RAKENTEIDEN MEKANIIKKA TULEVAISUUDESSA

Martti Mikkola

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 13
No 2 1980 s. 16...25

YHTEENVETO: Esitelmässä on arvioitu rakenteiden mekaniikan eräiden osa-alojen kehitystä nykytilanteen valossa. Tarkasteltavat alat ovat aineiden konstitutiiviset yhtälöt, rakenteiden epälineaarinen toiminta ja numeerinen analyysi. Lisäksi käsitellään rakenteiden mekaniikan osuutta rakenteiden suunnittelussa ja sen opetusta korkeakouluissa.

JOHDANTO

Kun seuraavassa esitän eräitä arveluja rakenteiden mekaniikan kehityksestä, rajoitun ymmärrettävistä syistä joihinkin harvoihin aloihin, joilla mielestäni olennaista edistystä on odotettavissa. Esitykseni on epäilemättä henkilökohtaisten mieltymysten ja harrastusten leimaama, siis subjektiivinen. Kehitystä tapahtuu varmasti koko rakenteiden mekaniikan rintamalla, ja toisin suuntautunut alan harrastaja saattaisi korostaa aivan muita kehityssuuntia kuin itse teen. Käsittelen pääasiassa rakenteiden mekaniikan tutkimusta ja jossakin määrin sen soveltamista käytännön suunnittelutehtävissä ja sen opetusta korkeakouluissa.

Alat, joita tarkastelen, ovat aineiden konstitutiivinen teoria, rakenteiden epälineaarinen toiminta staattisten ja dynaamisten kuormien alaisena sekä edellisiin liittyvien probleemien numeerinen analyysi. Kokonaan käsittelemättä jäävät sellaiset tärkeät alat kuin rakenteiden optimointi, stokastiset värähtelyt ja tilastotieteeseen ja todennäköisyyslaskentaan perustuva varmuustarkastelu.

KONSTITUTIIVISET YHTÄLÖT

Konstitutiiviset yhtälöt kuvaavat aineen mekaanista tai termomekaanista käyttäytymistä. Niiltä vaaditaan, kuten matemaattisilta malleilta yleensä, riittävää monimutkaisuutta, jotta käyttäytymisen olennaiset piirteet tulisivat kuvatuiksi, ja riittävää yksinkertaisuutta, jotta mallin soveltaminen olisi helppoa tai mahdollista. Tietokoneiden ansiosta viimeksi mainittua vaatimusta on voitu löysätä: suhteellisen monimutkaistenkin mallien käytännöllinen soveltaminen on nykyään mahdollista.

Miksi sitten tarvitaan uusia monimutkaisempia malleja? Monien rakennusaineiden, kuten esim. betonin, kallion ja muiden maalajien, mekaanista käyttäytymistä halutaan kuvata entistä todenmukaisemmalla tavalla. Uudet materiaalit, esim. muovit, kuituvahvisteiset aineet tai erikoiset metalliseokset, edellyttävät usein uusien mallien kehittämistä. Myös tavallisesta poikkeavat olosuhteet, esim. lämpötilan, paineen tai kuormitusnopeuden suhteen, saattavat vaatia entisten mallien täydentämistä uusilla käyttäytymispiirteillä.

Vanhastaan käytettyjä konstitutiivisia malleja ovat

- lineaarisesti kimmoinen (Hooke, 1678)
- viskoosi (Stokes, 1844)
- viskoelastinen (Maxwell 1868, Voigt 1892)
- plastinen (Saint Venant 1870, M. Lévy 1870)
- viskoplastinen (Bingham 1922, Hohenemser ja Prager 1932)

ja niiden yleistykset (ks. esim. [1]). Vähemmän tunnettuja malleja ovat kimmoinen lukkiutuva aine [2] ja endokroninen malli [3]. Kimmoinen lukkiutuva aine deformoituu aluksi, mutta jäykkenee muodonmuutosten kasvaessa tullen rajatapauksessa täysin jäykäksi (kuva 1a). Endokroninen teoria, jota viime aikoina on käytetty menestyksellä metallien, betonien ja maalajien kuvaamiseen, on formuloitu ns. sisäisten muuttujien teorian puitteissa. Endokronisessa teoriassa määritellään sisäinen aikamitta ζ, joka riippuu muodonmuutoksesta ε ja todellisesta ajasta t,

$$d\zeta^2 = a^2 d\varepsilon^2 + b^2 dt^2$$

ja sisäinen aika-asteikko $z(\zeta)$ siten että $dz/d\zeta > 0$. Yksiakselisessa tapauksessa jännityksen ja venymän välinen yhteys on muotoa

$$\sigma = \int_0^z E\, e^{-E(z-z')/\eta} (d\varepsilon/dz')dz'$$

jossa ydinfunktio saattaa yleisessä tapauksessa olla monimutkaisempikin muodoltaan. Edellä olevasta yhtälöstä näkyy myös analogia Maxwellin viskoelastisen mallin kanssa. Kuvassa 1b on esitetty yksinkertainen tapaus, jossa $dz = |d\varepsilon|$.

Hyvin paljon tutkimusta on viime vuosina kohdistettu aineen murtumisilmiöiden selvittämiseen. Murtumismekaniikka selvittää yksittäisten säröjen syntyä ja kasvua jännityksen tai muun rasituksen alaisessa aineessa. En käsittele tässä kuitenkaan murtumismekaniikkaa, vaan tuon esille kimmoisen murtuvan aineen mallin [4,5,6], jossa murtumista käsitellään fenomenologisesti kiinnittämättä huomiota yksittäisiin säröihin. Perusajatuksena on, että aineen kimmo-ominaisuudet muuttuvat murtumisen takia

$$\sigma = E_{sec}\varepsilon \Rightarrow \dot{\sigma} = E_{sec}\dot{\varepsilon} + \dot{E}_{sec}\varepsilon = \dot{\sigma}_e - \dot{\sigma}_f$$

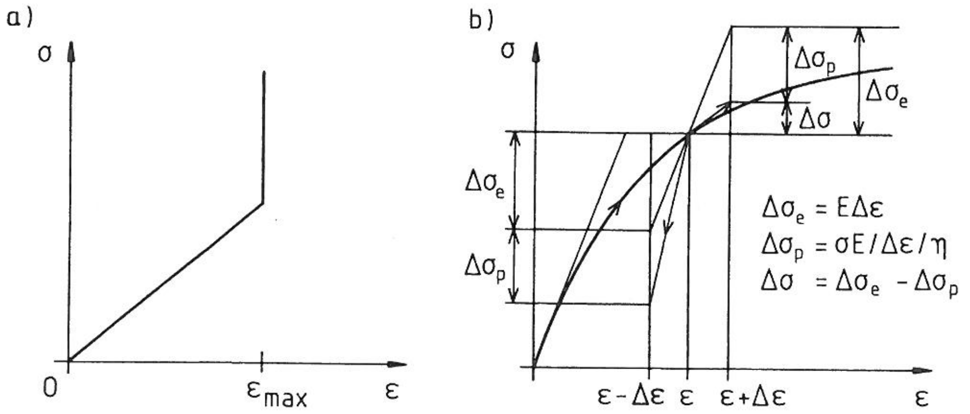
Jännityksen muutosnopeuden osa $\dot{\sigma}_e = E_{sec}\dot{\varepsilon}$ on kimmoinen osa ja $\dot{\sigma}_f = -\dot{E}_{sec}\varepsilon$ on murtumisesta aiheutuva osa. Yleensä on $\dot{E}_{sec} < 0$. Aineeseen ei jää pysyviä muodonmuutoksia (kuva 1c). Yleisessä tapauksessa on luonnollista määrittää murtumisehto muodonmuutosten avulla

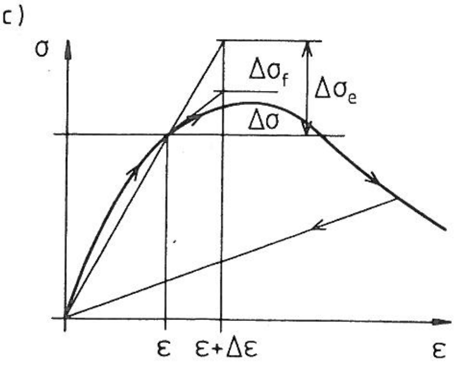
$$F = F(\varepsilon, H) = 0$$

ja murtumissääntö

$$\dot{\sigma}_f = -K\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\dot{\varepsilon}\right)\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}$$

analogisesti plastisuusteorian kanssa. Parametri H säätelee murtumisehdon muuttumista samaan tapaan kuin myötölujenemisparametri plastisuusteoriassa.





Kuva 1. a) Kimmoinen lukkiutuva aine.
b) Endokroninen malli, $dz = |d\varepsilon|$.
c) Kimmoinen murtuva aine.

Klassisessa plastisuusteoriassa myötöehto lausutaan jännitystilan funktiona ja kuvataan hyperpintana jännitysavaruudessa. Toinen olennainen piirre on, että aineen edellytetään olevan tietyssä mielessä stabiilia. Tämä stabiiliusoletus käy yleensä Druckerin postulaatin nimellä. Siitä seuraa, että myötöpinta on konveksi ja että plastinen muodonmuutosnopeus on myötöpinnan gradientin suuntainen (assosiatiivinen myötösääntö). Plastisuusteorian kehittämisessä on ainakin neljä suuntaa todettavissa:

- ei-assosiatiivisten myötösääntöjen kehittäminen ts. $d\varepsilon^p \neq d\lambda\partial f/\partial\sigma$ (esim. [7]),
- muodonmuutosten avulla lausuttujen myötöehtojen kehittäminen (esim. [8]),
- suurten muodonmuutosten tapauksessa pätevien konstitutiivisten yhtälöiden formuloiminen (esim. [9]),
- plastisuusteorian kehittäminen termodynaamisista perusteista lähtien yhtenäväisesti muiden konstitutiivisten teorioiden kanssa (esim. [10], [11]).

Kommentoin seuraavassa lyhyesti em. tutkimussuuntia.

Rudnicki & Rice [7] soveltavat tarkasteluaan kallion mekaaniseen käyttäytymiseen. Perusajatuksen selvittämiseksi tarkastellaan ainealkiota leikkauksen τ ja paineen σ alaisena (kuva 2). Muodonmuutosinkrementit ovat

$$d\gamma = d\tau/G + d\gamma^p$$

$$d\varepsilon = d\sigma/K + d\varepsilon^p$$

γ on leikkaumuodonmuutos ja ε tilavuuden muutos. Suhde

$$-d\tau/d\sigma = \mu$$

on sisäinen kitkakerroin. Mikäli normaalisuussääntö olisi voimassa, olisi plastisten muodonmuutosinkrementtien suhde $d\varepsilon^p/d\gamma^p = \mu$. Rudnicki & Rice luopuvat tästä otaksuen, että

$$d\varepsilon^p/d\gamma^p = \beta \ .$$

Kerrointa β nimitetään tilavuuskertoimeksi. Plastista myötöä tapahtuu, jos $d\tau + \mu d\sigma > 0$. Palautumisehto on $d\tau + \mu d\sigma < 0$. Myötölujenemisen otaksutaan tapahtuvan seuraavasti

$$d\tau = h d\gamma^p \qquad \text{paineen ollessa } \sigma = \text{vakio}$$

$$d\tau + \mu d\sigma = h d\gamma^p \qquad \text{yleisessä tapauksessa.}$$

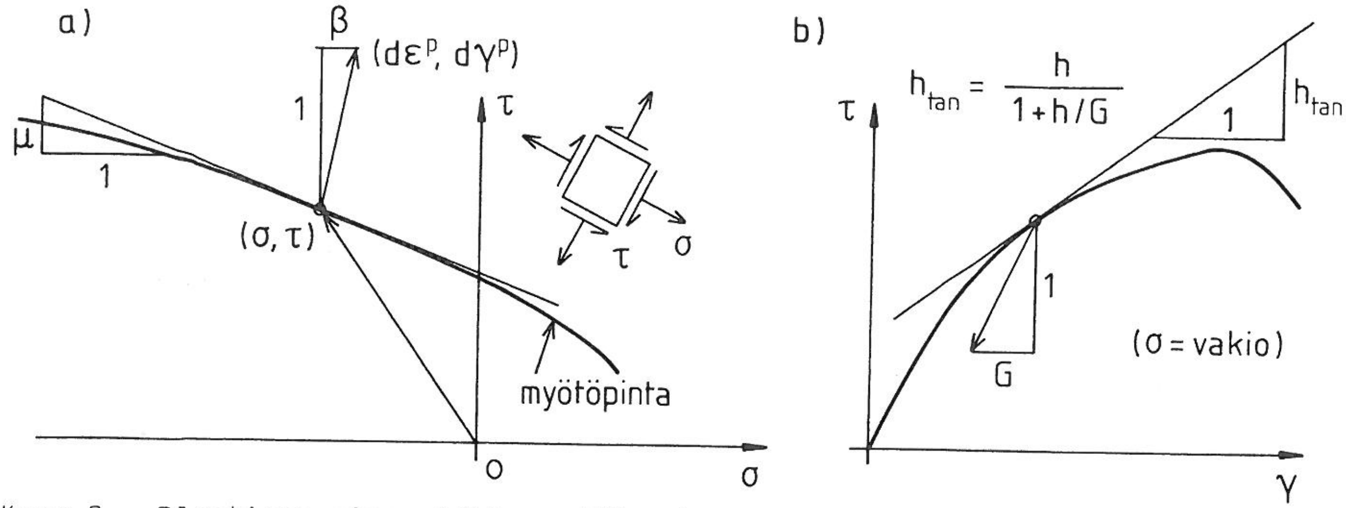
Edellä olevan perusteella saadaan konstitutiiviset yhtälöt

$$d\gamma = d\tau/G + (d\tau + \mu d\sigma)/h$$

$$d\varepsilon = d\sigma/G + \beta(d\tau + \mu d\sigma)/h \ .$$

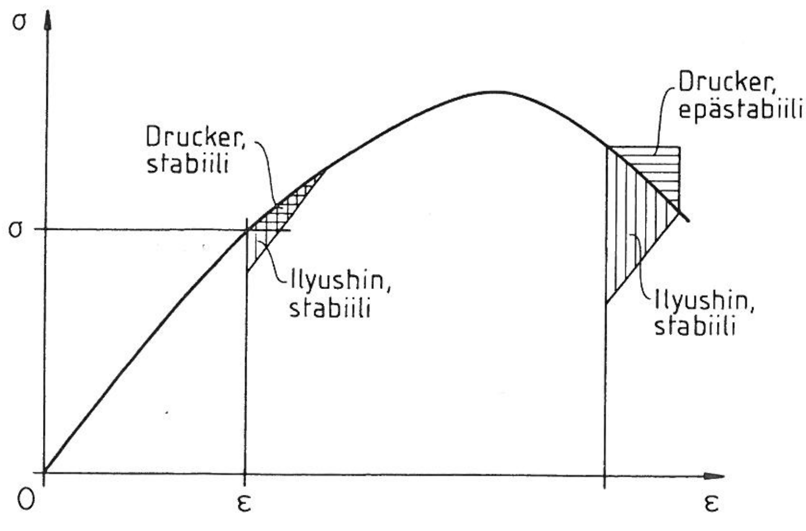
Plastinen moduuli h saadaan esim. leikkauskokeesta vakiopaineessa (kuva 2b) ja β mittaamalla tilavuuden laajeneminen samassa kokeessa ja piirtämällä kuvaaja ε - γ. Liukukerroin G voi olla jännitystilan mukana muuttuva. Edellä hahmotellun teorian avulla on mahdollista kuvata kallion muodonmuutoksia murtoon saakka tarkemmin kuin tavallisella plastisuusteorialla.

Naghdi & Trapp [8] huomauttavat, että klassisen plastisuusteorian mukaiset konstitutiiviset yhtälöt saattavat olla epäluotettavia jännitystilan ol-



Kuva 2. Plastinen aine, lähteen [7] mukaan.

lessa lähellä aineen murtolujuutta (esim. vetokokeessa vetolujuus, jolloin σ - ε -käyrän tangentti on vaakasuora). He osoittavat, että formuloimalla myötöehto ja myötösääntö venymien avulla edellä mainitut vaikeudet voidaan välttää. Myös pehmenevä aine, joka on Druckerin mielessä epästabiili ja siten klassisen plastisuusteorian pätevyysalueen ulkopuolella, on käsiteltävissä venymämyötöehdon avulla. Silloin pätee Ilyushinin stabiiliuspostulaatti, jonka mukaan suljetussa venymäkierroksessa suoritettu työ on positiivinen (kuva 3).



Kuva 3. Druckerin ja Ilyushinin stabiiliusmääritelmät.

Suurien muodonmuutosten tapauksessa konstitutiiviset yhtälöt voidaan lausua muodossa

$$\overset{*}{\sigma} = D\dot{\varepsilon}$$

jossa $\overset{*}{\sigma}$ on Eulerin jännityksen Jaumannin derivaatta (ainehiukkasen kiertoliikettä seuraava)

$$\overset{*}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik}\omega_{jk} - \sigma_{\ell j}\omega_{i\ell} \ ,$$

D konstitutiivinen matriisi, $\dot{\varepsilon}$ venymänopeus

$$\varepsilon_{ij} = (\partial v_i/\partial y_j + \partial v_j/\partial y_i)/2 \ ,$$

ja ω rotaationopeus

$$\omega_{ij} = (\partial v_i/\partial y_j - \partial v_j/\partial y_i)/2$$

$v = v(y,t)$ on nopeus kiinteän koordinaatiston y suhteen. Toinen mahdollisuus on muodostaa yhteys

$$\overset{*}{S} = \mathcal{D}\dot{E}$$

jossa $\overset{*}{S}$ on konvektiivisessa (materiaali-) koordinaatistossa lausutun Kirchhoffin jännityksen Jaumannin derivaatta

$$\overset{*}{S}{}^{ij} = \dot{S}^{ij} + G^{ik}S^{j\ell}\dot{E}_{k\ell} + G^{jk}S^{i\ell}\dot{E}_{k\ell}$$

ja $\dot{E}$ Greenin-Lagrangen venymän

$$E_{ij} = (\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i + \partial u_k/\partial x_i \partial u_k/\partial x_j)/2$$

aikaderivaatta. G on materiaalikoordinaatiston mittatensori. Konstitutiivisten yhtälöiden olennaiset probleemat liittyvät tietenkin matriisin D (tai $\mathcal{D}$) muodostamiseen, konstitutiivisten parametrien määrittelyyn ja kokeelliseen määritykseen, myötöehtojen ja -sääntöjen formulointiin ja todentamiseen jne. Tällä alueella on käsitykseni mukaan vielä hyvin paljon tehtävää.

Aineiden konstitutiiviset yhtälöt voidaan esittää integraalimuodossa (funktionaali), jossa riippuvat tilamuuttujat (sisäinen energia ja entropia) lausutaan riippumattomien tilamuuttujien (muodonmuutoskomponentit, lämpötila) ajan suhteen otettuina integraaleina. Tässä funktionaalisessa esitysmuodossa jännitykset riippuvat paitsi muodonmuutosten (ja lämpötilan) nykyarvoista myös niiden historiasta. Plastisuusteorian tapauksessa tämä esitysmuoto johtaa kuitenkin niin moninkertaisten integraalien määrään, että laskentatyö tulee kohtuuttomaksi. Plastisuusteorian kehittämisessä onkin ns. sisäisten muuttujien teoria saanut viime aikoina erityistä huomiota [10,11]. Siinä riippumattomien tilamuuttujien lisäksi otetaan käyttöön sisäisiä tilamuuttujia, joiden tarkoitus on teorian mahdollistaminen. Termodynamiikan laeista johdetaan tilamuuttujille evoluutioyhtälöt, joista päästään edelleen konstitutiivisiin yhtälöihin. Sisäisiä muuttujia ei yleensä voi mitata tai havaita eivätkä ne esiinny lopullisissa konstitutiivisissa yhtälöissä.

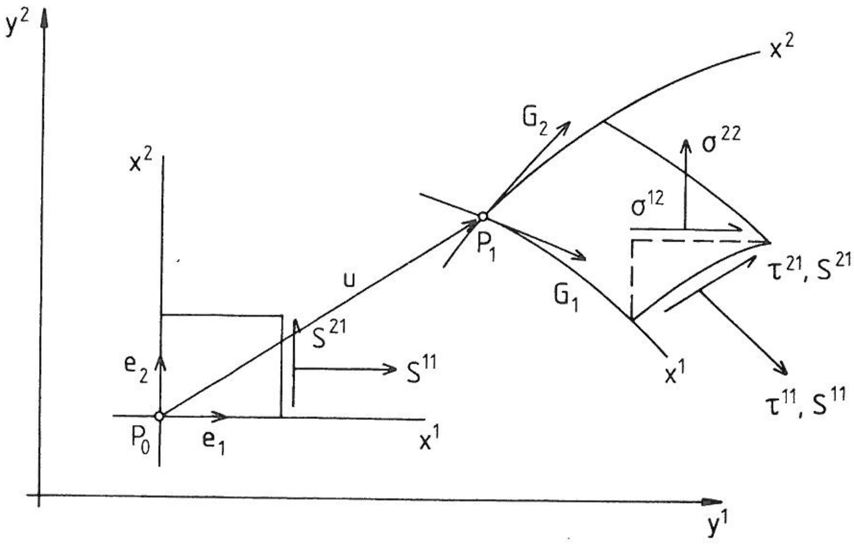
Suurten siirtymien ja muodonmuutosten tapauksessa tasapainoyhtälöt voidaan muodostaa joko avaruuden kiinteän koordinaatiston y suhteen tai ainepisteisiin kiinnitetyn, yleensä käyräviivaisen, materiaalikoordinaatiston x suhteen. Edellistä nimitetään Eulerin ja jälkimmäistä Lagrangen menettelyksi. Myös jännityskomponenttien määrittelyssä on tehtävä ero. Kuvassa 4 σ_{ij} on Eulerin (tai Cauchyn) jännitys kiinteässä y-koordinaatistossa, τ^{ij} on Cauchyn jännitys materiaalikoordinaatistossa ja S^{ij} Kirchhoffin jännitys materiaalikoordinaatistossa. Kirchhoffin jännitys on laskettu alkutilan deformoitumatonta pinta-alaa kohti. Sen yhteys Cauchyn jännitykseen on $S = J\tau$, jossa J on deformaatioon liittyvä Jacobin determinantti. Kirchhoffin jännitys voidaan kuvata myös alkutilaan, jolloin saadaan 2. Piola-Kirchhoffin jännitys. Tasapainoyhtälöt Eulerin menettelyn mukaan ovat

$$\partial\sigma_{ij}/\partial y_j + f_i = \rho\dot{v}_i$$

jossa tilavuusvoima f ja tiheys ρ lasketaan deformoituneessa tilassa. Lagrangen menettelyssä saadaan vastaavasti

$$\partial(S^{kj}\partial y_i/\partial x_k)/\partial x_j + f_{oi} = \rho_o\ddot{u}_i$$

jossa tilavuusvoima f_o ja tiheys ρ_o ovat alkutilan mukaiset. Funktio $y_i(x,t) = x_i + u_i(x,t)$ kuvaa ainepisteen liikettä.



Kuva 4. Suuret siirtymät, jännityksien määrittely.

Tasapainoyhtälöt voidaan muodostaa myös virtuaalisten siirtymien tai virtuaalisen tehon periaatteella. Tällöin saadaan

$$\int_V \sigma_{ij}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}dV = \int_S \tilde{v}_i n_j \sigma_{ij} dS + \int_V \tilde{v}_i (f_i - \rho\dot{v}_i)dV$$

tai

$$\int_{V_o} S^{ij}\delta E_{ij}dV_o = \int_{S_o} \delta u_i n_{oj}(S^{kj}\partial y_i/\partial x_k)dS_o + \int_{V_o} \delta u_i(f_{oi} - \rho_o \ddot{u}_i)dV_o$$

$\tilde{v}$ on virtuaalinen nopeus ja $\dot{\tilde{\varepsilon}}$ vastaava muodonmuutosnopeus, n ja n_o tarkoittavat kappaleen pinnan yksikkönormaaleja deformoituneessa ja alkutilassa.

Epälineaaristen probleemoiden ratkaiseminen analyyttisin keinoin onnistuu vain hyvin yksinkertaisissa tapauksissa. Yleensä on käytettävä numeerisia menetelmiä. Elementtimenetelmää käytettäessä tasapainoyhtälöt saavat muodon

$$R + M\ddot{q} = Q$$

jossa R on sisäisten voimien (jännitysten) vektori, M massamatriisi, q solmupistesiirtymien vektori ja Q ulkoisten voimien vektori. Usein joudutaan etenemään pienin aika- tai kuorma-askelin, jolloin käytetään inkrementaalista yhtälöä

$$^1K_t\Delta q + M^2\ddot{q} = {}^2Q - {}^1R \ .$$

Yläindeksit 1 ja 2 viittaavat lähekkäisiin tiloihin: tilasta 1 edetään tilaan 2.

Epälineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseen käytetään Newton-Raphson-tyyppisiä iterointimenetelmiä tai minimointimenetelmiä. Dynaamiset probleemat voidaan ratkaista suorilla numeerisilla aikaintegrointimenetelmillä, joko implisiittisillä tai eksplisiittisillä kaavoilla.

Epälineaaristen probleemien ratkaisemisessa on tavattomasti edistytty viime vuosina, mutta paljon on vielä ongelmia, joita ei hallita [12]. Diskretointi- ja ratkaisumenetelmien kehittämisen lisäksi on erityisesti selvitettävä menetelmien perusteita ja luotettavuutta. Suurten epälineaaristen probleemien ratkaiseminen tietokoneella on kallista, noin 10-1000-kertaista verrattuna vastaavien lineaaristen ratkaisujen hintaan. Sen takia menetelmien numeerinen kokeilu, vertailu ja testaus on kallista, eikä sitä useinkaan tehdä riittävän perusteellisesti.

RAKENTEIDEN MEKANIIKKA JA RAKENTEIDEN SUUNNITTELU

Rakenteiden suunnittelu parhaimmillaan on luovaa työtä, joka vaatii tekijältään taitoa ja intuitiota. Rakenteiden mekaniikka on suunnittelijan tärkeä apuneuvo. Sen hyvä hallitseminen saattaa antaa suunnittelijalle paremmat mahdollisuudet luovuutensa toteuttamiseen. Tietokoneen käyttö helpottaa myös suunnittelijan työtä. Alustavat suunnitelmat voidaan usein tehdä kokemuksen ja yksinkertaisten mallien ja käsinlaskuun sopivien kaavojen avulla, mutta tarkemmat laskelmat tai optimaalisten ratkaisujen haku suoritetaan tietokoneen avulla.

Tietokoneiden käytössä on kaksi suuntaa. Pientietokoneesta on tulossa suunnittelijan laskutikku, jonka avulla laskiessaan hänellä on koko ajan tuntuma käyttämiinsä menetelmiin ja niiden perusteisiin. Suurien probleemien ratkaisemiseen käytetään suuria tietokoneita ja ohjelmistoja, joihin perehtyminen yksityiskohtaisesti ei yleensä ole suunnittelijalle mahdollista. Suurta ohjelmistoa käyttäessään suunnittelijan on huolellisesti harkittava probleeman fysikaalista perustaa ja sopivan yksinkertaisen mallin muodostamista.

Suunnittelija ja tietokone muodostavat tehokkaan suunnitteluyksikön toimiessaan jatkuvassa vuorovaikutuksessa. Iteroimalla etsitään optimaalinen ratkaisu. Kohdefunktiot eivät tosin aina ole helposti määriteltäviä. Kustannukset ovat suhteellisen helposti minimoitavissa mutta luotettavuuden, toimivuuden tai ulkonäön kvantitatiivinen arviointi tai sopivan tason valitseminen on vaikeata.

RAKENTEIDEN MEKANIIKAN OPETUS

Voi tuntua paradoksaaliselta, että tietokoneiden käyttö on siirtänyt rakenteiden mekaniikan opetuksen painopistettä peruskäsitteisiin ja niiden ymmärtämiseen päin. Se on kuitenkin käsitettävissä jos ajatellaan, että on voitu vähentää erilaisten menetelmien, graafisten ja analyyttisten, osuutta opetettavasta aineksesta. Perusopetuksessa on pyrittävä antamaan käsitys rakenteiden toiminnasta kuormien alaisena. Mielestäni siihen päästään käyttämällä yksinkertaisia käsinlaskukaavoja, piirtämällä taivutusmomentti- ja leikkausvoimapintoja, havainnollistamalla rakenteiden toimintaa pienoismalleilla, yms. keinoilla. Myös rakenteiden mekaniikkaa tukevien perusaineiden, mekaniikan, matematiikan, numeerisen analyysin ja tietokoneohjelmoinnin, riittävä hallitseminen on tärkeätä.

KIRJALLISUUTTA

[1] Malvern, L.E., Introduction to the mechanics of a continuous medium. Prentice-Hall, 1969.

[2] Prager, W., On elastic, perfectly locking materials. Proc. 11th Int. Conf. Appl. Mech. Munich 1964. Springer-Verlag, 1966, 538-544.

[3] Valanis, K.C., A theory of viscoplasticity without a yield surface. Part I. General theory. Part II. Application to the mechanical behavior of metals. Arch. Mech. Stosowanej 24 (1971), 517-533 ja 535-551.

[4] Dougill, J.W., On stable progressively fracturing solids. J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 27 (1976) 423-437.

[5] Bažant, Z.P. & Kim, S-S., Plastic-fracturing theory for concrete. J. Engng. Mech. Div. 105 (1979) EM3, 407-428.

[6] Dragon, A. & Mróz, Z., A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete. Int. J. Eng. Sci. 17 (1979), 121-137.

[7] Rudnicki, J.W. & Rice, J.R., Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. J. Mech. Phys. Solids, 23 (1975), 371-394.

[8] Naghdi, P.M. & Trapp, J.A., The significance of formulating plasticity theory with reference to loading surfaces in strain space. Int. J. Eng. Sci. 13 (1975), 785-797.

[9] Hill, R., Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time. J. Mech. Phys. Solids, 7 (1959), 209-225.

[10] Schapery, R.A., On a thermodynamic constitutive theory and its application to various nonlinear materials. Proc. IUTAM Symposium, East Kilbride. Springer, 1968, 259-285.

[11] Onat, E.T., Representation of inelastic mechanical behavior by means of state variables. Proc. IUTAM Symposium, East Kilbride. Springer, 1968, 213-225.

[12] Oden, J.T. & Bathe, K.J., A commentary on computational mechanics. Appl. Mech. Reviews, 31 (1978) 8, 1053-1058.

[13] Schrem, E., Trends and aspects of the development of large finite element software systems. Computers & Structures, 10 (1979) 1/2, 419-425.

[14] Irons, B. & Ahmad, S., Techniques of finite elements. Ellis Horwood Ltd., 1980.

Martti Mikkola, prof., Teknillinen korkeakoulu, Rakennusinsinööriosasto