

VISKOOSIN VIRTAKUUNEN, LÄMMÖNSIIRTYMIS- JA JOHTUMISONGELMIEN RATKAISEMINEN ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ, OSA I

Rakenteiden Mekanikka Vol. 13
No 3 1980 s. 10...20

Heikki Martikka

YHTEENVETO: Artikkelin ensimmäisessä osassa tarkastellaan laajahkon elementtimenetelmäohjelman (NACHOS) kontinuumimekaanisia- ja laskentaperusteita, yleisiä käyttöalueita ja rajoituksia. Toisessa osassa käsitellään sovelluksia hydrodynaamisiin voitelu- ja virtausohjelmiin ja verrataan niitä analyttisten mallien tuloksiin. Jatkossa tullaan vielä tarkastelemaan vaativampia yhdistettyjä ongelmia ohjelman käyttökelpoisuuden rajojen selvittämiseksi. Ohjelmaa sen nykymuodossa voi soveltaa ratkaistaessa kaksiulotteisia tai pyörähdyssymmetrisiä tehtäviä. Reunan muoto voi olla mielivaltaisen. Ongelmissa voi esiintyä Newtonin mallin mukaisen viskoosin nesteiden laminaarista virtausta, lämmön johtumista nesteessä ja kiinteässä aineessa, vapaata ja pakotettua konvektiota. Reunaehdot on annettava virtaus- ja lämpöosille. Ajasta riippuvat transientit ja pysyvän tilan ratkaisut ovat mahdollisia. Ohjelma ottaa huomioon materiaaliominaisuuksien, kuten viskositeetin, lämmönjohtavuuden ja tilavuuden lämpötilakertoimen mielivaltaisen lämpötilariippuvuuden.

JOHDANTO

Mekaniikan eräitä haastavimpia ja tärkeimpiä tutkimusaloja ovat nykyisin yhdistettyjen fysikaalisten ilmiöiden tutkiminen. Tyypillisiä näistä ovat ongelmat, joissa yhdistyy nesteiden ja kiinteiden aineiden vuorovaikutukset, kuten lämmönjohtuminen ja -siirtyminen, vapaa ja pakotettu konvektio, elasto- hydrodynaamiset vuorovaikutukset sekä faasinmuutosmahdollisuudet rajapinnoilla. Näiden ongelmien ratkaisutyökaluna elementtimenetelmä on vielä melko uusi tulokas, mutta se on jo osoittanut käyttökelpoisuutensa useiden vaativien tehtävien yhteydessä.

Tässä kirjoituksessa käsitellään NACHOS-elementtiohjelman perusteita /1/, /2/, /3/. Ohjelma on saatu USA:sta Sandia Laboratories tutkimuslaitokselta ja se on asennettu Ovakon Oy Ab:n IMB 370/138 VS tietokoneeseen Imatran terästehtaalla. Ohjelmaa on kehitelty Lappeenrannan teknillisen korkeakoulun koneenrakennuksen laitoksen kanssa. Ohjelmassa on pääohjelman lisäksi viitisenkymmentä aliohjelmaa. Näitä voidaan muuttaa ja lisätä kutakin erikseen. Tämä on edullinen piirre jatkokehityksen kannalta. NACHOS-ohjelman kehitystyön tavoitteet ovat olleet rajatut.

NACHOS on sovelias seuraavien ongelmien ratkaisemiseen:

- Isotermiset virtausongelmat,

- Vapaa ja pakotettu konvektio,
- Yhdistetyt konvektio-ongelmat,
- Konvektio-ongelmat yhdessä kiinteän aineen lämmönjohtumisongelmien kanssa,
- Pysyvän tilan ja transientin tilan ratkaisut edellisissä ongelmissa ovat mahdollisia,
- Lämpötilasta ja paikasta riippuvat materiaaliominaisuudet, kuten viskositeetti, lämmönjohtavuus ja tilavuuden lämpötilakerroin ($\beta = \frac{\partial \ln \rho}{\partial T}$)_p) voidaan ottaa huomioon.

NACHOS-ohjelman nykyiset rajoitukset ovat seuraavat:

- Geometria on rajoitettu kahteen ulottuvaisuuteen: kaksiulotteinen karteesilainen tasoalue tai pyörähdyssymmetrinen tapaus,
- Nesteen oletetaan olevan Newtonin mallilla kuvattavissa,
- Kaikki materiaalit ovat homogeenisia ja isotrooppisia: samalla kertaa voi käyttää vain yhtä nestetyyppiä,
- Nesteen liikkeen oletetaan olevan kokoonpuristumatonta laminaarista,
- Viskoosin tehohäviön oletetaan olevan pienen,
- Vapaan nestepinnan omaavia tehtäviä ei voida käsitellä,
- Nestepaineista johtuvia kiinteissä aineissa tapahtuvia kimmoisia muodonmuutoksia ei voida ottaa huomioon.

KONTINUUMIMEKAANISET PERUSTEET

Tarkastellaan seuraavassa ohjelmassa käytettyjä perusyhtälöitä ja -oletuksia. Nesteen virtauksen kuvaamiseen käytetään Eulerin esitystapaa. Tarvitavat yhtälöt saadaan liikeyhtälöistä, kokoonpuristumattomuusehdosta, energiayhtälöstä sekä reuna- ja alkuehdosta.

Liikeyhtälöt

Navier-Stokesin liikeyhtälöt ovat karteesilaisessa tensorimuodossa yleisesti

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} - B_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (1)$$

NACHOS-ohjelmassa käytetään muotoa

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \rho g_i + \rho g_i \beta (T - T_{ref}) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (2)$$

Edellä tilavuusvoima

$$B_i = \rho g_i - \rho g_i \beta (T - T_{ref}) \quad (3)$$

ja nesteen jännitystensori

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (4)$$

Lisäksi

$$\frac{D(\quad)}{Dt} \text{ on ns. substantiaalinen aikaderivaatta } (= \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + u_j \frac{\partial(\quad)}{\partial x_j}),$$

T on lämpötila (K),

T_{ref} on referenssilämpötila (K), jossa nestevoima on nolla,

ρ on nesteen tiheys (kg/m^3),

t on aika (s)

β on $(\partial \ln \rho / \partial T)_p =$ tilavuuden lämpötilakerroin ($1/K$),

p on paine (Pa),

μ on viskositeetti (Pa·s),

g_i on painovoiman kiihtyvyyksi; sen oletetaan vaikuttavan y -akselin suuntaan,

x_i on karteesilainen koordinaatti (m),

u_i on virtausnopeuden komponentti x_i -akselin suunnassa (m/s).

Kokoonpuristumattomuusehto

Yleistä jatkuvuusyhtälöstä

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (5)$$

Saadetaan kokoonpuristumattomuusehto

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i} = 0 \quad (6)$$

olettamalla, että kunkin nestealkion tiheys ei muutu eli että $D\rho/Dt = 0$.

Energiayhtälö

Energiayhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + Q + \phi. \quad (7)$$

Merkittävällä $du = c_p dT$, huomioimalla kokoonpuristumattomuusehto $u_{i,i} = 0$ ja jättämällä dissipaatio huomiotta ($\phi = 0$)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - Q = 0. \quad (8)$$

Kiinteillä aineilla $u_j \approx 0$ ja saadaan muoto

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q_j}{\partial x_i} - Q = 0 \quad (9)$$

Lisäksi otaksutaan Fourierin lämmönjohtumislaki

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (10)$$

Edellä

- u on ominaissisäenergia (J/kg),
- Q on lämpölähteen antoisuus tilavuutta kohden (W/m^3),
- k on lämmönjohtavuus isotrooppiselle aineelle ($W/(mK)$),
- ϕ on dissipaatiofunktio (W/m^3),
- q_i on lämpövuovektorin komponentti x_i -akselin suunnassa (W/m^2),
- c_p on ominaislämpökapasiteetti vakiopaineesa ($J/(kgK)$).

Reunaehdot

Reunaehtoja on annettava sekä hydrodynaamiselle nesteosalle että lämmönsiirto-osalle. Hydrodynaaminen alue S_f muodostuu alueesta S_u , jolla on annettu nopeusreunaehdot sekä alueesta S_t , jolla tunnetaan jännitysvektori alueen reunoilla. Tällöin

$$u_i = f_i(s) \quad \text{alueessa } S_u, \quad (11)$$

$$t_i = \sigma_{ij}(s) n_j(s) \quad \text{alueessa } S_t. \quad (12)$$

Lämmönsiirtoalueen S_n reunaehtoina tunnetaan joko osa-alueen S_T lämpötila tai osa-alueen S_q lämpövuuo. Tällöin

$$T = g(s) \quad \text{alueessa } S_T, \quad (13)$$

$$(q_a(s) + q_c(s) + q_r(s)) = -\left(k \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) n_i(s) \quad \text{alueessa } S_q. \quad (14)$$

Näissä on s koordinaatti pitkin reunaa ja n_j on pinnan ulkoinen yksikkönormaali ja q_a on vaikuttava lämpövuuo, q_c on konvektion lämpövuuo ja q_r on säteilyn lämpövuuo. Tyypillisiä malleja näille ovat seuraavat NACHOS-ohjelmassakin käytetyt

$$q_c = h_c(T - T_c) \quad (15)$$

$$q_r = h_r(T - T_r) \quad (16)$$

jossa

h_c on konvektion lämmönsiirtymiskerroin ($W/(m^2K)$)

h_r on säteilyn lämmönsiirtymiskerroin ($W/(m^2K)$); $h_r = \epsilon\sigma(T_c^2 + T_r^2)(T_c + T_r)$,

T_c ja T_r ovat tasapainolämpötiloja (K), joissa ei enää esiinny lämmönsiirtoa konvektion tai säteilyn johdosta

ϵ on emissiivisyys,

σ on Stefan-Boltzmannin vakio = $5,66 \cdot 10^{-8}$ ($W/(m^2K^4)$).

Ohjelmassa annetaan h_c , T_c , ϵ ja T_r alueillaan.

Alkuehdot

Reuna-arvot tehtävän alkuehdot saadaan kun määritellään kunkin riippuvan muuttujan arvot alkuhetkellä kaikissa tutkitun alueen pisteissä eli annetaan hetkellä $t = 0$ nopeuden, paineen ja lämpötilan jakautumat

$$u_i = a_i(x_i),$$

$$p = b_i(x_i),$$

$$T = c(x_i).$$

ELEMENTTIMENETELMÄN YHTÄLÖT

Ohjelmassa käytetään Galerkinin keinoa. Kussakin elementissä nopeutta, painetta ja lämpötilaa approksimoidaan seuraavasti:

$$u_i(x_i, t) = \phi^T(x_i) \underline{u}_i(t), \quad \text{nopeus} \quad (17)$$

$$p(x_i, t) = \psi^T(x_i) \underline{p}(t), \quad \text{paine} \quad (18)$$

$$T(x_i, t) = \theta^T(x_i) \underline{T}(t), \quad \text{lämpötila} \quad (19)$$

jossa \underline{u}_i , \underline{p} ja \underline{T} ovat tuntemattomien solmupiste-arvoista muodostettuja vektoreita, ϕ , ψ ja θ ovat muotofunktioista muodostettuja vektoreita ja T tarkoittaa transponointia.

Materiaaliominaisuudet kuten viskositeetti μ , lämmönjohtavuus k ja tiheyden muutoskerroin β voivat riippua lämpötilasta ja siten myös koordinaateista. Ohjelmassa nämä voivat muuttua siten myös paikallisesti ja niitä interpoloidaan seuraavasti

$$\eta(x_i) = \underline{\eta}^T(x_i) \underline{\eta}, \quad \text{viskositeetti} \quad (20)$$

$$k(x_i) = \underline{k}^T(x_i) \underline{k}, \quad \text{lämmönjohtavuus} \quad (21)$$

$$\beta(x_i) = \eta^T(x_i)\beta \quad \text{tilavuuden lämpötilakerroin} \quad (22)$$

jossa η on interpolointifunktioista muodostettu vektori ja u , k ja β ovat solmupistearvoista muodostettuja vektoreita.

Kun nopeuden, paineen ja lämpötilan likiarvolausekkeet sijoitetaan kenttä-yhtälöihin (2), (6) ja (8) saadaan yhtälöt

$$f_1(\phi, \psi, \theta, u_i, p, T) = R_1, \quad \text{liike} \quad (23)$$

$$f_2(\phi, u_i) = R_2, \quad \text{kokoonturistumattomuus} \quad (24)$$

$$f_3(\theta, \phi, T, u_i) = R_3, \quad \text{energia} \quad (25)$$

jossa R_i :t ovat likiarvojen käytöstä johtuvia jäännösvirheitä.

Galerkinin keinossa nämä virheet yritetään pienentää nolnaan painotetulla tavalla saattaen jäännösvirheet R_i ortogonaalisiksi muotofunktioita vastaan eli asettamalla

$$\langle \phi, f_1 \rangle = \langle \phi, R_1 \rangle = 0, \quad (26)$$

$$\langle \psi, f_2 \rangle = \langle \psi, R_2 \rangle = 0, \quad (27)$$

$$\langle \theta, f_3 \rangle = \langle \theta, R_3 \rangle = 0, \quad (28)$$

jossa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tarkoittaa sisätuloa $\langle a, b \rangle = \int ab dV$ ja V on elementin tilavuus.

Lopuksi päädytään seuraaviin matriisiyhtälöihin

$$\mathbb{M} \dot{\tilde{u}} + \mathbb{C}(\tilde{u})\tilde{u} + \mathbb{K}(T)\tilde{u} = \tilde{F}(T), \quad \text{liike} \quad (29)$$

$$\mathbb{N} \dot{\tilde{T}} + \mathbb{D}(\tilde{u})\tilde{T} + \mathbb{L}(T)\tilde{T} = \tilde{F}(T), \quad \text{energia (neste)} \quad (30)$$

$$\mathbb{N} \dot{\tilde{T}} + \mathbb{L}(T)\tilde{T} = \mathbb{G}(T), \quad \text{energia (kiinteä aine)} \quad (31)$$

joissa

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \tilde{v} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p \end{Bmatrix}. \quad (32)$$

Yhtälöissä \mathbb{C} ja \mathbb{D} matriisit edustavat voiman ja energian konvektioita sekä \mathbb{K} ja \mathbb{L} matriisit edustavat voiman ja energian diffundoitumista. \mathbb{K} sisältää myös kokoonpuristumattomuusehdon. \tilde{F} ja \mathbb{G} vektorit ovat voimavektoreita, jotka edustavat systeemiin vaikuttavia pakottavia voimia, kuten tilavuusvoimat ja pintavoimat (jännitys ja lämpövuoto).

RATKAISUMENETELMÄT

Ratkaisumenetelmän toiminnan havainnollistamiseksi on hyödyllistä jakaa ongelmat seuraaviin luokkiin:

- isotermit ongelmat,
- heikosti kytkeytyneet konvektio-ongelmat,
- vahvasti kytkeytyneet konvektio-ongelmat.

Ratkaisustrategian valintaan vaikuttaa vielä aikariippuvuuden mukainen jako:

- pysyvän tilan ongelmat,
- ajastariippuvat, transientit ongelmat.

Iteratiivisen ratkaisumenetelmän valintaan vaikuttavat seuraavat seikat:

- konvergenssin oltava hyvä erilaisissa ongelmissa ja ei-herkkä virtausolojen ja geometrian vaihtelujen suhteen,
- konvergenssin oltava talaoudellisuuden vuoksi nopea,
- käyttäjäystävällisyys on tarpeen.

NACHOS-ohjelmassa käytetään implisiittistä integrointia.

Pysyvän tilan algoritmit

Isotermit ongelmat

Näissä probleemeissa vallitseva yhtälö on

$$\underline{C}(\underline{u})\underline{V} + \underline{K}\underline{V} = \underline{F} \quad (33)$$

Tämän ratkaisemiseksi on NACHOS-ohjelmassa käytettävissä kaksi kiinteäpiste-iterointitapaa, Picardin ja Newton-Raphsonin keinot.

Picardin keinossa uusi \underline{V} ratkaistaan yhtälöryhmästä

$$\underline{C}(\underline{u}^n)\underline{V}^{n+1} + \underline{K}\underline{V}^{n+1} = \underline{F}, \quad (34)$$

jossa yläindeksi n osoittaa iteroinnin tasoa. Tällä peräkkäisten sijoitusten algoritmilla on suuri konvergenssisäde.

Yleistetyssä Newton-Raphsonin keinossa uusi \underline{V} ratkaistaan yhtälöryhmästä

$$\underline{f}(\underline{V}^n) = - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{V}} \bigg|_{\underline{V}_n} (\underline{V}^{n+1} - \underline{V}^n), \quad (35)$$

$$\text{jossa } \underline{f}(\underline{V}) = \underline{C}(\underline{u})\underline{V} + \underline{K}\underline{V} - \underline{F}. \quad (36)$$

Iteroinnin aloitusvektorina on molemmissa tavoissa Stokesin virtauksen ratkaisu \underline{V}^0 yhtälössä

$$\underline{K}\underline{V}^0 = \underline{F} \quad (37)$$

Heikosti kytkeytyneet konvektio-ongelmat

Kun energiayhtälöt ovat erillään liikeyhtälöistä, niin ongelma käsitellään ohjelmassa siten, että ensin ratkaistaan nopeus- ja painekenttä käyttäen iso-termisen virtauksen algoritmeja. Saatua nopeuskenttää käyttäen ratkaistaan energiayhtälöistä vastaava lämpötilakenttä. Jos on epälineaarisia lämpötilan reunaehtoja niin energiayhtälöt ratkaistaan iteratiivisesti käyttäen Picardin algoritmia.

Vahvasti kytkeytyneet konvektio-ongelmat

Tapauksissa, joissa liikeyhtälö riippuu voimakkaasti lämpötilakentästä, liike- ja lämpötilayhtälöitä ei voida enää käsitellä itsenäisesti toisistaan erillään. Tällöin käytetään seuraavaa vuorottaista iterointia:

$$\begin{aligned}
 \underline{D}(\underline{u}^n) \underline{T}^{n+1} + \underline{L}(\underline{T}^n) \underline{T}^{n+1} &= \underline{G}(\underline{T}^n), && \text{energia (neste)} \\
 \underline{C}(\underline{u}^n) \underline{V}^{n+1} + \underline{K}(\underline{T}^{n+1}) \underline{V}^{n+1} &= \underline{F}(\underline{T}^{n+1}), && \text{liike} \\
 \underline{D}(\underline{u}^{n+1}) \underline{T}^{n+2} + \underline{L}(\underline{T}^{n+1}) \underline{T}^{n+2} &= \underline{G}(\underline{T}^{n+1}), && \text{energia} \\
 \cdot &&& \\
 \cdot &&& \\
 \cdot &&& \\
 \text{jne} &&&
 \end{aligned} \tag{38}$$

Tätä iterointia voidaan usein kiihdyttää interpoloinnilla käyttämällä riippuville muuttujille sopivia interpoloituja arvoja. Esimerkiksi \underline{K} ja \underline{L} matriisit voidaan määrätä lämpötila-arvolla

$$\underline{T}^{n+1} = a \underline{T}^{n+1} + (1-a) \underline{T}^n. \quad (0 \leq a \leq 1) \tag{39}$$

Lämpötiloille tätä on käytetty arvolla $a = 1/2$, mutta nopeuskentälle ei ole käytetty interpolointia. Aloitusratkaisuvektorit iteroinnille saadaan lineaarisista probleemoista

$$\underline{L}(\underline{T}^{\text{int}}) \underline{T}^0 = \underline{G}(\underline{T}^{\text{int}}), \tag{40}$$

$$\underline{K}(\underline{T}^{\text{int}}) \underline{V}^0 = \underline{F}(\underline{T}^0), \tag{41}$$

joissa $\underline{T}^{\text{int}}$ on alkuarvona annettu alkulämpötila-arvio.

Ajasta riippuvat, transientit algoritmit

Näiden käytössä on huomattava, että ensimmäisellä aika-askeleella voidaan

tulostaa lämpövuoto ja jännitykset ja vasta toisella askeleella näiden lisäksi lämpötila.

Isotermiset ongelmat

Isotermisen virtauksen ongelmissa nopeus- ja painekenttien kehitys ajan suhteen lasketaan algoritmilla

$$\left(\frac{2}{\Delta t} M + C(u^n) + K\right) \tilde{v}^a = F + \frac{2}{\Delta t} M \tilde{v}^n, \quad (42)$$

jossa

$$\tilde{v}^a = (\tilde{v}^{n+1} + \tilde{v}^n) / 2 \quad (43)$$

ja Δt on aikalisäys ja yläindeksi n antaa aika-askeleen numeron.

Tämä aikaintegrointikeino on muunnos Crank-Nicolsonin algoritmista. Epälineaarinen liikeyhtälö voidaan kirjoittaa aikatasoilla n ja $n+1$

$$M \dot{v}^n + C(u^n) v^n + K v^n = F^n \quad (44)$$

$$M \dot{v}^{n+1} + C(u^{n+1}) v^{n+1} + K v^{n+1} = F^{n+1} \quad (45)$$

Nämä yhtälöt voidaan yhdistää keskiarvokeinolla yhdeksi yhtälöksi aikalisäyksen Δt keskikohdalla. Siis

$$M \dot{v}^a + C(u^a) v^a + K v^a = F^a \quad (46)$$

jossa

$$\dot{v}^a = (\tilde{v}^{n+1} - \tilde{v}^n) / \Delta t \quad (47)$$

$$\tilde{v}^a = (\tilde{v}^{n+1} + \tilde{v}^n) / 2 \quad (48)$$

$$\tilde{u}^a = (\tilde{u}^{n+1} + \tilde{u}^n) / 2 \quad (49)$$

$$\tilde{F}^a = (\tilde{F}^{n+1} + \tilde{F}^n) / 2 \quad (50)$$

Tässä on oletettu, että V muuttuu lineaarisesti aikavälillä Δt . Tällöin sen aikaderivaatta tällä välillä on vakio

$$\dot{v}^a = (\tilde{v}^{n+1} - \tilde{v}^n) / \Delta t. \quad (51)$$

Sijoitetaan tähän yhtälöstä (48) saatu tulos

$$\tilde{v}^{n+1} = 2\tilde{v}^a - \tilde{v}^n,$$

jolloin seuraa

$$\dot{v}^a = \frac{2}{\Delta t} (\tilde{v}^a - \tilde{v}^n). \quad (52)$$

Näitä käyttäen yhtälö (46) saa muodon

$$\frac{2}{\Delta t} \tilde{M} \tilde{v}^a + \tilde{C}(u^a) \tilde{v}^a + \tilde{K} \tilde{v}^a = \tilde{F}^a + \frac{2}{\Delta t} \tilde{M} \tilde{v}^n. \quad (53)$$

Laskentakustannusten pienentämiseksi tätä linearisoidaan vielä likiarvosijoituksella toiseen termiin $\tilde{C}(u^a) \tilde{v}^a \approx \tilde{C}(u^n) \tilde{v}^a$.

Heikosti kytkeytyneet konvektio-ongelmat

Nopeus- ja painekenttien ajallista kehitystä lasketaan edellisellä algoritmilla. Lämpökenttä lasketaan yhtälöistä

$$\left(\frac{2}{\Delta t} \tilde{N} + \tilde{D}(u^{n+1}) + \tilde{L} \right) \tilde{T}^a = \tilde{G} + \frac{2}{\Delta t} \tilde{N} \tilde{T}^n, \quad (54)$$

joissa

$$\tilde{T}^a = (\tilde{T}^{n+1} + \tilde{T}^n) / 2. \quad (55)$$

Voimakkaasti kytkeytyneet konvektio-ongelmat

Taas käytetään peräkkäin etenevää ratkaisukeinoa, kun liikeyhtälö riippuu lämpötilasta. Ratkaisu kehitetään ilman iterointia aika-askeleilla. Koska useimmat voimakkaasti kytkeytyneet ongelmat ovat vapaan konvektion tyypisiä, niin energiayhtälöä viedään ensin ajassa eteenpäin muodossa

$$\left(\frac{2}{\Delta t} \tilde{N} + \tilde{D}(u^n) + \tilde{L}(\tilde{T}^n) \right) \tilde{T}^a = \tilde{G}(\tilde{T}^n) + \frac{2}{\Delta t} \tilde{N} \tilde{T}^n, \quad (56)$$

jonka jälkeen seuraa liikeyhtälö

$$\left(\frac{2}{\Delta t} \tilde{M} + \tilde{C}(u^n) + \tilde{K}(\tilde{T}^{n+1}) \right) \tilde{v}^a = \tilde{F}(\tilde{T}^{n+1}) + \frac{2}{\Delta t} \tilde{M} \tilde{v}^n. \quad (57)$$

Matriisiyhtälöiden ratkaiseminen

Ratkaisualgoritmeilla saadaan kullakin iteroinnilla tai aika-askeleella seuraavanmuotoinen yleinen matriisiyhtälö

$$\tilde{A} \tilde{x} = \tilde{b}. \quad (58)$$

Näissä ongelmissa matriisi A on suuri ja harva, nauhamainen ja yleensä epäsymmetrinen. Kaksi ratkaisutapaa ovat mahdollisia: iteroiva ja suora. Iteroivia keinoja kuten Gauss-Seidelin keinoa on joskus käytetty FEM-ohjelmissa. Suorat keinot, kuten Choleskyn ja Gaussin keinot ovat kuitenkin yleisempiä.

NACHOS-ohjelmassa käytetään Ironsin kehittämää Gaussin eliminointikeinon ns. rintamaratkaisijaversiota. Tällöin systeemimatriisin kokoaminen elementtimatriiseista ja niiden redusointi Gaussin keinolla yhdistetään toisiinsa. Tietokoneen keskusmuistin käyttö tehostuu, koska vain työn alla olevat aktiiviset osat ovat keskusmuistissa.

KIRJALLISUUTTA

- [1] Gartling D.K., Convective heat transfer analysis by the finite element method, Computer methods in applied mechanics and engineering 12 (1977) 365-382.
- [2] Gartling D.K., NACHOS - A finite element computer program for incompressible flow problems, Part I- Theoretical Background, Sandia Laboratories, 1978.
- [3] Gartling D.K., NACHOS - A finite element computer program for incompressible flow problems, Part II- User's manual Sandia Laboratories, 1978.
- [4] Hughes W.F. & Brighton J.A., Fluid dynamics, Schaum Publishing Co, 1967.

Heikki Martikka, tekn.tri., dosentti, Lappeenrannan teknillinen korkeakoulu, Koneenrakennuksen laitos, tutkimusinsinööri, Ovako Oy Ab, Imatra.