

## KERROKSELLISTEN RAKENTEIDEN LÄMPÖTILOISTA JA SIIRTYMISTÄ

Heikki Perttilä

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 12  
No. 1 1979 s. 23...33

YHTEENVETO: Artikkelin liittyy kirjoittajan diplomityöhön, jossa tutkittiin lämpötilavaihteluiden osuutta lämpimien tasakattojen dimensiomuutoksissa. Aurion säteilylle alttiina olevien pintojen lämpötila riippuu erittäin voimakkaasti pinnan laadusta ja väristä. Vaakasuora tumma pinta saavuttaa helposti +70 °C asteen lämpötilan. Pinnan taas yöllä jäähtyessä on seurauksena jaksollisesti muuttuva lämpötilakenttä koko rakenteessa. Tällaista todenmukaista lämpötilatarkastelua haittaa kuitenkin sen monimutkaisuus. Kerroksellisten rakenteiden taipumien ja jännitysten laskeminen on myös lyhyesti esitetty.

### JOHDANTO

Rakennustekniikan kehittyessä ja pyrittäessä teolliseen rakennusosien valmistukseen on Suomessakin ruvettu käyttämään kerroksellisia eli ns. sandwich-elementtejä talojen ulkoseinissä ja myös jonkin verran katoissa. Tällaiset elementit ovat yleensä hyvin keveitä, mutta silti erittäin jäykkiä. Poikkeuksen muodostavat kerrostaloissa käytetyt betonielementit, jotka kylläkin ovat jäykkiä, mutta eivät keveitä. Näissä betonielementeissä jäykkyys saadaan sitomalla betonikerrokset toisiinsa teräsansailloilla, kun taas keveissä elementeissä kevyt ydinmateriaali, tavallisesti jokin solumuovi, pitää pintakerrokset yhdessä. Sandwich-rakenteena voidaan pitää myös lämmintä tasakattoa, jossa kantavana osana on betoni- tai kevytbetonielementti, joka on päällystetty lämmöneristyskerroksella ja edelleen esim. bitumihiuopakatteella. Tällaisen katon jäykkyys muodostuu luonnollisesti kantavan katon jäykkyydestä, mutta sandwich-teoriaa voidaan tällöinkin käyttää esim. jännitysten ja siirtymien arvioimiseen.

Seinämäiset rakenteet, joiden toinen pinta on alttiina ulkoilman vaikutuksille ja toinen on rakennuksen sisäseinänä joutuu melko suurten lämpötilavaihteluiden kohteeksi. Koska tällaisen seinämän ulkopinnan lämpötila ei ole koskaan stabiili, vaan vaihtelee jaksollisesti vuorokauden aikojen mukaan, ei lämpötilajakautuma rakenteen sisälläkään ole stabiili, vaan jatkuvasti muuttuva. Ns. ohutkuorisissa sandwich-rakenteissa voidaan pintakerrosten lämpötilojen olettaa olevan rakenteen poikkisuunnassa vakioita kunkin ajan hetkenä, mutta mitä paksummat ovat rakenteen kerrokset sitä epälineaarisemmin lämpötila niissä jakautuu.

## SEINÄMIEN LÄMPÖTILOISTA

Seinämän ulkopinnan lämpötila muuttuu ulkoilman lämpötilan muuttumisen ja auringon säteilyn vaikutuksesta. Pinnan laadulla on erittäin suuri vaikutus, miten paljon pinta absorboi auringon säteilyä ja kuumenee. Pinnan kuumenemista voidaan approksimoida seuraavan kaavan mukaan:

$$T_{\text{pinta}} = T_{\text{ulkoilma}} + \frac{\alpha \cdot I}{m_u} \quad [^{\circ}\text{C}] \quad (1)$$

missä  $\alpha$  = katon pinnan absorptiokerroin

$I$  = kokonaissäteily  $\text{W/m}^2$

$m_u$  = ulkoinen lämmönjohtoluku  $\text{W/m}^2\text{ }^{\circ}\text{C}$

Kokonaissäteily voi kesällä olla  $800 \text{ W/m}^2$  vaakasuoraa pintaa vasten,  $m_u$  on varsin suuresti riippuvainen ilman liikkeistä mutta vaihtelee yleensä  $15 \dots 30 \text{ W/m}^2\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Absorptiokertoimelle  $\alpha$  voidaan soveltaa seuraavia arvoja:

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| asfaltti, bitumi ym. tummat pinnat | 0.9 |
| kivi, harmaat pinnat               | 0.7 |
| galvanoitu pelti, sileät pinnat    | 0.5 |

Ruotsissa kesällä 1975 suoritetuissa mittauksissa olivat korkeimmat mitatut lämpötilat

|                  |                               |
|------------------|-------------------------------|
| musta pinta      | $70 \text{ }^{\circ}\text{C}$ |
| harmaa pinta     | $60 \text{ }^{\circ}\text{C}$ |
| galvanoitu pelti | $50 \text{ }^{\circ}\text{C}$ |

mitä varsin hyvin vastaa kaava (1).

Vammalassa, Isoran tehtaan katolla tehtiin toukokuun alussa 1977 lämpötilamittauksia, joissa mitattiin myös lämmöneristeen alla olevan betonilaatan pinnan lämpötilat. Mittauksissa käytetyn katon rakenne alhaalta lukien oli seuraava:

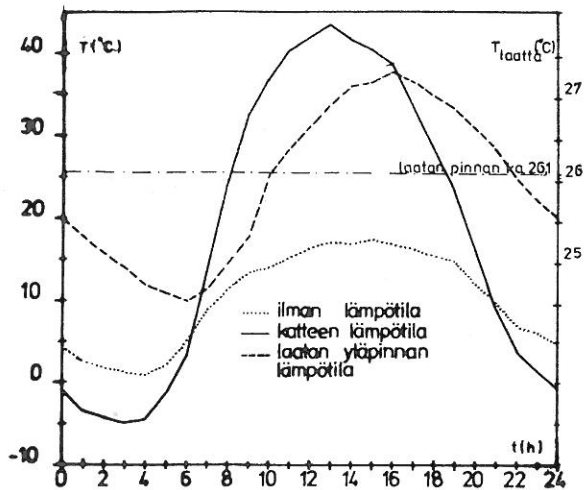
TT-laatat, paksuus 5 cm

bitumisively

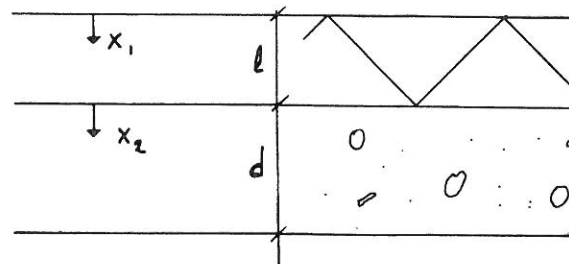
polystyreeni P20, 10 cm

kaksinkertainen bitumihuopa, liimattu pisteittäin.

Todettiin myös, että vesikate jäähtyi alle ilman lämpötilan. Vammalassa saavutettiin jopa  $-12 \text{ }^{\circ}\text{C}$ :een ääriarvo ilman lämpötilan ollessa nollan yläpuolella. Katteen lämpötila oli öisin muutenkin koko mittausjakson, 5 vrk, aikana selvästi ilman lämpötilan alapuolella.



Kuva 1 Mitatut lämpötilavaihtelut



Kuva 2 Lämpötilakentässä käytetty koordinaatisto

### Stationaarinen lämpövirtaus

Tarkastellaan kolmikerroksista rakennetta, josta uloin kerros on ajateltu leikatuksi pois. Jäljelle voidaan ajatella jäävän vaikkapa betonilaatta, joka on päällystetty lämmöneristeellä. Eristeen paksuus olkoon  $l$  ja lämmönjohtoluku  $\lambda_E$ , ja betonin vastaavasti  $d$  ja  $\lambda_B$ . Oletetaan ulkopinnalla olevan lämpötila  $T_{up}$  ja sisäilmalla  $T_{si}$ . Lämpötilan jakautuminen on molemmissa kerroksissa lineaarinen. Lämpötilaksi eristeen ja betonin välisessä saumassa saadaan:

$$T_{EB} = T_{up} - \frac{1}{\lambda_E} \left( \frac{T_{up} - T_{si}}{1/\lambda_E + d/\lambda_B + 1/m_s} \right) \quad (2)$$

ja lämpötila betonin alareunassa

$$T_{BA} = T_{EB} - \frac{d}{\lambda_B} \left( \frac{T_{up} - T_{si}}{1/\lambda + d/\lambda_B + 1/m_s} \right) \quad (3)$$

### Ulkopinnan lämpötilan periodinen muuttuminen

Ulkopinnan lämpötilan muutoksia approksimoidaan kosinimuotoisella funktiolla. Ero todellisiin lämpötiloihin ei ole kovin suuri (kuva 1). Ulkopinnan lämpötilaa merkitään  $T_o$ :lla ja sen keskiarvoa  $T_{up}$ :lla ja vaihtelun amplitudia  $T_a$ :lla. Rakenteessa oletetaan olevan yksidimensioinen lämpövirtaus. Lisäksi tässä vaiheessa oletetaan, että  $T_{up} = T_{si} = 0$ . Lopulliset lämpötilat rakenteessa saadaan nimittäin superponoimalla stationaarinen virtaus tähän ratkaisuun. Ulkopinnan lämpötila voidaan esittää muodossa:

$$T_o(t) = T_a \cdot (\cos \omega t + i \sin \omega t) = T_a \cdot e^{i \omega t} \quad (4)$$

missä vuorokautinen jakso on

$$\omega = 2\pi/24 \text{ h.} \quad (5)$$

Lämpötila- ja lämpövirtauskenttien suhteet määrätään lämmönjohtumisen differentiaaliyhtälön avulla:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{dT}{dt} \quad (6)$$

missä

$$a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \quad [\text{m}^2/\text{h}] \quad (7)$$

missä

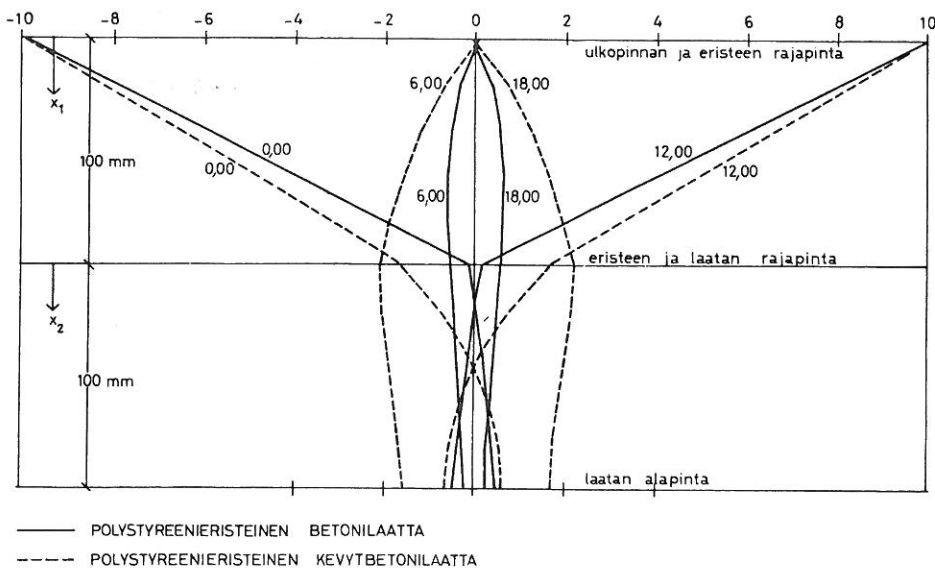
$$\lambda = \text{lämmönjohtoluku} \quad [\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}\cdot\text{h}]$$

$$c = \text{ominaislämpö} \quad [\text{J}/\text{kg}^\circ\text{C}]$$

$$\rho = \text{tiheys} \quad [\text{kg}/\text{m}^3]$$

Differentiaaliyhtälön (6) ratkaisuksi saadaan ottaen huomioon ulkopinnan oletettu lämpötila (4) ja että lämmöneristeen ja betonilaatan rajapinnassa lämpötilan ja lämpövirran on oltava yhtäsuuret, eristeen osalta:

$$T_E(x_1, t) = \cos \omega t \cdot \delta(x_1) - \sin \omega t \cdot \eta(x_1) \quad (8)$$



Kuva 3 Laskennallisesti saatuja lämpötilajakautumia eri vuorokaudenaikoina

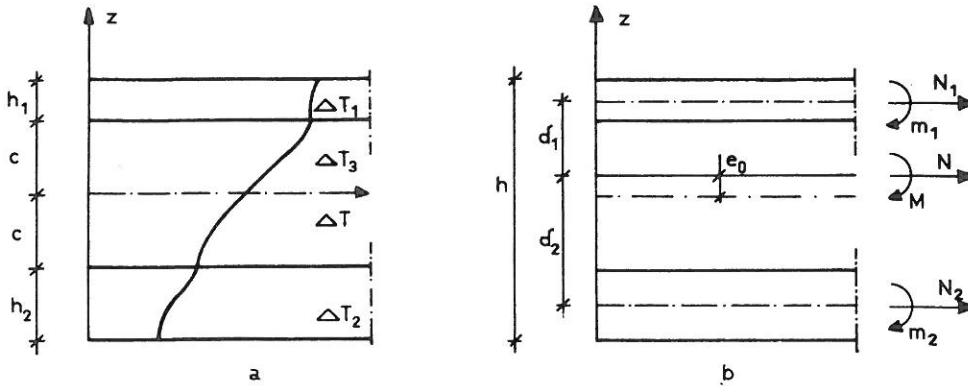
ja betonin osalta:

$$T_B(x_2, t) = \cos \omega t \cdot \varphi(x_2) - \sin \omega t \cdot \psi(x_2) \quad (9)$$

Lausekkeissa (8) ja (9) esiintyvät  $x_1$ :n ja  $x_2$ :n funktiot ovat määrättävissä em. ehtojen avulla, eikä niitä esitetä tässä niiden pituuden vuoksi. Kaavassa 3 on piirretty polystyreenillä eristetyille betonille ja kevytbetonille lämpötilajakautumat neljänä vuorokaudenhetkenä ulkopinnan lämpötilan amplitudin ollessa  $20^\circ\text{C}$ . Voidaan todeta, että lämpötilajakautumat muistuttavat varsin vähän stationaarista tilannetta.

## LÄMPÖTILAMUUTOKSEN RASITTAMA SANDWICH-RAKENNE

Oletetaan sandwich-rakenteelle kuvan 4a mukainen lämpötilajakautuman muutos. Jos rakenteen eri osat ovat lineaarisesti kimmoisia lämpötilan muutoksesta huolimatta, eivätkä kerrokset liu'u



Kuva 4 Oletettu lämpötilamuutos ja sen aiheuttamat rasitukset

toistensa suhteen, voidaan tämän muutoksen aiheuttamat kuormitukset laskea seuraavien kaavojen mukaan:

$$N_1^T = E_1 \alpha_1 \int_c^{c+h} \Delta T_1(z) dz \quad (10)$$

$$N_2^T = E_2 \alpha_2 \int_{-c-h_c}^{-c} \Delta T_2(z) dz \quad (11)$$

ja kokonaisnormaalivoima:

$$N^T = N_1^T + N_2^T \quad (12)$$

Rakennetta taivuttaviksi momenteiksi saadaan

$$M_1^T = E_1 \alpha_1 \int_c^{c+h} \Delta T_1(z) \cdot (z-c) dz \quad (13)$$

$$M_2^T = E_2 \alpha_2 \int_{-c-h_2}^{-c} \Delta T_2(z) \cdot (z+c) dz \quad (14)$$

Käytetään merkintöjä

$$M^T = M_1^T + M_2^T + (N_1^T - N_2^T) \cdot c - e_0 \cdot N^T \quad (15)$$

$$m_1^T = M_1^T - h_1/2 \cdot N_1^T \quad (16)$$

$$m_2^T = M_2^T + h_2/2 \cdot N_2^T \quad (17)$$

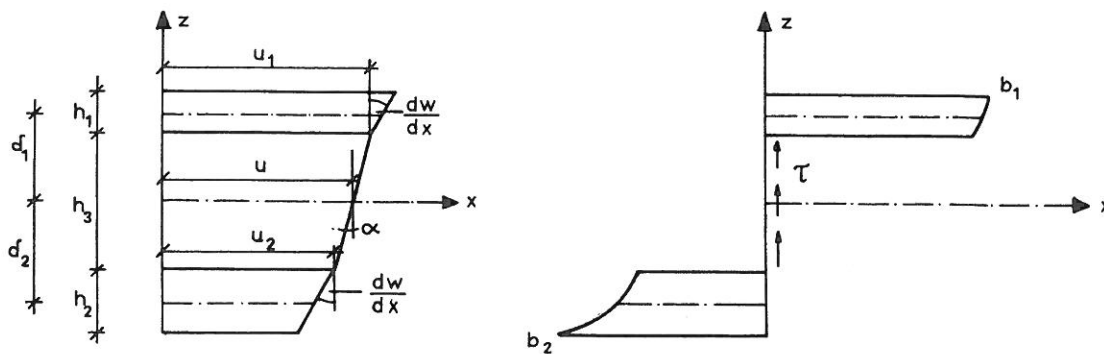
Ohutkuoriselle sandwich-rakenteelle yhtälöt (15)...(17) yksinkertaistuvat muotoon:

$$M^T = (N_1^T - N_2^T) \cdot c - e_0 \cdot N^T \quad (18)$$

$$m_1^T = m_2^T = 0 \quad (19)$$

Paksukuorinen sandwich-rakenne

Paksukuoriselle sandwich-rakenteelle oletetaan kuvan 5 mukaiset siirtymät ja jännitykset.



Kuva 5 Oletettu siirtymä- ja jännitysjakautuma

Siirtymät voidaan tällöin kirjoittaa:

$$u_z = u + z \cdot \alpha \quad \left(-\delta_2 + \frac{h_2}{2} \leq z \leq \delta_1 - \frac{h_1}{2}\right)$$

$$u_{1z} = u + \left(\delta_1 - \frac{h_1}{2}\right) \cdot \alpha - \left(z - \delta_1 + \frac{h_1}{2}\right) \cdot \frac{dw}{dx}, \quad \left(\delta_1 - \frac{h_1}{2} \leq z \leq \delta_1 + \frac{h_1}{2}\right)$$

$$u_{2z} = u - \left(\delta_2 + \frac{h_2}{2}\right) \cdot \alpha - \left(z + \delta_2 - \frac{h_2}{2}\right) \cdot \frac{dw}{dx}, \quad \left(\delta_2 - \frac{h_2}{2} \leq z \leq -\delta_2 + \frac{h_2}{2}\right)$$

(20)

Näistä siirtymäsuureista lähtemällä voidaan johtaa sandwich-rakenteen ratkaisemiseen tarvittavat differentiaaliyhtälöt:

$$-\frac{h^2}{\beta} \theta \frac{d^2 H}{dx^2} + H = \theta_1 [M_0 + Q_0 \cdot x - \bar{M}(x) - M^T]$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{1}{D \theta_1} \left(H - \Omega_1 \frac{d^2 H}{dx^2}\right)$$

$$\alpha = \frac{\Omega}{D \theta_1} \cdot H' - w'$$

(21)

Suure  $H$  tarkoittaa momenttia joka aiheutuu pintakerroksissa vaikuttavista normaalivoimista,  $H = (N_1 - N_2) \cdot c$ . Suureet  $M_0$  ja  $Q_0$  tarkoittavat momenttia ja leikkausvoimaa palkin päässä ts. tukireaktiota, ja  $\bar{M}(x)$  on ulkoisten voimien aiheuttama momentti. Nämä differentiaaliyhtälöt voidaan ratkaista, kun tiedetään reunaehdot.

Taulukko 1 Paksukuorisen sandwich-palkin reunaehdot

| tuentatapaus     | reunaehdot   |
|------------------|--|
| vapaasti tuettu  | $w=0, H=0, H''=0$  |
| jäykkä kiinnitys | $w=0, w'=0, H'=0$  |
| vapaa reuna      | $H=0, H''=0$<br>$H' - h^2 \cdot \beta^{-1} \theta \cdot H'' = 0$ |

Lämpötilamuutoksen aiheuttamiksi jännityksiksi voidaan kuvan 5b merkintöjen mukaisesti kirjoittaa

$$\sigma_1 = \frac{H}{2h_1 \cdot c} + \frac{6}{h_1^2} (-D_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - m_1^T) - E_1 \cdot \alpha_1^T \cdot \Delta T_1$$

$$\sigma_2 = -\frac{H}{2h_2 c} + \frac{6}{h_2^2} (-D_2 \frac{d^2 w}{dx^2} - m_2^T) - E_2 \cdot \alpha_2^T \cdot \Delta T_2 \quad (22)$$

$$\tau = G_3 (\alpha + \frac{dw}{dx})$$

Esim. vapaasti tuetulle palkille saadaan lämpötilamuutoksen aiheuttamaksi taipumaksi

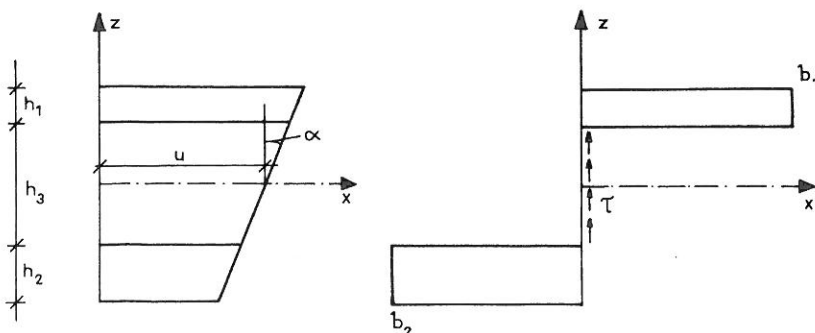
$$w(x) = -\frac{M^T}{D} [(-\frac{1}{\lambda^2} + \Omega_1) (\frac{1 - \cosh \lambda l}{\sinh \lambda l} \sin \lambda x + \cosh \lambda x - 1) + x^2/2 - l \cdot x/2] \quad (23)$$

ja jännitysten laskemisessa tarvittavan funktion  $H$  lausekkeeksi saadaan:

$$H(x) = -\theta_1 M^T (\frac{1 - \cosh \lambda l}{\sinh \lambda l} \sinh \lambda x + \cosh \lambda x - 1) \quad (24)$$

Ohutkuorinen sandwich-rakenne

Oletetaan kuvan 6 mukaiset siirtymät ja jännitykset.



Kuva 6 Ohutkuorisen sandwich-rakenteen siirtymä- ja jännitysjakautuma

Siirtymät voidaan nyt esittää

$$u_z = u + z \cdot \alpha \quad (25)$$

Differentiaaliyhtälöt (21) ovat nyt muuten samat mutta ensimmäinen yksinkertaistuu muotoon

$$H = Q_1 [M_0 + Q_0 \cdot x - M(x) - M^T]$$

Taulukko 2 Ouhutkuorisen sandwich-palkin reunaehdot

| tuentatapaus     | reunaehdot      |
|------------------|-----------------|
| vapaasti tuettu  | $w=0, H=0$      |
| jäykkä kiinnitys | $w=0, \alpha=0$ |
| vapaa reuna      | $H=0, H'=0$     |

Lämpötilamuutoksen aiheuttamissa jännityksissä yksinkertaistuvat kaavat (22):

$$\sigma_1 = \frac{H}{2h_1 \cdot c} - E_1 \cdot \alpha_1 \cdot \Delta T_1$$

$$\sigma_2 = -\frac{H}{2h_2 \cdot c} - E_2 \cdot \alpha_2 \cdot \Delta T_2 \quad (27)$$

$$\tau = G_3 \cdot \frac{dw}{dx}$$

Vapaasti tuetun palkin taipumaksi saadaan

$$w(x) = -\frac{M^T}{D} (x^2/2 - l \cdot \alpha/2) \quad (28)$$

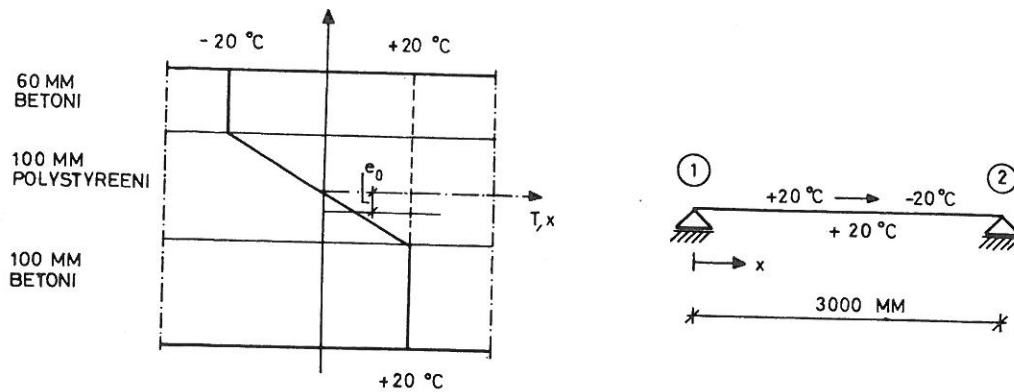


Taulukko 3 Käytetyt vakiot

| paksukuorinen sandwich  | ohutkuorinen                                      |
|---|---|
| $B_k = E_k \cdot h_k \quad k = 1,2$   |   |
| $B = \Sigma B_k$  |   |
| $D_k = 1/12 \cdot B_k \cdot h_k^2$  | $D_k = 0$   |
| $D = D_1 + D_2 + B_1 \cdot \delta_1^2 + B_2 \cdot \delta_2^2$   | $D = B_1 \cdot \delta_1^2 + B_2 \cdot \delta_2^2$ |
| $e_0 = 1/B \cdot [0.5 \cdot (h_1+h_3) + 0.5(h_2+h_3)]$  |   |
| $\gamma_k = E_k \cdot h_k/B \quad k = 1,2$  |   |
| $t_k = h_k/h \quad h = 1,2,3$   |   |
| $\theta = \gamma_1 [t_1^2 + 3(t_3+t_1)^2] +$ $+ \gamma_2 [t_2^2 + 3(t_3+t_2)^2] -$ $- 3 [t_3(\gamma_1 - \gamma_2) + \gamma_1 t_1 - \gamma_2 t_2]^2$ |   |
| $\theta_1 = 3t_3^2 [1 - (\gamma_1 - \gamma_2)^2]$   |   |
| $\theta_2 = 6\gamma_1\gamma_2 t_3 (t_1 + t_2)$  |   |
| $\theta_3 = 4(\gamma_1 t_1^2 + \gamma_2 t_2^2) - 3(\gamma_1 t_1 - \gamma_2 t_2)^2$  |   |
| $\theta_1 = \theta^{-1} (\theta_1 + \theta_2)$  |   |
| $\theta = \theta^{-1} (\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2)$   |   |
| $\beta = 12G_3 h_3 / B$   |   |
| $\Omega = h^2 \beta^{-1} (\theta_1 + \theta_2)$   |   |
| $\Omega_1 = h^2 \beta^{-1} \theta_1$  |   |
| $\Omega_2 = h^2 \beta^{-1} \theta_2$  |   |
| $\epsilon_0 = \frac{h^2}{1^2} \cdot \beta^{-1} \cdot \theta$  |   |
| $\lambda = 1/(\epsilon_0 l)$  |   |
| $\lambda_1 = (\gamma_1 - \gamma_2) t_3$   |   |
| $\lambda_2 = \gamma_1 t_1 - \gamma_2 t_2$   |   |

## Esimerkki

Betonisandwich-palkin ulkokuori jäähtyy  $+20\text{ }^{\circ}\text{C}$ :sta  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ :een. Laskettava palkin taipuma.



Kuva 7 Esimerkkitapauksen rakenne

Laskenta-arvot:

$$E_1 = E_2 = 30000 \text{ MN/m}^2$$

$$G_3 = 2.8 \text{ MN/m}^2$$

$$\alpha_1^T = \alpha_2^T = 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$$

Poikkileikkausarvot:

$$B = 4800 \text{ MN/m}$$

$$e_0 = -0.0325 \text{ m}$$

$$D = 39.49 \text{ MNm}^2/\text{m}$$

$$\Omega_1 = 40.270 \text{ m}^2$$

$$\lambda = 0.0842 \text{ m}^{-1}$$

Lämpötilan muutoksen aiheuttama normaalivoima ja taivutusmomentti

$$N^T = N_1^T = -0.72 \text{ MN/m}$$

$$M^T = -0.081 \text{ MNm/m}$$

Taipuma (23):n mukaan

$$w(1/2) = -0.00067 \text{ m} = -0.67 \text{ mm}$$

## KIRJALLISUUTTA

- [1] Perttilä, H., Polystyreenieristeisen tasakaton tarkastelu sandwich-rakenteena. Htkk diplomityö 1977.
- [2] Buch, W., Periodisch veränderliche Temperaturen in massiven Flachdächern. Bitumen-Teere-Asphalte-Peche 9/1973.
- [3] Hintersdorf, G., Tragwerke aus Plasten. Berlin 1972.

*Heikki Perttilä, dipl.ins., Teknillinen korkeakoulu*

## TIEDOTUKSIA

### RAKENTEIDEN MEKANIikka-LEHTI

Alkanut vuosi on lehden kahdestoista ilmestymisvuosi. Tavoitteeksi on asetettu neljän erillisen numeron tekeminen Suomen Akatemian tälle vuodelle myöntämän avustuksen turvin. Erikoisen teemanumeron tekemistä ei toistaiseksi ole suunniteltu.

Kahdennentoista ilmestymisvuoden kunniaksi on luotu silmäys menneeseen ja tämän silmäyksen tuloksena tässä numerossa on luettelo kaikista lehdessä ilmestyneistä artikkeleista tekijän nimen mukaisessa järjestyksessä. Mainitakoon, että melkein kaikkia aikaisempien vuosien numeroita on vielä saatavissa lehden toimituksesta hintaan 10 mk/kpl (opisk. 5 mk/kpl). Koko vuosikerran hinta on 30 mk (opisk. 15 mk) ja kaikki aikaisemmat vuosikerrat sisältävän paketin hinta on 200 mk (opisk. 100 mk).

Murrosiän lähestymisestä huolimatta lehden toiminta on melkein liiankin vakiintunutta. Nuoren insinööripolven esiinmarssi lehden kirjoittajakuntaan olisikin erikoisen toivottavaa. Diplomityön pohjalta laadittu artikkeli on tavallisesti yksinkertaisin tie "julkaisukynnyksen" ylittämiseen. Lehden toimitus avustaa mielellään uraansa aloittelevia "kirjaillijoita".

Jossain määrin tutkimusluonteisten artikkeleiden lisäksi lehti julkaisee mielellään kuvauksia tavanomaisista poikkeavista tai uusista rakenneteknisistä, niiden kehittelystä sekä kuvauksen rakenteen mahdollisesta analysoinnista. Toimitus uskoo, että erikoisesti insinööritoimistoissa on tämäntyyppisten artikkelien aiheita.

Lehden toimitus toivottaa lukijakunnalleen hyvää luku- ja kirjoitusvuotta.