ITEROINTI EPÄLINEAARISESSA JÄNNITYSANALYYSISSÄ

Kari Ikonen

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 13
No 1 1980 s. 14-19

YHTEENVETO: Epälineaarisessa jännitysanalyysissä rakennetta koskevat yhtälöt ratkaistaan tavallisesti iteroimalla. Tässä kirjoituksessa esitetään eräs tapa johtaa elementtimenetelmää varten Newton-Raphsonin modifioitu iterointimenetelmä. Tämä menetelmä sopii hyvin metallirakenteiden epälineaarisiin analyyseihin. Iterointikaavaa johdettaessa otetaan huomioon, että kuormitus voi mekaanisen kuorman lisäksi sisältää myös epätasaisen lämpötilan aiheuttaman rasituksen.

JOHDANTO

Rajoitetaan tarkastelu koskemaan fysikaalisesti epälineaarista tilannetta, jossa kuormituksen muutokset ovat niin hitaita, että hitausvoimia ei tarvitse ottaa huomioon. Johdetaan iterointikaava yhden kuormanlisäyksen käsittelemiseksi.

Kuormituksen ja muodonmuutoksen välisen riippuvuuden johtamiseksi tarkastellaan solmupistesiirtymävektorin $\{a\}$ virtuaalista muutosta $\delta\{a\}$ ja asetetaan virtuaalinen muodonmuutostyö ja ulkoisen kuorman tekemä virtuaalinen työ yhtä suuriksi, jolloin saadaan

$$\int_V \delta\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV - \int_{V_b} \delta\{u\}^T\{b\}dV_b - \int_{A_s} \delta\{u\}^T\{s\}dA_s = \delta\{a\}^T\{q\} , \qquad (1)$$

jossa

$\{\varepsilon\}$ on venymävektori,
$\{\sigma\}$ on jännitysvektori,
V on tilavuus,
$\{u\}$ on siirtymävektori,
$\{b\}$ on tilavuuskuormavektori,
V_b on jakaantuneiden tilavuuskuormien vaikutustilavuus,
$\{s\}$ on pintakuormavektori
A_s on jakaantuneiden pintakuormien vaikutuspinta-ala ja
$\{q\}$ on solmupistekuormavektori.

Esitetään siirtymävektori $\{u\}$ ja venymävektori $\{\varepsilon\}$ solmupistesiirtymien $\{a\}$ avulla elementtimenetelmän tapaan seuraavasti

$$\{u\} = [N]\{a\}$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{a\} \ ,$$

missä [N] on koko rakenteen muotofunktiomatriisi ja [B] on koko rakenteen venymämatriisi, jolloin yhtälöstä (1) saadaan tulos

$$\delta\{a\}^T \int_V [B]^T\{\sigma\}dV = \delta\{a\}^T \left(\int_{V_b} [N]^T\{b\}dV_b - \int_{A_s} [N]^T\{s\}dA_s - \{q\} \right) .$$

Koska tämä yhtälö toteutuu mielivaltaisella $\delta\{a\}$:n arvolla, saadaan merkitsemällä oikean puolen kaarisulkulauseketta {R}:llä

$$\int_V [B]^T\{\sigma\}dV = \{R\} \ . \tag{2}$$

Kuormavektori {R} muodostuu kaikista ulkoisista mekaanisista kuormista. Kuten kaavan (2) johtamisesta ilmenee, vektoriin {R} ei sisälly lämpökuormaan liittyviä termejä.

ITEROINTIKAAVAN JOHTAMINEN

Aloitetaan tarkastelu kaavasta (2). Oletetaan, että venymämatriisi B ei riipu kuormituksesta ts. muodonmuutokset ovat pieniä. Differentioimalla kaavasta (2) saadaan yhtälö

$$\int_V [B]^T d\{\sigma\}dV = d\{R\} \ . \tag{3}$$

Oletetaan, että jännityksen ja venymän välinen riippuvuus on materiaalisesti epälineaarisessa muodonmuutoksessa kirjoitettavissa seuraavasti

$$d\{\sigma\} = [D]_{ep}(d\{\varepsilon\}-d\{\varepsilon\}_t) = ([D]_e-[D]_p)(d\{\varepsilon\}-d\{\varepsilon\}_t) \ , \tag{4}$$

jossa

$[D]_{ep}$ on elastoplastinen matriisi,
$[D]_e$ on kimmomatriisi,
$[D]_p$ on $[D]_{ep}$:n plastinen osa ja
$\{\varepsilon\}_t$ on lämpövenymävektori.

Matriisi $[D]_e$ on vakiomatriisi, mutta matriisi $[D]_p$ muuttuu materiaaliin kohdistetun muodonmuutoksen mukana. Lähteessä /1 s. 463/ matriisille $[D]_p$ on johdettu seuraava laskentakaava

$$[D]_p = [D]_e\{\frac{\partial Q}{\partial\{\sigma\}}\}\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\}^T[D]_e[A+\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\}^T[D]_e\{\frac{\partial Q}{\partial\{\sigma\}}\}]^{-1} ,$$

jossa Q on plastinen potentiaali, F myötöfunktio (myötöpinnalla F = 0) ja A on materiaalin lujittumista kuvaava parametri. Jos valitaan Q = F, kuten usein menetellään, sovelletaan ns. assosiatiivista myötösääntöä.

Sijoitetaan lauseke (4) yhtälöön (3), jolloin saadaan

$$d\{a\} = [K]_e^{-1}(d\{R\}+\int_V [B]^T[D]_e d\{\varepsilon\}_t dV+\int_V [B]^T[D]_p(d\{\varepsilon\}-d\{\varepsilon\}_t)dV) , \tag{5}$$

jossa

$$[K]_e = \int_V [B]^T[D]_e[B]dV$$

on rakenteen lineaarinen jäykkyysmatriisi.

Kaavan (5) muotoon päädyttiin, jotta saatiin oikealle puolelle iterointia silmälläpitäen vakiona pysyvä kerroinmatriisi $[K]_e^{-1}$. Käytännössä matriisi $[K]_e$ saatetaan muotoon $[K]_e = [S]^T x[S]$, jossa matriisi [S] on yläkolmiomatriisi. Matriisin [S] muodostaminen vie tietokoneaikaa, mutta se on tehtävä vain kerran. Kun matriisi [S] on muodostettu, on yhtälön (5) oikean puolen laskeminen nopeata. Kysymyksessä on Choleskyn dekompositiomenetelmän soveltaminen lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseen.

Epälineaarisissa analyyseissä menetellään yleisesti siten, että kuormitusta muutetaan sopivan suuruisin portain. Merkitään mekaanisen kuorman {R} muutosta $\Delta\{R\}$:llä ja samanaikaisesti tapahtuvaa lämpötilan muutosta ΔT:lla, jolloin lämpövenymävektorin muutoksen $\Delta\{\varepsilon\}_t$ venymäkomponentit ovat $\alpha\Delta T$, missä α on lämpöpitenemiskerroin. Äärellisiä muutoksia koskevan kaavan johtamiseksi integroidaan kaava (5). Otetaan käyttöön integrointimuuttuja η ja esitetään integroimisvälillä $0 \leq \eta \leq 1$ tapahtuvat muutokset seuraavasti:

$$d\{a\} = \Delta\{a\}d\eta ,$$

$$d\{R\} = \Delta\{R\}d\eta ,$$

$$d\{\varepsilon\}_t = \Delta\{\varepsilon\}_t d\eta \quad \text{ja}$$

$$d\{\varepsilon\} - d\{\varepsilon\}_t = (\Delta\{\varepsilon\}-\Delta\{\varepsilon\}_t)d\eta .$$

Näiden lausekkeiden sijoittaminen kaavaan (5) mahdollistaa integroinnin, mutta merkitsee samalla rajoitusta, koska vektoreiden {a}, {R} ja $\{\varepsilon\}_t$ komponentit muuttuvat lineaarisesti η:n funktiona. Integroimalla kaava (5) saadaan yhtälö

$$\int_0^1 \Delta\{a\}d\eta = [K]_e^{-1}(\int_0^1 \Delta\{R\}d\eta+\int_V [B]^T[D]_e\int_0^1 \Delta\{\varepsilon\}_t d\eta dV) +$$

$$+ [K]_e^{-1}\int_V [B]^T[\int_o^1 [D]_p([B]\Delta\{a\}-\Delta\{\varepsilon\}_t)d\eta]dV .$$

Kun tämän viimeinen integraali muuttujan η suhteen muutetaan numeerisia laskuja varten summamuotoon, saadaan edelleen yhtälö

$$\Delta\{a\} = [K]_e^{-1}(\Delta\{R\}+\int_V [B]^T[D]_e\Delta\{\varepsilon\}_t dV) + [K]_e^{-1}\int_V [B]^T \sum_{n=1}^{N} [D]_{p_n}\frac{1}{N}([B]\Delta\{a\}-\Delta\{a\}_t)dV . \tag{6}$$

Merkitään yhtälössä (6)

$$\Delta\{a\}_o = [K]_e^{-1}(\Delta\{R\}+\int_V [B]^T[D]_e\Delta\{\varepsilon\}_t dV) , \tag{7}$$

joka on kuorman muutosta vastaava lineaarisen teorian mukainen siirtymän muutos. Tätä arvoa voidaan käyttää iteraatiossa vektorin $\Delta\{a\}$ aloitusarvona. Kaavasta (6) saadaan iterointikaava

$$\Delta\{a\}_i = \Delta\{a\}_o + [K]_e^{-1}\int_V [B]^T[\sum_{n=1}^{N} [D]_{p_n}\frac{1}{N}([B]\Delta\{a\}_{i-1}-\Delta\{\varepsilon\}_t)]dV , \tag{8}$$

jossa $i \geq 1$.

Tämä iterointikaava on ns. modifioitu Newton-Raphsonin menetelmä, koska kerroinmatriisi $[K]_e^{-1}$ ei muutu iteroinnissa (viite /1 s. 454/).

Lämpökuorma tulee huomioonotetuksi siten, että se muutetaan kaavassa (7) ekvivalentiksi vektoriksi

$$\int_V [B]^T[D]_e\Delta\{\varepsilon\}_t dV ,$$

joka vastaa lämpömuodonmuutokset estävää solmupistekuormavektoria.

ITEROINNIN SUPPENEMISEN SEURAAMINEN JA JÄNNITYSTILAN PÄIVITTÄMINEN

Iterointikaavassa (8) termi

$$\Delta\{\sigma\}_{p_{i-1}} = \sum_{n=1}^{N} [D]_{p_n}\frac{1}{N}([B]\Delta\{a\}_{i-1}-\Delta\{\varepsilon\}_t)dV \tag{9}$$

on jännityksen muutoksen plastinen osa ja integraali

$$\{r\}_{i-1} = \int_V [B]^T\Delta\{\sigma\}_{p_{i-1}}dV$$

on luenteeltaan kuormavektori.

Iteroinnin suppenemista seurataan siten, että kun erotusvektori

$$\{r\}_{i-1} - \{r\}_{i-2}$$

tulee riittävän pieneksi vektoriin $\{r\}_{i-1}$ verrattuna, on iterointi katsottu supenneeksi. Vaihtoehtoisesti voidaan erotusvektoria $\Delta\{a\}_{i-1} - \Delta\{a\}_{i-2}$ verrata vektoriin $\Delta\{a\}_{i-1}$.

Vasta suppenemisen jälkeen jännitystila voidaan päivittää. Plastinen jännityksen muutos saadaan kaavasta (9) ja todellinen muutos $\Delta\{\sigma\}$ jännitystilaan lasketaan kaavaa (4) soveltaen, jolloin saadaan

$$\Delta\{\sigma\} = \Delta\{\sigma\}_e - \Delta\{\sigma\}_p = [D]_e([B]\Delta\{a\}-\Delta\{\varepsilon\}_t) - \Delta\{\sigma\}_p \; . \tag{10}$$

PLASTISEN JÄNNITYKSEN MUUTOKSEN LASKEMISEN YKSITYISKOHDISTA

Merkitään vaikuttavaa jännitystilaa symbolilla $\{\sigma\}_1$ ennen muodonmuutosta (ks. kaava (9))

$$\Delta\{\varepsilon\}' = [B]\Delta\{a\}_{i-1} - \Delta\{\varepsilon\}_t \; .$$

Jos oletetaan, että jännitystila $\{\sigma\}_1$ on myötöpinnalla tai myötöpinnan sisäpuolella ja kaavasta

$$\{\sigma\}_2 = \{\sigma\}_1 + [D]_e\Delta\{\varepsilon\}' \tag{11}$$

laskettava lineaarisen teorian mukainen jännitystila $\{\sigma\}_2$ on myötöpinnan sisäpuolella, on luonnollisesti $\Delta\{\sigma\}_{p_{i-1}} = 0$ ja tapahtuu vain lineaarinen jännityksen muutos, jolloin kaavassa (4) $[D]_p = 0$. Menetelmä sallii pysyvät (plastiset) muodonmuutokset ja kuorman alentamisen.

Jos taas epälineaarista muodonmuutosta tapahtuu, on yhtälön (11) mukainen jännityksen lauseke

$$\{\sigma\} = \{\sigma\}_1 + r[D]_e\Delta\{\varepsilon\}' \; ,$$

jossa $0 \leq r \leq 1$, voimassa vain myötöpinnalle saakka. Kertoimen r arvo $\bar{r}$ myötämisen alkaessa on laskettavissa iteratiivisesti $(F\{\sigma\}) = 0)$, kuten viitteessä /2 s. 132/ on esitetty. Viitteessä /3 s. 20/ on myös havainnollistettu numeerisella esimerkillä kertoimen $\bar{r}$ laskemista. Kun kerroin $\bar{r}$ on määritetty, voidaan jännitystila $\{\sigma\}_a$ myötämisen alkaessa laskea kaavasta (12). Muodonmuutoksesta $\Delta\{\varepsilon\}'$ epälineaariseen muodonmuutokseen liittyvä osuus $\Delta\{\bar{\varepsilon}\}$ on

$$\Delta\{\bar{\varepsilon}\} = (1-\bar{r})\Delta\{\varepsilon\}' \ .$$

Tämä venymä jaetaan N osaan kaavaa (9) varten ja merkitään

$$\delta\{\bar{\varepsilon}\} = \frac{\Delta\{\bar{\varepsilon}\}}{N} \ ,$$

jolloin

$$\Delta\{\sigma\}_{p_{i-1}} = \sum_{n=1}^{N} [D]_{p_n} \delta\{\bar{\varepsilon}\} \ .$$

Kunkin askeleen $\delta\{\bar{\varepsilon}\}$ alussa jännitystila tunnetaan ja matriisi $[D]_{p_n}$ voidaan laskea. Yksityiskohdat matriisin $[D]_{p_n}$ laskemiseksi on esitetty viitteessä /2/. Viitteessä /3 s. 27/ asiaa on havainnollistettu numeerisella esimerkillä. Viitteessä /3/ on lisäksi esitetty tietokoneohjelma, jolla voidaan analysoida tasojännitystiloja, kun käytetään von Misesin myötöehtoa ja siihen liittyvää myötösääntöä.

KIRJALLISUUTTA

[1] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method. Third Edition. McGraw-Hill, 1977. 787 s.

[2] Nayak, G.C., Zienkiewicz, O.C., Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Icluding Strain Softening. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, 113-135 (1972).

[3] Ikonen, K., Tasojännitystilan epälineaarinen analyysi. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, ydinvoimatekniikan laboratorio, tiedonaton 41. 1979. 45 s.

Kari Ikonen, tekn.lis., Valtion teknillinen tutkimuskeskus