

Markku Heinisuo

YHTEENVETO: Artikkelissa käsitellään liitosta, jossa jähmeää kappaletta painetaan suoran levyn reunaan. Levyssä syntyy tasapintainen jännitystila. Leimasimen reuna on suora ja pituus äärellinen. Painavan voiman ollessa epäkeskinen voidaan se jakaa keskeiseen voimaan P ja momenttiin M . Tässä yhteydessä tutkitaan momentin aiheuttamaa pohjapainetta ja leimasimen kallistumaa ϕ . Oletetaan, että kuormitus siirtyy levyyn ainoastaan pohjapaineen p välityksellä (kitkaton tapaus). Likiratkaisu perustuu jäykkyyden ääriarvoperiaatteen, jonka käyttö klassisen levyteorian rinnalla osoittautuu sangen käyttökelpoiseksi likimääräisratkaisussa, etenkin kun tarkat tulokset ovat erittäin monimutkaisia. Pohjapaineeksi otaksutaan polynomifunktio. Tuloksia verrataan tarkkaan arvoon.

JOHDANTO

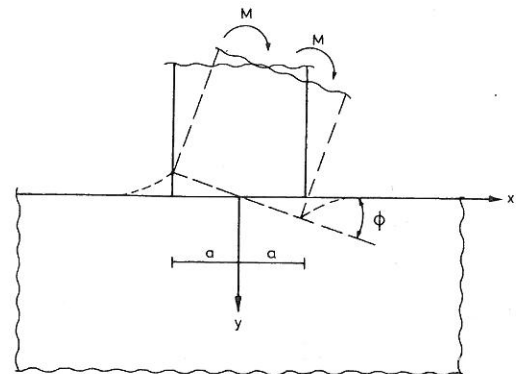
Jähmeän leimasimen aiheuttama tasojaännitystila on lukuisten kosketusprobleemien erikoistapaus. Kosketusprobleemien kimmoteoreettisen ratkaisun historian katsotaan alkaneen vuonna 1881, jolloin julkaistiin kuuluisa Hertzin teos. Likimenetelmien historia on paljon nuorempi ja se alkaa vuonna 1959 julkaistusta Signorinin teoksesta. Seuraavassa tutkitaan tapaus, jossa jähmeää, suoraa, $2a$:n mittaista ja aluslevyn levyistä leimasinta käännetään levyn reunassa momentilla M . Tasapintainen jännitystila on kirjallisuudessa todettu riittävän tarkaksi kyseisessä tapauksessa. Liitos oletetaan kitkattomaksi, mikä lisää varmuutta käytännön sovellutuksissa. Saumaan sallitaan vetojaännitykset, mikä taas vähentää tulosten sovellutusmahdollisuuksia. Tällöin kosketuspinta säilyy vakiona kuormituksen muuttuessa ja superpositioperiaate on voimassa. Momentti M esiintyy harvoin yksin. Yleensä kuormana on sekä M että keskeinen puristusvoima P . Jos M ja P vaikuttavat yhdessä leimasimeen, joka on yhdistetty aluslevyyn vetoa kestävämmällä saumalla, niin teoksen /3/ mukaan leimasin ei irtoa alustasta, jos $M < Pa/2$. Tällöin voidaan superponoida P :n ja M :n vaikutus, jolloin momentti M määrittää yksin leimasimen kiertymän ϕ . Tapaus $Pa/2 \leq M < Pa$ on laskettu teoksessa /3/. Jos $M \geq Pa$ ja sauma ei kestä vetoa, niin leimasin kaatuu. Keskeisen voiman P aiheuttama painuma on äärettömän suuri. Tätä pulmaa ovat kiertäneet mm. Schwartz ja Harper olettamalla, että aluslevy on ympyränmuotoinen. Kiertymälle ϕ saadaan St Venantin periaatteen mukaan äärellinen arvo. Symmetrisen tapauksen tarkan pohjapaineen ratkaisi Sadowsky v. 1928.

Momentin M aiheuttamalle kiertymälle ϕ on esitetty tarkka ratkaisu jo 1900-luvun alkupuolella. Vuonna 1953 julkaistussa teoksessa /2/ on tulokset esitetty englanninkielellä. Tarkka ratkaisu on sangen työläs, ja sovellutuksissa on approksimoitu mm. pohjapainejakaumaa. Kosketusprobleemoissa jännityshuiput usein kasvavat äärettömän suuriksi, jolloin tapahtuu paikallista myötäämistä, mikä tasottaa huippuarvot. Koska jännityshuiput ovat lisäksi voimakkaasti vaimenevia, niin rakennusteknisissä sovellutuksissa jännityskuvioiden tarkka tuntemus ei ole kovin oleellista, vaan kosketuspinta vaikuttaa muun rakenteen toimintaan lähinnä muodonmuutosten kautta. Vakavuustarkastelu suoritetaan yleensä plastisuusteorian mukaan (esim. /5/).

Tässä artikkelissa kiertymä ϕ lasketaan teoksessa /1/ esitetyllä keskimääräisen kiertymän kaavalla, johon päädytään otaksumalla leimasimen ja alustan välille suoraviivainen pohjapaine sekä käyttämällä hyväksi teoksessa /1/ määriteltyä jäykkyyksikäsitettä. Suoraviivainen jännitysarvaus on staattisesti määrätty. Artikkelissa johdetaan laskukaavat, kun pohjapaineeksi oletetaan antimetrisen polynomifunktio. Ratkaisu perustuu jäykkyyden ääriarvoperiaatteeseen (/1/) sekä klassiseen levyteoriaan. Sovellutusosassa lasketaan suoraviivaisen ja kolmannen asteen pohjapainejakautuman mukaiset kiertymän arvot.

KIERTYMÄN LASKUKAAVA

Tarkastellaan kuvan 1 mukaista tapausta. Oletetaan, että suora leimasin on jähmeä ja kuormituksena on momentti M . Saumavälittää normaalijännitykset, mutta ei leikkausjännityksiä. Aluslevyn paksuus on yksi. Aluslevyyn syntyy tasapintainen jännitystilä eli kuvan 1 koordinaatistossa $\sigma_z \equiv \tau_{xz} \equiv \tau_{yz} \equiv 0$. St Venantin periaatteen mukaan riittää, kun tutkimme leimasimen välitöntä läheisyyttä, kun aluslevyn liikkuminen jähmeänä kappaleena on jollain keinolla estetty. Aluslevyn kimmokerroin E ja Poissonin vakio on ν .



Kuva 1. Koordinaatit

Määritellään teoksen /1/ mukaan liitoksen jäykkyys

$$D = \frac{M}{\phi}. \quad (1)$$

Clapeyronin säännön mukaan kimmoenergia W on

$$W = \frac{1}{2} M\phi. \quad (2)$$

Olkoon pohjapaineen jakauma $p(x)$ ja levyn siirtymä koordinaatin y suunnassa v . Merkitään reunan siirtymää $v(x,0)$

$$v(x,0) = v(x). \quad (3)$$

Koska oletettiin, että kuormitus siirtyy aluslevyyn ainoastaan pohjapaineen $p(x)$ välityksellä, niin

$$W = \frac{1}{2} \int_{-a}^a p(x)v(x)dx. \quad (4)$$

Yhdistämällä (1), (2) ja (3) saadaan

$$D = \frac{M^2}{a \int_{-a}^a p(x)v(x)dx}. \quad (5)$$

Jos pohjapaine on suoraviivainen

$$p(x) = p_1 \frac{x}{a}, \quad (6)$$

niin leimasin on tasapainossa, kun

$$p_1 = \frac{3M}{2a^2}. \quad (7)$$

Jäykkyydeksi D saadaan nyt kaavasta (5)

$$D_1 = \frac{M}{\frac{a \int_{-a}^a xv(x)dx}{I}}, \quad (8)$$

missä

$$I = \frac{(2a)^3 \cdot 1}{12}. \quad (9)$$

Sovimme nyt (kuten teoksessa /1/ on ehdotettu taivutetulle palkille) keskimääräiseksi kiertymäksi kaavan (8) nimittäjän eli

$$\phi_{\text{keskim.}} = \frac{\int_{-a}^a xv(x)dx}{I}. \quad (10)$$

Jos tasapainoyhtälön (tässä momenttiyhtälö) toteuttava dynamisesti luvalinen $p(x)$ aiheuttaa siirtymän $v(x)$ ja lisäksi $p(x)$ valitaan sellaiseksi, että $W(p_i)$ on mahdollisimman pieni, niin kaavasta (10) saadaan mahdollisimman hyvä "varmalla" puolen oleva kiertymä (vrt. /1/).

LEVYN RATKAISU

Pohjapainejakaumaksi oletetaan

$$p(x) = \sum_{n=0}^k p_{2n+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}. \quad (11)$$

Leimasin on tasapainossa, kun

$$M = \int_{-a}^a p(x)x dx. \quad (12)$$

Sijoittamalla (11) kaavaan (12) saadaan tuntemattomille reunapaineille p_i sidoskaava

$$M = 2a^2 \sum_{n=0}^k \frac{p_{2n+1}}{2n+3}. \quad (13)$$

Rakenne on fysikaalisesti ja geometrisesti lineaarinen, joten voidaan superponoida eri paineiden $p_i \left(\frac{x}{a}\right)^i$ aiheuttamat siirtymät $v_i(x)$. Keskimääräinen kiertymä on tällöin

$$\phi_{\text{keskim.}} = \frac{\sum_{n=0}^k \int_{-a}^a x v_{2n+1}(x) dx}{I}. \quad (14)$$

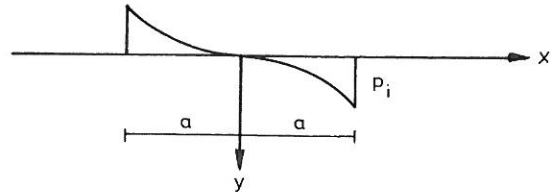
Siirtymä $v_i(x)$ ratkaistaan klassisen levyteorian [4] mukaan. Kuvan 2 mukaisen kuormituksen Fourier'n sini-integraali

on

$$p_i(x) = \frac{2}{\pi} \frac{p_i}{a^i} \int_0^{\infty} I_i(\alpha) \sin \alpha x d\alpha, \quad (15)$$

jossa

$$I_i(\alpha) = \int_{-a}^a x^i \sin \alpha x dx. \quad (16)$$



Kuva 2. Reunakuorma

Funktio $I_i(\alpha)$ saadaan suljetussa muodossa osittaisintegroimalla i kertaa. Reunaehdot ovat

$$1) \tau_{xy}(x,0) = 0, \quad 2) \sigma_y(x,0) = -p_i(x) \quad (17)$$

ja St Venantin periaatteen mukaan suurilla $\pm x$:n ja y :n arvoilla jännitykset vaimenevat. Valitaan jännitysfunktioksi biharmoninen funktio

$$\phi(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} (A_i + B_i \alpha y) e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha. \quad (18)$$

Jännitykset lasketaan derivoimalla ϕ -funktiota seuraavasti

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}. \quad (19)$$

Yhtälöstä (18) saadaan derivoimalla

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = -\int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} (A_i - B_i + B_i \alpha y) e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha. \quad (20)$$

Suorittamalla derivoinnit muuttujan x suhteen ja sijoittamalla $y = 0$ seuraa reunaehdoista 1) ja 2)

$$B_i = A_i, \quad (21)$$

$$A_i = \frac{2p_i}{\pi a^i} I_i(\alpha). \quad (22)$$

Siirtymä $v(x)$ voidaan integroida venymästä ϵ_y . Tasapintaisessa jännitystilassa

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x). \quad (23)$$

Integroimalla muuttujan y suhteen saadaan

$$v(x,y) = \frac{1}{E} (\int \sigma_y dy - \nu \int \sigma_x dy) + f(x). \quad (24)$$

Yhteensopivuusyhtälöiden perusteella voidaan osoittaa (/4/), että funktio $f(x)$ kuvaa jähmeän kappaleen liikettä. Alkueletusten mukaan on nyt $f(x) = 0$.

(25)

Ottamalla huomioon kaava (19) saadaan siirtymäksi

$$v(x,y) = \frac{1}{E} \left(\int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dy - v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right).$$

(26)

Kun tähän sijoitetaan $y = 0$ ja $A_i = B_i$, niin

$$v(x) = \frac{1}{E} \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dy \Big|_{y=0}$$

(27)

Sijoittamalla osittaisintegrointi muuttujan y suhteen ja sijoittamalla $y = 0$ saadaan

$$v(x) = \frac{2}{E} \int_0^{\infty} \frac{A_i}{\alpha} \sin \alpha x d\alpha.$$

(28)

Keskimääräinen kiertymä on

$$\phi_{\text{keskim.}} = \frac{8}{\pi E I} \sum_{n=0}^k p_{2n+1} \int_0^{\infty} \frac{I_{2n+1}(\alpha) I_1(\alpha)}{\alpha} d\alpha,$$

(29)

jossa integraalilausekkeella on määrätty arvo. Tämä voidaan laskea numeerisesti kaikilla indeksin $2n+1$ arvoilla.

Vakiot p_i määrätään siten, että jännitysenergia on mahdollisimman pieni. Yhtälöstä (4) saadaan

$$W = \sum_{n=0}^k \int_0^a p_{2n+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} \cdot \frac{2}{E} \int_0^{\infty} \frac{A_{2n+1}}{\alpha} \sin \alpha x d\alpha dx,$$

(30)

ja tästä sijoittamalla A_{2n+1} kaavasta (22)

$$W = \frac{4}{E\pi} \sum_{n=0}^k \frac{p_{2n+1}^2}{4n+2} X_{2n+1},$$

(31)

missä

$$\int_0^{\infty} \frac{(I_{2n+1}(\alpha))^2}{\alpha} d\alpha = X_{2n+1}.$$

(32)

Yhtälössä (31) olevalla määrättyllä integraalilla on olemassa tietty arvo johtuen integrandin nopeasta suppenemisesta. Lasketaan derivaatat $\partial W / \partial p_i$ ja merkitään ne nolliksi, jolloin päädytään homogeeniseen yhtälöryhmään

$$A \bar{p} = \bar{0},$$

(33)

missä matriisin A alkio a_{ij} on (i ja j saavat vain parittomia arvoja)

$$a_{ij} = \frac{(2\delta^{ij} - 1)(j+2)x_j}{a^{2j}},$$

(34)

δ^{ij} on Dirac'n deltafunktio ja vektori \bar{p} on

$$\bar{p} = \{p_1, p_3, \dots, p_k\}^T.$$

(35)

Tämä määrittää jännitysenergian W minimikohtan, koska W on p_i :n homogeeninen neliömuoto. Lisäksi p_i :n tulee toteuttaa momenttiyhtälö (13).

SOVELLUTUS

Lasketaan suoraviivaisen pohjapainejakauman mukainen kiertymä. Momentti-
tasapaino vallitsee, kun

$$P_1 = \frac{3M}{2a^2}. \quad (36)$$

Funktioksi $I_1(\alpha)$ saadaan osittaisintegroimalla

$$I_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} (\sin\alpha a - \alpha \cos\alpha a). \quad (37)$$

Sijoittamalla nämä kaavaan (29) saadaan

$$\phi_{\text{keskim.}} = \frac{12M}{a^2 EI \pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{(\sin\alpha a - \alpha \cos\alpha a)^2}{\alpha^5} d\alpha. \quad (38)$$

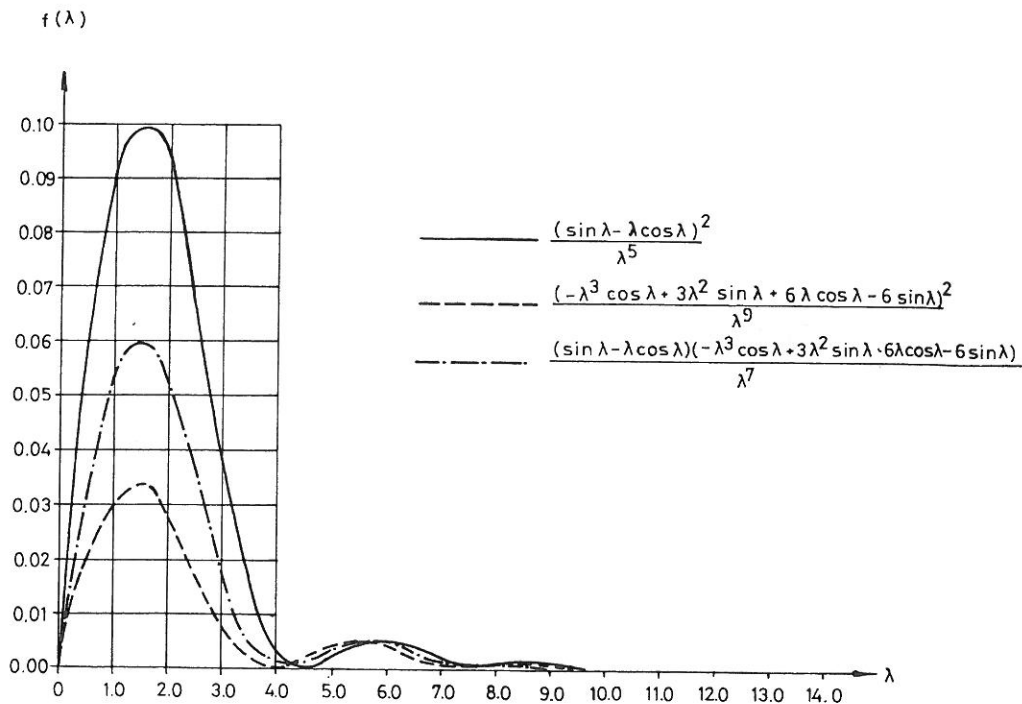
Jos $\alpha a = \lambda$, niin

$$\phi_{\text{keskim.}} = \frac{12Ma^2}{\pi EI} \int_0^{\infty} \frac{(\sin\lambda - \lambda \cos\lambda)^2}{\lambda^5} d\lambda \quad (39)$$

$$= \frac{18M}{Ea^2 \pi} \int_0^{\infty} \frac{(\sin\lambda - \lambda \cos\lambda)^2}{\lambda^5} d\lambda \quad (40)$$

Integraali (40) on olemassa, koska muuttujan c kasvaessa integrandi pienenee, ja käyttämällä sini- ja kosinifunktioiden sarjamuotoja huomataan, että integrandi lähenee nollaa muuttujan λ lähetessä nollaa. Integrandin kuvaaja on esitetty kuvassa (3). Numeerinen integrointi antaa tulokseksi

$$\int_0^{\infty} \frac{(\sin\lambda - \lambda \cos\lambda)^2}{\lambda^5} d\lambda = 0,250. \quad (41)$$



Kuva 3. Integrandit

Keskimääräinen kiertymä on tällöin

$$\phi_{\text{keskim.}} = 4,50 \frac{M}{Ea^2\pi} \quad (42).$$

Tarkka arvo on teoksen /2/ mukaan

$$\phi = 4 \frac{M}{Ea^2\pi} \quad (43)$$

On huomattava, että Poissonin vakion ν vaikutus häviää. Tarkka arvo täyden kitkan tapauksessa on

$$\phi_{\text{kitkall}} = \frac{4}{1 + \left[\frac{\ln\left(\frac{3-\nu}{1+\nu}\right)}{\pi} \right]^2} \cdot \frac{M}{Ea^2\pi} \quad (44)$$

Hakasulkulauseke yhtälössä (44) muuttuu eri ν :n arvoilla seuraavasti

ν	0,0	0,1	0,2	0,3
[]	0,122	0,095	0,073	0,054.

Esimerkiksi, kun $\nu = 0$, niin

$$\phi_{\text{kitkall}} = 3,565 \frac{M}{Ea^2\pi} \quad (45)$$

Tällöin ν :n vaikutus on kaavan (44) mukaan suurimmillaan.

Jos pohjapaine oletetaan kolmannen asteen funktioksi

$$p(x) = p_1 \frac{x}{a} + p_3 \left(\frac{x}{a}\right)^3, \quad (46)$$

niin tasapainoyhtälöstä (13) saadaan

$$M = 2a^2 \left(\frac{p_1}{3} + \frac{p_3}{5} \right). \quad (47)$$

Kaavasta (16) osittaisintegroimalla seuraa

$$I_3(\alpha) = \frac{1}{\alpha^4} [-(\alpha a)^3 \cos \alpha a + 3(\alpha a)^2 \sin \alpha a + 6\alpha a \cos \alpha a - 6 \sin \alpha a], \quad (48)$$

jolloin

$$X_3 = \int_0^\infty \frac{I_3(\alpha)^2}{\alpha} d\alpha = a^8 \int_0^\infty \frac{[-\lambda^3 \cos \lambda + 3\lambda^2 \sin \lambda + 6\lambda \cos \lambda - 6 \sin \lambda]^2}{\lambda^8} d\lambda = a^8 \cdot 0,083. \quad (49)$$

Integrandi on jälleen rajattu ja sen kuvaaja on kuvassa (3). Integrointi on suoritettu numeerisesti taskulaskimella. Yhtälöryhmä (33) on nyt

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 0,250 & -5 \cdot 0,083 \\ -3 \cdot 0,250 & 5 \cdot 0,083 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (50)$$

Ratkaisuksi saadaan $p_1 = 0,720 \frac{M}{a^2}$ ja $p_3 = 1,300 \frac{M}{a^2}$. Kiertymän laskussa tarvitaan lisäksi integraalia

$$\int_0^\infty \frac{I_1(\alpha) I_3(\alpha)}{\alpha} d\alpha \quad (51)$$

$$= a^6 \int_0^\infty \frac{(\sin \lambda - \lambda \cos \lambda)(-\lambda^3 \cos \lambda + 3\lambda^2 \sin \lambda + 6\lambda \cos \lambda - 6 \sin \lambda)}{\lambda^7} d\lambda. \quad (52)$$

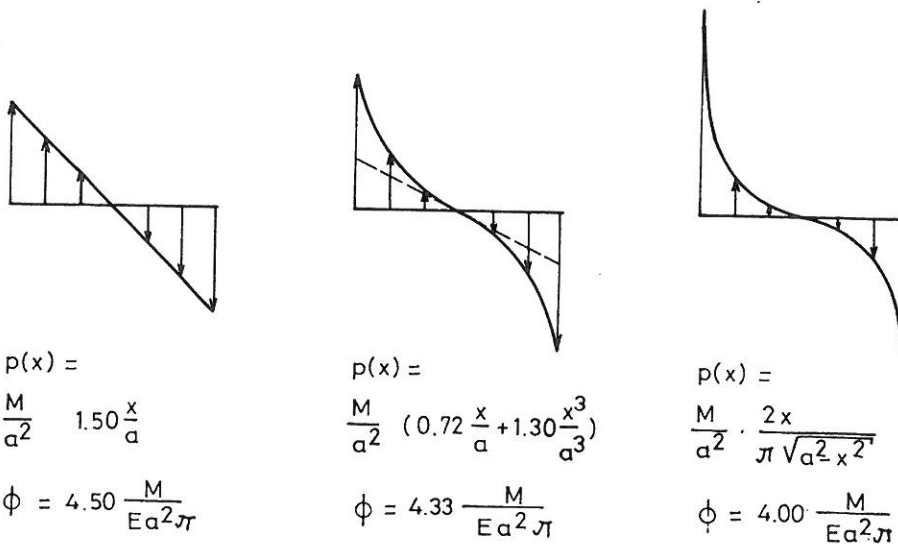
Integrandi on esitetty kuvassa (3). Numeerinen integrointi antaa integraalin arvoksi $a^6 \cdot 0,139$. Nyt

$$\phi_{\text{keskim.}} = 4,33 \frac{M}{Ea^2\pi}$$

Iterointia voitaisiin jatkaa, mutta jo ensimmäiset arviot antavat käytännön sovellutuksiin riittävän tarkat arvot.

TULOSTEN TARKASTELU

Kuvassa 4 on esitetty laskettujen pohjapainejakautumien kuvaajat sekä vastaavat keskimääräiset kiertymät. Vertailukohteena on tarkka tulos teoksesta /2/.



Kuva 4. Likiratkaisu ja tarkka tulos

Virhe siirtymässä on suoraviivaisella pohjapainejakautumalla 12,5 %. Kolmannen asteen pohjapainefunktioarvauksella johtuu 8,25 prosentin virheeseen. Siirtymät ovat laskutavasta johtuen "varmalla" puolella. Laskelmista havaitaan lisäksi, että alustan Poissonin vakio ν ei vaikuta siirtymään levyn reunassa. J. Dundurs on artikkelissaan /6/ todistanut jännitysten riippumattomuuden tästä vakiosta. Tarkan ratkaisun pohjapaineen lausekkeesta havaitaan, että tämä on kehitettävissä potenssisarjaksi, joten likimääräisratkaisussa pohjapaine lähestyy oikeaa sarjan termien lisääntyessä. Täten myös keskimääräinen kiertymä lähenee tarkkaa arvoa.

LÄHDEKIRJALLISUUS

- [1] Parland, H.N., On the Stiffness of Non-monolithic Structures. Helsinki, Valtion Teknillinen tutkimuslaitos, julkaisu 123, 1968.
- [2] Muskhelishvili, N.I., Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity (käänn. J.R.M. Radok), Noordhoff, Groningen, 1953.

- [3] Galin, L.A., Contact Problems in the Theory of Elasticity (alkup. 1953, käänn. Rva H. Moss), North Carolina State College, Raleigh (N.C.), 1961.
- [4] Girkmann, K., Flächentragwerke, Vierte Auflage, Springer-Verlag, Wien 1965.
- [5] Ling, F.F., Surface Mechanics, Waley and Sons, New York, 1973.
- [6] Dundurs, J. and Stippes, M., Role of elastic constants in certain contact problems, J. Appl. Mech. 37, 965-970 (1970).

Markku Heinisuo, dipl.ins., Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto