

Pentti Loikkanen

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 12
No. 4 1979 s. 1-23

YHTEENVETO: Artikkelin liittyy kirjoittajan lisensiaattityön osaan, jossa käsitellään Langer-palkkisiltojen dynaamista ratkaisemista koko sillan ja eri pitkien riipputankojen ominaistuuksien löytämiseksi. Koko sillan dynaaminen analyysi on suoritettu diskreetoitua mallia käyttäen. Taivutuksesta aiheutuvien taajuuksien ja ominaismuotojen lisäksi löytyi yksi aksiaalinen taajuus ja ominaismuoto. Näiden taajuustyyppien riippuvuus kaaren nuolisuhteesta ja jäykistyspalkin ja kaaren taivutusjäykkyyksien suhteesta osoittautui toisilleen käänteiseksi. Normaaliveiman vaikutus koko sillan taajuuksiin on vähäinen. Riipputankojen värähtelytaajuuksien on johdettu differentiaaliyhtälöstä lähtien erilaisille tankojen kiinnitystavoille tangon vetovoimasta, taivutusjäykkyydestä ja pituudesta riippuvan dimensiottoman parametrin funktiona. Teoriaa sovellettiin kolmeen tiesiltaan laskemalla koko sillan ja riipputankojen taajuuksia. Niiden sopivuus kokeellisesti mitattujen alimpien taajuuksien kanssa on sangen hyvä.

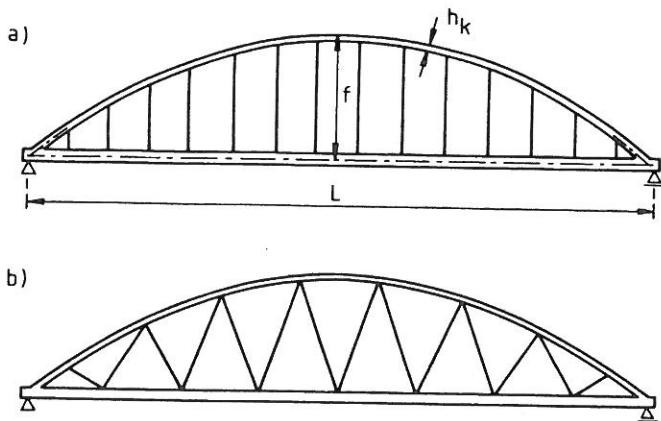
JOHDANTO

Langer-palkkisilta on sellainen kaarisilta, jossa kaarivoiman vaakasuora komponentti siirretään kaaren kannoissa niitä yhdistävälle vetotangolle, jolloin rakenne on ulkoisesti laakeroitavissa kuten yksinkertainen palkki. Kaaria on kaksi kappaletta ja sillan kansi on sijoitettu kaartien väliin lähelle kaaren kannan tasoa. Jalkakäytävät voidaan sijoittaa myös kaaren ulkopuolelle ulokkeiden varaan. Kansirakenne on ripustettu kaaresta riipputangoihin. Silloissa käytetään sekä pysty- että vinoriipputankoista rakennetta (kuva 1). Kaari tehdään hoikaksi ja siitä ripustettu kansirakenne jäykistetään jäykistyspalkilla. Yleensä kaari liitetään kannoissa jäykistyspalkkiin, jolloin jäykistyspalkki toimii samalla myös vetotankona. Kummankin kaaren jäykistyspalkit yhdistetään sillan poikkisuunnassa poikkikannattimiin. Kansirakenne tuetaan poikkikannattimiin.

Kaari on taivutettu rakenneosana, jota puristuksen ohella rasittaa myös heikko taivutus. Jäykistyspalkkia rasittaa veto ja voimakas taivutus. Riipputankot ovat miltei yksinomaan vedettyjä rakenneosia.

1960-luvun alkupuoliskolla suunniteltiin Suomessa maantiesillan normaalirakenteeksi teräksinen teräsbetonikantainen Langer-palkkisilta jännemitaltaan 65 m, jota sovellettiin 7,0 m levyisenä Matilanvirran siltaan Sumiaisten ja Konginkankaan kuntien rajalla sekä 10 m levyisenä mm. Kotakennään siltaan

Äänekoskella. Pian valmistuttuaan näissä silloissa tapahtui vaurioita riipputangoissa ilmenneiden halkeamien ja suoranaisten katkeamisien muodossa. On todennäköistä, että syy näihin vaurioihin löytyy sillan dynaamisesta käyttäytymisestä. Myös Ruotsissa ja Amerikan Yhdysvalloissa on todettu värähtelyongelmia Langer-palkkisilloissa, joissa on käytetty riipputankoina hoikkia jäykkiä tankoja.



Kuva 1. Langer-palkkisiltatyyppejä. a) Pystyriipputankoinen silta, b) vino-riipputankoinen silta.

Seuraavassa tarkastellaan sellaisen pystyriipputankoisen Langer-palkin ominaisvärähtelyitä, jossa jäykistyspalkki ja kaari liittyvät toisiinsa jäykästi. Ts. kysymyksessä on sillan vapaa värähtely ainoana kuormituksenaan ajallisesti ja paikallisesti vakiosuuruisena pysyvä sillan oma paino. Pyrkimyksenä on selvittää sillan ominaistaajuudet ja niitä vastaavat ominaisvärähtelymuodot ja rakenteellisten seikkojen vaikutus niihin. Jos koko sillan taajuudet sattuvat samalle alueelle kuin tankojen taajuudet on mahdollisuus resonanssille ja tankojen vaurioitumiselle olemassa.

OMINAISVÄRÄHTELYN LASKEMINEN

Ratkaisuperiaatteista

Rakenteen ominaisvärähtely on sellaista värähtelyä, jonka aikana rakenteeseen ei vaikuta ulkoisia ajasta riippuvia kuormia. Tällaisen värähtelyn aikana liikkeestä ja rakenteen massasta aiheutuvat hitausvoimat, liikettä hidastavat vaimennusvoimat ja staattisesta tasapainoasennosta poikkeamisesta aiheutuvat palautevoimat pitävät toisensa tasapainossa eli muodostavat dynaamisen tasapainosysteemin. Värähtelyalttiilla rakenteilla vaimennusvoimien vaikutus ominaistaajuuteen ja värähdysmuotoihin on yleensä merkityksetön. Tässä suhteessa Langer-palkkisillat eivät muodosta poikkeusta, joten vaimennuksen vaikutus voidaan jättää huomiotta. Rakenteen muodonmuutosten ollessa kimmoisia palautevoimatkin ovat kimmoisia. Näinollen värähtelyn rakenteesta riippuvat parametrit ovat rakenteen massa ja kimmoisuus tai sen käänteisominaisuus jäykkyys.

Rakenteen oma päino tai yleensäkin ajallinen vakiokuormitus ei vaikuta ominaisvärähtelyyn ellei se vaikuta värähtelyliikkeen palautevoimiin. Taivutusvärähtelyssä tässä suhteessa poikkeuksen muodostaa aksiaalinen kuorma, joka puristavana pienentää palautevoimia eli rakenteen taivutusjäykkyyttä ja vetävänä vastaavasti lisää taivutusjäykkyyttä. Langer-palkkisillassa kaari on puristettu, kun taas jäykistyspalkki ja riipputangot ovat vedettyjä. Ominaisvärähtelyn rakenneparametrit massa ja jäykkyys ovat rakenteissa jatkuvasti jakaantuneita suureita. Niiden ottaminen huomioon jatkuvina johtaa liikeyhtälöissä osittaisdifferentiaaliyhtälöihin, joissa muuttujina ovat aika ja paikka. Näiden yhtälöiden soveltaminen on mielekäästä vain aivan yksinkertaisille rakenteille. Näin on menetelty tarkasteltaessa tasajäykkiä ja -massaisia riipputankoja. Langer-palkki kokonaisuutena on tässä mielessä liian monimutkainen rakenne. Se voidaan taloudellisesti ratkaista diskretoituna, s.o. keskittämällä massa ja jäykkyys sopivasti valittuihin pisteisiin ja tarkastelemalla näihin pisteisiin keskitettyjen massojen liikettä. Tihentämällä diskretointia päästään mielivaltaisen lähelle jakaantuneiden parametrien muodostamaa tilaa. Rakenteen ratkaisun laskentatalouden kannalta mahdollisimman pieni koordinaattimäärä, jolla saadaan riittävän tarkka tulos, on edullisin. Käytännön tarpeisiin riittää yleensä n. 3-5 alinta ominaistajuutta ja niitä vastaavat ominaismuodot. Karkeasti voidaan sanoa, että jos taivutusvärähtelyssä diskreettejä koordinaatteja valitaan n kpl, niin n/2 ominaistajuutta ja -muotoa saadaan vielä tarkkuudella, jossa virhe on enintään muutaman prosentin suuruinen.

Langer-palkin sauvat ovat hoikkia, joten massapisteiden rotaatioinertia samoin kuin leikkausvoimien vaikutus muodonmuutoksiin voidaan perustellusti jättää huomioonottamatta.

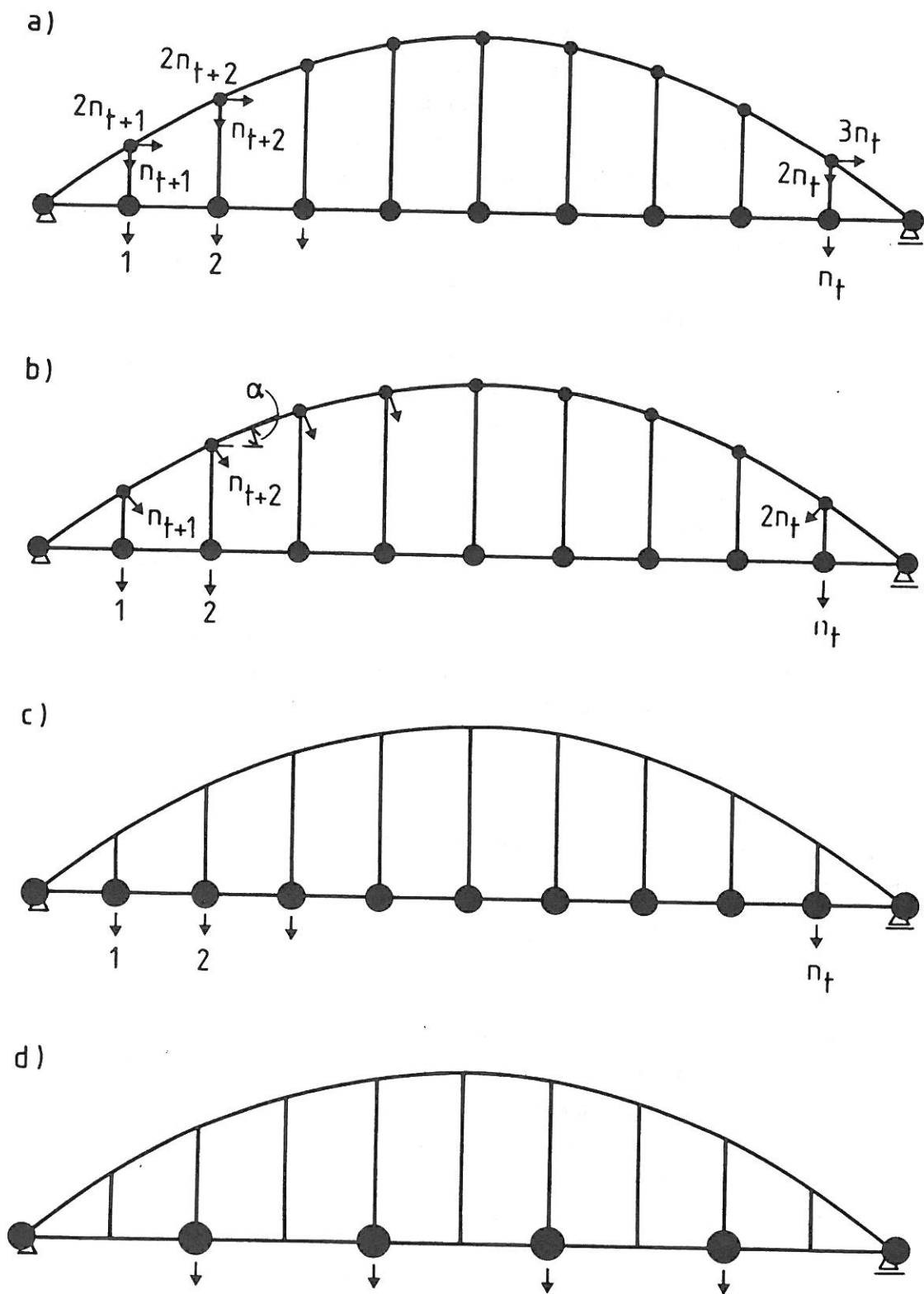
Dynaamisia malleja

Luonnollisin massan keskityskohta Langer-palkissa on riipputankojen liittymiskohdat jäykistyspalkkiin ja kaareen (kuva 2).

Jäykistyspalkin siirtymät tapahtuvat miltei täysin pystysuorasti, mutta kaareissa myös vaakasuorasti. Näinollen koordinaatisto olisi $3 \cdot n_t$ -ulotteinen ja rakenteen jäykkyysmatriisin koko olisi $3 n_t \cdot 3 n_t$, kun n_t merkitsee riipputankojen lukumäärää kaarta kohden. Koordinaatiston ulotteisuutta voidaan pienentää kolmanneksella otaksumalla kaaren siirtymän tapahtuvan kohtisuorasti kaarta vastaan (kuva 2b) eli

$$\delta_k = v_k \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}.$$

Tästäkin koordinaattien lukua voidaan vielä pudottaa puoleen tarkkuuden sannottavasti kärsimättä jättämällä kaaren massan vaakasuoraan siirtymään liittyvä inertia huomioonottamatta. Koska kaaren pystysiirtymä on likimain sama kuin jäykistyspalkinkin pystysiirtymä, voidaan koko rakenteen massa sijoittaa



Kuva 2. Lagranger-palkin diskreettejä dynaamisia malleja.

jäykistyspalkille (kuva 2c). Esimerkiksi Matilanvirran sillan painosta kaaren osuus on 11,3 % ja koska vaakasiirtymä on keskimäärin pystysiirtymää pienempi, vain muutama prosentti hitausvoimasta jää huomioonottamatta.

Haluttaessa vieläkin pienentää koordinaattien lukumäärää, voidaan esimerkiksi joka toinen massapiste jättää pois (kuva 2d). Korostettakoon vielä, että koordinaattien lukumäärällä on oleellinen merkitys numeeristen laskelmien talouteen.

KOKO SILLAN OMINAISTAAJUUDET JA -MUODOT

Perusyhtälöt

Diskretoidun systeemin liikeyhtälöt voidaan tunnetusti kirjoittaa muodossa

$$[\bar{k}] \cdot \{v\} + [m] \cdot \{\ddot{v}\} = 0 \quad (1)$$

missä $[\bar{k}]$ on rakenteen yhdistetty jäykkyysmatriisi,
 $[m]$ on rakenteen diagonaalinen massamatriisi,
 $\{v\}$ on rakenteen siirtymävektori ja
 $\{\ddot{v}\}$ on rakenteen kiihtyvyyksivektori

Em. matriisit ja vektorit lausutaan rakenteen diskretoidussa koordinaatistossa (vrt. kuva 2). Dynaaminen tasapaino edellyttää harmonista värähtelyä, jolloin siirtymiä ja kiihtyvyyksiä sitoo yhteys

$$\{\ddot{v}\} = -\omega^2 \cdot \{v\}$$

missä ω on rakenteen ominaiskulmataajuus.

Tasapainoyhtälöt (1) voidaan nyt lausua algebrallisessa muodossa

$$[\bar{k}] \cdot \{v\} - \omega^2 \cdot [m] \cdot \{v\} = 0$$

eli

$$([\bar{k}] - \omega^2 \cdot [m]) \cdot \{v\} = 0 \quad (2)$$

Ts. värähtely on mahdollista vain jos tämän homogeenisen algebrallisen yhtälöryhmän determinantti on nolla eli

$$\det([\bar{k}] - \omega^2 \cdot [m]) = 0 \quad (3)$$

Yhtälö (3) on rakenteen taajuusyhtälö. Sen ratkaisuna saadaan rakenteen ominaiskulmataajuudet.

Rakenteen joustomatriisin $[\delta]$ alkiot saadaan rakenteen siirtyminä valituksa koordinaatistossa siten, että δ_{ij} on siirtymä koordinaatissa i pistekuormasta $F = 1$ koordinaatissa j . Koska rotaatioinertia jätetään huomiotta, esittää δ_{ij} vain siirtymän ja voiman välistä relaatiota, joka on muotoa

$$\delta_{ij} = \beta_1 \cdot \frac{L^3}{EI} + \beta_2 \cdot \frac{L}{EA} \quad (4)$$

missä β_1 ja β_2 ovat numerokertoimia,

L on jokin valittu vertailupituus,

EI on vertailutaivutusjäykkyys ja

EA on vetojäykkyys.

Tällöin on leikkausvoiman vaikutus muodonmuutoksiin jätetty huomiotta. Valitaan vertailuarvot seuraavasti:

L on sillan jännemitta

$I = I_k$ on kaaren poikkileikkauksen jäyhyysmomentti ja

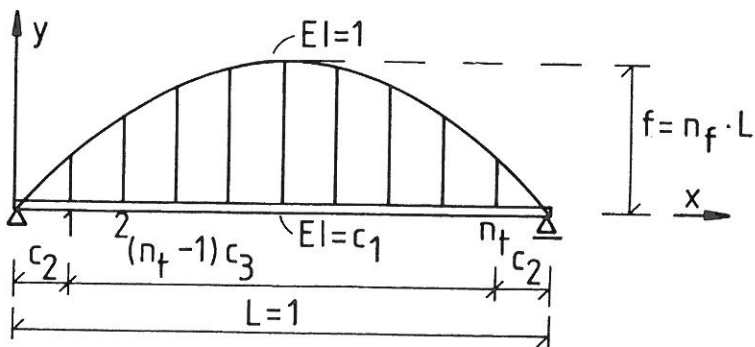
$E = E_k$ on kaaren materiaalin kimmokerroin.

Merkitään jäykistyspalkin ja kaaren taivutusjäykkyyksien suhdetta

$$c_1 = \frac{(EI)_p}{(EI)_k} \quad (5)$$

jolloin vertailuarvojen perusteella $(EI)_p = c_1 \cdot (EI)_k$.

Vertailuarvojen valinta merkitsee itse asiassa kuvan 3 mukaisen "yksikkösillan" ratkaisemista.



Kuva 3. "Yksikkösilta".

Vetojäykkyyttä EA ei voida enää valita mielivaltaisesti, koska poikkileikkausala A riippuu poikkileikkauksen jäyhyysmomentista. Tälle riippuvuudelle ei voida esittää mitään yleistä lakia poikkileikkausmuotojen moninaisuuden vuoksi. Joustokerroin (4) voidaan kirjoittaa

$$\delta_{ij} = \frac{L^3}{(EI)_k} \left[\beta_1 + \beta_2 \cdot \frac{(EI)_k}{L^2 EA} \right] = \frac{L^3}{(EI)_k} \cdot a_{ij}, \quad (6)$$

joten vetojäykkyys voidaan korvata dimensiottomalla redusoidulla vetojäykkyydellä

$$(EA)_r = \frac{EAL^2}{(EI)_k} \quad (7)$$

Kirjoittamalla kaikki joustokertoimet muotoon (6) saadaan joustomatriisiksi

$$[\delta] = \frac{L^3}{(EI)_k} [a] \quad (8)$$

missä L on sillan jännemitta,

$(EI)_k$ on kaaren taivutusjäykkyys,

$[a]$ on rakenteen joustomatriisin numeerinen osa valitussa koordinaatistossa.

Matriisin $[a]$ numeeriset alkiot ovat

$$a_{ij} = \beta_1 + \beta_2 \cdot \frac{(EI)_k}{L^2 EA} = \beta_1 + \beta_2 / (EA)_r$$

Rakenteen jäykkymatriisi saadaan joustomatriisin käänteismatriisina (8):sta

$$[k] = [\delta]^{-1} = \frac{(EI)_k}{L^3} [a]^{-1} = \frac{(EI)_k}{L^3} [b] \quad (9)$$

missä $[b] = [a]^{-1}$ on jäykkymatriisin numeerinen osa.

Langer-palkkisilloissa riipputankovälit ovat säännöllisesti yhtä suuret yleensä poikkeuksena reunimmainen tuelta reunimmaiselle riipputangolle ulottuva väli, joka on usein muita riipputankovälejä lyhyempi. Merkitään näiden välien suhdetta kuvan 3 merkinnöin

$$c_2 = \frac{l_r}{L} \quad (10a)$$

missä l_r on reunimmaisen riipputangon etäisyys tuelta. Merkitään vastaavasti

$$c_3 = \frac{l_c}{L} \quad (10b)$$

kun l_c on keskimmäisten riipputankojen väli.

Merkitään välien suhdetta

$$c_4 = \frac{l_r}{l_c} = \frac{c_2}{c_3} \quad (10c)$$

Sauvan vetävä normaalivoima vastustaa sauvan poikittaista taipumaa lisäten täten sauvan jäykkyyttä. Puristavan normaalivoiman vaikutus on päinvastainen. Tätä normaalivoiman aiheuttamaa jäykkyyden lisäystä kutsutaan geometriseksi jäykkyydeksi. Taipumaa vastustavien palautevoimien ja taipumien välinen yhteys saadaan $1/n$:n mukaan ajatteleamalla normaalivoiman vaikuttavan sauvan ulkopuoliseen nivelelliseen sauvajaksoon, joka liittyy tarkasteltavaan sauvaan

eli

$$[k]_G = [b]_G \cdot \frac{N}{l_c}, \quad (14)$$

missä $[b]_G$ on geometrisen jäykkymatriisin (13) numeerinen osa.

Otetaan käyttöön dimensioton normaalivoiman N suuruutta kuvaava normaali-voimaparametri

$$\alpha = \sqrt{\frac{NL^2}{(EI)_k}}. \quad (15)$$

Geometrinen jäykkymatriisi (14) saadaan nyt muotoon

$$[k]_G = [b]_G \cdot \frac{\alpha^2}{c_3} \cdot \frac{(EI)_k}{L^3}. \quad (16)$$

Rakenteen yhdistetyksi jäykkymatriisiksi saadaan yhteenlaskemalla (9) ja (16)

$$[\bar{k}] = [k] + [k]_G$$

$$[\bar{k}] = \frac{(EI)_k}{L^3} \cdot \left([b] + \frac{\alpha^2}{c_3} \cdot [b]_G \right)$$

eli

$$[\bar{k}] = \frac{(EI)_k}{L^3} \cdot [c], \quad (17)$$

missä yhdistetyn jäykkymatriisin numeerinen osa saadaan jäykkymatriisin ja geometrisen jäykkymatriisin numeerisista osista

$$[c] = [b] + \frac{\alpha^2}{c_3} \cdot [b]_G. \quad (18)$$

Rakenteen massamatriisi on diskretoidussa muodossa (vrt. kuva 2)

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & 0 \\ & & m_3 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & m_n \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Käytettäessä kuvan 2c mukaista diskretointia, jossa $n = n_t$, kunkin koordinaatin massa voidaan otaksua yhtä suureksi

$$m_i = \frac{l_c}{L} \cdot G = c_3 \cdot G, \quad (20)$$

missä G on Langer-palkille tuleva osa sillan kokonaispainosta (-massasta) ja

c_3 on (10b) ja ilmaisee myös kunkin massan suhteellisen osuuden sillan puolikkaan kokonaispainosta.

Massamatriisiksi (19) saadaan tässä tapauksessa

$$[m] = c_3 G \cdot [I], \quad (21)$$

missä $[I]$ on yksikkömatriisi.

Rakenteen taajuusyhtälö (3) saadaan nyt muotoon

$$\det \left[\frac{(EI)_k}{L^3} [c] - \omega^2 \cdot c_3 G [I] \right] = 0$$

eli

$$\det \frac{(EI)_k}{L^3} \left[[c] - \omega^2 \cdot c_3 \cdot \frac{GL^3}{(EI)_k} \cdot [I] \right] = 0. \quad (22)$$

Jos merkitään yhdistetyn jäykkyyismatriisin numeerisen osan $[c]$ ominaisarvoja λ_i :llä

$$\lambda_i = \omega^2 \cdot c_3 \cdot \frac{GL^3}{(EI)_k},$$

saadaan sillan ominaiskulmataajuudet

$$\omega_i = \bar{\omega}_i \sqrt{\frac{(EI)_k}{GL^3}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

missä kulmataajuuskerroin $\bar{\omega}_i = \sqrt{\lambda_i / c_3}$.

Ominaistaajuuksien lukumäärä n on sama kuin diskreettien koordinaattien lukumäärä.

Ominaismuodot eli värähtelyn taipumien suhteet saadaan yhtälöistä (2). Näin saadut muotovektorit $\{\phi\}$ yleensä normeerataan siten, että vektorin pituus on yksi.

Elleivät massamatriisin alkiot ole keskenään yhtä suuria, kuten esimerkiksi kuvien 2a ja 2b esittämissä tapauksissa, kirjoitetaan taajuusyhtälö (3) muotoon

$$[\bar{k}] \cdot \{\phi_i\} = [m] \cdot \{\phi_i\} \cdot \omega_i^2 \quad (24)$$

ja edelleen kertomalla vasemmalta $[m]^{-1}$:llä

$$[m]^{-1} \cdot [\bar{k}] \cdot \{\phi_i\} = \{\phi_i\} \cdot \omega_i^2, \quad (25)$$

jolloin tehtävä palautuu matriisin $[m]^{-1} \cdot [\bar{k}]$ ominaisarvoteknikaksi.

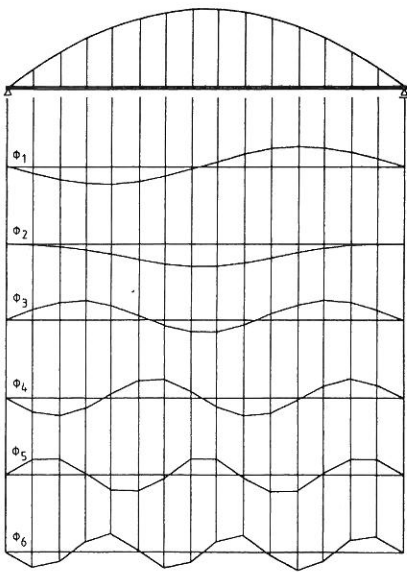
Ominaistaajuudet ja muodot

Staattisen ratkaisun tuloksena saadaan rakenteen siirtymät nurkkapisteissä. Valitsemalla näistä diskretoidun dynaamisen mallin koordinaatteja (kuva 2c) vastaavat siirtymät, saadaan joustomatriisi tässä koordinaatistossa. Kuormituksena on luonnollisesti yksikkövoima vuoronperään kussakin koordinaatissa. Joustomatriisi on dimensioltaan $n_t \cdot n_t$. Riipputankojen lukumääräksi on valittu $n_t = 14$.

Laskelmat on suoritettu edellä esitetyllä tavalla. Massamatriisille (19) on käytetty lauseketta (22). Taajuuskertoimet $\bar{\omega}$ (23), ja vastaavat normeeratut ominaisvektorit on laskettu UNIVAC 1108-tietokoneella FORTRAN V-kirjaston standardiominaisarvo-ohjelmaa käyttäen.

Kaari on sekä puristettu että taivutettu rakenneosana. Tämä ilmenee pelkän kaaren ominaismuodoissa siten, että osa niistä syntyy valtaosaltaan kaaren taipumisen tuloksena (flexural mode) ja osa valtaosaltaan kaaren aksiaalisen muodonmuutoksen, siis puristuksen ja vedon, tuloksena (extensional mode). Taivutusmuodossa on siihen sitoutunut kimmoenergia taivutusenergiaa, kun taas aksiaalisessa muodossa kimmoenergia on aksiaalista kokoonpuristumisenergiaa. Myös selviä välimuotoja esiintyy /8/.

Vaikka Langer-palkissa kaaren suhteellinen osuus koko rakenteesta on vähäisempi, esiintyy ominaismuodoissa aksiaalisia muotoja. Käytetyllä diskretisoinnilla niitä löytyi yksi kappale. Kuvassa 8 tämä on toinen ominaismuoto ϕ_2 . Käytetään tästä ominaismuodosta merkintää ϕ^N ja taivutusmuodoista vastavasti ϕ^M . Näinollen kuvaa 5 vastaavilla parametrin arvoilla $\phi^N = \phi_2$. Vastavasti $\omega^N = \omega_2$.



Kuva 5. Matilanvirran sillan ominaisvärähtelymuodot $\phi_1 - \phi_6$.

Laskelmien lähtöarvot

Taajuusanalyysi on suoritettu kuvan 2c mukaisella dynaamisella mallilla. Sen perustana oleva staattinen ratkaisu on suoritettu siirtymämenetelmään perustuvalla sauvarakenneohjelmalla. Ohjelman vaatimat nurkkapisteiden koordinaattien numeeriset arvot on laskettu käyttämällä riipputankojen lukumäärällä arvoa $n_t = 14$ ja valitsemalla kaaren muodoksi paraabeli. Kuvan 3 merkinnöin lasketut koordinaatit on merkitty taulukkoon 5.

Taulukko 1. "Yksikkösillan" nurkkapisteiden koordinaatit

i	x_i palkki ja kaari	y_i	
		palkki	kaari
0	0	0	0
1... n_t	$c_2 + (i-1) \cdot c_3$	0	$4 \cdot n_f \cdot (\bar{x} - \bar{x}^2)$
$n_t + 1$	1	0	0

Kimmokertoimet lausutaan suhteessa kaaren materiaalin kimmokertoimeen, joksi valitaan $E = 1$. Poikkileikkaussauvojen perustaksi valitaan kaaren jäyhyysmomentti $I = 1$. Täten taivutusjäykkyydet saadaan lausutuksi kaaren jäykkyyden $EI = 1$ avulla. Redusoitu vetojäykkyys (7) vaihtelee sillan osien poikkileikkausmuotojen mukaisesti. Sen mukanaolo merkitsee normaalivoimasta aiheutuvien aksiaalisten muodonmuutosten huomioon ottamista rakenteen siirtymissä. Koska niiden vaikutus on taivutuksesta aiheutuvien muodonmuutosten rinnalla pieni, on sen vaihteluiden vaikutus myös vähäinen. Koska tässä työssä on pyritty lähinnä tutkittujen siltojen mitta-alueelle, voidaan käyttää redusoidulle vetojäykkyydelle jotain keskimääräistä arvoa. Tämän arvon valitsemiseksi on taulukossa 2 laskettu tutkittujen siltojen redusoidut vetojäykkyydet eri sauvoille. Jäykistyspalkin taivutusjäykkyyteen on siinä otettu mukaan teräsbetoninen kansilaatta otaksuen sen ja teräskannattimien välille täysi liittovaikutus. Jäykistyspalkin vetojäykkyyteen sensijaan on otettu pelkästään sen teräsosa.

Laskelmissa on rakenteen sauvoille valittu taulukossa 3 näkyvät numeeriset dimensiottomat materiaali- ja poikkileikkausarvot. c_1 on taivutusjäykkyyksien suhde (10b).

Taulukko 2. Tutkittujen siltojen sauvojen jäykkyydet

Silta	Matilan- virran silta	Kotaken- nään silta	Riutta- salmen silta	
Jännemitta L	65,0	65,0	81,5	m
Kaari (EI) _k	388	431	572	MNm ²
(EA) _k	8106	8946	9072	MN
Jäykistyspalkki (EI) _p	8032	9352	74445	MNm ²
(EA) _p	16800	16800	11090	MN
Riipputangot (EI) _t	0,2	0,2	0,2	MNm ²
(EA) _t	998	998	808	MN
Redusoitu vetojäyk- kyys (EA) _r (7)				
kaari	88268	87695	105347	-
jäykistyspalkki	182938	164687	128700	-
riipputangot	10867	9783	9383	-

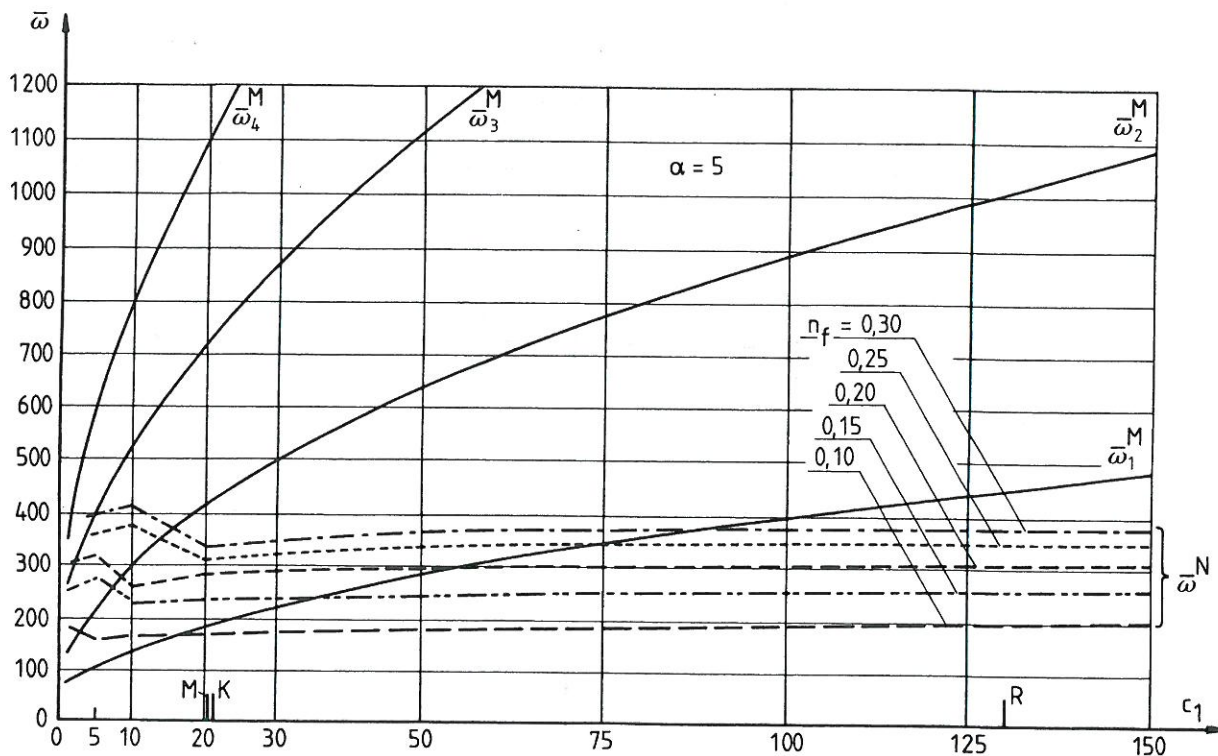
Taulukko 3. Sauvojen materiaali- ja poikkileikkausarvot

Sauva	E	I	A _r
Jäykistyspalkkisauvat	1	c ₁	150000
Kaarisauvat	1	1	90000
Riipputankosauvat	1	0	10000

Laskelmissa varioitavia numeerisia suureita ovat täten seuraavat kolme:

- kaaren nuolisuhde $n_f = f/L$
- jäykistyspalkin ja kaaren taivutusjäykkyyden suhde c_1
- jäykistyspalkin normaalivoiman suuruus kertoimen α (15) muodossa.

Alimmat taajuuskertoimet $\bar{\omega}_i$ on esitetty kuvassa 6 jäykkyyssparametrin c_1 ja nuolisuhteen n_f funktiona.



Kuva 6. Taajuuksien riippuvuus muuttujista. $\alpha = 5$. M = Matilanvirran silta, K = Kotakennään silta, R = Riuttasalmen silta.

Taivutustaajuudet ω^M ovat käytännöllisesti katsoen täysin riippumattomia nuolisuhteesta n_f , joten niitä kuvassa 6 esittävät yhtenäiset viivat kuuluvat kaikille mukaan otetuille nuolisuhdeille. Sen sijaan ω^M riippuu voimakkaasti jäykkyyssparametrin c_1 kasvaen jäykistyspalkin taivutusjäykkyyden suhteessa kaaren taivutusjäykkyyden lisääntyessä. Tämä kasvu on sitä jyrkempää mitä korkeammasta taajuudesta on kysymys.

Aksiaalisen taajuuden ω^N riippuvuus jäykkyyssparametrin c_1 on heikko, jonka vuoksi sen kuvaaja on miltei vaakasuora. Riippuvuus nuolisuhteesta taas tulee selvästi esiin ja on sellainen, että taajuus kasvaa, kun nuolisuhde kasvaa.

Taajuuksien ω^M ja ω^N riippuvuus parametrin c_1 on siis toisilleen käänteistä ja tarjoaa keinon niiden erottamiseksi toisistaan. Näin on kuitenkin asiantuntijalaita vain suurilla jäykkyyssuhteen c_1 arvoilla. Kuvan arvoista tällaisia ovat $c_1 \geq 20$. Näillä arvoilla myös ominaismuodot ϕ^M ja ϕ^N erottuvat selvästi toisistaan kuvan 5 tapaan.

Taajuuksien riippuvuus normaalivoimaparametrin α on heikohko sillä alueella, mihin parametri käytännön rakenteissa asettuu.

Normaalivoiman suhteellinen vaikutus on sitä pienempi mitä korkeammasta taajuudesta on kysymys. Vaikutus aksiaaliseen taajuuteen on vain noin 25 % siitä mitä se on taivutustaajuuteen. Normaalivoiman vaikutus kasvaa kiihty-

västi normaalivoiman myötä.

RIIPPUTANKOJEN OMINAISVÄRÄHTELY

Riipputangot liittyvät alapäästään jäykistyspalkkiin ja yläpäästään kaareen. Omapainokuormituksesta ne saavat käytännöllisesti katsoen pelkästään vetorasitusta. Ne ovat usein päistään nivelöidyt, mutta koska värähtelyamplitudit ovat sillan mittoihin verrattuna kovin pieniä ja tangot erittäin hoikkia, kitka riittää estämään kulmanmuutokset nivelissä. Tangon alapää liikkuu pysty-suorasti jäykistyspalkin ominaismuodon mukaisesti ja yläpää suorittaa likimain yhtä suurta pystyliikettä, mutta samalla myös vaakasuoraa liikettä kaaren mukana. Vaakasوران liikkeen osuus pystyliikkeestä riippuu tangon sijainnista ja sillan värähtelyn ominaismuodosta.

Riipputangot suorittavat täten pakkovärähtelyä ajasta riippuvien siirtymien ja kiertymien avulla lausuttavien reunaehtojen johdosta. Sillan värähtely ruokkii täten tankojen värähtelyä. Tangon värähtely saattaa resonanssitapauksessa muodostua huomattavaksi. Tällainen tilanne on olemassa, kun sillan taajuus tai kenties taajuuden pieni monikerta sattuu samaksi tai hyvin lähelle jotakin tangon omaa ominaistaajuutta.

Vedetty suora tasajäykkä ja -massainen tanko on rakenneosana niin yksinkertainen, että sitä voidaan käsitellä massaltaan ja jäykkyydeltään jatkuvana ilman näiden ominaisuuksien diskretointia. Vaimennus tangoissa on erittäin pieni ja sen lisäksi myös leikkausvoiman ja rotaatioinertian vaikutukset voidaan jättää huomioonottamatta.

Tässä tapauksessa tankojen taivutusjäykkyys ja massaintensiteetti samoin kuin sillan omasta painosta aiheutuva sauvavoima ovat vakioita

$$EI(x) = EI$$

$$\bar{m}(x) = \bar{m}$$

$$N(x,t) = N$$

Koska kysymyksessä ovat ominaisvärähtelyt, ulkoinen poikittaiskuorma $p(x,t)=0$ ja ominaisvärähtelyjen differentiaaliyhtälöksi saadaan

$$EI \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - N \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{m} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (26)$$

Etsimällä ratkaisua erottamalla muuttujat muodossa

$$v(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

saadaan

$$EI \cdot T(t) \cdot X''''(x) - N \cdot T(t) \cdot X''(x) + \bar{m} \cdot X(x) \cdot \ddot{T}(t) = 0$$

eli

$$EI \cdot \frac{X''''(x)}{X(x)} - N \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} + \bar{m} \cdot \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = 0,$$

joka hajoo kahdeksi yhden muuttujan differentiaaliyhtälöksi

$$X''''(x) - a^2 \cdot X''(x) - k^4 \cdot X(x) = 0 \quad (27)$$

$$\ddot{T} + \omega^2 \cdot T = 0$$

jossa on merkitty

$$a^2 = \frac{N}{EI} \quad (28)$$

$$k^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$$

Jälkimmäisen yhtälön (27) ratkaisu on tunnetusti

$$T = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t \quad (29)$$

osoittaen, että tangon värähtelyn aikariippuvuus on harmonista kulmataajuudella ω .

Käyttäen lyhennysmerkintöjä

$$\epsilon = \sqrt{\frac{1}{4} a^4 + k^4 + \frac{1}{2} \cdot a^2}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{4} a^4 + k^4 - \frac{1}{2} \cdot a^2}$$

saadaan ensimmäisen yhtälön (27) ratkaisu muotoon

$$X(x) = D_1 \cdot \sin \delta x + D_2 \cdot \cos \delta x + D_3 \cdot \sinh \epsilon x + D_4 \cdot \cosh \epsilon x \quad (31)$$

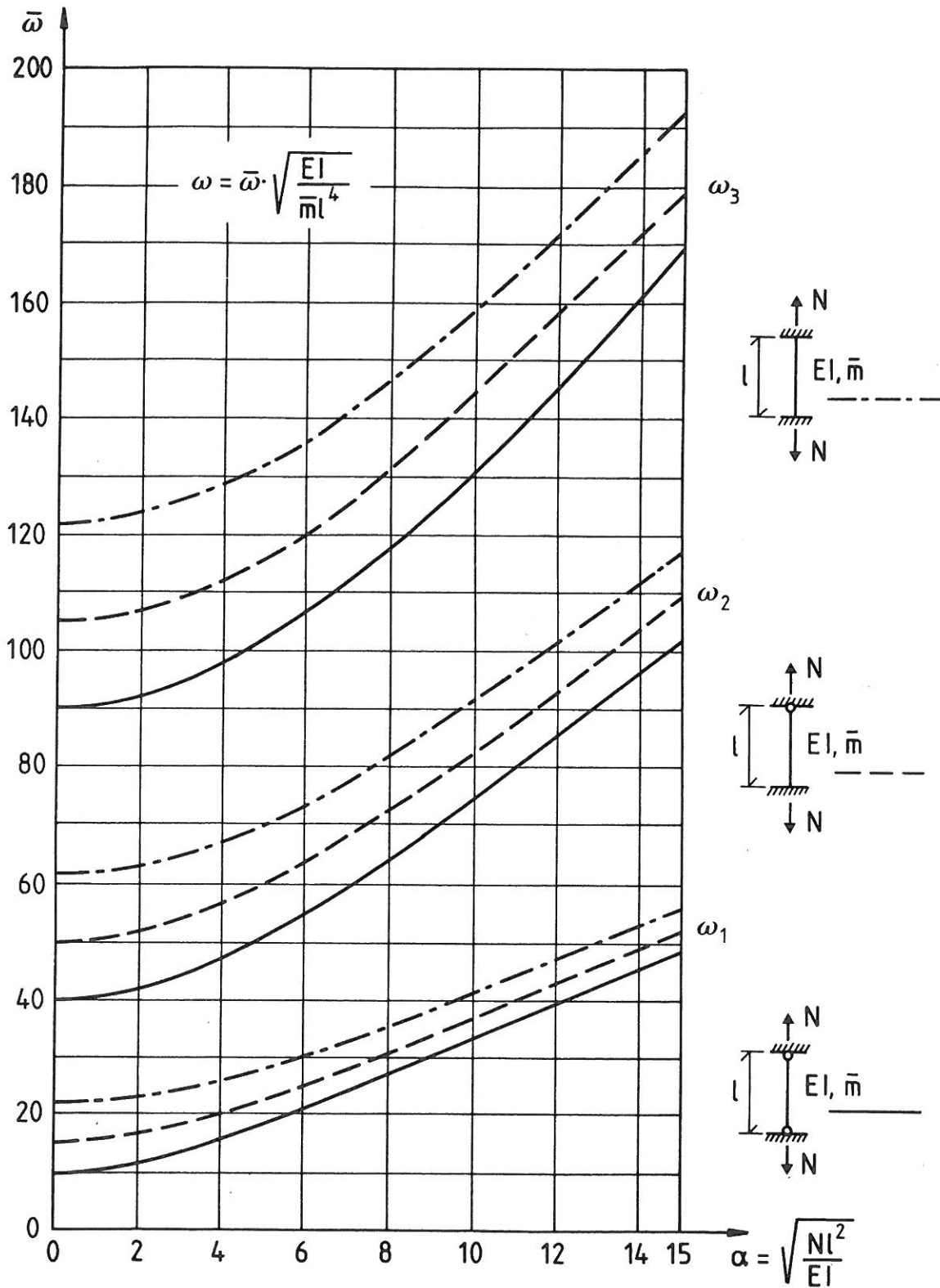
Yhtälö (31) on värähtelyn muotofunktio. Se ilmaisee värähtelevän tangon muodon.

Koko liikeyhtälön (26) ratkaisu on täten

$$v(x,t) = (D_1 \cdot \sin \delta x + D_2 \cdot \cos \delta x + D_3 \cdot \sinh \epsilon x + D_4 \cdot \cosh \epsilon x) \cdot$$

$$(A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t) \quad (32)$$

Kertoimet A ja B määräytyvät liikkeen alkuehdoista ja kertoimet D_1 , D_2 , D_3 ja D_4 värähtelevän tangon reunaehdoista. Värähtelyn ominaistaajuudet saadaan myös tangon päiden kiinnitysten reunaehtotarkasteluista. Soveltamalla nivelkiinnityksen reunaehdot $X = X'' = 0$ ja jäykän kiinnityksen reunaehdot $X = X' = 0$ yhtälöön (31) saadaan homogeeninen algebrallinen yhtälöryhmä. Ne kulmataajuuksien arvot, jotka tekevät tämän yhtälöryhmän determinantin nolaksi, edustavat ominaistaajuuksia. Kuvassa 7 on esitetty kolme alinta kulmataajuutta normaalivoiman eri arvoilla kolmelle sauvalle, joilla on erilaiset sauvanpääkiinnitykset.



Kuva 7. Vedetyn tangon kolme alinta ominaiskulmataajuutta normaalivoiman funktiona.

LASKENNOLLISET JA KOKEELLISET TAAJUUDET

Laskennolliset tulokset

Koko sillan ominaistuuksia saadaan laskelmista sijoittamalla tuloksiin siltaan liittyvät parametrit. Em. tuloksia on tämän artikkelin puitteissa esitetty ainoastaan kuvassa 6. Lähdeteoksessa /5/ on taajuuskertoimia esitetty taulukkomuodossa. On tunnettava myös omapainokuormituksen aiheuttama normaalivoima jäykistyspalkissa ja riipputangoissa.

Esimerkiksi Matilanvirran sillassa on

$$(EI)_k = 388 \text{ MNm}^2$$

$$(EI)_p = 8032 \text{ MNm}^2$$

$$c_1 = 8032/388 = 20,7$$

$$(EI)_t = 0,1886 \text{ MNm}^2$$

$$G = 310\,000 \text{ kg (kaarta kohden)}$$

$$H = 1,914 \text{ MN (omapainokuormasta)}$$

$$n_f = 0,20$$

$$L = 65 \text{ m}$$

jolloin (15):stä

$$\alpha = \sqrt{\frac{1,914 \cdot 65^2}{388}} = 4,55 \approx 5$$

ja (23):sta

$$\omega_1 = 186 \cdot \sqrt{\frac{388 \cdot 10^6}{310050 \cdot 65^3 \cdot \text{s}^2}} = 12,55 \text{ rad/s}$$

joten

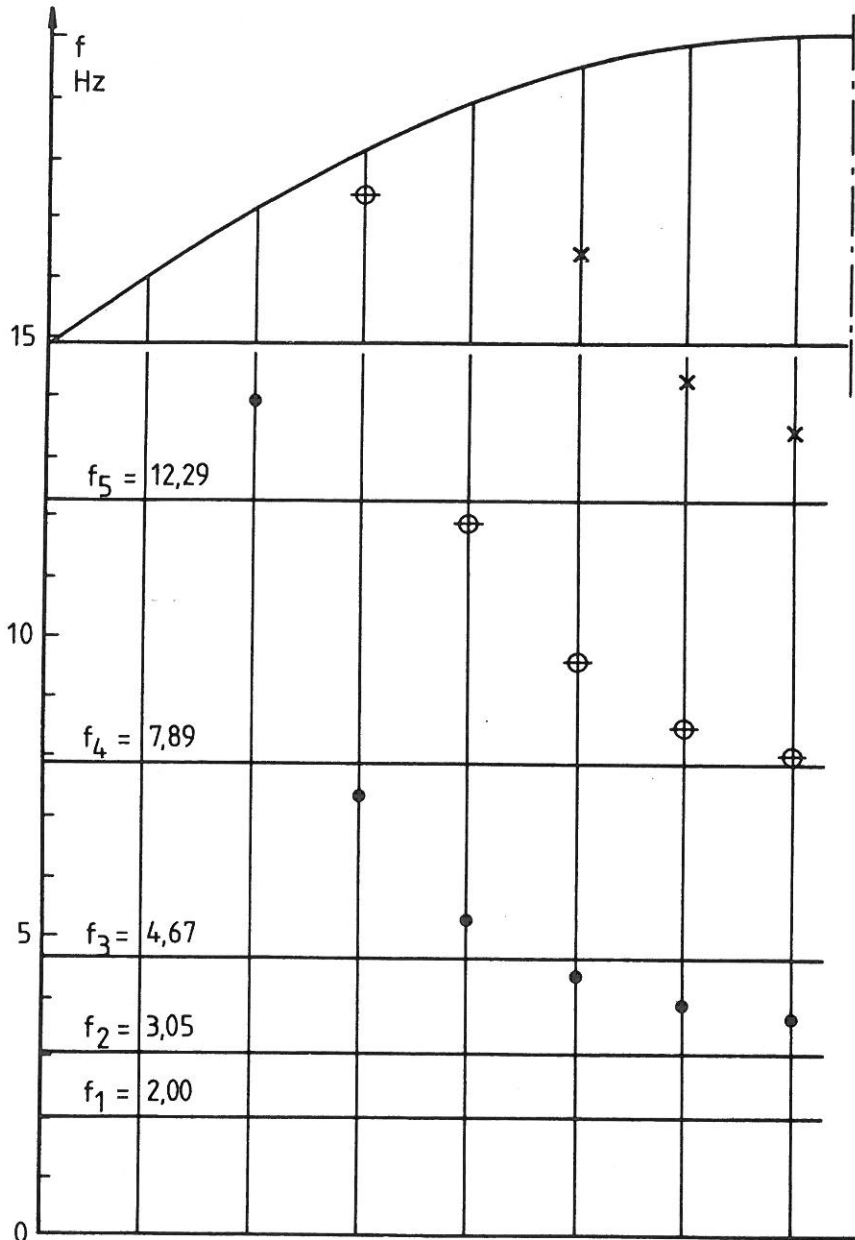
$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 2,00 \text{ Hz}$$

Vastaavasti saadaan riipputankojen taajuudet, kun niiden pituudet, jäykkyydet ja riipputankovoimat tunnetaan. Kuvassa 8 on esitetty Matilanvirran sillan näin lasketut taajuudet. Kuten näkyy, pisimpien tankojen perustaajuudet osuvat sillan toisen ja kolmannen ominaistuuksien väliin.

Tutkittujen siltojen rakenne

Kokeita suoritettiin Matilanvirran, Kotakennään ja Riuttasalmen silloilla. Kaikki mainitut sillat ovat pystyriipputankoisia teräsbetonikantisia tiesiltoja.

Matilanvirran sillan ajoradan leveys on 7,00 m ja Kotakennään sillan 10,00 m. Muutoin sillat ovat vähäisiä kaaren ja poikkikannattimien eroavuuksia lukuunottamatta samanlaiset. Riipputankojen lukumäärä on 14 kpl kaarta kohden ja kaarien nuolisuhde $n_f = 13/65 = 0,2$. Jäykistyspalkki muodostuu kahdesta



Kuva 8. Matilanvirran sillan ominaistaajuuksia. Vaakasuorat viivat ovat koko sillan taajuuksia ja pisteet ao. riipputangon taajuuksia: • on perustaajuus, ⊗ on 2. taajuus ja * on 3. taajuus.

rinnakkaisesta valssatusta IPB 1000-profiilista. Näin on päästy pienempään rakennekorkeuteen joskin teräsmenekin kustannuksella. Riipputangot muodostuvat kahdesta rinnakkaisesta tangosta \acute{a} \varnothing 55 mm. Kansirakenne lepää poikkikannattimien k 4,4 m ja neljän sekundaärin pituuskannattimen varassa. Kansilaatta on yhdistetty niihin teräsvaaroin, joten kysymyksessä on liittorakenne. Kaaren tuulisiteet ovat Vierendeel-tyyppiä poikkisiteitten lukumäärän ollessa 6.

Riuttasalmen sillan jännemitta $L = 81,5$ m ja nuolikorkeus $f = 14$ m, joten $n_f = 14/81,5 = 1:5,82 = 0,172$. Riipputankojen lukumäärä $n_t = 16$ ja väli $l_c = 4,8$ m. Kaari on kotelorakenne ja jäykistyspalkki on hitsaamalla koottu epä-

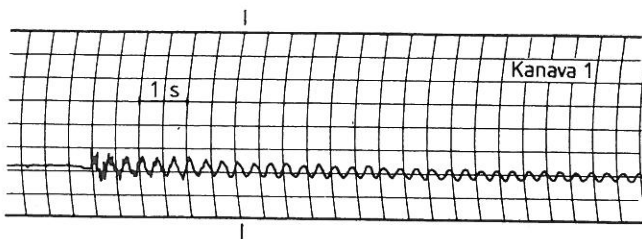
symmetrinen yksiuumainen I-palkki. Ajouradan leveys $h_1 = 9,00$ m. Sekundäärisiä pituuskannattimia ei ole, joten kansi on jatkuva vain poikkikannattimiin tukeutuva teräsbetoninen laatta. Liittovaarvoja on vain reunimmaisissa poikkikannattimissa kansilaatan pitämiseksi paikoillaan. Riipputangot muodostuvat yhdestä pyöreästä tangosta $\varnothing 70$ mm.

Koko sillan ominaistaajuuden mittaamiseksi suoritettiin pudotuskokeita. Pudotuskohdat olivat ajoradan keskellä sillan jänteen puolivälissä ja neljännespisteen tienoilla olevan riipputangon kohdalla. Teräsbetoninen 720 kg painoinen järkäle kiinnitettiin vaijeriin, joka johdettiin pudotuskohdalle pysäytetyssä puisessa telineessä olevan rissan kautta sillan ulkopuolelle pysäköidyn auton vinssiin. Vinssin ja vaijerin avulla paino nostettiin sillan kannelta ja pudotettiin laukaisemalla vaijerin ja painon väliin sijoitetun laukaisukoukun narusta vetäisemällä. Pudotuskorkeus oli 40-50 cm. Ajoradan päällysteen vaurioituminen ehkäistiin pudottamalla paino puulankuista tehdyn $1,2 \times 1,2$ m² suuruisen suojalevyn päälle.

Riipputankojen ominaisvärähtelyn määrittämiseksi suoritettiin lyöntikokeita lyömällä riipputankoja raskaalla lyijyvasaralla.

Ajokokeet suoritettiin raskaalla 2-akselisella sorakuormassa olevalla kuorma-autolla, joka painoi kuormineen 13000 kg. Ajot suoritettiin pitkin ajoradan keskiviivaa eri nopeuksin. Niiden tarkoituksena oli selvittää sillan dynaamista vastetta. Ominaisvärähtelyjen kannalta ajokokeiden tuloksista kiinnostavat sillan jälkivärähtelyt ajoneuvon poistuttua sillalta.

Värähtelyjä mitattiin venymäliuskoilla ja pietsosähköisillä kiihtyvyyssantureilla. Sähköisiksi muutetut venymät ja kiihtyvyydet taltioitiin instrumentinauhurin nauhalle maastossa siltapaikoilla. Nauhat purettiin laboratoriossa piirtureille, jolloin oli mahdollisuus käyttää välissä transienttitalenninta, jonka avulla lyhyttäkin ajanjaksoa voitiin tarkastella ajallisesti mieltävaltaisesti hidastettuna. Kuvassa 9 on esitetty esimerkki pienimittakaavaisesta piirturin tuloksesta. Siltojen kaksi alinta ominaistaajuutta f_1 ja f_2



Kuva 9. Matilanvirran sillan jäykistyspalkin alalaipan venymä pudotuskokeesta jänteen puolivälissä.

saatiin esiin pudotuskokein jänteen 1/4-pisteessä (vastaa kuvan 6 ominaismuotoa ψ_1) ja jänteen puolivälissä, jossa edellisellä muodolla on solmupiste. Riipputankojen perustaajuudet saatiin lyöntikokein. Koetulosten mukaan Matilanvirran ja Kotakennään silloissa $f^N = f_2$, mutta Riuttasalmen sillassa $f^N = f_1$, mikä on sopusoinnussa laskennollisten tulosten kanssa (vrt. kuva 6). Mitatut ja lasketut taajuudet on koottu taulukkoon 4.

Taulukko 4. Mitatut ja lasketut taajuudet

f	Matilanvirran silta		Kotakennään silta		Riuttasalmen silta		Osa	
	Mitattu	Laskettu	Mitattu	Laskettu	Mitattu	Laskettu		
f_1	1,67-1,73	2,00	1,45-1,53	1,86	2,08-2,09	2,05	Silta	
f_2	2,89-2,96	3,05	2,50-2,52	2,79	3,13-3,21	3,25		
f_1	1	66 - 75	77,2	55 - 69	78,0	x	170	Riippu- pu- tan- got
	2	10,0-10,2	13,9	11,0-11,6	15,0		15,5	
	3	5,4	7,38	5,8 - 6,1	8,06		8,66	
	4	4,1 - 5,2	5,26	4,8 - 5,1	5,85		6,26	
	5	3,5 - 3,6	4,33	3,8 - 4,0	4,84		5,12	
	6	3,3 - 3,5	3,87	3,5 - 3,8	4,35		4,50	
	7	3,3 - 3,6	3,67	3,3 - 4,2	4,13		4,17	
	8	-	-	-	-		4,02	
Hz								

x) Mittaus epäonnistui

VAIMENNUS

Rakenteiden värähtelyissä esiintyy aina vaimennusta. Vaimennuksen suuruus on mahdollista määrittää ainoastaan kokeellisesti. Terässiltojen vaimennuksen on havaittu olevan luonteeltaan lähellä viskoosia vaimennusmallia. Soveltamalla tätä vaimennustyyppiä saatiin tutkittujen siltojen suhteelliseksi vaimennukseksi kahdella alimmalla taajuudella 0,3...1,2 %, mikä on verrattain pieni. Edelleen tulokset osoittavat, että vaimennus on pienin aksiaaliosassa värähtelymuodossa riippumatta siitä onko sen taajuus pienin. Riipputankojen vaimennus todettiin niin pieneksi, että se muodostuu pelkästään teräksen sisäisestä vaimennuksesta. Näinollen laskelmien yhteydessä tehty oletus vaimennuksen merkityksettömyydestä tuloksiin on perusteltu.

JOHTOPÄÄTÖKSIÄ

Mitatut kaksi alinta koko sillan taajuutta f_1 ja f_2 ovat Matilanvirran sillassa keskimäärin 85 % ja 96 % laskennallisesti saaduista tuloksista ja rakenteellisesti samanlaisessa Kotakennään sillassa vastaavasti noin 80 % ja 90 %. Riuttasalmen sillassa vastaavat luvut ovat 101 % ja 98 %. Riuttasalmen sillan osalta mitattujen ja laskettujen arvojen näin hyvä yhtäpitävyys viittaa selvästi siihen, että rakenne toimii vapaissa värähtelyissä liittorakenteena teräsosien ja betonikannen välisen kitkan ansiosta. Liittorakenteisuudella on aivan oleellinen vaikutus taivutusjäykkyysparametriin c_1 , josta taajuudet voimakkaasti riippuvat (vrt. kuva 6).

Sensijaan Matilanvirran sillassa ja Kotakennään sillassa, jotka ovat liittorakenteisia, kokeellisten ja laskennollisten taajuuksien ero on suurempi. Eräs hajontaa omaava lähtöarvo, jolla saattaa olla osuutta asiaan, on kansilaatan betonin kimmokerroin. Sille on laskelmissa käytetty lyhytaikaiselle kuormitukselle suositeltua arvoa $E = 5700 \sqrt{K}$ ($K \text{ MN/m}^2$). Kansirakenteen liittyminen jäykistyspalkkiin ei ole jäykkä, koska se ei tapahdu välittömästi vaan poikkikannattimen välityksellä. Ts. kysymyksessä on kansilaatan toimiva leveys. Taivutusjäykkyys $(EI)_p$ on laskettu otaksumalla kansilaatan toimivan tehokkaasti koko leveydellään. Ilmeisesti myös sillan leveys vaikuttaa asiaan poikkikannattimien taipumisena ja kansilaatan poikittaisena taipumisena.

Riipputankojen värähtelyiden mitatut taajuudet ovat pienempiä kuin lasketut taajuudet. Tämä selittyy seuraavilla seikoilla:

- tankojen värähtelypituuden tarkka määrittäminen on epätarkkaa niiden päiden kiinnityksen rakenteen vuoksi. Laskelmissa käytetty värähtelypituus lienee jonkin verran todellista suurempi, jolloin taajuudet alenevat,
- tankojen taajuudet on laskettu päistään jäykästi kiinnitettynä. Kiinnitys on todellisuudessa jonkin verran kimmoisa, millä on taajuutta alentava vaikutus,
- tangon todellinen normaalivoima saattaa poiketa laskelmien mukaisesta teoreettisesta arvosta.

Riipputankojen mahdollisuus joutua resonanssiin koko sillan värähtelyissä on mahdollista. Tämä näkyy kuvasta 8. Pisimpien riipputankojen alimmat taajuudet eivät ole kaukana sillan taajuudesta f_2 . Sama seikka paljastuu taulukosta 4. Erityisesti Matilanvirran sillan osalta kiinnittyy huomio siihen, että alimmat mitatut riipputankolujuudet ovat 3,3 - 3,5 Hz, kun taas sillan mitattu f_2 on keskimäärin 2,92 Hz. Jos asennusvaiheessa kaaren oikeata muotoa tavoiteltaessa riipputankoja on kiristetty, on mahdollista, että jonkin riipputangon kiristäminen on jäänyt vähemmälle tai tankoa ei ole kiristetty lainkaan, jolloin se on jäänyt löysemmälle kuin alunperin olisi ollut laita. Tällöin tällaisen tangon taajuus alenee ja saattaa osua samaksi kuin sillan taajuus f_2 . On huomionarvoista, että juuri Matilanvirran sillassa tapahtui tankovaurioita. On myös mahdollista, että jonkin tangon taajuus on täsmälleen kaksinkertainen sillan taajuus, jolloin tanko värähdellään saa impulssin sillasta joka toisella värähdysjaksolla. Koska sillan ja tankojen vaimennukset ovat mittausten mukaan sangen pieniä, saattaa tangon värähtely resonanssitapauksessa muodostua huomattavaksi.

LÄHDEKIRJALLISUUS

- [1] Glough, R.W., Penzien, J., Dynamics of Structures. New York, 1975, 634 s.
- [2] Fryba, L., Vibration of solids and structures under moving loads. Groningen 1972. 484 s.

- [3] Hurty, W.C., Rubinstein, M.F., Dynamics of Structures, New Jersey, 1964, 455 s.
- [4] Lampio, E., Kotakennään ja Matilanvirran siltojen riipputankojen poikittaisvärähtely, Työselostus. Imatran Voima Osakeyhtiö, Sähkölaboratorio, Työ n:o 302/69. Helsinki 1969, 40 s.
- [5] Loikkanen, P., Langer-palkkisillan ominaisvärähtely. Lis.työ. HTKK, Espoo 1978. 119 s.
- [6] Structural Steel Designers' Handbook, Ed. Merrit, F.S. New York 1972. Section 13.
- [7] Veletsos, A.S., Huang, T., Analysis of Dynamic Response of Highway Bridges. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE (1970) FM 5, s. 593-620.
- [8] Veletsos, A.S., Austin, W.J., Pereira, C.A.L., Wung, S.U., Free in-plane vibration of Circular Arches, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE (1972) FM 5, s. 311-329.