

# LINEAARISTEN RAJOITUSYHTÄLÖIDEN KÄYTÄNNÖN SOVELLUTUSESIMERKKEJÄ

Jorma Köliö

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 13  
No 1 1980 s. 10-13

**YHTEENVETO:** Artikkelissa esitellään eräitä käytännössä tyypillisiä rakenteiden analyysissä esiintyviä tapauksia, joissa lineaaristen rajoitusyhtälöiden käyttö on edullista.

## JOHDANTO

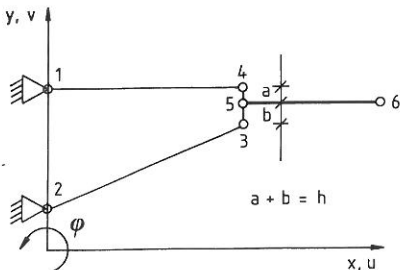
Elementti- ja differenssimenetelmän sovellutuksissa joudutaan usein tilanteisiin, joissa lineaaristen rajoitusyhtälöiden määrittäminen eri vapausasteiden välille on joko välttämätöntä, luontevaa tai taloudellista. Tällöin tehtävän tuntemattomat eivät ole vapaita, vaan niitä sitovat tyyppejä

$$\sum a_i \cdot \text{dof}_i = \beta \quad (1)$$

olevat yhtälöt, joissa  $a_i$  on vapausasteen  $\text{dof}_i$  vakiokerroin ja  $\beta$  haluttu vakiotermin. Tällaisten ehtojen käyttö on nykyisin mahdollista useiden valmisohjelmien yhteydessä. Seuraavassa esitellään eräitä tyypillisiä käytännön esimerkkejä.

## ESIMERKKEJÄ

Esimerkki 1. Tasokehäsauvan liittäminen levyelementtiin



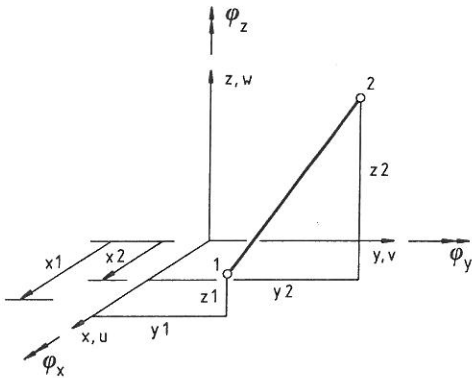
$$\left. \begin{aligned} u_5 - \frac{b}{h}u_4 - \frac{a}{h}u_3 &= 0, \\ v_5 - \frac{b}{h}v_4 - \frac{a}{h}v_3 &= 0, \\ \varphi_5 - \frac{1}{h}(u_3 - u_4) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Yhtälöt voidaan muodostaa analogisesti useammassakin dimensiossa, esim. mikäli tietyt osat rakenteesta on tarkasteltava yleisenä ohutkuoriraken-

teena ja sekundääriosissa tyydytään sauva-approksimaatioon, voidaan yhtälöt (2) yleistää toteuttamaan teknisen taivutusteorian otaksumat rajapinnalla.

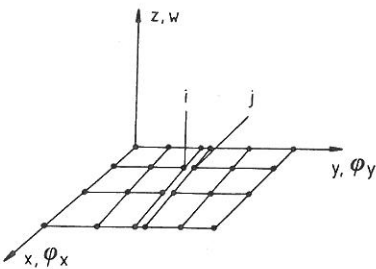
Esimerkki 2. Jäykkä sauva

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_{x2} - \varphi_{x1} &= 0, \\
 \varphi_{y2} - \varphi_{y1} &= 0, \\
 \varphi_{z2} - \varphi_{z1} &= 0, \\
 u_2 - u_1 - (z_2 - z_1)\varphi_{y1} + (y_2 - y_1)\varphi_{z1} &= 0, \\
 v_2 - v_1 + (z_2 - z_1)\varphi_{x1} - (x_2 - x_1)\varphi_{z1} &= 0, \\
 w_2 - w_1 - (y_2 - y_1)\varphi_{x1} + (x_2 - x_1)\varphi_{y1} &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



Sitomalla useampia solmuja toisiinsa yhtälön (3) mukaisesti, voidaan muodostaa jäykkiä alueita esim. kehänurkkien epäkeskisyyksien kuvaamiseksi.

Esimerkki 3. Laatan liikuntasaumot

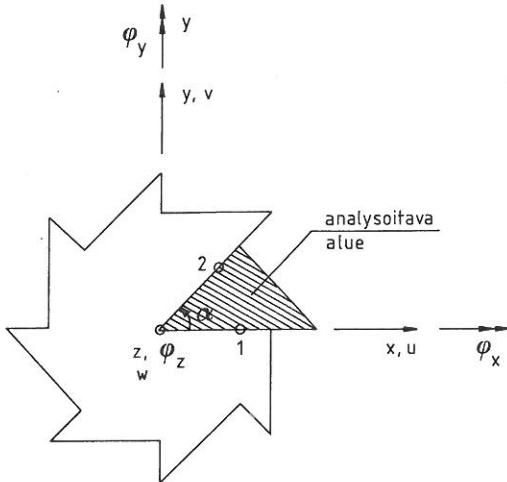


$$\left. \begin{aligned}
 w_i - w_j &= 0, \\
 \varphi_{yi} - \varphi_{yj} &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Yhtälö (4) määriteltynä kaikille pisteille sauman molemmin puolin aiheuttaa momenttiin liittyvän nivelen.

Esimerkki 4. Syklinen symmetria

Tarvittavat yhtälöt sektorin  $\alpha$  vastinpisteille:



$$u_2 - u_1 \cos \alpha + v_1 \sin \alpha = 0 ,$$

$$v_2 - u_1 \sin \alpha - v_1 \cos \alpha = 0 ,$$

$$w_2 - w_1 = 0 ,$$

$$\varphi_{x_2} - \varphi_{x_1} \cos \alpha + \varphi_{y_1} \sin \alpha = 0 ,$$

$$\varphi_{y_2} - \varphi_{x_1} \sin \alpha - \varphi_{y_1} \cos \alpha = 0 ,$$

$$\varphi_{z_2} - \varphi_{z_1} = 0 ,$$

Origion reunaehdot:

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0 ,$$

$$\varphi_{x_0} = \varphi_{y_0} = \varphi_{z_0} = 0 .$$

(5)

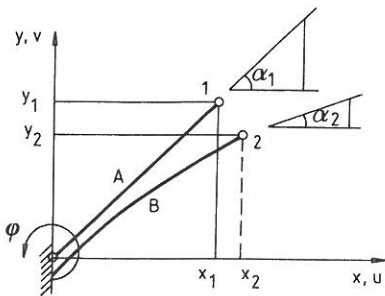
Syklinen symmetria syntyy, jos rakenteen siirtymätila on symmetrinen tietyn keskuskulman jaksolla; pyörähdysymmetria on tämän erikoistapaus, jolloin kulma  $\alpha$  voidaan valita vapaasti.

Yhtälöt voidaan kirjoittaa vastaavasti myös sykliselle antisymmetrialle, joka on käyttökelpoinen antisymmetristen ominaisvärähtelymuotojen määräämisessä.

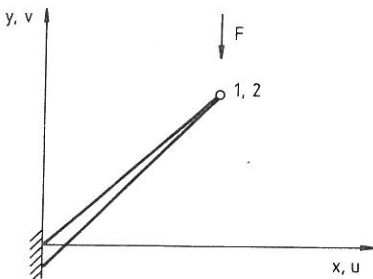
Esimerkki 5. Esikiristykset ja muotovirheet

Usein rakenneosat liitetään toisiinsa mekaanisilla liitoselimillä siten, että rakenteeseen syntyy joko "toivottu tai ei-toivottu" alkujännitystilä. Tämän ja mahdollisten muiden kuormitustilanteiden selvittämisessä voidaan usein myös käyttää rajoitusyhtälöitä; esim:

Halutaan sitoa tasossa xy ulokepalkkien A ja B pisteet 1 ja 2 toisiinsa siten, että ne liittyvät ja saavat saman kaltevuuskulman, sekä toimivat näin myös lisäkuormien F vaikuttaessa.



Ennen sidontaa



Sidonnan jälkeen

Tarvittavat yhtälöt:

$$\left. \begin{aligned} u_2 - u_1 &= x_1 - x_2, \\ v_2 - v_1 &= y_1 - y_2, \\ \varphi_2 - \varphi_1 &= \alpha_1 - \alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Tällöin ensimmäinen kuormitustapaus voisi olla nolla-kuormituksille esijännitystilän selvittämiseksi ja toinen, kun rakenteeseen lisäksi vaikuttaa kuormatila F.

Yhtälöt (6) voidaan yleistää ohutkuorirakenteille, 3-dim. jännitystilään jne., mutta on tarkistettava, etteivät yhtälöt ylitä pienten siirtymien ja kiertymien ehtoja lineaarista teoriaa soveltavien elementtien yhteydessä. Laajimmat valmisohjelmistot kykenevät toteuttamaan rajoitusyhtälöt myös geometrisesti epälineaarisisissa analyyseissä.