RAKENTEIDEN MITOITUS TODENNÄKÖISIMMÄN VAURION SUHTEEN

Matti Hannus

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 13
No. 2 1980 s. 26...55

YHTEENVETO: Artikkelissa kuvataan rakenteiden todennäköisyyspohjaisen mitoituksen perusteet. Rakenteen luotettavuuteen vaikuttavat suureet esitetään satunnaismuuttujina. Muuttujien mitoitusarvot määritellään siten, että ne edustavat todennäköisintä arvokombinaatiota, jolla rakenne voi joutua rajatilaan. Lisäksi tarkastellaan mitoitusmenetelmän ominaisuuksia ja käytännöllisiä laskentanäkökohtia.

JOHDANTO

Todennäköisyyslaskentaan ja luotettavuusteoriaan perustuva rakenteiden varmuuden tarkastelutapa on yleistynyt 1970-luvulla ja sitä on jo alettu soveltaa käytännön mitoitukseen esimerkiksi osavarmuuskertoimien ja mitoituskuormitusten määrittämisessä. Teoriassa rakenteiden mitoitus voitaisiin suorittaa todennäköisyyslaskennan menetelmin siten, että rakenteelle saadaan ainakin laskennallisesti tietty etukäteen valittu luotettavuus. Käytännön mitoitus suoritetaan - ja halutaan useista syistä tulevaisuudessakin suorittaa - deterministisin menetelmin. Vaikka mitoitukseen vaikuttavilla suureilla todellisuudessa onkin aina jossain määrin ei-deterministinen arvojakautuma, suoritetaan mitoitus käyttäen sopivalla tavalla valittuja kiinteitä mitoitusarvoja halutun "varmuuden" saavuttamiseksi.

Tämän esityksen tarkoituksena on kuvata todennäköisyyslaskentaan perustuva mitoitusmenetelmä, sen soveltaminen ja yhteys käytännön mitoitukseen.

MITOITUSTEHTÄVÄN FORMULOINTI

Seuraavassa tarkastellaan rakenteen mitoittamista yhden rajatilan suhteen. Rakenteen vaurioitumiskriteeri lausutaan muodossa

$$g(\theta,\bar{X}) \leq 0, \tag{1}$$

jossa $g(\cdot)$ on kyseiseen rajatilaan liittyvä funktio, θ on jokin mitoituksessa valittava suure ja $\bar{X}$ on vektori, jonka komponentit ovat rakenteen toimintaan vaikuttavia satunnaismuuttujia kuten materiaaliominaisuuksia, geometrisia mittoja ja kuormituksia. Rakenteen määritellään olevan rajatilassa, kun kaavassa (1) pätee "=" ja vaurioitunut kun pätee "<". Muussa tapauksessa rakenne toimii suunnittelijan haluamassa käyttötilassa.

Mitoituksella pyritään saavuttamaan rakenteelle tietty ennalta valittu luotettavuus kyseisen rajatilan ylittymisen suhteen. Luotettavuuden komplementin, vaurioitumistodennäköisyyden p_f, avulla rakenteen mitoitusyhtälö on kirjoitettavissa muotoon

$$P\{g(\theta,\bar{X}) \leq 0\} = p_f, \tag{2}$$

jossa merkinnällä $P\{\cdot\}$ tarkoitetaan sulkeissa olevan tapahtuman todennäköisyyttä.

Käytännössä osavarmuuskertoimia tai muuta determinististä menetelmää sovellettaessa rakenne mitoitetaan yhtälön (2) asemesta muotoa

$$g(\theta,\bar{x}^*) = 0 \tag{3}$$

olevan mitoitusepäyhtälön mukaan, jossa $\bar{x}^*$-vektori sisältää satunnaismuuttujien sopivasti valittuja mitoitusarvoja. Tavoitteena on löytää sellainen deterministinen mitoitusmenetelmä, joka johtaa mahdollisimman hyvin halutun luotettavuustason saavuttamiseen. Toisin sanoen mitoitusarvot $\bar{x}^*$ yhtälössä (3) pyritään valitsemaan siten, että luotettavuusehto (2) toteutuu ainakin likimäärin.

SATUNNAISMUUTTUJIEN KANNAN VAIHTO

Mitoitusmenetelmän johtoa varten on edullista suorittaa satunnaismuuttujien kannan vaihto siten, että lausutaan eri todennäköisyysjakautumia noudattavat ja mahdollisesti vielä toisistaan tilastollisesti riippuvat suureet riippumattomien normaalijakautuneiden muuttujien avulla. Rajoittavien oletusten avulla kyettäisiin menetelmä ehkä esittämään ilmankin tällaisia muunnoksia, mutta esitettävällä tavalla saadaan mitoitusmenetelmälle laajempi pätevyysalue ja voidaan helpommin tarkastella sen ominaisuuksia.

Satunnaismuuttujien muuntaminen normaalijakautuneiksi

Esitetään mahdollisesti ei-normaalijakautuneet satunnaismuuttujat normaalijakautuneiden muuttujien funktioina. Tässä yhteydessä on kätevintä käyttää Gaussin yksikköjakautumaa eli (0,1)-normaalia jakautumaa, jonka keskiarvo on 0 ja keskihajonta 1. Tämän jakautuman tiheys- ja summafunktio ovat

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2), \tag{4}$$

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi(t)dt. \tag{5}$$

Summafunktio (5) joudutaan käytännössä joko katsomaan taulukoista tai laskemaan numeerisesti esimerkiksi sarjakehitelmien avulla.

Esitetään nyt ei-normaalijakautunut satunnaismuuttuja X_i, jonka keskiarvo on m_i ja keskihajonta σ_i, funktiona (0,1)-normaalista satunnaismuuttujasta Y_i. Näiden välinen riippuvuus saadaan asettamalla

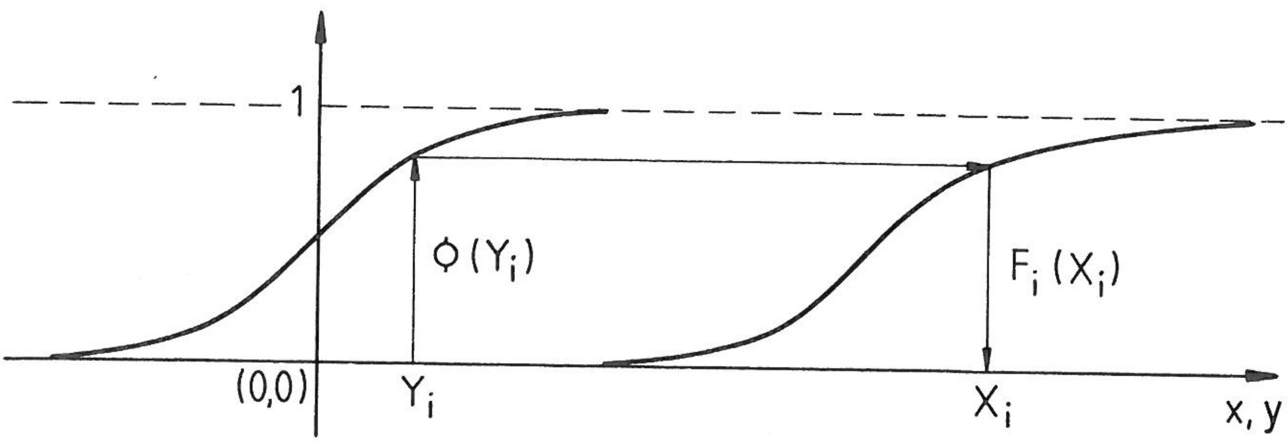
$$F_i(X_i) = \Phi(Y_i), \tag{6}$$

jossa $F_i(\cdot)$ on satunnaismuuttujan X_i jakautuman summafunktio. Koska summafunktiot ovat monotonisesti kasvavia, on riippuvuus (6) yksikäsitteinen ja sillä on käänteiskuvaus

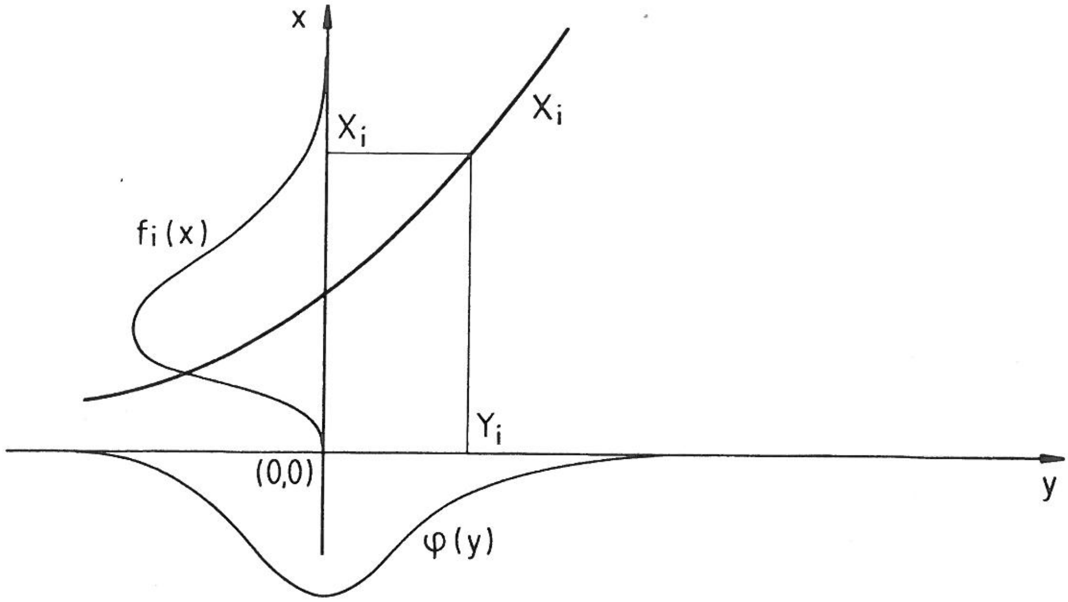
$$X_i = F_i^{-1}(\Phi(Y_i)), \tag{7}$$

joka määrittelee haetun muunnoksen. Kuvissa 1 ja 2 on havainnollistettu yhtälöiden (6) ja (7) esittämää riippuvuutta. Monille todennäköisyysjakautumille joudutaan käänteiskuvaus ratkaisemaan numeerisesti.

Mainittakoon, että lähteissä /8/ ja /9/ on annettu satunnaismuuttujien transformaatiolle toinen tulkinta: ei-normaalin muuttujan jakautuma korvataan normaalijakautumalla, jonka tiheys- ja summafunktiolla on mitoituspisteessä samat arvot kuin alkuperäisen jakautuman tiheys- ja summafunktiollakin. Tällöin kaikkia muuttujia voidaan käsitellä normaalijakautuneina - ainoastaan niiden keskiarvot ja keskihajonnat muuttuvat. Ero on pelkästään tulkinnallinen, eikä vaikuta mitoituksen lopputulokseen.



Kuva 1. Satunnaismuuttujan X_i ja normaalijakautuneen muuttujan Y_i välinen yhteys.



Kuva 2. Ei-normaali satunnaismuuttuja $X_i = F_i^{-1}(\ (Y_i))$ lausuttuna normaalijakautuneen muuttujan Y_i funktiona; $f_i(x) = \frac{d}{dx} f_i(x)$ on satunnaismuuttujan X tiheysfunktio.

Muunnettujen satunnaismuuttujien väliset riippuvuudet

Satunnaismuuttujien välinen mahdollinen tilastollinen riippuvuus tulee ottaa huomioon. Tarkastellaan kahta satunnaismuuttujaa X_i ja X_j, joiden välinen korrelaatiokerroin

$$\rho_{ij} = E[(X_i - m_i)/\sigma_i \cdot (X_j - m_j)/\sigma_j] \tag{8}$$

otaksutaan tunnetuksi. Merkintä $E[\cdot]$ tarkoittaa odotusarvo- eli keskiarvo-operaattoria.

Kun ei-normaalijakautuneet riippuvat muuttujat X_i ja X_j on korvattu (0,1)-normaaleilla satunnaismuuttujilla yhtälön (7) mukaan, ovat myös uudet muuttujat Y_i ja Y_j riippuvia. Niiden välinen korrelaatiokerroin ρ'_{ij}, joka ei välttämättä ole sama kuin ρ_{ij}, on periaatteessa ratkaistavissa yhtälöstä

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x'_i x'_j \varphi(y_i, y_j, \rho'_{ij}) dy_i \, dy_j, \tag{9}$$

jossa yhtälöiden (7) ja (8) mukaan

$$x'_i = [F_i^{-1}(\Phi(y_i)) - m_i]/\sigma_i \tag{10}$$

ja

$$\varphi(x,y,\rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right] \tag{11}$$

on kahden toisistaan riippuvan (0,1)-normaalin satunnaismuuttujan yhteisjakauman tiheysfunktio. Yhtälö (9) on sama kuin yhtälö (8), mutta ilmaistuna uusien muuttujien avulla.

Yhtälön (9) ratkaiseminen tuntemattoman korrelaatiokertoimen ρ'_{ij} suhteen edellyttäisi melko työlästä numeerista ratkaisua tietokoneella. Käytännön kannalta ei tehtäne kovin suurta virhettä vaikka otaksuttaisiin, että $\rho'_{ij} = \rho_{ij}$. Käytännössä voidaan kuitenkin yleensä otaksua eri satunnaismuuttujat tilastollisesti riippumattomaksi tai niitä voidaan pitää normaalijakautuneina, jolloin kuvattua laskentavaihetta ei tarvita.

Normaalijakautuneiden muuttujien välisen riippuvuuden eliminointi

Vektorin $\bar{Y}$, jonka komponentit Y_i ovat (0,1)-normaaleja satunnaismuuttujia, kovarianssimatriisi on

$$\bar{\bar{R}} = E[\bar{Y}\ \bar{Y}^T], \tag{12}$$

jonka alkiot $r_{ij} = \rho'_{ij}$ ovat satunnaismuuttujien Y_i ja Y_j välisiä korrelaatiokertoimia.

Normaalijakautuneiden muuttujien lineaarifunktio on tunnetusti myös normaalijakautunut. Tähän ominaisuuteen perustuen voidaan suorittaa kannan vaihto yhtälön

$$\bar{Y} = \bar{\bar{B}}\ \bar{Z} \tag{13}$$

mukaan, jossa $\bar{\bar{B}}$ on $n \times n$ matriisi ja n on vektorien $\bar{Y}$ ja $\bar{Z}$ dimensio. Valitaan nyt $\bar{\bar{B}}$ siten, että satunnaisvektori $\bar{Z}$ määrittelee ortonormeeratun kannan. Tällöin sen komponentit ovat riippumattomia (0,1)-normaaleja satunnaismuuttujia. Sijoittamalla (13) yhtälöön (12) saadaan matriisin $\bar{\bar{B}}$ toteuttavaksi yhtälö

$$\bar{\bar{R}} = E[\bar{\bar{B}}\ \bar{Z}\ \bar{Z}^T\ \bar{\bar{B}}^T] = \bar{\bar{B}}\ E[\bar{Z}\ \bar{Z}^T]\bar{\bar{B}}^T = \bar{\bar{B}}\ \bar{\bar{I}}\ \bar{\bar{B}}^T = \bar{\bar{B}}\ \bar{\bar{B}}^T, \tag{14}$$

johon on vektorin $\bar{Z}$ kovarianssimatriisiksi sijoitettu yksikkömatriisi $\bar{\bar{I}}$. Valitsemalla $\bar{\bar{B}}$ alakolmiomatriisiksi saadaan sen alkioiden b_{ij} ratkaisemiseksi palautuskaavat

$$\left.\begin{aligned} b_{ij} &= (r_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk})/b_{jj}, \quad j = 1,2,\ldots,i-1, \\ b_{ii} &= \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2}, \\ b_{ij} &= 0 \quad \text{kun} \quad j > i. \end{aligned}\right\} \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{15}$$

Todennäköisyyslaskennasta tiedetään, että kovarianssimatriisit (tässä $\bar{\bar{R}}$) ovat symmetrisiä ja positiivisesti definiittejä, joten ratkaisu (15) on aina olemassa. (Vrt. Choleskin menetelmä lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseksi.)

Itse asiassa ortonormaaleja kantoja voidaan löytää rajaton lukumäärä. Tämä nähdään asettamalla

$$\bar{Y} = \bar{\bar{B}}\ \bar{\bar{C}}\ \bar{Z}, \tag{16}$$

jossa $\bar{\bar{B}}$ on edellä kuvatulla tavalla määritelty alakolmiomatriisi ja $\bar{\bar{C}}$ on mielivaltainen ortogonaalimatriisi. Tällöin (12):een sijoittamalla saadaan

$$\bar{\bar{R}} = E[\bar{\bar{B}}\ \bar{\bar{C}}\ \bar{Z}\ \bar{Z}^T\ \bar{\bar{C}}^T\ \bar{\bar{B}}^T] = \bar{\bar{B}}\ \bar{\bar{C}}\ \bar{\bar{I}}\ \bar{\bar{C}}^T\ \bar{\bar{B}}^T = \bar{\bar{B}}\ \bar{\bar{C}}\ \bar{\bar{C}}^T\ \bar{\bar{B}}^T = \bar{\bar{B}}\ \bar{\bar{I}}\ \bar{\bar{B}}^T = \bar{\bar{B}}\ \bar{\bar{B}}^T, \tag{17}$$

joten on löydetty mielivaltaisen monta tapaa esittää satunnaisvektori $\bar{Y}$ ortonormaalin kannan $\bar{Z}$ avulla. Muunnoksen välittää matriisi $\bar{\bar{B}}\ \bar{\bar{C}}$.

MITOITUSMENETELMÄN JOHTO

Todennäköisimmän rajatilapisteen määritys

Edellä esitetyllä tavalla voidaan rakenteen vaurioitumisehto (1) saattaa muotoon

$$g(\theta,\bar{Z}) \le 0, \tag{18}$$

jossa vektorin $\bar{Z}$ komponentit ovat riippumattomia (0,1)-normaaleja satunnaismuuttujia. (Yksinkertaisuuden vuoksi käytetään muunnetulle rajatilafunktiolle samaa merkintää $g(\cdot)$ kuin alkuperäisten muuttujien $\bar{X}$ avulla yhtälöissä (1)...(3) ilmaistulle rajatilafunktiollekin.) Niiden yhteisjakautuman tiheysfunktio on

$$\varphi(\bar{Z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp(-\frac{1}{2}\bar{Z}^T\bar{Z}), \tag{19}$$

jossa n on vektorin $\bar{Z}$ dimensio eli probleeman satunnaismuuttujien lukumäärä.

Kaikista rajatilapisteistä todennäköisin on se, jossa tiheysfunktiolla (19) on maksimiarvo. Tämä piste löydetään ääriarvotehtävän

$$L(\bar{z}^*,\lambda) = \min\{\frac{1}{2}\,\bar{z}^T\bar{z} + \lambda g(\theta,\bar{z})\} \tag{20}$$

ratkaisuna. Suure λ on Lagrangen kertoja. Derivoimalla sekä vektorin $\bar{z}$ että muuttujan λ suhteen saadaan ääriarvopisteen ratkaisemiseksi yhtälöt

$$\nabla L(\bar{z}^*,\lambda) = \bar{z}^* + \lambda\nabla g(\theta,\bar{z}^*) = \bar{0}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} L(\bar{z}^*,\lambda) = \qquad g(\theta,\bar{z}^*) = 0. \tag{22}$$

Jälkimmäisen yhtälön mukaan rakenne mitoitetaan rajatilassa käyttäen vektorin $\bar{z}^*$ komponentteja satunnaismuuttujien Z_i mitoitusarvoina. Edellisen yhtälön mukaan nämä mitoitusarvot ovat verrannollisia vauriofunktion osittaisderivaattoihin vastaavien muuttujien suhteen mitoituspisteessä laskettuna. Verrannollisuuskertoimen λ määrittämiseksi tullaan rajatilaan liittämään vielä tietty todennäköisyys.

Todennäköisimmän rajatilapisteen valinta mitoituksen perustaksi on luonnollista, sillä tällöin rakenne mitoitetaan juuri sen luotettavuuden kannalta oleellisimpia olosuhteita varten. Lisäksi näin saatavalla mitoitusmenetelmällä on joukko erityisominaisuuksia, jotka seuraavat nimenomaan tästä valinnasta.

Mitoitusyhtälön linearisointi

Rajatilan ylittymistodennäköisyyden liittämiseksi yhtälöstä (21) saataviin mitoitusarvoihin käytetään seuraavassa kuvattavaa likimääräistä menetelmää. Linearisoidaan mitoitusyhtälö (22) toistaiseksi tuntemattomassa mitoituspisteessä z^*. On luonnollista suorittaa mitoitusyhtälön approksimointi juuri tässä pisteessä, joka on todennäköisimpänä rajatilapisteenä tarkasteltavaa aluetta parhaiten edustava piste. Tällöin approksimoinnista seuraava virhe on myös mahdollisimman pieni suurimman mielenkiinnon kohteena olevalla alueella.

Taylorin ensimmäisen asteen sarjakehitelmänä saadaan approksimaatio

$$g(\theta,\bar{Z}) \approx G = \nabla g(\theta,\bar{z}^*)^T(\bar{Z}-\bar{z}^*), \tag{23}$$

jossa on yhtälön (22) mukaan asetettu funktion arvo mitoituspisteessä $\bar{z}^*$ nollaksi. Suure G on satunnaisvektorin $\bar{Z}$ skalaarifunktiona myös satunnaismuuttuja. Ottamalla huomioon, että ortonormaalisuuden perusteella

$$E[\bar{Z}] = \bar{0},$$
$$E[\bar{Z}^T\bar{Z}] = \bar{\bar{I}} \tag{24}$$

saadaan muuttujan G keskiarvoksi ja varianssiksi

$$m_G = E[G] = -\nabla g(\theta,\bar{z}*)^T\bar{z}*, \tag{25}$$

$$\sigma_G^2 = E[(G-m_G)^2] = \nabla g(\theta,\bar{z}*)^T\nabla g(\theta,\bar{z}*) = \|\nabla g(\theta,\bar{z}*)\|^2. \tag{26}$$

Approksimoimalla vielä suureen G todennäköisyysjakautumaa normaalijakautumalla saadaan vaurioitumistodennäköisyydeksi

$$p_f = P\{G \leq 0\} = \Phi\left(\frac{0-m_G}{\sigma_G}\right) = \Phi(-\beta), \tag{27}$$

jossa β on (0,1)-normaalijakautuman todennäköisyyttä p_f vastaava fraktiili. Sitä nimitetään luotettavuusluvuksi ja se riittää yksin määräämään rakenteen luotettavuuden. Sijoittamalla yhtälön (21) mukainen todennäköisin rajatilapiste

$$\bar{z}* = -\lambda\nabla g(\theta,\bar{z}*) \tag{28}$$

sekä yhtälöiden (25) ja (26) mukaiset m_G ja σ_G kaavaan (27) saadaan

$$m_G = \beta\sigma_G$$

$$\Rightarrow -\nabla g(\theta,\bar{z}*)^T[-\lambda g(\theta,\bar{z}*)] = \beta\|\nabla g(\theta,\bar{z}*)\|$$

$$\Rightarrow \lambda = \beta/\|\nabla g(\theta,\bar{z}*)\|. \tag{29}$$

Palauttamalla ratkaistu verrannollisuuskertoimen λ arvo kaavaan (28) saadaan ortonormaalin satunnaisvektorin $\bar{Z}$ vaurioitumistodennäköisyyttä $p_f = \Phi(-\beta)$ vastaavaksi mitoitusarvovektoriksi

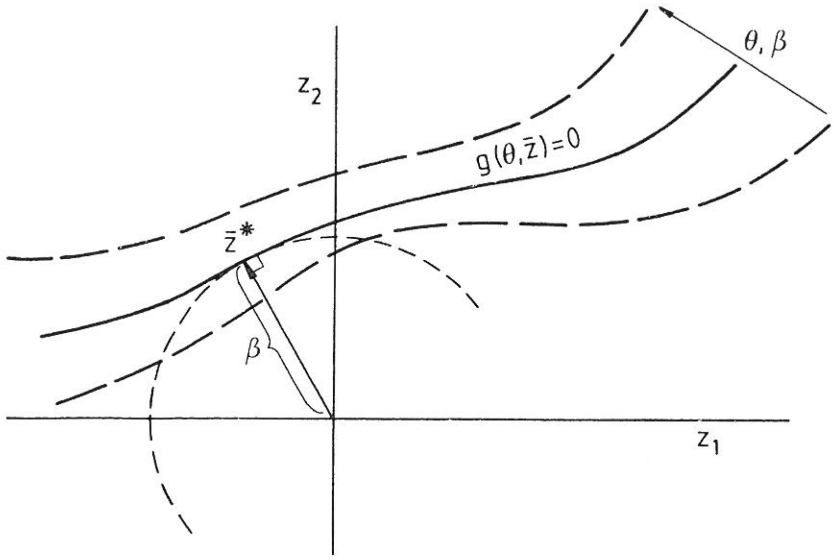
$$\bar{z}* = -\beta\nabla g(\theta,\bar{z}*)/\|\nabla g(\theta,\bar{z}*)\|. \tag{30}$$

Voidaan myös käyttää merkintää

$$\bar{z}* = -\beta\bar{\alpha}, \tag{31}$$

jossa $\bar{\alpha}$ on ykkösgradienttivektori.

Tuloksen (30)-(31) tulkinta on esitetty kuvassa 3. Kyseisessä ortonormaalissa koordinaatistossa mitoituspiste saadaan asettamalla origosta kohti-



Kuva 3. Mitoituspisteen määritys ortonormaalissa koordinaatistossa; jos kohtisuoria pisteitä on useita, valitaan lähin.

suora vektori rajatilaehdon $g(\theta,\bar{z}) = 0$ määräämää pintaa (kuvassa käyrää) vasten. Tämän vektorin pituus $\|\bar{z}^*\| = \beta$ määrää rajatilan ylittymistodennäköisyyden $p_f = \Phi(-\beta)$.

Jos funktio $g(\cdot)$ kaavassa (23) on lineaarinen, niin menetelmä johtaa tarkasti haluttuun luotettavuuteen yhtälön (27) mukaan. Muussa tapauksessa eivät kaavoista (25) ja (26) saatavat arvot suureille m_G ja σ_G ole tarkkoja eikä myöskään kaavan (27) yhteydessä tehty normaalijakautuma-oletus pidä tarkkaan paikkaansa. Tehtävä virhe on kuitenkin pieni ja sillä on lähinnä vain teoreettista merkitystä. Käytännön kannalta menetelmää voidaan pitää riittävän tarkkana. Menetelmä johtaa tarkkaan tulokseen vielä siinä erityistapauksessa, että vektorin $\bar{z}$ dimensio on 1 riippumatta funktion $g(\cdot)$ muodosta.

Koska tuntematon mitoituspiste $\bar{z}^*$ esiintyy yhtälön (30) molemmilla puolilla, on yhtälö ratkaistava käytännössä iteratiivisesti tai likimääräisesti. Osottautuu, että kummallakin tavalla voidaan päästä erittäin käyttökelpoisiin laskentamenetelmiin.

ITERATIIVISEN MITOITUKSEN SUORITTAMINEN

Seuraavassa esitetään yhteenveto mitoituksen kulusta käytettäessä kuvattua menetelmää. Ennen varsinaista iteratiivista ratkaisua kirjoitetaan mitoitusyhtälö menetelmän edellyttämään muotoon:

1) Muodostetaan rakenteen luotettavuuteen vaikuttavien muuttujien välille vaurioitumisen määrittelevä yhtälö $g(\theta,\bar{X}) \leq 0$.

2) Lausutaan kaikki satunnaismuuttujat X_i (0,1)-normaalien satunnaismuuttujien Y_i avulla sijoittamalla $X_i = F_i^{-1}(\Phi(Y_i))$.

3) Jos muuttujien välillä vallitsee tilastollisia riippuvuuksia, niin elimi-

noidaan ne kantaa vaihtamalla. Ensin lasketaan muuttujien X_i tunnettujen korrelaatiokertoimien avulla uusien muuttujien Y_i korrelaatiokertoimet. Sitten lausutaan muuttujat Y_i sopivasti valitun ortonormeeratun kannan $\bar{Z}$ avulla sijoittamalla $\bar{Y} = \bar{\bar{B}}\ \bar{Z}$. (Käytännössä tämä vaihe voidaan yleensä sivuuttaa; merkitään tällöin $\bar{Y} = \bar{Z}$).

Näin on saatu vaurioehto muotoon $g(\theta,\bar{Z}) \leq 0$. (Huom. yksinkertaisuuden vuoksi käytetään samaa merkintää $g(\cdot)$ myös muunnetulle funktiolle.) Iteratiivinen mitoitus käsittää nyt seuraavat vaiheet:

4) Valitaan haluttua luotettavuustasoa vastaava luotettavuusluku β. Lisäksi valitaan iteraatiolle aloituspiste $\bar{z}^*$ (esim. $\bar{z}^* = \bar{0}$).

5) Mitoitetaan rakenne rajatilaehdon $g(\theta,\bar{z}^*) = 0$ mukaan, ts. ratkaistaan yhtälöstä θ.

6) Lasketaan saatua θ-arvoa vastaava uusi mitoituspiste $\bar{z}^* = -\beta\nabla g(\theta,\bar{z}^*)/\|\nabla g(\theta,\bar{z}^*)\|$ ja jatketaan vaiheesta 5 jne. kunnes mitoitus θ ei enää muutu.

Kuten jäljempänä tullaan osoittamaan, päästään likimääräiselläkin vektorin $\bar{z}^*$ aloitusarvolla suhteelliseen tarkkaan mitoitukseen. Tähän ominaisuuteen perustuu esitetyn iteraation erittäin nopea konvergointi. Umpimähkäisestikin valitusta aloituspisteestä $\bar{z}^*$ päästään parilla iteraatiokierroksella varsin tarkkaan tulokseen. Jos mitoitusyhtälö on voimakkaasti epälineaarinen, saatetaan iteraatioaskelia tarvita enemmän.

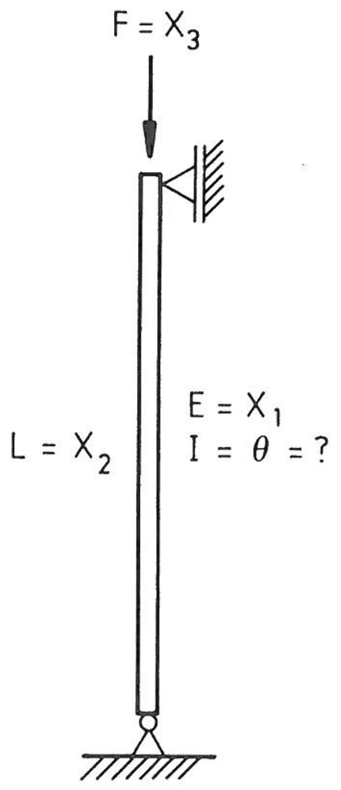
Esimerkki 1. Nurjahdussauvan mitoitus

Mitoitetaan kuvan 4 mukainen nurjahdussauva esitettyä menetelmää käyttäen. Kaikki muuttujat oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi riippumattomiksi ja normaalijakautuneiksi. Muuttujina ovat kuvan 4 mukaisesti kimmokerroin $E = X_1$, sauvan nurjahduspituus $L = X_2$, annettu aksiaalivoima $F = X_3$ sekä mitoituksessa määritettävä tuntematon poikkipinnan neliömomentti $I = \theta$. Muuttujien keskiarvot ja keskihajonnat ovat

$m_1 = 2{,}1\cdot 10^5$ MPa, $\sigma_1 = 0{,}2\cdot 10^5$ MPa,
$m_2 = 5$ m, $\sigma_2 = 0{,}05$ m,
$m_3 = 0{,}05$ MN, $\sigma_3 = 0{,}004$ MN.

Sauva mitoitetaan nurjahdustodennäköisyydelle 10^{-4}, jota vastaava luotettavuusluku on $\beta = 3{,}719$. Eulerin nurjahduskaavasta $\pi^2 EI/L^2 - F = 0$ saadaan mitoitusyhtälö

$$g(\theta,\bar{x}^*) = \pi^2 x_1^*\theta/x_2^{*2} - x_3^* = 0.$$



Kuva 4. Nurjahdussauva

Esittämällä satunnaismuuttujat X_i (0,1)-normaalien muuttujien Z_i avulla

$$X_i = m_i + Z_i\sigma_i$$

saadaan muuttujien X_i mitoitusarvoiksi

$$x_i^* = x_i(z_i^*) = m_i + z_i^*\sigma_i = m_i - \alpha_i\beta\sigma_i,$$

jossa

$$\alpha_i = a_i/\sqrt{\sum_{j=1}^{3} a_j^2},$$

$$a_i = \frac{\partial g(\theta,\bar{x}(\bar{z}^*))}{\partial z_i} = \frac{\partial g(\theta,\bar{x}^*)}{\partial x_i}\sigma_i.$$

0. Lähtöarvojen valinta iteraatiolle

Aloitetaan iteraatio valitsemalla alkuarvoksi $z_i^* = 0$. Tällöin $x_i^* = m_i$ ja neliömomentiksi tulee

$$\theta = \frac{x_2^{*2}x_3^*}{\pi^2 x_1^*} = 6{,}031\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^4$$

Koska käytettiin muuttujien keskiarvoja, vastaa ratkaistu θ likimain nurjahdustodennäköisyyttä 0,5 ja on siten lopullista arvoa oleellisesti pienempi.

1. iteraatioaskel

Lasketaan ensin apumuuttujat $a_i = \frac{\partial g(\theta,\bar{x}^*)}{\partial x_i}\sigma_i$:

$$a_1 = \frac{\pi^2\theta}{x_2^{*2}}\sigma_1 = 4{,}762\cdot 10^{-3},$$

$$a_2 = -\frac{2\pi^2 x_1^*\theta}{x_2^{*3}}\sigma_2 = -1{,}000\cdot 10^{-3},$$

$$a_3 = -\sigma_3 = -4{,}000\cdot 10^{-3},$$

$$a = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = 6{,}299\cdot 10^{-3}.$$

Näiden avulla saadaan yksikkövektorin $\bar{\alpha}$ komponentit $\alpha_i = a_i/a$:

$$\alpha_1 = 0{,}7560,$$
$$\alpha_2 = -0{,}1588,$$
$$\alpha_3 = -0{,}6350.$$

Lopuksi saadaan mitoitusarvot $x_i^* = m_i - \alpha_i\beta\sigma_i$:

$x_1^* = 1{,}538 \cdot 10^5$,
$x_2^* = 5{,}030$,
$x_3^* = 5{,}945 \cdot 10^{-2}$.

Ratkaistaan näiden avulla mitoitusyhtälöstä neliömomentti (kuten kohdassa 0):

$\theta = 9{,}909 \cdot 10^{-7}\ m^4$.

Yhteenveto iteraatiosta

Seuraava iteraatiokierros aloitetaan laskemalla uudet arvot suureille a_i jne. Taulukossa 1 on yhteenveto tuloksista laskentaa jatkettaessa.

Taulukko 1. Nurjahdussauvan iteratiivisen mitoituksen kulku

Suure	0. aloitus	1. askel	2. askel	3. askel
a_1	-	$4{,}762 \cdot 10^{-3}$	$7{,}731 \cdot 10^{-3}$	$7{,}856 \cdot 10^{-3}$
a_2	-	$-1{,}000 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}182 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}130 \cdot 10^{-3}$
a_3	-	$-4{,}000 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}000 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}000 \cdot 10^{-3}$
a	-	$6{,}299 \cdot 10^{-3}$	$8{,}784 \cdot 10^{-3}$	$8{,}888 \cdot 10^{-3}$
α_1	-	0,7560	0,8801	0,8839
α_2	-	-0,1588	-0,1346	-0,1271
α_3	-	-0,6350	-0.4554	-0,4501
x_1^*	$2{,}1 \cdot 10^5$	$1{,}538 \cdot 10^5$	$1{,}445 \cdot 10^5$	$1{,}443 \cdot 10^5$
x_2^*	5	5,030	5,025	5,024
x_3^*	0,05	$5{,}945 \cdot 10^{-2}$	$5{,}677 \cdot 10^{-2}$	$5{,}670 \cdot 10^{-2}$
θ	$6{,}031 \cdot 10^{-7}$	$9{,}909 \cdot 10^{-7}$	$1{,}005 \cdot 10^{-6}$	$1{,}005 \cdot 10^{-6}\ m^4$

Jo kahdella iteraatiokierroksella saatiin ratkaistua tuntematon θ (neliömomentti) neljän numeron tarkkuudella. Erityisesti kannattaa panna merkille, että mitoitusparametri θ saavuttaa tarkan arvon jo melko epätarkoilla α-arvoilla. Voidaan todeta, että vaikka kertoimet α_i muuttuvat askelien 1 ja 2 välillä 15...28% ja mitoitusarvot x_i^* 0,1...6% niin mitoitusparametri θ muuttuu enää vain 1,4%. Vielä iteraatioaskeleella 3 tapahtuu mitoitusarvoissa havaittavia muutoksia, kun taas θ on jo saavuttanut laskentatarkkuuden puitteissa lopullisen arvonsa. □

MITOITUSMENETELMÄN OMINAISUUKSIA

Edellä esitetyn mitoitusmenetelmän johdossa valittiin muuttujien mitoitusarvot rakenteen todennäköisimmän rajatilapisteen perusteella. Tämä piste onkin ainoa erikoispiste, johon esitetyn kaltaisella formalismilla voidaan päästä. Näin ollen ei ole odottamatonta, että menetelmällä on joukko erityisominaisuuksia. Seuraavassa tarkastellaan tällaisia ominaisuuksia.

Kertoimet α_i korrelaatiokertoimina

Osoittautuu, että vauriofunktion $g(\cdot)$ gradientin suuntaisella ykkösvektorilla $\bar{\alpha}$ on mielenkiintoinen tilastollinen tulkinta. Tämän toteamiseksi muodostetaan mitoituspisteessä Taylorin sarjan mukaisesti linearisoidun $g(\cdot)$-funktion

$$G = \nabla g(\theta,\bar{z}^*)^T(\bar{Z}-\bar{z}^*) \tag{32}$$

ja sen muuttujavektorin $\bar{Z}$ väliset korrelaatiokertoimet. Huomaa, että kaavassa (32) on sijoitettu mitoitusyhtälön mukaan $g(\theta,\bar{z}^*) = 0$. Ne saadaan jakamalla kovarianssivektorin

$$E[(\bar{Z}-\bar{0})(G-m_G)] = E[(\bar{Z}-\bar{0})(\bar{Z}-\bar{0})^T]\nabla g(\theta,\bar{z}^*) = \nabla g(\theta,\bar{z}^*) \tag{33}$$

komponentit suureen G keskihajonnalla, joka saadaan kaavasta (26), ja kunkin muuttujan Z_i keskihajonnalla, jotka ovat 1. Näin saadaan suureen G ja satunnaisvektorin $\bar{Z}$ väliseksi korrelaatiokerroinvektoriksi

$$\nabla g(\theta,\bar{z}^*)/\|\nabla g(\theta,\bar{z}^*)\| = \bar{\alpha}, \tag{34}$$

jossa $\bar{\alpha}$ on sama kuin kaavojen (30) ja (31) mukaisen mitoitusarvovektorin

$$\bar{z}^* = -\beta\bar{\alpha} \tag{35}$$

lausekkeessa esitelty ykkösvektori.

Satunnaismuuttujan Z_i mitoitusarvo siis saadaan kertomalla vaurioitumistodennäköisyyttä vastaava luotettavuusluku $-\beta$ kyseisen muuttujan vaikutusta koko rakenteeseen (toisin sanoen suureeseen G) mittaavalla korrelaatiokertoimella α_i.

Muuttujalla, jonka suuret arvot vaikuttavat rakenteen kantokykyä (ja samalla $g(\cdot)$-funktiota) lisäävästi, on positiivinen korrelaatiokerroin α_i. Tällainen muuttuja on yleensä esim. materiaalin lujuus. Sen sijaan kuormitukset vaikuttavat yleensä kantokykyä vähentävästi ja niillä on tällöin negatiivinen korrelaatiokerroin. Korrelaatiokertoimen itseisarvo on sitä suurempi mitä voimakkaampi kyseisen muuttujan vaikutus on.

Koska vektorin $\bar{\alpha}$ komponenttien neliösumma on 1, niiden voidaan ajatella jakavan "kokonaisvarmuuden" β osiin eri muuttujille. Kertoimet α_i voidaan tulkita yhteisvaikutuskertoimiksi, jotka ottavat huomioon usean epävarmuustekijän samanaikaisuudesta johtuvan vähennyksen mitoitusarvoihin. Ei ole tarpeen mitoittaa rakennetta muuttujien vaarallisten arvojen epäedullisimmalle kombinaatiolle, vaan riittää valita eräs edustava yhdistelmä.

Tilastollisessa mielessä korrelaatiokerroinvektorin pituus $\|\bar{\alpha}\| = 1$ merkitsee, että muuttujat Z_i ovat riippumattomia ja selittävät täydellisesti rakenteen toimintaan liittyvän satunnaisuuden.

Mitoitusmenetelmän stationäärisyysominaisuus

Mitoitusmenetelmään liittyvän iteratiivisen ratkaisutavan työläyden kannalta on suuri merkitys sillä, että voidaan käyttää myös karkeampia likimääräisiä menetelmiä tarkkuuden suuresti kärsimättä. On myös tärkeää voida johtaa osavarmuuskertoimia tai muita käytännön mitoitukseen liittyviä suureita ja pitää näitä ainakin tietyissä rajoissa vakioina ilman, että mitoitetun rakenteen luotettavuustaso paljoakaan vaihtelisi. Seuraavassa osoitetaan, että esitetyn menetelmän mukaisella mitoituksella eli vapaalla mitoitusparametrilla θ on stationäärinen arvo mitoituspisteessä

$$\bar{z}^* = -\beta\bar{\alpha},$$

$$\bar{\alpha} = \nabla g(\theta,\bar{z}^*)/\|\nabla g(\theta,\bar{z}^*)\|. \tag{36}$$

Stationäärisyysominaisuuden osoittamiseksi muodostetaan mitoitusparametrin θ osittaisderivaatat apumuuttujien

$$a_i = \frac{\partial g(\theta,\bar{z}^*)}{\partial z_i} \tag{37}$$

suhteen. Näin nähdään miten mitoitusparametri θ muuttuu, kun mitoitusarvot määritetään tarkoista arvoista (36) poikkeavasti. Oletetaan kuitenkin, että korrelaatiokertoimet α_i ovat yhtälöiden

$$\alpha_i = a_i/\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \tag{38}$$

välityksellä toisiinsa sidotut, jolloin niiden neliösumma on 1.

Derivoimalla mitoitusyhtälö $g(\theta,\bar{z}^*) = 0$ muuttujan a_i suhteen saadaan

$$\frac{\partial g(\theta,\bar{z}^*)}{\partial a_i} = \frac{\partial g(\theta,\bar{z}^*)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial a_i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g(\theta,\bar{z}^*)}{\partial z_j}\frac{\partial z_j^*}{\partial a_i} = 0, \tag{39}$$

jossa yhtälön (37) mukaan

$$\frac{\partial g(\theta,\bar{z}^*)}{\partial z_j} = a_j \tag{40}$$

ja yhtälöiden (36) ja (38) mukaan

$$\frac{\partial z_j^*}{\partial a_i} = -\beta \frac{\partial \alpha_j}{\partial a_i} = -\beta \frac{\partial}{\partial a_i} (a_j / \sum_{k=1}^{n} a_k^2) = -\beta \frac{\delta_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) - a_i a_j}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{3/2}} . \tag{41}$$

Sieventämällä saadaan yhtälöstä (39)

$$\frac{\partial g(\theta,\bar{z}^*)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial a_i} = \beta \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j \delta_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) - a_i a_j^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{3/2}} = \beta \frac{a_i\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) - a_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{3/2}} = 0. \tag{42}$$

Näin on osoitettu, että mitoituspisteessä $\bar{z}^*$ on

$$\frac{\partial \theta}{\partial a_i} = 0, \tag{43}$$

sillä kaavassa (42) on luonnollisesti aina $\partial g(\theta,\bar{z}^*)/\partial\theta \neq 0$, jotta mitoituksella θ ylipäänsä olisi mitään merkitystä.

Tuloksen (43) suuri käytännöllinen merkitys on, että mitoitusarvojen α-kertoimet voidaan laskea jollakin edustavalla lähtöparametrien kombinaatiolla ja käyttää niitä laajemmallakin alueella rakenteen mitoituksen ja samalla myös luotettavuuden säilyessä jokseenkin muuttumattomina. Tulos on täten myös teoreettinen peruste sille, että tietyin edellytyksin on oikeutettua käyttää vakioarvoisia osavarmuuskertoimia. Tämä mitoitusmenetelmän stationäärisyysominaisuus selittää myös kuvatun iteratiivisen ratkaisumenetelmän erittäin nopean konvergenssin.

Todettakoon vielä, että mitoitus muuttuu epävarmempaan suuntaan poikettaessa tarkoista α-kertoimista. Tämän kompensoimiseksi voi olla syytä asettaa likimäärin valittujen α-kertoimien neliösumma hieman ykköstä suuremmaksi.

Stationäärisyysominaisuus seuraa suoraan mitoituspisteen määrittämisestä todennäköisimpänä rajatilapisteenä. Tätä voidaan havainnollistaa kuvan 3 avulla seuraavasti. Kun α-arvoja poikkeutetaan tarkoista arvoista siten, että $\|\bar{\alpha}\|$ säilyy ykkösenä, niin mitoituspiste liikkuu pitkin rajatilapintaa sivuavaa β-säteistä palloa (kuvassa ympyrää).

Mitoitusyhtälön muotoinvarianssi

Käytännössä voidaan vaurioitumisehto esittää useassa vaihtoehtoisessa muodossa. Esimerkiksi yhtälöt

$$\begin{aligned} &\theta X_1 - X_2 \leq 0, \\ &\theta X_1/X_2 - 1 \leq 0, \\ &\ln \theta X_1 - \ln X_2 \leq 0 \end{aligned} \tag{44}$$

ovat merkitykseltään ekvivalentteja (oletetaan $X_i > 0$). On kohtuullista vaatia, että vastaavat mitoitusyhtälöt johtavat yhtälön muodosta riippumatta samaan mitoitukseen. Seuraavassa osoitetaan, että esitetyllä mitoitusmenetelmällä on tämä ominaisuus.

Tarkastellaan ortonormeeratussa koordinaatistossa esitettyä kahta ekvivalenttia vaurioitumiskriteeriä

$$\begin{aligned} g_1(\theta,\bar{Z}) &\leq 0, \\ g_2(\theta,\bar{Z}) &\leq 0, \end{aligned} \tag{45}$$

joiden välillä on relaatiot

$$g_1(\theta,\bar{Z}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_2(\theta,\bar{Z}) = 0, \tag{46a}$$

$$g_1(\theta,\bar{Z}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_2(\theta,\bar{Z}) < 0. \tag{46b}$$

Tällöin on olemassa sellainen positiivinen funktio $s(\bar{Z}) > 0$, että

$$g_2(\theta,\bar{Z}) = g_1(\theta,\bar{Z})s(\bar{Z}). \tag{47}$$

Mitoitusarvoiksi kumpaakin funktiota käyttäen tulee

$$\bar{z}_1^* = -\beta\nabla g_1(\theta,\bar{z}_1^*)/\|\nabla g_1(\theta,\bar{z}_1^*)\|, \tag{48a}$$

$$\bar{z}_2^* = -\beta\nabla g_2(\theta,\bar{z}_2^*)/\|\nabla g_2(\theta,\bar{z}_2^*)\|, \tag{48b}$$

jossa yhtälön (47) mukaan

$$\nabla g_2(\theta,\bar{z}^*) = \nabla g_1(\theta,\bar{z}^*)s(\bar{z}^*), \tag{49}$$

koska mitoituspisteessä pätee $g_i(\theta,\bar{z}^*) = 0$. Näin ollen yhtälö (48b) tulee muotoon

$$\bar{z}_2^* = -\beta\nabla g_1(\theta,\bar{z}_2^*)/\|\nabla g_1(\theta,z_2^*)\|, \tag{50}$$

joka on sama kuin yhtälö (48a). Relaation (46a) perusteella mitoitusyhtälöiden

$$\begin{aligned} g_1(\theta_1,\bar{z}_1^*) &= 0, \\ g_2(\theta_2,\bar{z}_2^*) &= 0 \end{aligned} \tag{51}$$

mukaiset mitoitukset ovat näin ollen samoja:

$$\bar{z}_1^* = \bar{z}_2^*, \qquad \theta_1 = \theta_2. \tag{52}$$

Invarianssiominaisuus seuraa siitä, että α-kertoimet, ts. gradienttivektori $\nabla g(\theta,\bar{z}^*)$, lasketaan nimenomaan mitoituspisteessä.

Invarianssi koordinaatiston muunnoksen suhteen

Osoitetaan seuraavassa, että mitoitusmenetelmä on invariantti satunnaismuuttuja-avaruuden kannan vaihdon suhteen. Kuten kaavan (13) yhteydessä todettiin voidaan satunnaisvektorin $\bar{Z}$ normaalisuuden perusteella lausua sen mitoitusarvovektori $\bar{z}^*$ uuden kannan vektorin $\tilde{z}^*$ avulla muodossa

$$\bar{z}^* = \bar{\bar{C}}\, \tilde{z}^*, \tag{53}$$

jossa $\bar{\bar{C}}$ on ortogonaalimatriisi. Seuraavaksi tarkastellaan, mitä tämä koordinaatistonmuunnos vaikuttaa yhtälöiden (23)...(31) määrittelemään mitoitukseen.

Eri kannoissa muodostettujen gradienttivektorien välillä vallitsee kaavaa (53) vastaava yhteys

$$\nabla g(\theta,\bar{z}^*) = \bar{\bar{C}}\, \tilde{\nabla} g(\theta,\tilde{z}^*). \tag{54}$$

Ottamalla huomioon, että $\bar{\bar{C}}^T\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{I}}$, saadaan kaavoihin (24) ja (25) sijoittamalla

$$m_G = -\nabla g(\theta,\bar{z}^*)^T\bar{z}^* = -\tilde{\nabla} g(\theta,\tilde{z}^*)^T\bar{\bar{C}}^T\bar{\bar{C}}\,\tilde{z}^* = -\tilde{\nabla} g(\theta,\tilde{z}^*)^T\tilde{z}^*, \tag{55}$$

$$\sigma_G^2 = \|\nabla g(\theta,\bar{z}^*)\|^2 = \tilde{\nabla} g(\theta,\tilde{z}^*)^T\bar{\bar{C}}^T\bar{\bar{C}}\,\tilde{\nabla} g(\theta,\tilde{z}^*) = \|\tilde{\nabla} g(\theta,\tilde{z}^*)\|^2, \tag{56}$$

jossa G on yhtälön (23) mukainen vauriofunktion $g(\cdot)$ linearisointi. Kaavat (55) ja (56) osoittavat sen luonnollisen tuloksen, että satunnaisfunktion keskiarvo ja varianssi säilyvät koordinaatistonmuunnoksessa. Sijoittamalla tulokset edelleen kaavoihin (28)...(30) saadaan

$$\bar{z}^* = -\beta\, \nabla g(\theta,\bar{z}^*)/\|\nabla g(\theta,\bar{z}^*)\| = \bar{\bar{C}}[-\beta\, \tilde{\nabla} g(\theta,\tilde{z}^*)/\|\nabla g(\theta,\tilde{z}^*)\|] \tag{57}$$

joten uudessa kannassa mitoituspisteen

$$\tilde{z}^* = -\beta\, \tilde{\nabla} g(\theta,z^*)/\|\nabla g(\theta,z^*)\| \tag{58}$$

suhteen suoritettu mitoitus

$$g(\tilde{\theta},\tilde{z}^*) = 0 \tag{59}$$

johtaa samaan ratkaisuun

$$\tilde{\theta} = \theta \tag{60}$$

kuin alkuperäisessäkin koordinaatistossa suoritettu mitoitus.

Tällä invarianssiominaisuudella tuskin on juuri käytännön merkitystä, koska muuttujat yleensä voidaan otaksua riippumattomiksi. Sen sijaan se yleispätevänä ominaisuutena sinänsä tukee valittua mitoitusmenetelmän formulointia, joka perustuu todennäköisimmän rajatilapisteen käyttöön mitoitusarvoja laskettaessa.

Korrelaatiokertoimien ketjusääntö

Käytännössä esiintyy tilanteita, joissa on luonnollista tarkastella rakenteen luotettavuuteen vaikuttavia suureita erillisinä ryhminä. Esimerkki tällaisesta jaosta on rakenteen kapasiteettiin ja toisaalta kuormitukseen liittyvien suureiden erottelu. Edelleen voidaan kapasiteettiin vaikuttavat suureet jakaa materiaaliominaisuuksiin ja geometrisiin mittoihin jne. Seuraavassa osoitetaan miten tällaisen jaottelun avulla voidaan määrittää mitoitusarvojen α-kertoimet samaan tapaan kuin suoritetaan osittaisderivointi ketjusäännön mukaan.

Tarkastellaan linearisoitua rajatilaehtoa

$$G = g(\theta,\bar{Z}) = 0, \tag{61}$$

jossa ortonormaalin satunnaisvektorin $\bar{Z}$ komponentit Z_i, $i = 1,2,\ldots,n$ ovat edelleen ortonormaalien alimuuttujien Z_{ij}, $j = 1,2,\ldots,n_i$ funktioita. Käytetään tälle riippuvuudelle merkintää

$$Z_i = g_i(\bar{Z}_i). \tag{62}$$

Osittaisderivointia käyttäen saadaan alimuuttujien Z_{ij} mitoitusarvoiksi

$$z^*_{ij} = -\beta\alpha_{ij}, \tag{63}$$

jossa

$$\alpha_{ij} = a_{ij}/\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n_k} a_{k\ell}^2}\ , \tag{64}$$

$$a_{ij} = \frac{\partial g(\theta,\bar{z}^*)}{\partial z_i} \frac{\partial g_i(\bar{z}_i^*)}{\partial z_{ij}} = a_i a_{(i)j}, \tag{65}$$

$$\bar{z}^* = \{g_i(\bar{z}_i^*)\}, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{66}$$

$$\bar{z}_i^* = \{z_{ij}^*\}, \quad j = 1,2,\ldots,n_i. \tag{67}$$

Merkintä $a_{(i)j}$ tarkoittaa muuttujan z_i osittaisderivaattaa alimuuttujan z_{ij} suhteen. Satunnaismuuttujan Z_i keskihajonta on likimäärin kaavan (26) mukaan

$$\sigma_i = \|\nabla g_i(\bar{z}_i^*)\| = \sqrt{\sum_{\ell=1}^{n_i} a_{(i)\ell}^2} = 1. \tag{68}$$

Laventamalla kaava (64) tällä lausekkeella eli itse asiassa luvulla 1 saadaan

$$\alpha_{ij} = \frac{a_i a_{(i)j}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left(\sum_{\ell=1}^{n_k} a_{(k)\ell}^2\right)}} \frac{1}{\sqrt{\sum_{\ell=1}^{n_i} a_{(i)\ell}^2}} = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}} \frac{a_{(i)j}}{\sqrt{\sum_{\ell=1}^{n_i} a_{(i)\ell}^2}} = \alpha_i \alpha_{(i)j}. \tag{69}$$

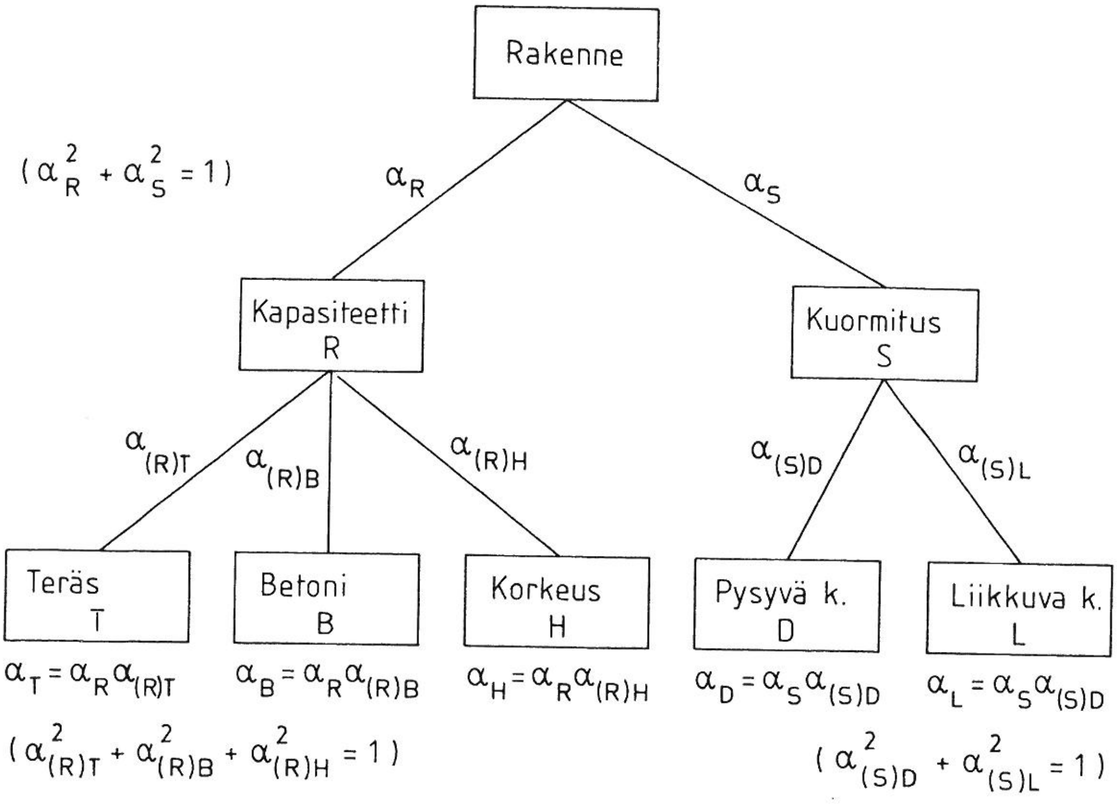
Tuloksen mukaan alimuuttujan Z_{ij} mitoitusarvon α_{ij}-kerroin saadaan kertomalla muuttujan Z_i α_i-kerroin kertoimella $\alpha_{(i)j}$, joka kuvaa muuttujan Z_i riippuvuutta eli korrelaatiota alimuuttujasta Z_{ij}. Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että jos muuttujat Z_{ij} ovat edelleen muuttujien Z_{ijk} funktioita, niin

$$z_{ijk}^* = -\beta\alpha_i\alpha_{(i)j}\alpha_{(ij)k}, \tag{70}$$

jossa

α_i	on muuttujien	G	ja	Z_i	välinen korrelaatiokerroin	,
$\alpha_{(i)j}$	- " -	Z_i	-"-	Z_{ij}	- " -	,
$\alpha_{(ij)k}$	- " -	Z_{ij}	-"-	Z_{ijk}	- " -	.

Kuvassa 5 on havainnollistettu menetelmää. Stationäärisyysominaisuuden perusteella voidaan kutakin α-osakerrointa pitää tietyissä rajoissa vakiona ja yksittäisten muuttujien α-kertoimet saadaan yhdistämällä osakertoimia sopivasti. Seuraavassa esitetään miten menetelmää voidaan soveltaa käytännön käsilaskennassa.



Kuva 5. α-kertoimien määritys ketjusäännön avulla, esimerkkinä teräsbetonirakenne.

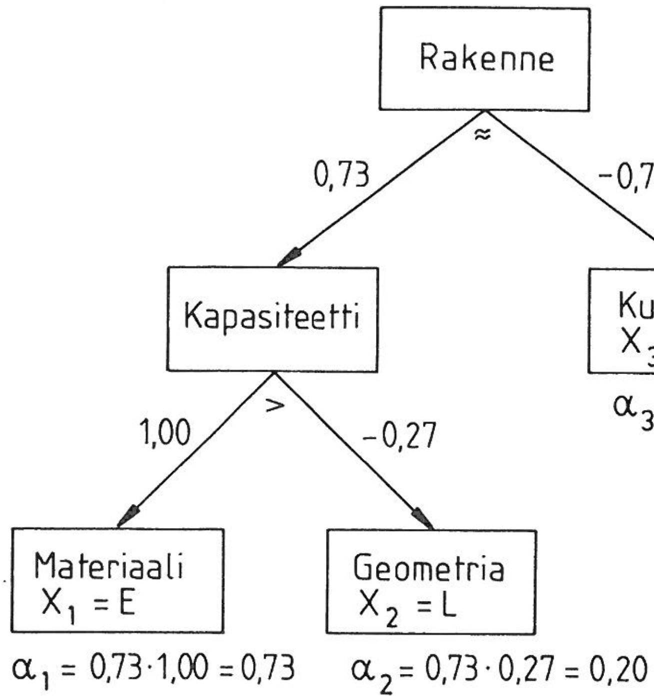
Ketjusäännön käyttö käsilaskennassa

Hyödyntämällä toisaalta stationäärisyysominaisuutta, jonka mukaan α-kertoimet voidaan valita likimäärin, ja toisaalta ketjusääntöä saadaan käyttökelpoisia käsinlaskumenetelmiä. Seuraavassa kuvataan eräs tapa, joskin on varmasti muitakin tapoja soveltaa samoja periaatteita.

Menetelmä perustuu vaiheittain suoritettuun kahden muuttujan vaikutuksen harkinnanvaraiseen vertailuun. Aloitetaan jakamalla rakenteen luotettavuuteen vaikuttavat muuttujat kahteen ryhmään, esim. materiaaliominaisuuksiin ja kuormituksiin. Jatketaan sitten jakamalla kumpikin edelleen kahteen ryhmään j.ne kunnes kaikkien muuttujien vaikutukset on saatu eroteltua. Kutakin jakoa suoritettaessa arvioidaan kahden eroteltavan muuttujien vaikutusten suhde ja valitaan sen perusteella niille α-kertoimet taulukosta 2. Taulukon arvot on valittu siten, että ne kattavat tasavälisesti vaikutusten suhteen vaihtelualueen. Taulukon mukaisten α-arvojen neliösumma on hieman yli 1 epävarmalla puolella olevan tuloksen välttämiseksi. Lopullisten muuttujien α-arvot saadaan kertomalla kaikki erottelupolun varrella saadut α-kertoimet ketjusäännön mukaan keskenään. Kuvassa 6 on havainnollistettu menettelyä esimerkin 1 mukaista nurjahdussauvaa käsiteltäessä.

Taulukko 2. Korrelaatiokertoimien likimääräinen valinta muuttujia pareittain vertailemalla. On valittava negatiivinen α, jos muuttujan suuret arvot ovat vaarallisia.

Muuttujan 1 vaikutus suhteessa muuttujan 2 vaikutukseen	α_1	α_2
pienempi	± 0,27	± 1,00
samaa luokkaa	± 0,73	± 0,73
suurempi	± 1,00	± 0,27



Kuva 6. α-kertoimien likimääräinen valinta ketjusääntöä käyttäen nurjahdussauvalle $g(\theta,\bar{X}) = \pi^2\theta X_1/X_2^2 - X_3$.

Esimerkki 2. Nurjahdussauvan mitoitus yksinkertaistelulla menetelmällä

Sijoittamalla kuvasta 6 saatavat α-kertoimet esimerkin 1 nurjahdussauvan muuttujiin saadaan mitoitusarvoiksi $x_i^* = m_i - \alpha_i\beta\sigma_i$

$x_1^* = 1{,}557 \cdot 10^5$ MN/m^2,

$x_2^* = 5{,}037$ m,

$x_3^* = 6{,}086 \cdot 10^{-2}$ MN,

joiden avulla ratkaistava sauvan poikkipinnan neliömomentti

$\theta = 1{,}005 \cdot 10^{-6}$ m^4

on neljän numeron tarkkuudella sama kuin esimerkissä 1 huomattavasti työläämmällä laskennalla saatu tulos. Näin hyvä tarkkuus on kylläkin jo sattuma, mutta virheen voidaan yleensä odottaa olevan enintään muutama prosentti. □

OSAVARMUUSKERTOIMIEN MÄÄRITYS

Edellä on osoitettu, että kuvattu mitoitusmenetelmä johtaa suhteellisen tarkkaan tulokseen, vaikka mitoitusarvojen α-kertoimet valittaisiin likimääräisesti. Jos lisäksi tarkasteltavan suureen variaatiokerroin pysyy vakiona, niin kiinteälle luotettavuustasolle mitoitettaessa on perusteltua käyttää suureelle kiinteää mitoitusarvoa. Esimerkiksi normaalijakautuneen muuttujan X_i mitoitusarvo on

$$x_i^* = m_i - \alpha_i \beta \sigma_i = m_i(1-\alpha_i \beta v_i) = m_i \gamma_i, \tag{71}$$

jossa m_i on keskiarvo, σ_i keskihajonta, v_i variaatiokerroin, β luotettavuustasosta riippuva kerroin ja α_i muuttujan X_i vaikutusta koko rakenteeseen mittaava kerroin. Osavarmuuskerroin voidaan nyt määritellä yksinkertaisesti mitoitusarvon ja jonkin sovitulla tavalla määritellyn nimellisarvon suhteeksi. Kaavassa (71) γ_i on osavarmuuskerroin keskiarvon m_i suhteen. Yleisemmässä tapauksessa osavarmuuskerroin on

$$\gamma_i = x_i^*/x_{i,nim}, \tag{72}$$

jossa $x_{i,nim}$ on nimellisarvo. Usein nimellisarvo määritellään esim. $q = 5\%$ fraktiiliarvoksi. Normaalijakautuneen muuttujan osavarmuuskerroin on tällöin

$$\gamma_i = (1-\alpha_i \beta v_i)/(1-k_q v_i), \tag{73}$$

jossa k_q on normaalijakautuman q-fraktiili.

Rajoituksena vakioarvoisen osavarmuuskertoimen käytölle on siis, että

- osavarmuuskerroin liittyy tiettyyn luotettavuustasoon (parametri β),
- osavarmuuskerroin pätee vain tietylle rakenne-kuormitusyhdistelmälle, jossa eri muuttujien väliset suhteet vaihtelevat kohtuullisissa rajoissa (parametri α_i),
- suureen variaatiokerroin on sama kuin osavarmuuskertoimen määrittelyssä käytetty arvo (parametri v_i),
- osavarmuuskerroin on määritetty tietyn vertailuarvon suhteen (parametri $x_{i,nim}$ tai k_q).

Ei-normaalijakautuneiden suureiden osavarmuuskertoimien määritys tapahtuu kaavan (72) mukaan. Julkaisuissa /8/ ja /9/ on tarkasteltu mitoituksessa syntyvää virhettä, kun osavarmuuskertoimia käytetään niiden määrittelystä poikkeavissa tilanteissa. Hyvään tulokseen päästään, kun osavarmuuskertoimet määritellään tietylle rakenteelle ja kuormitukselle sellaisilla suureiden välisillä suhteilla, jotka edustavat keskimääräistä mitoituksessa esiintyvää yhdistelmää. Epävarmalla puolella olevan mitoituksen välttämiseksi on vielä syytä lisätä α-kertoimien itseisarvoja siten, että niiden neliösumma on hieman yli 1. Korjauksen suuruus riippuu siitä miten laajalla parametrien vaihtelualueella osavarmuuskertoimia halutaan käyttää.

TIETOKONELASKENNAN SOVELTAMINEN

Iteratiivisen mitoituksen suorittaminen on hieman epäkäytännöllistä käsin suoritettavaksi. Liitteessä 1 on esitetty tietokoneohjelma, jolla voidaan suorittaa erilaisten rakenteiden mitoitus. Ohjelma on täysin sovellutuksesta riippumaton lukuunottamatta aliohjelmaa, joka laskee vauriofunktion $g(\theta,\bar{x}^*)$ arvon. Käytettävistä todennäköisyysjakautumista riippuen voidaan ohjelmaan joutua lisäämään vielä kaavan (7) mukaiset käänteisfunktiot $F_i^{-1}(\cdot)$.

Laskennollisena yksityiskohtana todettakoon, että vektorin

$$\bar{\alpha} = \nabla g(\theta,\bar{z}^*)/\|\nabla g(\theta,\bar{z}^*)\|$$

komponentit lasketaan tietokoneohjelmassa kaavoilla

$$a_i = -\frac{\partial g(\theta,\bar{z}(\bar{\alpha})^*)}{\partial \alpha_i} \quad \left(\equiv \beta \frac{\partial g(\bar{z}^*)}{z_i}\right),$$

$$\alpha_i = a_i/\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\,. \tag{74}$$

Esimerkki 3. Tietokonelaskenta

Liitteessä 1 esitetyllä tietokoneohjelmalla laskettiin lähteissä /8/ ja /9/ käsitelty sovellutusesimerkki. Vaurioehto on

$$g(\theta,X) = \theta X_1 - X_2 - X_3 \leq 0,$$

jossa muuttujat X_i kuvaavat rakenteen kapasiteettia sekä pysyvää ja liikkuvaa kuormitusta. Mitoitusparametrin θ avulla valitaan rakenteelle vaadittua luotettavuustasoa vastaava kapasiteetti.

Kapasiteettimuuttuja X_1 on logaritmisesti normaalijakautunut keskiarvolla $m_1 = 1$ ja variaatiokertoimella $v_1 = 0{,}1$. Tällöin muuttujan X_1 logaritmi $Y_1 = \ln X_1$ on normaalijakautunut ja sen keskiarvo ja -hajonta ovat lähteen /3/ mukaan

$$m_{Y1} = \ln m_1 - \frac{1}{2}\ln(1+v_1^2) \approx \ln m_1,$$

$$\sigma_{Y1} = \sqrt{\ln(1+v_1^2)} \approx v_1.$$

Nyt voidaan X_1 esittää (m_{Y1},σ_{Y1})-normaalijakautuneen muuttujan Y_1 ja edelleen (0,1)-normaalijakautuneen muuttujan Z_1 avulla seuraavasti

$$X_1 = \exp(Y_1) = \exp(m_{Y1}+\sigma_{Y1}Z_1) = \frac{m_1}{\sqrt{1+v_1^2}}\exp[\sqrt{\ln(1+v_1^2)}\, Z_1] \approx m_1\exp(v_1 Z_1).$$

Yksinkertaistetut likimääräiset lausekkeet pätevät riittävällä tarkkuudella, kun $v_1 < 0{,}3$. Sijoittamalla satunnaismuuttujan Z_1 paikalle sen mitoitusarvo $z_1^* = -\alpha_1\beta$ saadaan lopulta logaritmisesti normaalijakautuneen muuttujan X_1 mitoitusarvoksi

$$x_1^* = m_1\exp(-\alpha_1\beta v_1).$$

Pysyvä kuormitus X_2 on (1,0.1)-normaalijakautunut ja sen mitoitusarvo on yksinkertaisesti

$$x_2^* = m_2 - \alpha_2\beta\sigma_2.$$

Liikkuvan kuormituksen perusjakautuma on (0.3,0.5)-normaali. Rakenne mitoitetaan $n = 100$ kertaa toistuvan kuormituksen suurimmalle arvolle, jonka jakautuman summafunktio on lähteen /3/ mukaan

$$F_3(X_3) = \Phi\left(\frac{X_3-m_3}{\sigma_3}\right)^n.$$

Sijoittamalla tämä kaavaan (6) ja ratkaisemalla se (0,1)-normaalin satunnaismuuttujan $Y_3 = Z_3$ suhteen saadaan

$$X_3 = m_3 + \sigma_3\Phi^{-1}[\Phi(Z_3)^{1/n}],$$

josta edelleen saadaan muuttujan X_3 mitoitusarvoksi

$$x_3^* = m_3 + \sigma_3\Phi^{-1}[\Phi(-\alpha_3\beta)^{1/n}].$$

Kokoamalla tulokset yhteen saadaan mitoitustehtävän ratkaisemiseksi yhtälöt

$$\begin{cases} g(\theta,\bar{x}^*) = \theta x_1^* - x_2^* - x_3^* = 0 \\ x_1^* = m_1\exp(-\alpha_1\beta v_1) \\ x_2^* = m_2 - \alpha_2\beta\sigma_2 \\ x_3^* = m_3 + \sigma_3\Phi^{-1}[\Phi(-\alpha_3\beta)^{1/n}], \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\bar{\alpha} = \bar{a}/\|\bar{a}\| \\
\bar{a} = -\dfrac{\partial g(\theta,\bar{x}(\bar{\alpha})*)}{\partial\bar{\alpha}}
\end{cases}
$$

Liitteessä 2 on esitetty iteratiivisen ratkaisun tulokset mitoitettaessa rakenne luotettavuustasolle $p_f = 10^{-5}$, jota vastaava $\beta = 4{,}265$. Tulokset ovat laskentatarkkuuden (ohjelmassa suoritetaan derivointi numeerisesti) puitteissa samat kuin lähteissä /8/ ja /9/. □

LOPPUSANAT

Artikkelissa kuvattu mitoitusmenetelmä on pääosiltaan kehitetty yhteistyönä tekn.tri Eero Paloheimon ja kirjoittajan kesken rakenteiden varmuustoimikunnan valvonnassa ja Tekniikan edistämissäätiön rahoittamassa tutkimuksessa 1971-73. Esitystä on varsinkin merkintätapojen osalta täydennetty Tampereen teknillisessä korkeakoulussa keväällä 1980 pidetyn luentokurssin "Stokastiset prosessit rakenteiden mekaniikassa" yhteydessä.

KIRJALLISUUTTA

[1] Mikkola, M., Paavola, H., Hannus, M., Varmuus staattisen kuormituksen suhteen. Varmuus koneenrakennuksessa. Insinöörien Koulutuskeskus Ry, julkaisu 69-72. Helsinki 1972.

[2] Hannus, M., Rakenteiden varmuuden arviointi todennäköisyyslaskennan menetelmin. Rakenteiden Mekaniikka 5 (1972) 4, s. 439...463.

[3] Hannus, M., Rakenteiden luotettavuus, Helsinki 1973, Valtion Teknillinen Tutkimuskeskus, Rakennus- ja yhdyskuntatekniikka. Julkaisu 8. 86 s.

[4] Hannus, M., Numerical analysis of structural reliability, Helsinki 1973, Technical Research Centre of Finland, Building Technology and Community Development. Publication 5. 24 s.

[5] Paloheimo, E., Hannus, M., Structural design based on weighted fractiles. Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers. 100 (1974) ST7, s. 1367...1378.

[6] Hannus, M., Rakenteiden luotettavuus. Ydintekniikan lisensiaattiseminaari, syksy 1974. Raportti TKK-F-B25 (1975), Helsingin teknillinen korkeakoulu, Otaniemi.

[7] Paloheimo, E., Hannus, M., Lukkariniemi, I., Rakenteiden mitoitus tilastollisin perustein, Helsinki 1976, Valtion teknillinen tutkimuskeskus. Betonitekniikan laboratorio, tiedonanto 37. Espoo helmikuu 1976. 73 s.

[8] Pohjoismainen rakentamismääräyskomitea, Retningslinier for last- og sikkerhedsbestemmelser for baerande konstruktioner. NKB-rapport nr. 35, November 1978. 61+81 s.

[9] Weck, T-U., Todennäköisyysteoreettinen mitoitusmenetelmä ja osavarmuuskertoimien määritysperusteet. Sisäasiainministeriö, Kaavoitus- ja rakennusosasto. Helsinki 1979. 46 s.

Matti Hannus, dipl.ins., Valmet Oy Rautpohjan tehdas

Liite 1. Tietokoneohjelma

```
T DIMEF;L ALL
$CONTROL USLINIT,NOLIST,INIT
C************************(TIEDOSTO: DIMEF)**********************
C     MIELIVALTAISEN RAKENTEEN MITOITUS KAYTTAEN ANNETTUA
C     VAURIOITUMISTODENNAKOISYYTTA VASTAAVIA MITOITUSARVOJA.
C     VALITAAN MITOITUSPARAMETRI TH SITEN, ETTA G(TH,X)=0.
C     MM 1980-03-28
C*****************************************************************
      DIMENSION A(10),ALFA(10),X(10)
      DOUBLE PRECISION DBLE
      DATA DALFA,IT/.01,0/
   10 FORMAT(/33H1RAKENTEEN TILASTOLLINEN MITOITUS
     1     / 32H (LOPETUS: PF-RETURN)              )
   15 FORMAT(1H0,A12)
   16 FORMAT(1H ,A9,F8.4)
   20 FORMAT(1H0,A13)
   30 FORMAT(1H ,10F6.3)
   35 FORMAT(2H ?)
   40 FORMAT(1H0,'ITERAATIOKIERROS=',I2)
   50 FORMAT(1H ,'MITOITUSPARAMETRI TH=',E12.6)
   60 FORMAT(' I    ALFA        X*')
   70 FORMAT(I2,F8.4,E11.5)
C
C.....ASETETAAN OLETUSARVOT
      TH=1.
      BETA=4.265
      DO 110 I=1,10
  110 ALFA(I)=0.
      Z0=G(TH,ALFA,BETA,X,N)
C
C.....KYSYTAAN ALKUARVOT
  150 WRITE(6,10)
      PF=999.
      WRITE(6,15)"ANNA PF  - ? "
      READ (5,*) PF
      IF (ABS(PF-.5).GT..5) GOTO 999
      BETA=ABS(XNOR(DBLE(PF)))
      WRITE(6,16) "BETA(PF)=",BETA
      WRITE(6,20) 'ANNA ALFA(I)='
      WRITE(6,30) (ALFA(I),I=1,N)
      WRITE(6,35)
      READ(5,*) (ALFA(I),I=1,N)
C
C.....ITEROIDAAN TH JA ALFA
      IT=0
      GOTO 221
  200 IT=IT+1
C
C.....LASKETAAN A(I)=-dG(TH,X)/dALFA(I)
      SA=0.
      DO 210 I=1,N
      ALFA(I)=ALFA(I)+DALFA*.5
      G1=G(TH,ALFA,BETA,X,N)
      ALFA(I)=ALFA(I)-DALFA
      G0=G(TH,ALFA,BETA,X,N)
      ALFA(I)=ALFA(I)+DALFA*.5
      A(I)=-(G1-G0)/DALFA
  210 SA=SA+A(I)**2
C
C.....LASKETAAN ALFA(I)=A(I)/SQRT(A(1)**2+...+A(N)**2)
      SA=SQRT(SA)
      DO 220 I=1,N
  220 ALFA(I)=A(I)/SA
C
```

```
C.....RATKAISTAAN TH NEWTONIN ITERAATIOLLA
  221 TH0=TH
      DTH=.01*TH
      G1=G(TH,ALFA,BETA,X,N)
      DO 225 I=1,10
      TH=TH+DTH
      IF (ABS(DTH/TH).LT.1.E-5) GOTO 226
      G0=G1
      G1=G(TH,ALFA,BETA,X,N)
      DTH=-DTH*G1/(G1-G0)
  225 CONTINUE
C
C.....TULOSTUS
  226 WRITE(6,40) IT
      WRITE(6,50) TH
      WRITE(6,60)
      DO 230 I=1,N
  230 WRITE(6,70) I,ALFA(I),X(I)
C
C.....ITERAATIOLUUPPI PAATTYY TAHAN
      IF (ABS(TH/TH0-1.).LT.1.E-6) GOTO 150
      GOTO 200
C
  999 STOP
      END
C
C
C
      FUNCTION G(TH,ALFA,BETA,X,N)
C**********************************************************************
C     ALIOHJELMA LASKEE VAURIOFUNKTION G(.) JA
C     MITOITUSARVOT X=X(M,S,ALFA,BETA).
C     OHJELMOIDAAN ERIKSEEN KUNKIN PROBLEEMAN MUKAAN.
C**********************************************************************
      DIMENSION ALFA(10),X(10)
C
C     MITOITUSYHTALO G=X1-X2-X3
C     X1:=LOGNORMAALI,            M1=??, V1=.1
C     X2:=NORMAALI,               M2=1., S1=.1
C     X3:=NORMAALIJAK.EXTREEEM(,  M3=.3, S3=.5, N3=100
C.....MH 1980-04-24
      DOUBLE PRECISION FNOR
      N=3
      X(1)=TH*EXP(-ALFA(1)*BETA*.1)
      X(2)=   1.  -ALFA(2)*BETA*.1
      X(3)=.3+.5*XNOR(FNOR(-ALFA(3)*BETA)**.01D0)
      G   =X(1)-X(2)-X(3)
      RETURN
      END
C
C
C
```

Liite 2. Tietokoneohjelman tuloslistaus

```
RAKENTEEN TILASTOLLINEN MITOITUS
(LOPETUS: PF=RETURN)

ANNA PF = ? 1.E-5

BETA(PF)=  4.2649

ANNA ALFA(I)=
   .000  .000  .001
?


ITERAATIOKIERROS= 0
MITOITUSPARAMETRI TH= .253102E+01
I    ALFA        X*
1   .0000 .25310E+01
2   .0000 .10000E+01
3   .0000 .15310E+01

ITERAATIOKIERROS= 1
MITOITUSPARAMETRI TH= .462241E+01
I    ALFA        X*
1   .7419 .33686E+01
2  -.2931 .11250E+01
3  -.6030 .22436E+01

ITERAATIOKIERROS= 2
MITOITUSPARAMETRI TH= .466038E+01
I    ALFA        X*
1   .6777 .34906E+01
2  -.2012 .10858E+01
3  -.7073 .24048E+01

ITERAATIOKIERROS= 3
MITOITUSPARAMETRI TH= .466072E+01
I    ALFA        X*
1   .6707 .35013E+01
2  -.1921 .10819E+01
3  -.7164 .24194E+01

ITERAATIOKIERROS= 4
MITOITUSPARAMETRI TH= .466073E+01
I    ALFA        X*
1   .6702 .35020E+01
2  -.1914 .10816E+01
3  -.7170 .24203E+01
```

```
      FUNCTION XNOR(F)
C************************************************************
C     NORMAALIJAKAUTUMAN KAANTEISFUNKTIO, TARKKUUS<1E-7
C     LIIKIKAAVA: M.ABRAMOWITZ & I.A.STEGUN,
C                 HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS
C                 DOVER PUBLICATIONS INC., N.Y. 1964
C                 (KAAVA 26.2.23 S.933)
C     TARKENNUS: NEWTONIN ITERAATIO
C************************************************************
      DOUBLE PRECISION F,P,T,C,D,X,DSQRT,DLOG,FNOR,DMAX1,DEXP
C
C.....REDUSOIDAAN F VALILLE 0,.5
      P=F
      IF (P.GT..5D0) P=1D0-F
      P=DMAX1(1D-10,P)
C
C.....LASKETAAN X=X(P)<0 LIIKIKAAVALLA, TARKKUUS=4.5E-4
      T=DSQRT(-2D0*DLOG(P))
      C=2.515517D0+T*(.802853D0+T*.010328D0)
      D=1D0+T*(1.432788D0+T*(.189269D0+T*.001308D0))
      X=-T+C/D
C
C.....PALAUTETAAN X=X(F)
      IF (F.GT..5D0) X=-X
C
C.....TARKENNUS NEWTONIN ITERAATIOLLA
  100 D=(F-FNOR(SNGL(X)))*2.506628D0*DEXP(.5D0*X*X)
      X=X+D
      IF (D.GT.1D-7) GOTO 100
C
C.....VALMISTA ON
      XNOR=SNGL(X)
      RETURN
      END
C
C
C
      DOUBLE PRECISION FUNCTION FNOR(X)
C************************************************************
C     NORMAALIJAKAUTUMAN SUMMAFUNKTIO
C     VIRHE<1E-10 KUN //X//<=8
C************************************************************
      DOUBLE PRECISION Z,Y,U,PI,DBLE,DEXP,DSQRT
      DATA PI/3.141592653589793238D0/
C
      Z=DBLE(X)
      Y=Z*Z*.5D0
      N=INT(4.+10*ABS(X))
C
      U=1D0
      DO 110 I=1,N
      J=1+N-I
  110 U=1D0+Y*U/(J+.5D0)
C
      FNOR=.5D0+Z*U*DEXP(-Y)/DSQRT(2D0*PI)
      RETURN
      END
```