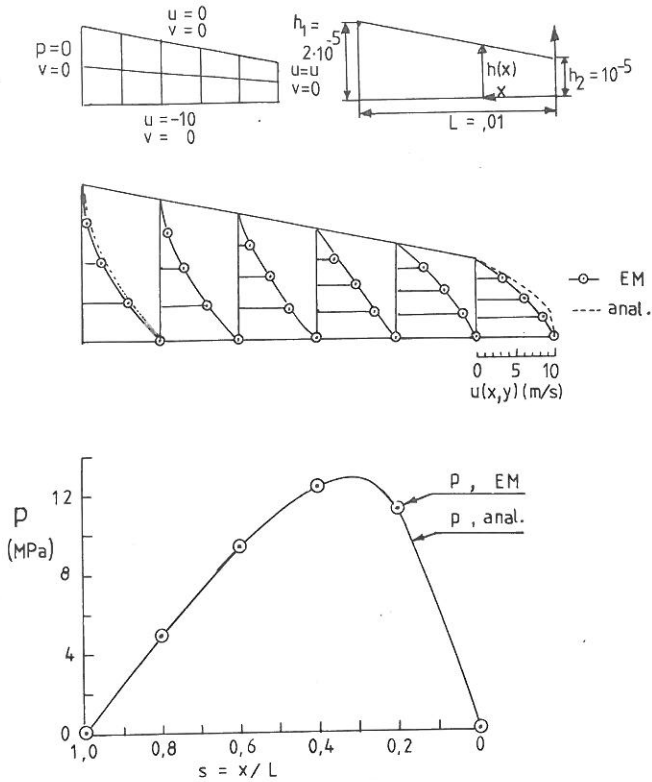
$$W = + \frac{6 \mu U' L^2 b}{h^2} K. \quad (22)$$

Kuvassa 5b näkyy virtausnopeus x -suunnassa, $u(x,y)$, EM tulosten ja analyyttisen mallin mukaan. Yksinkertainen analyyttinen malli saadaan seuraavasti. Virtausnopeuden u lausekkeeseen (2) sijoitetaan kalvon paksuuden lineaarinen lauseke (7) sekä painegradientin lauseke (10). Ottamalla lisäksi huomioon, että tässä $C = 4/3$ ja $U_0 = -U'$ saadaan

$$u(x,y) = -U'(1-y/h)(3F(x)y+1), \quad (23)$$

jossa

$$F(x) = (4h_2/3 - h(x))/h(x)^2. \quad (24)$$



Kuva 5. Kiilaanmuotoinen liukulaakeri. (a) Geometria, reunaehdot ja elementtijako. Kalvon paksuus muuttuu lineaarisesti. (b) Virtausnopeus x-suunnassa, $u(x,y)$ analyyttisen mallin ja EM tulosten mukaan. (c) Painejakauma x-suunnassa $p(x)$ analyyttisen mallin ja EM tulosten mukaan. Öljyn materiaaliarvot ovat samat kuin kuvan 3 esittämässä tapauksessa.

Portaanmuotoinen liukulaakeri

Kuvassa 6a näkyy portaanmuotoinen liukulaakeri ja sen EM-malli. Analyytinen yksinkertaistettu ratkaisu painejakauman laskemiseksi voidaan saada seuraavasti. Oletetaan laakerin paksummalle ja ohuemmalle osalle Couetten virtausmalli ja että laakeriin kehittyi lineaarinen painejakauma, jolla on toistaiseksi tuntematon maksimipaineen arvo p_s porraskohdassa. Se saadaan ehdosta, että tilavuusvirrat ovat yhtäsuuret $Q_1 = Q_2$. Soveltamalla yhtälöä (5) saadaan /5/ yhtälö

$$Q_1 = -\frac{h_1^3}{12\mu} \frac{p_s}{L_1} + \frac{U_0 h_1}{2} = Q_2 = -\frac{h_2^3}{12\mu} \frac{p_s}{L_2} + \frac{U_0 h_2}{2}, \quad (25)$$

josta ratkaisemalla ylipaineen p_s arvoksi tulee

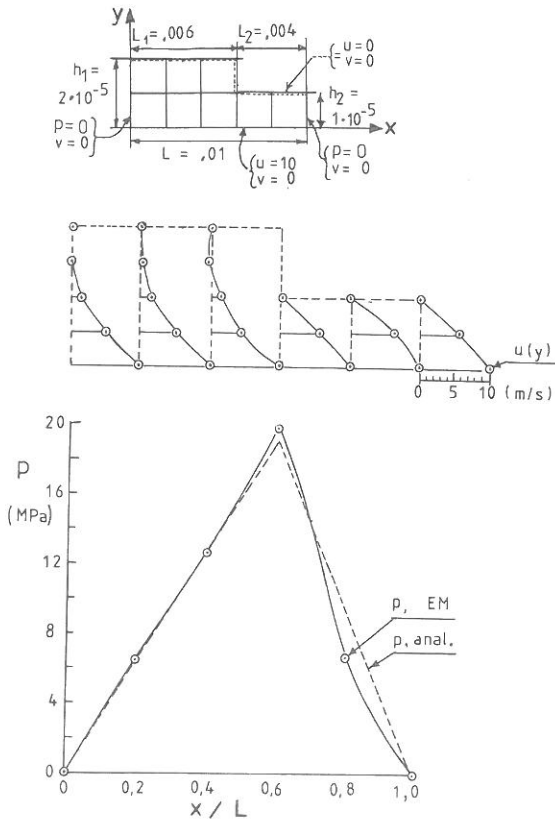
$$p_s = \frac{6\mu U_0 (h_1 - h_2)}{h_1^3/L_1 + h_2^3/L_2} \quad (26)$$

Laakerin kuormankantokyky on

$$W = (p_s/2)(L_1 + L_2) b, \quad (27)$$

jossa b on laakerin leveys.

Kuvassa 6c on esitetty painejakaumalle analyttisellä ja EM tavoilla saadut tulokset. Maksimipaineet olivat seuraavat: $p_s = 19,79$ MPa (EM) ja $p_s = 18,95$ MPa (analyttinen, kaava (26)).

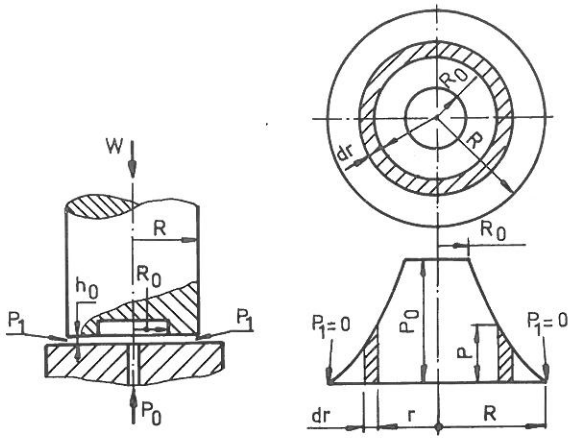


Kuva 6. Portaamuotoinen liukulaakeri. (a) Geometria, reunaehdot ja elementtijako. (b) Virtausnopeusjakauma x -suunnassa $u(x,y)$ EM tulosten mukaan. (c) Painejakauma x -suunnassa alapinnalla ($y = 0$) EM tulosten mukaan ja analyttisesti. Öljyn materiaaliarvot ovat samat kuin kuvan 3 esittämässä tapauksessa.

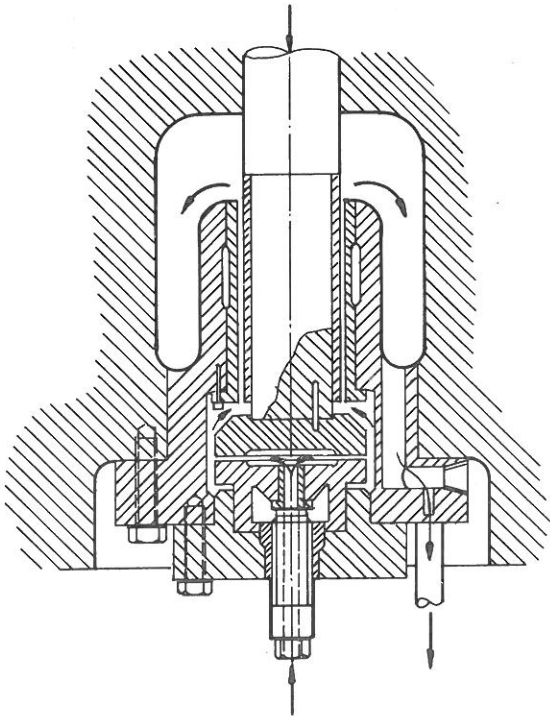
Hydrostaattinen pyörähdyssymmetrinen porraslaakeri

Kuvassa 7a näkyy kaaviollisesti tyypillinen hydrostaattinen porraslaakeri ja kuvassa 7b säteittäinen painejakauma, kun aksiaalikuorma ja syöttö ovat ajan suhteen vakioita.

Kuvassa 8 näkyy tämän laakerointitavan sovellutus pystysuoraan Curtis-tyyppiseen turbogeneraattoriin /6/.



Kuva 7. Hydrostaattinen porraslaakeri (a) ja sen säteittäinen painejakuma (b) /6/.



Kuva 8. Hydrostaattisen pyörähdyssymmetrisen porraslaakerin sovellutus pystysuoraan Curtis-tyyppiseen turbogeneraattoriin /6/.

Tarkastellaan tämän toimintaa analyyttisellä ja EM keinolla kahdessa tapauksessa:

- kuorma pysyy vakiona,
- kuorman muutos aiheuttaa akseliin aksiaalisen liikenopeuden.

Pysyvä tila

Analyttinen ratkaisu tälle tapaukselle saadaan seuraavasti (kuva 7).
Voiteluneste tulee laakeriin paineella p_0 ja poistuu paineella p_1 . Nes-
teen tilavuusvirta voidaan laskea lähtien kaavasta (5) asettaen siihen reu-
nanopeudeksi $U_0 = 0$, leveydeksi b r-säteisen kehän pituus $b = 2\pi r$ ja
painegradientiksi $dp/dx \rightarrow dp/dr$, jolloin saadaan

$$Q = -\frac{bh^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \Rightarrow -\frac{\pi r}{6\mu} \frac{dp}{dr} h_0^3. \quad (28)$$

Integroimalla tästä paine p käyttäen reunaehtoa $p = p_1 = 0$, kun $r = R$,
saadaan

$$p = \frac{6\mu Q}{\pi h_0^3} \ln(R/r). \quad (29)$$

Kun $r = R_0$, on syöttöpaine

$$p_0 = \frac{6\mu Q}{\pi h_0^3} \ln\left(\frac{R}{R_0}\right). \quad (30)$$

Käytetään kuvassa 9a esitettyjä mittoja. Painejakaumaksi saadaan kaavoja
(29) ja (30) soveltamalla

$$p = p_0, \text{ kun } 0 \leq r < 0,06 \text{ m,}$$

$$p = p_0 \left(\frac{\ln(R/r)}{\ln(R/R_0)} \right), \text{ kun } 0,06 < r < 0,10 \text{ m.}$$

Kuvassa 9b näkyy tämän ja EM-mallin antamat painejakaumat.

Kuormankantokyky W on /6/

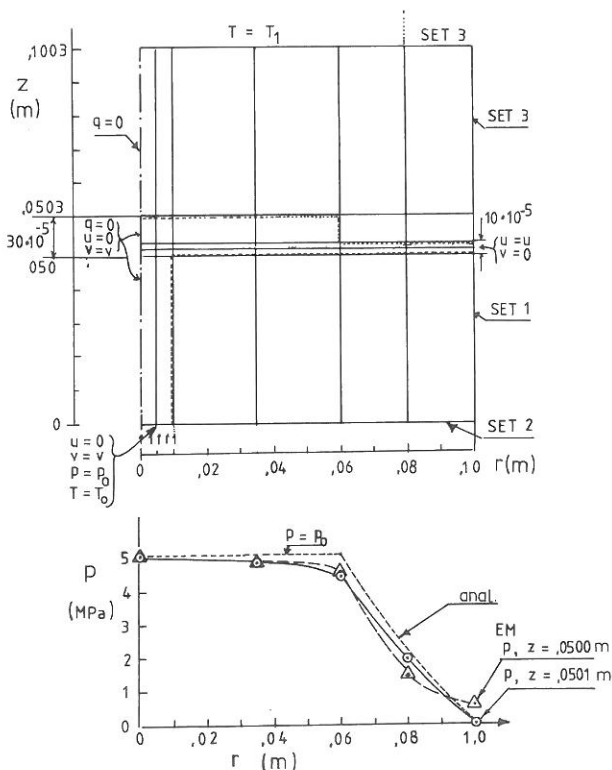
$$W = p_0 (\pi R_0^2) + \int_{R_0}^R p (2\pi r dr) = \frac{p_0 \pi}{2} \left(\frac{R^2 - R_0^2}{\ln(R/R_0)} \right).$$

Annetuilla arvoilla saadaan $W = 1 \cdot 10^5$ N eli n. 10 tonnia.

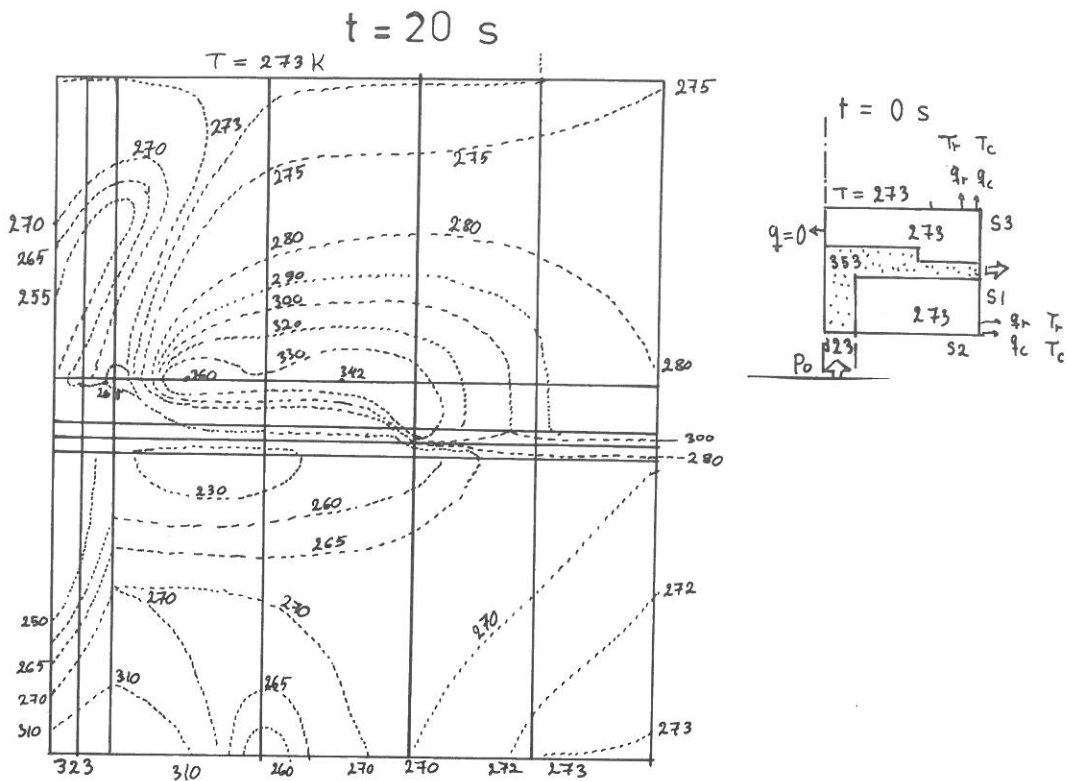
Kuvassa 10a näkyy laskettu lämpötilajakauma. Tällöin on käytetty kuvan
9a mukaista mallia. Kuvassa 10a näkyvät alkuehdot kaaviollisesti ajanhet-
kellä $t = 0$ s. Seuraavia reunaehtomahdollisuuksia on käytetty: lämpövu-
 $q = 0$ keskiakselilla symmetriasyistä. Alkulämpötila teräksellä on 273 K
ja öljyllä 353 K. Vakiolämpötila $T_1 = 273$ K on määritelty osalla yläpin-
taa. Sisäänsyötetylle öljylle on määritelty tulopaineeksi $p_0 = 5,1 \cdot 10^6$ Pa
ja lämpötilaksi $T_0 = 323$ K. Öljyn viskositeetille on käytetty lämpötilas-
ta riippuvaa mallia, $\mu(T) = A \exp(B(T-273 \text{ K}))$, $A = 0,60022$ Pas, $B = -0,04433$
K. Tämä on sovitettu öljyn viskositeettiarvoihin ja on annettu ohjelmassa

aliohjelmalla. Muut materiaaliarvot öljyllä olivat samat kuin kuvassa 3 esitettävässä tapauksessa. Teräkselle käytettiin seuraavia arvoja: $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 230 \text{ J/(kgK)}$, $k = 45 \text{ W/(mK)}$. Öljyn virtausnopeus on tulo- ja menoaukoissa määritelty normaalin suuntaiseksi ja sisäpinnoilla nolllaksi tartuntaoletuksen mukaan. Edelleen on käytetty kolmea eri konvektio- ja säteilyreunaehtoa. Nämä näkyvät seuraavassa taulukossa:

SET	konvektio, q_c		säteily, q_r	
	$h_c \text{ (W/(m}^2\text{K))}$	$T_c \text{ (K)}$	$\epsilon\sigma \times 10^7 \text{ (W/(m}^2\text{K}^4))$	$T_r \text{ (K)}$
1	2	240	0,45	240
2	3	233	0,4	233
3	20	353	0,35	323



Kuva 9. Hydrostaattinen pyörähdyssymmetrinen porraslaakeri. (a) Geometria, elementtijako ja käytettyjä reunaehtoja. (b) Painejakauma säteen suunnassa otsapinnoilla EM laskennoilla alapinnalla $z = 0,500 \text{ m}$ ja tasossa $z = 0,0501 \text{ m}$ ohuemman nestekalvon keskellä ja analyttisesti hydrodynaamisen voitelun teorialla. Reunaehtoina on ollut seuraavia: vakio viskositeetti $\mu = 0,05 \text{ Pas}$ vastaten 323 K ta- saista lämpötilaa öljyllä ja ympäristöllä. Syöttöpaine $p_0 = 5,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.



Kuva 10. Hydrostaattinen pyörähdyssymmetrinen porraskaakero. (a) Alkuehdot kaaviollisesti ajanhetkellä $t = 0$. (b) Lämpötilajakauma ajanhetkellä $t = 20 \text{ s}$.

Kuvan 10b lämpötilajakaumatuloksissa ilmenee melko suuria lämpötilan vaihteluja. Tämän esimerkin tarkoituksena olikin selvittää, mitä kaikkea on huomioitava vaativissa tehtävissä. Elementtiverkon karkeus ja alkuarvojen oikeellisuus ovat tärkeitä lopputulokseen vaikuttavia tekijöitä. Ohjelman tulosten pätemisalueet ja kehitystarpeet on syytä testata myös hallituilla vaativilla esimerkeillä.

Aksiaalinen iskukuormitus

Kun laakeriin vaikuttaa aksiaalinen iskumainen kuormitusvoima niin raon h muutosnopeus on $\dot{h} = dh/dt$. Tällöin nesteen tilavuusvirta r säteisen renkaan läpi

$$Q = -\pi(dh/dt)(r^2 - r_0^2), \quad (32)$$

jossa r_0 on vielä määräämätön säde. Asettamalla tämä yhtäsuureksi kuin yhtälön (28) antama tilavuusvirta

$$Q = - \frac{\pi r}{6\mu} \frac{dp}{dr} h^3$$

saadaan

$$dp/dr = \frac{6\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \left(\frac{r^2 - r_0^2}{r} \right), \quad (33)$$

$$\text{josta seuraa jakauma } p(r) = \frac{6\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (r^2/2 - r_0^2 \ln r + C). \quad (34)$$

Paineen laskemiseksi iskumaiselle kuormitukselle voidaan erottaa kaksi mahdollisuutta:

- (a) Keskiosan paine pysyy samana kuin syöttöpaine, $p(r=0) = p_0$,
- (b) Keskiosan paine nousee huomattavasti, $p(r=0) \gg p_0$.

(a) Keskiosan paine pysyy samana kuin syöttöpaine.

Tällöin paine nousee eniten ohutkalvoreunoilla. Reunaehdot ovat

$$\begin{aligned} p(R_0) &= p_0 \quad \text{sisäreunalla } r = R_0, \\ p(R) &= 0 \quad \text{ulkoreunalla } r = R, \end{aligned} \quad (35)$$

joiden avulla vakiot C ja r_0 saadaan ratkaistua:

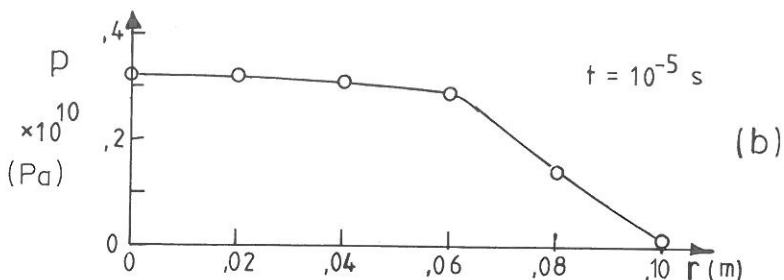
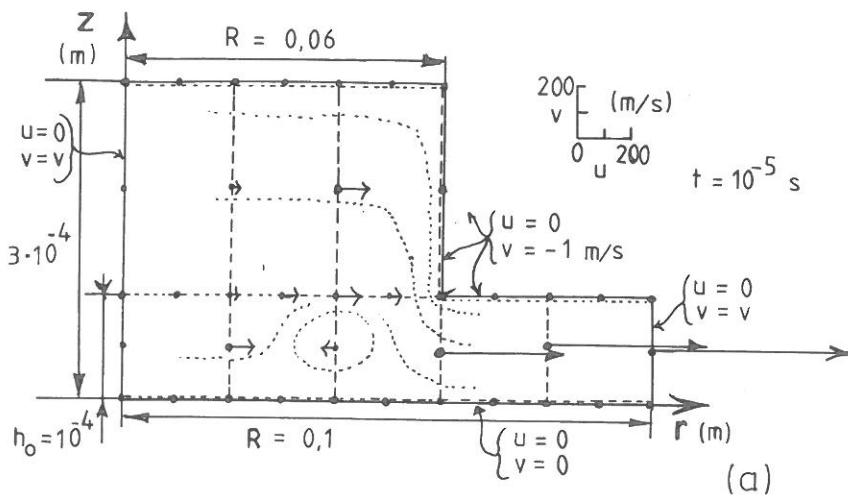
$$C = - \frac{R^2}{2} + r_0^2 \ln r, \quad (36)$$

$$r_0^2 = \left(\frac{R_0^2 - R^2}{2} - \frac{h^2}{6\mu} \frac{p_0}{(dh/dt)} \right) / \ln \left(\frac{R_0}{R} \right).$$

Kun akselin liike tapahtuu alaspäin esim. nopeudella $\dot{h} = -100$ m/s ja jos keskipaine p_0 ei tällöin muutu paljoa, kohdalla $r = 0,08$ m paine on $3,4 \cdot 10^6$ Pa eli $3,4/2,23 = 1,52$ -kertainen verrattuna tapaukseen, jossa $\dot{h} = 0$.

(b) Keskiosan paine nousee huomattavasti

EM laskuissa käytettiin kuvan 11a mukaista mallia. Se on mitoiltaan sama kuin porraslaakerin keskimmäinen nesteosa. Käytettiin transienttia ratkaisutapaa. Yläreunalle annettiin nopeus 1 m/s alaspäin. Tilanne hetkellä $t = 10^{-5}$ s tulostettiin. Tällöin ohuin rako oli ehtinut supistua 10%. Kuvassa 11a näkyy saatu virtausnopeusjakauma ja kuvassa 11b painejakauma.



Kuva 11. Pyörähdyssymmetrisen porraslaakerin aksiaalinen iskukuormitus yläosan liikkussa 1 m/s alaspäin. (a) EM malli ja virtausnopeuskenttä. (b) Radiaalinen painejakauma $p(r)$ alaosan pinnalla.

VIRTAUS PUTKESSA

Tämän esimerkin tarkoituksena on testata ohjelman ja analyyttisen ratkaisun yhteensopivuutta laminaarisessa virtauksessa putkessa, jonka poikkileikkaus on ympyrä.

Tarkastellaan kahta perustapausta:

- Putkivirtaus vakio painegradientin alaisena,
- Putkivirtaus vakiolähtönopeudella ja muuttuminen paraboliseksi.

Putkivirtaus vakio painegradientin alaisena

Analyyttinen ratkaisu täysin kehittyneelle laminaariselle virtaukselle voidaan johtaa lähtien Navier-Stokesin yhtälöstä, joka saa muodon /5/

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}, \quad (37)$$

kun otetaan $\mu = \text{vakio}$ ja käytetään lisäksi apuna kokoonpuristumattomuus

ehtoa $\nabla \cdot \vec{V} = 0$.

Oletetaan, että putken akselin suuntainen nopeuskomponentti v riippuu vain säteestä r keskiakselilta ja on ajallisesti vakio ja että muut nopeuskomponentit ovat nolliä. Tällöin saadaan napakoordinaatistossa

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (38)$$

Integroimalla tämä kahdesti huomioiden reunaehdot $v(0) =$ äärellinen ja $v(R) = 0$ putken sisäpinnalla saadaan tulos

$$v(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2). \quad (39)$$

Tilavuusvirta

$$Q = \int v \, dA = \int_0^R 2\pi v \, r \, dr. \quad (40)$$

Keskimääräinen nopeus putkessa

$$V_{av} = Q/A = Q/\pi R^2 = \frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{2} V_{max}. \quad (41)$$

Tästä saadaan painegradientille ratkaistua arvo

$$dp/dx = -\Delta p/L = -(8\mu V_{av})/R^2. \quad (42)$$

EM ratkaisu putkivirtaukselle vakiopainegradientin alaisena on saatu käyttäen kuvan 12a elementtijakoa ja reunaehtoja. Putken päiden nestepinnoille on annettu vakiopaineet, tulo- ja menonopeudet on rajoitettu aksiaalisiksi ja tartuntaehto ($u = 0$, $v = 0$) on annettu putken pinnoille. Kuvassa 12b näkyy aksiaalisen virtausnopeuden $v(r)$ jakaumat EM keinolla ja analyytisesti kaavalla (39). Ne ovat hyvin tarkkaan samat.

Putkivirtaus vakiolähtönopeudella ja muuttuminen paraboliseksi

EM ratkaisu putkivirtaukselle vakiolähtönopeudella on saatu käyttäen kuvan 13a elementtijakoa ja reunaehtoja. Virtauksen tulo- ja menonopeudet on rajoitettu aksiaalisiksi ja tartuntaehto on annettu putken pinnoille. Tällöin virtausnopeusjakauma $v(r)$ alkaa muuttua paraboliseksi. Tarkastellaan tätä analyytisesti ja EM mallin tulosten mukaan.

Virtaus muuttuu täysin laminaarisen paraboliseksi Boussinesqin mukaan kohdalla /5/

$$x = x_L = 0,03 N_R D, \quad (43)$$

jossa

$$N_R = \rho V_{av} D / \mu$$

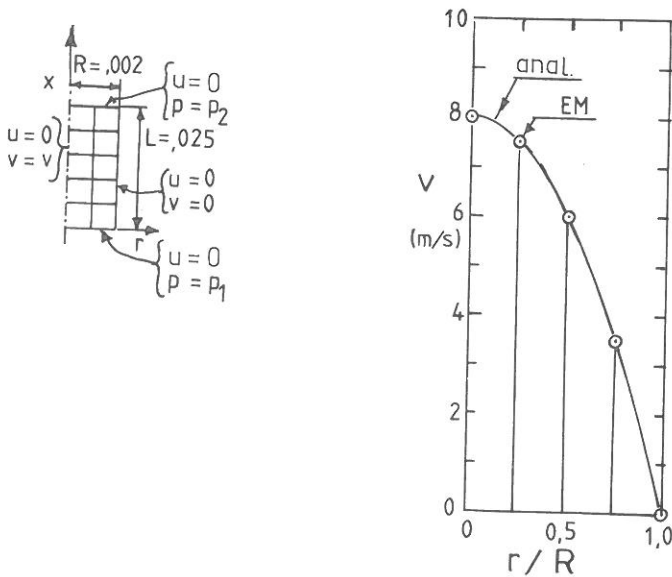
(44)

on Reynoldsin luku ja D putken halkaisija. Sijoittamalla tähän numeroarvot saadaan $N_R = 72$, $x_L = 0,00864$ m, $x_L/L = 0,346$.

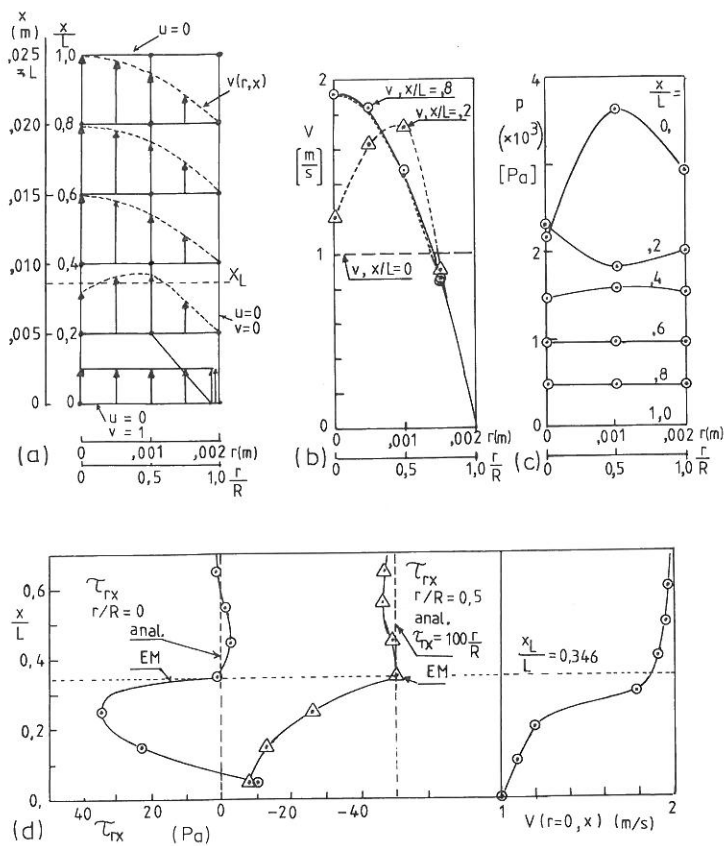
EM mallin tulosten mukaan kuvissa 13b...d voidaan seurata virtauksen kehitymistä paraboliseksi. Virtausjakauman muuttuminen näkyy kuvissa 13a ja 13b. Selvimmin muutoskohta lähes täysin paraboliseksi näkyy kuvan 13d leikkausjännityksen τ_{rx} jakaumasta, josta saadaan $x_{L,EM}/L = 0,35$. Tämä on lähellä Boussineqin arvoa 0.346. Kuvasta 13d näkyy myös, miten nopeus keski-
viivalla lähestyy teoreettista arvoa $v_{max} = 2$ m/s. Kohdalla $x = x_L$ on $v = v_L = 0,935 v_{max}$ ja kohdalla $x/L = 1$ on $(v_{max})_{EM} = 0,98 (v_{max})_{anal}$.

Painegradientit olivat lähes parabolisella osalla ($x/L = 0,35...0,8$) säteestä seuraavasti riippuvia:

	Anal. malli $r = 0...R$	EM-malli (kuva 13c)		
		$r = 0$	$r = R/2$	$r = R$
dp/dx ($\times 10^5$) Pa	1	0,913	1,0475	0,99



Kuva 12. Putkivirtaus vakiopainegradientin alaisena. (a) Geometria, reunaehtot ja elementtijako. Painegradientti $dp/dx = \Delta p/L = (1-2)10^4/0,025 = -4 \cdot 10^4$ Pa/m. (b) Aksiaalinen virtausnopeusjakauma $v(r)$ EM tulosten mukaan ja analyttisesti. Öljyllä on samat materiaaliarvot kuin kuvan 3 esittämässä tapauksessa.



Kuva 13. Putkivirtauksen aksiaalisen nopeusjakauman kehittyminen aksiaalisuunnassa kun virtauksella on vakiotulonopeus. (a) Geometria, reunaehdot ja elementtijako. (b) Virtausnopeus eri x/L arvoilla. (c) Painejakauma eri x/L tasoilla. (d) Virtausnopeus putken keskiakselilla ($r = 0$) eri x/L arvoilla ja leikkausjännitys τ_{rx} sekä EM tulosten mukaan että analyyttisesti täysin kehittyneellä parabolisella nopeusjakaumalla. Öljyllä on samat materiaaliarvot kuin kuvan 3 esittämässä tapauksessa.

HUOMAUTUS

Käytetyn ohjelman asennointiin käyttökuntoon on tehnyt tekn.yo Alpo Neuvonen, LTKK, osana Suomen Akatemian Valtion teknillistieteellisen toimikunnan pääosaltaan rahoittamana projektina "Metalli- ja konepajateollisuuden epälineaarit rakennelaskentamenetelmät".

KIRJALLISUUTTA

- [1] Gartling, D.K., Convective heat transfer analysis by the finite element method, Computer methods in applied mechanics and engineering 12 (1977) 365-382.

- [2] Gartling, D.K., NACHOS - A finite element computer program for incompressible flow problems, Part I - Theoretical Background, Sandia Laboratories, 1978.
- [3] Gartling, D.K., NACHOS - A finite element computer program for incompressible flow problems, Part II - User's manual Sandia Laboratories, 1978.
- [4] Huebner, K.H., The finite element method for engineers, John Wiley & Sons, 1975.
- [5] Hughes, W.F. & Brighton, J.A., Fluid dynamics, Schaum Publishing Co, 1967.
- [6] Fuller, D.D., Theory and practice of lubrication for engineers, John Wiley & Sons, Chapman & Hall, 1956.

Heikki Martikka, tekn.tri, dosentti, Lappeenrannan teknillinen korkeakoulu, Koneenrakennuksen laitos, tutkimusinsinööri, Ovako Oy Ab, Imatra.