

KIVIRAKENTEIDEN VAKAVUUS

Herman Parland

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 11
No. 4 1978 s. 9...39

YHTEENVETO: Kirjoitus käsittelee nk. kaaren paradoksia: Kuivilla saumoilla muurattu kaari seisoo vakaana, vaikka siinä on lukematon määrä mahdollisia niveliä ja johteita. Paradoksi toteutuu täydellisesti, siis jokaisessa mahdollisessa tasapainotilassa, jos kivien saumat toimivat nk. jähmeän kitkan hypoteesin mukaisesti. Reaalisen kitkan vallitessa paradoksi sen sijaan ei toteudu samassa laajuudessa. Jähmeiden kappaleiden statiikkaan perustuva lineaarinen stabiilisuusteoria antaa näille ilmiöille yksinkertaisen geometrisen selityksen. Se selittää myös entisaikojen rohkeiden kaari- ja holvirakenteiden pystytyksen ilman edelläkävymiä laskelmia. Elementtirakentaminen tekee tämän vanhentuneena pidetyn teorian tulokset uudelleen ajankohtaisiksi.

KAAREN PARADOKSI

"Ut pendet continuum flexile,
sic stabit contiguum rigidum
inversum."

Robert Hooke

Yllä oleva Hooken v. 1675 esittämä lausuma, joka kulkee "kaaren arvoituksen" nimellä, on vapaasti käännettynä:

"Joka taipuisasti yhtenäisenä riippuu,
se käännettynä kosketuksessa vakaana seisoo."

Lausuma tarkoittaa ilmeisesti kuormitetun ketjun eli statiikasta tunnetun köysikulmion (kuva 1) ja kaaren puristusviivan välistä yhteyttä.

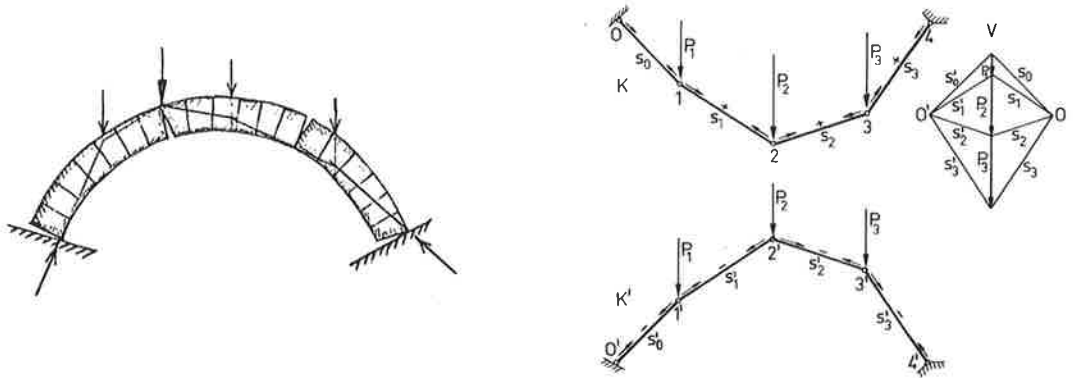
Köysikulmioilla on seuraavat ominaisuudet: a) Jokaista annetun kuormituksen $P_1 \dots P_n$ voimakulmion V_n napa-asentoa 0 kohti voidaan piirtää ääretön joukko köysikulmioita K (kuvat 1 ja 2).

b) Päinvastoin, jos kuormat $P_1 \dots P_n$ ja vaikutusviivat $l_1 \dots l_n$ ovat annettu, niiden ja $n+2$ mielivaltaisesti valitun pisteen $0, 1, 2, \dots, n+1$ kautta piirretty köysikulmio K_n määrittelee yksikäsitteisesti yhdenmuotoisten voimakulmioiden joukon V .

c) Jos köysikulmiossa K_n kuormat $\{P_1 \dots P_n\}$ ja köysivoimat $\{S_1 \dots S_n\}$ ovat tasapainossa, silloin myös kuormat $\{\lambda P_1 \dots \lambda P_n\}$ ja köysivoimat $\{\lambda S_1 \dots \lambda S_n\}$

ovat tasapainossa samassa köysikulmiossa K_n .

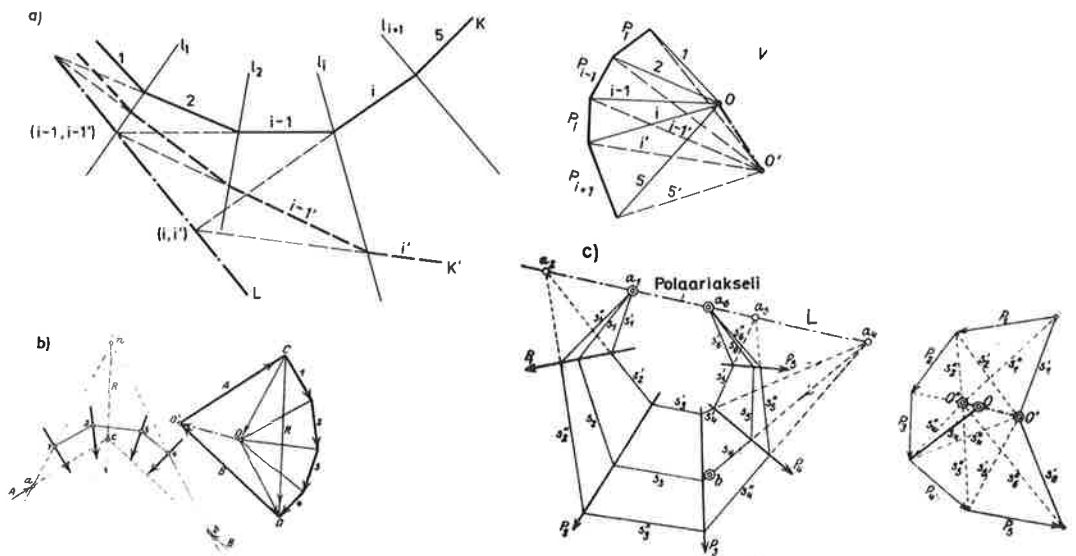
Jos $\lambda = -1$, siis kuormien suunta muuttuu päinvastaiseksi, ovat voimat $\{-P_1 \dots -P_n\}$ tasapainossa köysivoimien $\{-S_1 \dots -S_n\}$ kanssa, jolloin vetävät köysivoimat muuttuvat puristaviksi, kuten kaaren puristusviivassa (kuva 1b).



Kuva 1. a) Kivikaari. b) Köysikulmio K ja käännetty köysikulmio K' eli puristusviiva.

Köysikulmion kääntämisen aiheuttama köysivoimien merkin muutos onkin eräs Hooken lausuman perusta.

d) Navan siirto -lause: Jos annetun voimakulmion napa O siirretään O':uun, (kuva 2a) leikkaavat toisensa O:tta ja O':a vastaavien köysikulmioiden K ja K' yhteenkuuluvat köysivoimat (i) ja (i') samalla O-O' suuntaisella suoralla, polaariakselilla L.



Kuva 2. Navan siirto (a). Köysikulmion piirtäminen kahden annetun pisteen a, b (b) tai kolmen pisteen a_1, a_2, a_3 kautta (c).

Todistus: Köysivoimat i, i' ja L, O, O' muodostavat voimakulmiossa tasapainoryhmän. Voimien i, i' resultantti L_1 kulkee köysikulmion pisteen (i, i') kautta ja on $O-O'$:n suuntainen. Koska $O-O'$ on myös voimien $i-1$ ja $i-1'$ resultantti, sen täytyy kulkea myös pisteen $(i-1, i-1')$ kautta.

Tämän lauseen perusteella on mahdollista ratkaista seuraavat tehtävät:
e) Piirrettävä kaikki annettua kuormitusta $\{P_1 \dots P_n\}$ vastaavat köysikulmiot, jotka kulkevat kahden annetun pisteen a, b kautta (kuva 2b).

Kuormituksen resultantin R vaikutusviivan piste c yhdistetään pisteisiin a ja b . ac ja bc määrittävät navan O' voimakulmiossa. Jos köysikulmio, jonka voimakulmion napa O sijaitsee O' :n kautta kulkevalla ab :n suuntaisella suoralla piirretään a :n kautta, tämä kulkee myöskin b :n kautta.

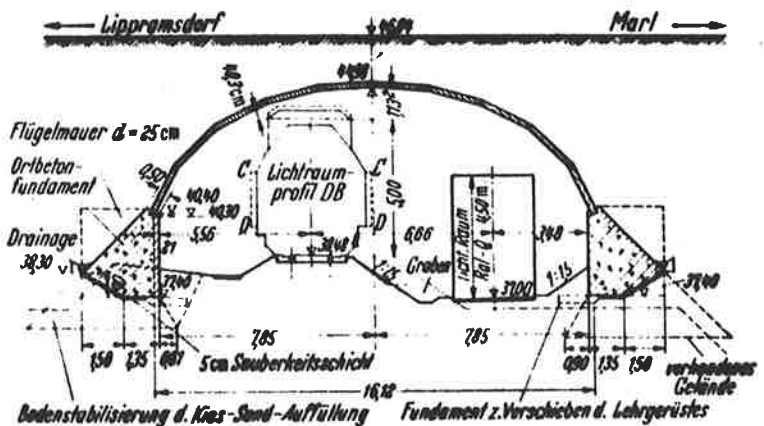
f) Piirrettävä annetulle kuormitukselle $\{P_1 \dots P_n\}$ köysikulmio, joka kulkee kolmen annetun pisteen a_1, b, c kautta siten, että ensimmäiset ja viimeiset köysivoimat kulkevat pisteiden a_1 ja a_6 kautta (kuva 2c).

Ensiksi piirretään napaa O' vastaava köysikulmio $a_1, s'_1 \dots s'_6$ pisteiden a_1 ja a_6 kautta. Määritetään s'_4 :n ja polaariakselin L leikkauspiste a_4 , josta vedetään köysiviiva s_4 b :n kautta. Kulmio $s_1 \dots s_5$ on etsitty köysikulmio ja s_4 :n leikkaus O' :n kautta vedetyn a_1-a_6 suuntaisen suoran kanssa antaa voimakulmion vastaavan navan O .



Goottilainen tukirakenne. a tukipilari, b faali, c tukikaaria, d triforioparvi, e holvituode, f holvi-vaippa.

b)



Kuva 3. a) Goottinen tukirakenne. b) Bebo-elementtikaari.

Köysikulmion keksi Varignon 1687 ja sitä käytettiin murattujen kaarien muodon ja paksuuden määrittämiseen. Siitä sai myöskin alkunsa graafinen laskenta eli graafinen statiikka, jota sovellettiin nimenomaan 1800-luvun jälkipuoliskolla kehittyneeseen elastostatiikkaan. Palkkien taipumaviivat, poikkileikkausten jäyhyysmomentit ym. määrättiin köysikulmion avulla. Sen käyttö kaarien suunnittelussa jäi taka-alalle. Nämä mitoitetaan kimmoteorian mukaisesti ja vain pienempien murattujen kaarien ja holvien mitoitus

suoritetaan nk. "puristusviivamenetelmää" käyttäen. Onkin luonnollista, että tietokoneiden aikakautena graafisen statiikan kaltainen laskentamenetelmä on aikansa elänyt. Sen vuoksi on esitetty, että köysikulmio ja puristusviiva ovat modernissa rakenteiden statiikassa täysin tarpeettomia käsitteitä. Tämä ei kuitenkaan selitä, miten muurattuja kivikaaria on voitu mitoittaa, ja edelleen sallitaan rajoitetusti mitoitettavan puristusviivan avulla, vaikka tämä selvästi saattaa olla ristiriidassa kimmoteorian kanssa.

Tähän liittyy myöskin edellä esitetty Hooken lausuma, joka ilmeisesti tarkoittaa kuivilla saumoilla muuratun kaaren vakavuutta. Köysikulmion kääntösääntö c ei itse asiassa selitä kaaren arvoitusta tyhjentävästi. Jähmeistä sauvoista nivelillä yhdistetty köysikulmio K (kuva 1b) on stabiilissa tasapainossa, mutta se on liikkuva. Käännetty nivelrakenne (K') on tasapainossa, joka rakenteen liikkuvuuden takia kuitenkin on labiili. Kuivilla saumoilla muuratussa kaaressa sen sijaan on lukematon määrä mahdollisia niveliä ja kuitenkin se pysyy vakaana (kuva 1a).

Tämän paradoksin taakse kätkeytyy vielä toinenkin arvoitus. Miten on ilman nykyaikaisia mitoitusmenetelmiä yleensä pystytty rakentamaan vuosituhsien aikana suurijänteisiä kaaria ja holvirakenteita, kuten goottilaiset rakenteet, joiden hoikkuutta, muotojen moninaisuutta ja rohkeutta ei voida selittää sovinnaisen kaari- tai kuoriteorian perusteella.

Elementtirakentaminen tekee nämä kysymykset uudelleen ajankohtaisiksi, koska keskiaikaisia kivirakenteita voidaan pitää nykyisten elementtirakenteiden edeltäjinä. Elementtirakenteissa on usein pakko täysin poiketa sovinnaisista monoliittisten rakenteiden laskentaperusteista. Esim. kuvan 3b mukainen elementtikaari on jäykistettyine saumoineen näennäisesti monoliittinen. Kimmoteorian mukaiset momentit ylittävät kuitenkin moninkertaisesti murtomomentin, minkä takia kaari on mitoitettava puristusviivan avulla.

LINEAARINEN STABIILISUUSTEORIA

Jähmeiden toisiaan koskettavien kappaleiden statiikan perusteet

Hooken esittämän kaaren arvoituksen ratkaisu on löydettävissä jähmeiden, siis äärettömän jäykkien ja lujien ($E = \infty$; $\sigma_{murt.} = \infty$), toisiaan koskettavien kappaleiden mekaniikasta. Osittain tältä pohjalta Koharian 1952 /1/, Heyman /2/ ym. palauttivat vetoakestämättömillä saumoilla varustettujen kaarien ja holvien käsittelyn sellaiseen plástisuusteoreettiseen rajatapaukseen, jossa kiven myötölujuus on ääretön ja jossa kivien saumoissa tapahtuu vain keskinäisiä kulmanmuutoksia, mutta ei liukumista. Tällöin rakenteeseen voidaan soveltaa plástisuusteorian yksikäsitteisyyslausetta sekä myötökuorman ylä- ja alarajpsääntöjä. Vaikka tämän tapainen teoria antaa asiallisesti oikeita tuloksia näin rajoitetuissa puitteissa, se on käsitteellisesti epäjohdonmukainen ja vaillinainen. Vuonna 1970 on sen vuoksi esitetty yleisempi

puhtaasti jähmeiden kappaleiden statiikkaan nojautuva tulkinta /3/, jossa myös liukuminen ja kitka on otettu huomioon. Seuraavassa pyritään antamaan yhtenäinen esitys jähmeistä osista koottujen ei-monoliittisten rakenteiden teoriasta. Jähmeitä osia yhdistävät rakenteellisten nivelten lisäksi nk. toispuoliset liitokset, jotka siirtävät vain tietyn suuntaisia voimia. Tällaisia ovat vetoakestämättömät saumat, jotka eivät siirrä vetoa ja puristusta kestävämmät liitokset, joissa osakappaleet on yhdistetty venymättömillä käysillä ja kalvoilla.

Vetoakestämättömät saumat

Esityksen yksinkertaistamiseksi otaksutaan, että kappaleiden v ja μ saumapinnan $A_{v\mu}$ muodostaa perustaso $\pi(x,y)$ normaaleineen $\hat{n}_v = \hat{n}_\mu$ jaksollisine kohoumineen ja syvennyksineen. Pinta-alkioiden paikalliset normaalit \hat{n}_{vi} täyttävät ehdon $\hat{n}_{vi} \cdot \hat{n}_v > 0$. Kosketuksen kinematiikkaa ja voimansiirtoa säättävät seuraavat lait (kuva 4a):

- Läpityn kemattomuusehto. Mikään osakappaleen μ piste B_μ ei voi tunkeutua kappaleeseen v .
- Lähi vaikutuksen laki. Sauman pisteessä $\hat{r}(x,y)$ vaikuttavat jännitysvektorit $\hat{p}_v(x,y) = -\hat{p}_\mu(x,y)$ ovat 0:sta poikkeavia vain, jos kosketus on olemassa pisteessä $\hat{r}(x,y)$.
- Sauma ei siirrä vetorasituksia. Sauman jännitysvektorin $\hat{p}_v(x,y) = \sigma(x,y)\hat{n}_v + \hat{\tau}(x,y)$ normaalikomponentti on negatiivinen.
 $\sigma(x,y) \leq 0$. (1)

- Kitkalaki. Jännitysvektorin on pysyttävä kitkakartion sisällä (kuva 4b)
 $|\tau| \leq f|\sigma|$. (2)

- Kärkeushypoteesi (jähmeä kitka) edellyttää, että saumapinnat $A_{v\mu}$ ja $A_{\mu v}$ ovat yhtenevät jaksollisine kohoumineen ja pinta-alkiot dA_i välittävät vain alkion normaalin \hat{n}_{vi} suuntaisia puristusvoimia
 $\hat{p}_v(x,y) = \sigma_{ni}\hat{n}_{vi}(x,y) \quad (\sigma_{ni} \leq 0)$. (3)

Liukumiseen liittyy aina sauman aukeneminen (kuva 4c).

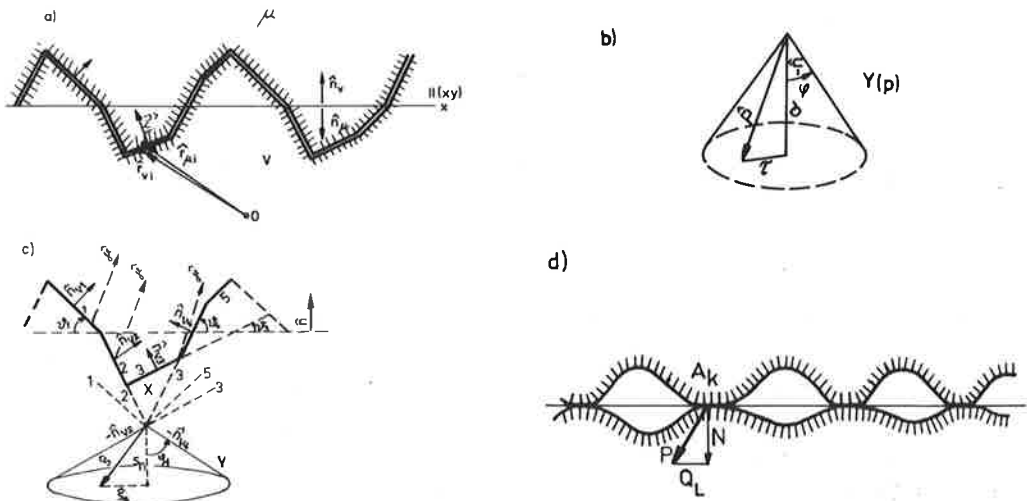
- Adhesiöhypoteesin (reaalikitka) mukaan voiman P puristaessa kappaleita yhteen kosketus rajoittuu paikallisiin alueisiin A_k (kuva 4d), jossa suurten jännitysten takia aine saavuttaa myötörajan $\sigma_s \approx 3\sigma_m$ (σ_m myötöraja vedossa) ja hitsautuu. Todellinen kosketuspinta on

$$\Sigma A_k = P/\sigma_s.$$

Jos saumaan lisäksi vaikuttaa leikkausvoima Q , on tämän maksimi $Q_{\max} = \tau_a \Sigma A_k$, johon liittyy liukuminen, jolloin τ_a on ainevakio. Vastaava kitkakerroin on

$$f = \frac{Q_{\max}}{P} = \frac{\tau_a}{3\sigma_m}$$

siis ainevakio. Jos $P \neq 0$, ei liukumiseen liity sauman aukenemista.



Kuva 4. a) Saumapinta. b) Kitkakartio. c) Jähmeä kitka. d) Reaalikitka.

Rakenteen vakavuus

Monoliittinen kiinteästi tuettu rakenne on vakaassa tasapainossa jokaisessa kuormituksessa lukuunottamatta tapausta, jolloin ylikuormituksen takia suuret siirtymät tai lujuusrajojen saavuttaminen aiheuttavat rakenteen sortumisen. Ei-jäykillä liitoksilla yhdistetyistä kappaleista muodostetuissa rakenteissa (kuten kuvan 1b nivelkulmiossa) sen sijaan tilanne on mutkikkaampi. Tietyn kuorman vaikuttaessa tasapaino ei ole mahdollinen, tasapaino toteutuu, mutta se on epävakaata, tai vakaa tasapaino toteutuu. Tähän ryhmään kuuluvat myös jähmeistä osista kootut rakenteet, joissa on toispuolisia siteitä (kuva 1a). Näiden rakenteiden kantavuus riippuu tasapainon ja nimenomaan vakaan tasapainon olemassaolosta.

Annettuihin pisteisiin tai alueisiin vaikuttavat kuormat $P_1 \dots P_n$ voidaan käsittää vektorina $\{P\}$ kuormitusavaruudessa V_p . Jos tämä on euklidinen, määritellään vektoreiden $\{A\}$ ja $\{B\}$ skalaaritulo $(A|B)$ ja vektorin A pituus $\|A\|$ kaavoilla.

$$(A|B) = \sum_{i=1}^n A_i \cdot B_i; \quad \|A\| = \sqrt{(A|A)} \quad (4)$$

Jos kuormat $P_1^k \dots P_n^k$, ulkoiset reaktiot ja osien väliset liitosvoimat $S_1 \dots S_k$ ovat tasapainossa, sanotaan tasapainon vallitsevan avaruuden V_p pisteessä P^k .

Staattisesti voidaan rakenteen vakavuus kuormituksessa P^k luokitella seuraavasti:

- Rakenne on stabiilissa tilassa, jos tasapainoehdot toteutuvat, paitsi pisteessä P^k , myöskin jokaisessa sen avoimen lähiympäristön pisteessä P^k .
- Rakenne on tasapainottomassa tilassa, jos tasapainoehdot eivät toteudu pisteessä P^k .

- Rakenne on rajatasapainotilassa, jos tasapaino toteutuu pisteessä P_c^k , mutta ainakin yksi infinitesimaalinen lisäkuormitus $\{\delta P^k\}$ saattaa rakenteen tasapainottomaan tilaan.

Stabiilisuuden luokittelu voidaan perustaa myös energian tarkasteluun. Kun kuormituspisteiden siirtymiä merkitään u_i :llä, niin ehto sille, että kuormat suorittavat positiivista työtä rakenteen sortuessa, voidaan esittää muodossa

$$\Sigma \hat{P}_i \cdot \hat{\Delta} u_i \geq 0, \quad (4)$$

Kun lisäksi otetaan huomioon, että tällöin \hat{P}_i pysyvät vakioina, voidaan vakavuuskriteerit lausua kuormituksen työn ja sisäisen muodonmuutostyön $D(u):n$ avulla /3/.

Taulukko 1. Kineettiset vakavuusehdot

Tasapaino	Yleinen tapaus (reaalikitka) saumoissa $\Delta D \neq 0$	Jähmeä kitka saumoissa ja köysissä $\Delta D = 0$
<u>Stabiili tila</u> jokaisessa mahd. tilassa $\{\Delta u\}$	$\Sigma \hat{P}_i \cdot \hat{\Delta} u_i < \Delta D$	$\Sigma \hat{P}_i \cdot \hat{\Delta} u_i < 0$
<u>Tasapainoton tila</u> olemassa ainakin yksi tila $\{\Delta u_k\}$, jossa	$\Sigma \hat{P}_i \cdot \hat{\Delta} u_k > \Delta D$	$\Sigma \hat{P}_i \cdot \Delta u_k > 0$
<u>Rajatila</u> jokaisessa mahd. tilassa $\{\Delta u\}$ olemassa ainakin yksi tila $\{\Delta u_c\}$, jossa	$\Sigma \hat{P}_i \cdot \hat{\Delta} u \leq \Delta D$ $\Sigma \hat{P}_i \cdot \hat{\Delta} u_c = \Delta D$	$\Sigma \hat{P}_i \cdot \Delta u \leq 0$ $\Sigma \hat{P}_i \cdot \hat{\Delta} u_c = \Delta D$

Jähmeän kitkan tapauksessa ($E, \sigma_m = \infty$) muodonmuutostyö $\Delta D = 0$. Reaalisen kitkan tapauksessa ($E = \infty, \sigma_m \leq \infty$) suuren lujuuden takia muodonmuutostyö rajoittuu saumoihin.

Jähmeän kitkan tapaus

Vetokestämättömässä saumassa $A_{\mu\nu}$ vallitsee lähtötilassa täydellinen kosketus, jolloin jokainen sauman välisvektori

$$[\hat{r}_i] = \hat{r}_{\mu i} - \hat{r}_{\nu i} = 0; \quad \forall x_i, y_i \in A_{\mu\nu}. \quad (5)$$

Saumasiiirros

$$\hat{\gamma}(r_i) = u_{\mu}(\hat{r}_i) - u_{\nu}(\hat{r}_i)$$

on pieni rakenteen lineaarimitaan L nähden, jos $|u_{\mu}|, |u_{\nu}| \ll L$.

Läpitukenemattomuusehto on varmasti täytetty jaksossa k , jos jokainen saumapiste $\hat{r}_{\mu i}$ myös siirtymän jälkeen pysyy vastaavan tasoalkion $\Delta A_{\nu i}$:n

ulkopuolella. Merkitsemällä

$$\hat{r}'_{\mu i} = \hat{r}_{\mu i} + \hat{u}_{\mu i}; \quad \hat{r}'_{\nu i} = \hat{r}_{\nu i} + \hat{u}_{\nu i}; \quad n'_{\nu i} = \hat{n}_{\nu i} + \Delta \hat{n}_{\nu i}$$

on jokaiselle jakson välisektorille $[r'_i]$ voimassa (kuva 4)

$$(\hat{r}'_{\mu i} - \hat{r}'_{\nu i}) \cdot \hat{n}'_{\nu i} = \hat{\gamma} \cdot \hat{n}_{\nu i} \geq 0; \quad \forall \hat{r}_i \in A_k, \quad (6)$$

sillä $\hat{\gamma}$ on A_k lineaarimitan pienuuden vuoksi likimain vakio ja $\Delta n_{\nu i} \approx 0$.

Jos jokainen vektori $\hat{\gamma}$ piirretään lähteväksi jakson k keskipisteestä \hat{r}_k , jokainen yhtälö (6) edustaa \hat{r}_k kautta kulkevaa tasoa Π_i ja jokainen epäyhtälö (6) määrittelee joukon $K_i(\gamma)$, joka edustaa tason Π_i rajoittamaa puoliavaruutta. Vektorit $\hat{\gamma}$, jotka täyttävät kaikki jakson ehdot, muodostavat joukkojen K_i leikkauksen X .

$$X(\gamma) = K_1 \cap K_2 \dots \cap K_n = \bigcap_{i=1}^n K_i \quad (7)$$

Sanomme X -joukon $\hat{\gamma}$ -vektoreita luvallisiksi saumasirroksiksi. On helppo todeta, että jos $\hat{\gamma}_i$ on luvallinen, myös $\hat{\gamma} = \lambda \hat{\gamma}_i$ on luvallinen, jos $\lambda > 0$, sillä

$$\hat{\gamma} \cdot \hat{n}_i = \lambda (\hat{\gamma}_i \cdot \hat{n}_i) \geq 0. \quad (7')$$

Tämä merkitsee, että joukko X muodostaa kartion.

Jos γ_1 ja γ_2 ovat luvallisia ja siis täyttävät ehdot

$$\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{n}_i \geq 0; \quad \hat{\gamma}_2 \cdot \hat{n}_i \geq 0 \quad \forall \hat{n}_i \in \Gamma_k$$

täyttää myös niiden yhdysjanalla $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$ oleva vektori

$$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_1 + \alpha (\hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_1) \quad 1 \leq \alpha \leq 1 \quad (7'')$$

kaikki ehdot (6), koska

$$\hat{\gamma} \cdot \hat{n}_i = ((1-\alpha)\hat{\gamma}_1 + \alpha\hat{\gamma}_2) \cdot \hat{n}_i = (1-\alpha)(\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{n}_i) + \alpha(\hat{\gamma}_2 \cdot \hat{n}_i) \geq 0 \quad \forall \hat{n}_i$$

ja kuuluu joukkoon X . Tämä merkitsee, että joukko X muodostaa konveksin kartion.

Kappaleen v saumajaksoon k vaikuttavien voimien joukon Y_k määrittelee kaava

$$\hat{S}_{\nu \mu} = \int_{A_k} \sigma_{ni} \hat{n}_{\nu i} dA \quad (\text{jossa } \forall \sigma_{ni} \leq 0 \quad \forall \hat{n}_i: \hat{n}_i \cdot \hat{n}_{\nu i} > 0) \quad (8)$$

Jos S^1 kuuluu joukkoon Y , myös $\lambda S^1 \in Y$, jos $\lambda > 0$, mutta $-\lambda S^1 \in Y$. Samoin, jos $S^1, S^2 \in Y$, myös $S = \lambda_1 S^1 + \lambda_2 S^2 \in Y$, jos $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, joten myös Y muodostaa konveksin kartion, jakson (k) kitkakartion.

Jos $\hat{S}' \in Y$ ja $\hat{\gamma}'' \in X$, on ilmeisesti kaavan (6) mukaan niiden skalaaritulo

$$\hat{S}' \cdot \hat{\gamma}'' = \int_{\sigma_{ni}} \hat{n}_i \cdot \hat{\gamma}'' dA \leq 0. \quad (9)$$

Jos lineaarisessa avaruudessa suljettu joukko $\langle A \rangle$ muodostaa konveksin kartion, on niiden vektoreiden b joukko B , joka täyttää skalaarituloehdon

$$(b|a) \leq 0 \quad \forall a \in A \quad (10)$$

konveksi kartio, jota sanomme kartion A polaarikartioksi A^*

$$B = A^* \quad (11)$$

Vastaavasti on joukko B^* , joka täyttää ehdot

$$(b|c) \leq 0 \quad \forall b \in B.$$

Edellä mainittu kartio A

$$B^* = A^{**} = A \quad (10')$$

Vain kartioiden vaippoja ∂A , ∂B generoivat a - ja b -vektorit ovat parittain ortogonaalisia, jos $a_i \in A \exists b_i \in B$

$$(a_i | b_i) = 0 \quad (10'')$$

Konveksisuus seuraa välittömästi soveltamalla (10) vektoreihin λb_1 ja $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$, jossa $b_1, b_2 \in A$ ja $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 > 0$. Jos taas vektorit a_1 ja b_1 ovat ortogonaaliset $(a_1 | b_1) = 0$ ja $d\lambda > 0$, ovat vektorit $a = a_1 + d\lambda b_1 \notin A$. $b = b_1 + d\lambda a_1 \notin A^*$, koska $(b|a_1) > 0$; $(b_1|a) > 0$, joten a_1, b_1 , skalaaritulon jatkuvuuden perusteella, ovat vaippavektoreita.

Edellä olevan perusteella ovat saumojen kitka- ja siirroskartiot toisensa polaarikartiot saumajakson k avaruudessa R^3

$$X = Y^*; \quad Y = X^* \quad (12)$$

Kartion X vaippavektoria $\gamma^C \neq 0$ vastaa suunnaltaan määrätty, sitä vastaan kohtisuorassa Y kartion vaippavektori S^C .

Kitkakartion vaipan muodostavat jakson eniten kallellaan olevat normaalit \hat{n}_i ja niiden lineaariyhdistelmät. Jos lausutaan saumavoima muodossa

$$\hat{S} = S_n \hat{n} + \hat{S}_s = \int_{A_k} (\sigma \hat{n} + \tau_x \hat{i} + \tau_y \hat{j}) dA \quad (\hat{S}_s \hat{n} = \hat{\tau} \cdot \hat{n} = 0)$$

voidaan voimansiirtoehto lausua kaavoilla

$$S_n = \hat{S} \cdot \hat{n} > 0 \quad (13a)$$

$$Y(S) = |S_s| - |f| |S_n| \leq 0, \quad (13b)$$

jossa $f = \tan \phi(s)$ on suuntaa \hat{S}_s vastaava kitkakerroin.

Saumaan vaikuttavat resultoivat normaali ja leikkausvoimat

$$\hat{R}_n = N \hat{n} = \left(\int_{A_s} \sigma dA \right) \hat{n}; \quad \hat{Q} = \int_{A_s} \hat{\tau} dA \quad (14)$$

muodostavat yleisessä tapauksessa voimaristin. Normaalivoiman vaikutuspiste (e_x, e_y) sijaitsee sauman tukipinnalla (A_t) , joka on pinnan ääriviivan tangenttien rajoittama konvekssi alue (kuva 6a), koska epäkeskisyys e_ξ suunnassa ξ on

$$|e_\xi| = \left| \frac{\int \xi \sigma dA}{\int \sigma dA} \right| \leq \frac{\int |\xi| |\sigma| dA}{\int |\sigma| dA} \leq \sup |\xi|$$

huomioon ottaen

$$|P_n| = |R_n| = \int |\sigma| dA.$$

Q :n vaikutussuora saattaa sen sijaan olla tukipinnan ulkopuolella. Voimaristi voidaan korvata edellä määritetyssä pisteessä e vaikuttavalla resultantilla

\hat{R} ja vääntömomentilla \hat{M}_e

$$\hat{R} = N\hat{n} + \hat{Q}; \quad \hat{M}_e = (\int (\tau_y(x-e_x) - \tau_x(y-e_y)) dA) \hat{n}. \quad (14')$$

Mikäli kitka on homogeeninen, siis riippumaton paikasta, on R:n kitkakartio $Y(R)$ suppeampi kuin $Y(S)$, jos $M_e \neq 0$. Vain silloin, kun voimaristi voidaan redusoida pelkäksi resultantiksi, jolloin $M_e = 0$, on

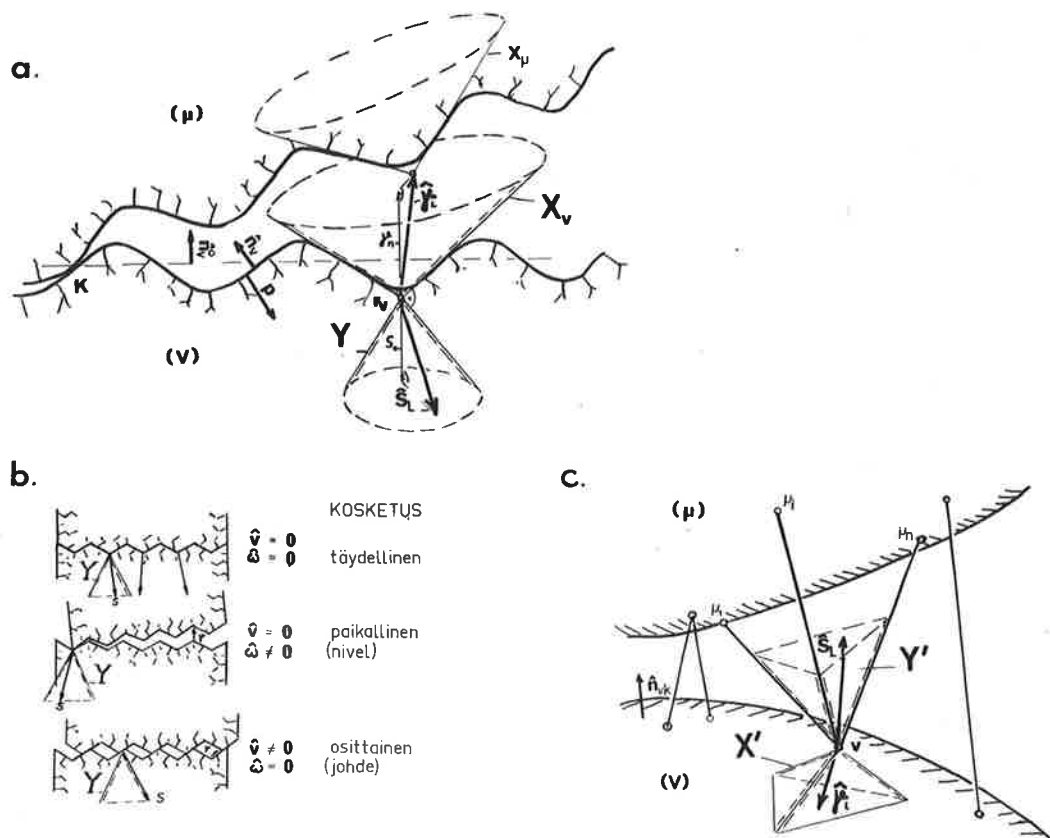
$$Y(R) = Y(S) \quad (14a)$$

Kartion X vaipan muodostavat niiden pinta-alkioiden tangentit, joiden kaltevuus $tg\theta_i$ perustasoon nähden on suurin. Sen takia X sanotaan suurimman kaltevuuden kartioksi. Jos lausutaan siirros komponenttimuodossa $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_n \hat{n} + \hat{\gamma}_s$; ($\hat{n} \cdot \hat{\gamma}_s = 0$), on läpikäymättömyysehto

$$\gamma_n \geq 0; \quad (15a)$$

$$X(\gamma, r_k) = (tg\theta_m(s) - \gamma_n / |\gamma_s|) \leq 0, \quad (15b)$$

jolloin jokaisessa jaksossa hammastus voidaan korvata kartion X vaipalla (kuva 5a). Diskreeteille jaksoille johdettu ehto (15b) voidaan korvata jatkuvalla ehtofunktiolla $X(\gamma, r)$.



Kuva 5. a) Sauman siirroskartio X ja voimakartio Y. b) Kosketuksen lajit. c) Köysiliitoksen siirrospyramidi X' ja voimapyramidi Y'.

Puristusta kestävämmien liitosten, kalvojen ja köysien otaksutaan alkutilassa olevan suorina (kuva 5b). Liitoksessa, jossa osa μ pisteissä $\hat{r}_{\mu i} \dots \hat{r}_{\mu n}$ on köysillä liitetty kappaleen v pisteeseen \hat{r}_v , määritellään köysisiirros erotuksena (vrt. kaava 20)

$$\hat{\gamma}_{\mu v}(r_v) = \hat{u}_{\mu}(r_v) - u_v(\hat{r}_v) = \hat{v}_{\mu v} + \hat{\omega}_{\mu v} \times \hat{r}_v, \quad (16)$$

jossa $\hat{u}_{\mu}(r_v)$ on kappaleeseen μ jähmeästi kiinnitetyn pisteen \hat{r}_v siirtymä.

Köysien venymättömyys antaa jokaiselle käydelle (i) ehdon

$$\Delta l_i = \frac{1}{l_i}(\hat{r}_{\mu i} - \hat{r}_v) \cdot (\hat{u}_{\mu}(r_{\mu i}) - \hat{u}_{\mu}(r_v)) = \frac{1}{l_i}(\hat{r}_{\mu i} - \hat{r}_v) \cdot \hat{\gamma}_{\mu v} \leq 0, \quad (16')$$

koska $\hat{u}_{\mu}(r_{\mu i}) = \hat{u}_{\mu}(r_v) + \omega_{\mu v} \times (\hat{r}_{\mu i} - \hat{r}_v)$. Merkitsemällä köyden (i) suuntavektori $\hat{n}_i = (\hat{r}_{\mu i} - \hat{r}_v)/l_i$ saadaan

$$\hat{n}_i \cdot \hat{\gamma}_{\mu v} \leq 0 \quad \forall \hat{n}_i \text{ pisteessä } r_v. \quad (17)$$

Vektorit $\hat{\gamma}$, jotka täyttävät ehdon (17), määrittelevät konveksin luvallisten köysisiirrosten kartion $X'(\gamma, r_v)$.

Kappaleeseen v vaikuttava voima pisteessä \hat{r}_v

$$\hat{S}_v = \sum S_i \hat{n}_i \quad \forall S_i \geq 0 \quad (18)$$

määrittelee konveksin äärimmäisten n_i vektoreiden virittämän luvallisten köysisvoimien pyramidin $Y'(S)$. Koska kaavojen (17) ja (18) mukaan

$$S' \cdot \gamma'' \leq 0 \quad \forall S' \in Y' \forall \gamma'' \in X', \quad (19')$$

kartioiden X' ja Y' ovat toistensa polaarikartioiden. Samat tulokset ovat voimassa myös kalvoille, koska niihin muodostuvat vetokentät voidaan palauttaa köysikokoelmiin. Silloin luvallisille rasituksille S ja siirroksille γ ovat voimassa kaavoja (13) ja (15) vastaavat ehdot:

$$\gamma_n \leq 0 \quad (15'a) \quad S_n \geq 0 \quad (13'a)$$

$$X'(\gamma) = |\gamma_s| \text{tg} \vartheta'_m(\gamma) - |\gamma_n| \leq 0 \quad (15'b) \quad Y'(S) = |\gamma_s| - |\gamma_n| \text{tg} \omega'_m \leq 0, \quad (13'b)$$

jossa $\gamma_n = \hat{n}_k \cdot \hat{\gamma}$; $S_n = \hat{n}_k \cdot \hat{S}$ $\hat{n}_k \in Y$ ϑ'_m ja ω'_m ovat vaippavektoreiden kaltevuuksia.

Toispuolisissa liitoksissa on siten yleisesti voimassa polaarisuusehto

$$Y = X^*; \quad \hat{S}' \cdot \hat{\gamma}'' \leq 0. \quad (19a)$$

Yhtäläisyysmerkki

$$\hat{S} \cdot \hat{\gamma} = 0 \quad (19b)$$

on polaarisuuden perusteella voimassa vain määrätyille ei häviävälle vaippavektoripareille ja tapauksille, kun S tai γ häviävät. Ehto (19b) toteutuu vain yhteenkuuluville S ja γ vektoreille, kuten alla oleva saumojen kosketusehtoihin ja köysien venymättömyyteen perustuva yhdistelmä osoittaa (kuva 5b).

Taulukko 2 Voimansiirto saumassa

Voimansiirto (kosketus)	Geometrinen	Dynaaminen	$\hat{S} \cdot \hat{\gamma}$
Täydellinen	$\hat{\gamma} \equiv 0$	$\hat{S} \neq 0; Y(S) < 0$	0
Osoittainen	$\hat{\gamma} \neq 0; X(\gamma) = 0$	$\hat{S} \neq 0; Y(S) = 0$	0
Puuttuva	$\hat{\gamma} \neq 0; X(\gamma) < 0$	$\hat{S} = 0; Y(S) = 0$	0

Ei yhteenkuuluville S ja γ vektoreille on voimassa
 $\hat{S} \cdot \hat{\gamma} < 0 \quad S' \in Y \quad \gamma' \in X. \quad (19c)$

Luvallinen siirtymätila on kinemaattisesti mahdollinen siirtymätila. Tämä täyttää ehdot: Jokaisen rakenteen pisteen (r) siirtymä $\hat{u}(r)$ on pieni verrattuna rakenteen mittaan L , joten $\hat{u}(r)$ voidaan ilmaista jähmeän osakappaleen translaation v_v ja rotaation ω_v avulla

$$\hat{u}_v(r) = \hat{v}_v + \hat{\omega}_v \times \hat{r}, \quad (20)$$

jossa $|v/L| \ll 1; |\omega| \ll 1$.

Kappaleiden v ja μ välisen liitoksen siirros pisteessä r_j on

$$\hat{\gamma}(r_j) = \hat{u}_\mu(r_j) - \hat{u}_v(r_j) = \hat{v}_{\mu v} + \hat{\omega}_{\mu c} \times \hat{r}_j, \quad (21)$$

jossa $\hat{v} = \hat{v}_\mu - \hat{v}_v; \quad \hat{\omega} = \hat{\omega}_\mu - \hat{\omega}_v \quad (|v| \ll L; |\omega| \ll 1)$.

Toispuolisissa liitoksissa täyttävät saumasiirrokset ehdot

$$\gamma_n > 0; \quad X(\gamma) \leq 0. \quad (22)$$

Jos saumasiirrokset lausutaan muodossa $\hat{\gamma}_k = \hat{v}_e + \omega \times (\hat{r}_k - \hat{e})$, on saumarasi-
 tusten yhteenlaskettu työ saumassa $A_{v\mu}$

$$\sum \hat{S}' \cdot \hat{\gamma}_k = \hat{R}' \cdot \hat{v}_e + \hat{M}' \cdot \hat{\omega} \leq 0 \quad (\hat{v}_e = \hat{v} + \hat{\omega} \times \hat{e}). \quad (19d)$$

Saumasiirrokset vastaavat rakenteen muodonmuutoksia. Joukko $\{u, \gamma\}$ kuvaa rakenteen siirtymä- ja muodonmuutostilaa. Kuormien vaikutuspisteiden \hat{r}_p siirtymät u_p voidaan, kuten $\{P\}$ käsittää kuormitusavaruuden vektoreina $\{u_p\}$.

Kinemaattisten ehtojen (20-22) konveksisuudesta seuraa:

- Jos liiketila $\{u, \gamma\}$ on luvallinen ja vakio $\alpha > 0$, on myös tila $\{\alpha u, \alpha \gamma\}$ luvallinen. Jos toispuolisessa liitoksessa $\gamma \neq 0$, on $\{-\alpha u, -\alpha \gamma\}$ luvaton siirtymätila.
- Kaikki luvallisten tilojen $\{u', \gamma'\}$ ja $\{u'', \gamma''\}$ välisellä janalla olevat tilat $\{\alpha u' + (1-\alpha)u'', \alpha \gamma' + (1-\alpha)\gamma''\}$, jossa $0 < \alpha < 1$, ovat luvallisia.
- Jos $\{u', \gamma'\}$ ja $\{u'', \gamma''\}$ ovat luvallisia tiloja, on myös $\{u'+u'', \gamma'+\gamma''\}$ luvallinen tila.

Säännöt 1, 2 ilmaisevat, että luvallisten liiketilojen joukko muodostaa konveksin kartion. Tämä koskee myöskin luvallisia liiketiloja vastaavia kuormitukssiirtymiä u_p , joten:

- Luvallisten kuormitussiiirtymien joukko muodostaa kuormitusavaruudessa konveksin kartion E .

Luvallinen voimatila $\{P, S\}$ on jokainen tasapainoehdot ja liitosten voimasiirtoehdot täyttävä voimatila. Jokaisen osakappaleeseen v vaikuttavat kuormat \hat{P}_{vj} ja liitosvoimat $\hat{S}_{\nu\mu k}$ (mukaanluettuna reaktiot) täyttävät tasapainoehdot

$$\sum \hat{P}_{vj} + \sum_k \hat{S}_{\nu\mu k} = 0 \quad (23a)$$

$$\sum \hat{r}_j \times \hat{P}_j + \sum \hat{r}_{\nu k} \times \hat{S}_{\nu\mu k} = 0 \quad (23b)$$

$$\hat{S}_{\nu\mu k} + \hat{S}_{\mu\nu k} = 0. \quad (23c)$$

Toispuolisissa liitoksissa täyttää liitosrasitus S ja siirros γ ehdot (19a)

$$S_n \leq 0 \quad Y(S_n) \leq 0 \quad (23')$$

Kahta jännitystilaa $\{P', S'\}$ ja $\{P'', S''\}$ sanotaan identtisiksi, jos kuormien $P(r_v)$ ja liitosrasitusten jokaiseen kappaleeseen v vaikuttavat resultantit ja momentit ovat yhtäsuuret $\hat{R}'_v = \hat{R}''_v$; $\hat{M}'_v = \hat{M}''_v$; $\hat{R}'_{\nu\mu} = \hat{R}''_{\nu\mu}$; $\hat{M}'_{\nu\mu} = \hat{M}''_{\nu\mu}$.

Jokainen luvallisia jännitystiloja rajoittava ehto (23-23') määrittelee konveksisen joukon C_i . Yhdessä ehdot määrittelevät joukkojen C_i leikkauksen $C = \bigcap_i C_i$, joka on konvekksi ja liitosvoimien toispuolisisuuden takia kartio. Tasapainoehtojen (23) lineaarisuuden takia tämä koskee myöskin kuormia P , joita vastaa luvallinen tasapainotila. L u v a l l i s t e n k u o r m i e n j o u k k o m u o d o s t a a k u o r m i t u s a v a r u u d e s s a V_p s u l j e t u n j o u k o n , k o n v e k s i n k a r t i o n B . Tämä osoittaa, että samat ehdot ja geometriset struktuurit, jotka fysikaalissa avaruudessa kuvaavat liitosten, paikallisten voimien ja siirrosten rajoituksia, toistuvat kuormitusavaruudessa saman muotoisina rakenteen kuormien ja siirtymien rajoitusten kuvaajina.

Rajatilan määrittäminen

Ne kuormitukset, joita vastaa toteutuva tasapainotila, siis stabiilitila ja rajatila, muodostavat joukon \bar{E} , joka on stabiilien kuormien joukon E sulkeuma. Tällöin \bar{E} on kartio, joka sisältyy B :hen. $E \subset \bar{E} \subset B$.

Tätä kartiota sanomme rakenteen vakavuuskartioksi.

Virtuaalisen työn periaate sovellettuna luvalliseen tilaan $\{P', S'\}$ luvallisessa liiketilassa $\{u'', \gamma''\}$ antaa työyhtälön

$$\sum \hat{P}' \cdot \hat{u}'' - \sum \sum \hat{S}'_{\nu\mu} \cdot \hat{\gamma}''_{\nu\mu} = 0. \quad (24)$$

Termit $\hat{S}'_{\nu\mu} \cdot \hat{\gamma}''_{\nu\mu}$ häviävät rakenteellisissa liitoksissa. Toispuolisissa liitoksissa ne ovat ei-positiiviset, joten

$$\sum \hat{P}' \cdot \hat{u}'' \leq 0. \quad (24a)$$

Epäyhtälö edellyttää, että edes yhdessä liitoksessa, jossa on täydellinen dynaaminen kosketus, $\gamma'' \neq 0$.

Yhtäläisyysmerkki on voimassa vain yhteenkuuluville P ja u . Ominaista

rajatilalle on, että siinä toteutuvat staattisen ehdon c) mukaan luovallinen jännitystila $\{P_c, S_c\}$ ja kineettisen ehdon c") mukaan ei-häviävä yhteenkuuluva luovallinen siirtymätila $\{u_c, \gamma_c\}$, jolloin kaavan (19b) ja taulukon 1 mukaan

$$\Sigma \hat{P}_c \cdot \hat{u}_c = 0; \{u_c\} \neq 0. \quad (24b)$$

Kaavojen (24a) ja (24b) vähennys antaa kaavan (24) mukaan

$$\Sigma (\hat{P}_c - \hat{P}') \cdot \hat{u}_c = \Sigma \Sigma (\hat{S}_c - \hat{S}') \cdot \hat{\gamma}_c \geq 0 \quad P' \in B. \quad (25a)$$

Ne kuormat, jotka täyttävät ehdon

$$\Sigma \hat{P}'' \cdot \hat{u}'' = 0, \quad (26a)$$

jossa $\{u'', \gamma''\}$ on tietty luovallinen liiketila, toteuttavat (24a) mukaan epä-yhtälön

$$\Sigma (\hat{P}'' - \hat{P}'_c) \cdot \hat{u}'' = \Sigma \Sigma \hat{S}_c \cdot \hat{\gamma}'' \geq 0 \quad u'' \in \Xi \quad (26b)$$

ja yhtäläisyysmerkki on voimassa vain, jos P_c ja u'' ovat yhteenkuuluvia.

Kaava (24a) kirjoitettuna skalaaritulona

$$(P' | u'') \leq 0 \quad \forall u'' \in \Xi, \forall P' \in B \quad (24a')$$

osoittaa, että luovallisten kuormien kartio B ja luovallisten kuormitusiirtymien kartio Ξ kuormitusavaruudessa ovat toistensa polaarikartiot

$$B = \Xi^*; \Xi = B^* \quad (27)$$

siis kartioiden B ja Ξ vaippavektorit ovat parittain ortogonaaliset.

Rajatilan kineettisestä määritelmästä (taulukko 1, c') seuraa edelleen, että rajatilan P_c ja u_c vektorit muodostavat kartioiden B ja Ξ vaipan $\partial B, \partial \Xi$

$$(P_c | u_c) = 0; P_c \in \partial B, u_c \in \partial \Xi. \quad (24b')$$

Sen sijaan jokainen B-kartion ei vaippaan ∂B kuuluva ei-häviävä luovallinen kuormavektori $\{P'\}$ täyttää ehdon (14')

$$(P' | u'') < 0, \forall u'' \in \Xi, \forall P' \in B - \partial B, \quad (24c')$$

joten näiden vektorien joukko kineettisen vakavuuskriteerin a') mukaan muodostaa stabiilien kuormien joukon E. Sen sijaan ehdon

$$(P'' | u'') = 0, u'' \in \Xi \quad (26')$$

täyttävä vektori P'' ei kuulu kartioon B paitsi, jos $P'' = P_c; u'' = u_c$ kaavan (24b') mukaan.

Lause I. Luovallisten kuormien kartio B muodostaa luovallisten siirtymien kartion Ξ polaarikartion. Rajatilan kuormat $\{P_c\}$ muodostavat B kartion vaipan. Jokaista rajakuormaa P_c vastaa määrätty liiketila $\{u_c, \gamma_c\}$ tai määrättyjen liiketilojen lineaariyhdistelmä. Toteutuvien kuormien joukko E yhtyy luovallisten kuormien kartioon B, ja stabiilit kuormat E, kartion B sisuksen B^0 .

$$E = B^0; \bar{E} = B. \quad (27)$$

Jos rakenteen osakappaleiden luku on äärellinen, vastaa jokaista tilaa $\{u\}$ tietty mekanismi. Kaavojen (15) ja (16) avulla voidaan silloin osoittaa /3/, että jos rakennetta kuormittaa $\{P^1 + \lambda k\}$, jossa $P^1 \in E$ ja $\lambda \{k\}$ ($k \in B$, kuva 6b) on suunnaltaan, mutta ei suuruudeltaan määrätty lisäkuorma, rajatila toteutuu kahden yksikäsitteisesti määrätyn mekanismin siirtymätilassa $\{u_{c+}, \gamma_{c+}\}$ ja $\{u_{c-}, \gamma_{c-}\}$, joissa $(k, u_{c+}) > 0$ ja $(k, u_{c-}) < 0$ ja joita vastaavat yksikäsitteisesti määrättyt kuormitusintensiteetit λ_{c+} ja λ_{c-} . Rajatasapainotila on liitosten resaltoivien voimien osalta yksikäsitteinen, jos mekanismilla $\{u_c, \gamma_c\}$ on äärellinen liikkuvuus.

Stabiilin alueen laajuuden määrittelee kartion E'' vastaava kärkikulman θ kaava

$$\theta = \arcsin \sqrt{1 - \frac{(P_c^+ | P_c^-)^2}{\|P_c^+\| \|P_c^-\|^2}} = \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\|P_c^+\| \|P_c^-\|} \sqrt{\|P^1\| \|k\| - (P^1 | k)^2},$$

jossa

$$P_c^+ = P^1 + \lambda_+ k; \quad P_c^- = P^1 + \lambda_- k.$$

(28)

Ääriarvoperiaatteen

Rakenteen stabiilisuuskartiota eli stabiilia tasapainoa vastaavien kuormitusten $\{P_s\}$ joukko voidaan rajata joko kineettisen rajaehdon c'') tai staattisen kriteerin a) avulla. Kineettinen rajaehto $\Sigma \hat{P}'' \cdot \hat{u}'' = 0$ voidaan kuormituksessa $\{P^1 + \lambda'' k\}$ kirjoittaa muotoon

$$\lambda_e \Sigma \hat{k} \cdot \hat{u}'' = -\Sigma \hat{P}^1 \cdot \hat{u}''; \quad u'' \in \Xi. \quad (29)$$

Jos $\{P^1\}$ on stabiili, yhtälön oikea puoli on aina positiivinen, jolloin

$$\lambda_{e+} = + \left| \frac{\Sigma \hat{P}^1 \cdot \hat{u}''}{\Sigma \hat{k} \cdot \hat{u}''} \right|; \quad \lambda_{e-} = - \left| \frac{\Sigma \hat{P}^1 \cdot \hat{u}''}{\Sigma \hat{k} \cdot \hat{u}''} \right|. \quad (29')$$

Staattisesti voidaan stabiilien kuormien P_s joukko rajata mielivaltaisen kartion E_σ avulla, joka sisältyy joukkoon B ; $E_\sigma \in B$. Nämä rajaukset eivät määrittele stabiilia aluetta yksikäsitteisesti. Todelliset rajat voidaan määrittää seuraavien ääriarvolauseiden perusteella.

Lause IIa. Annettua stabiilia alkukuormaa $\{P^1\}$ ja suuntaa $\{k\}$ vastaava todellinen vakavuuskulma θ on pienin kinemaattisesti määritellyistä vakavuuskulmista θ_e'' . Stabiilien intensiteettien alueen määrittelee pienin avoin väli $(\lambda_{e-}, \lambda_{e+})$. (Pienimmän vakavuuskulman periaate.)

Todistus. Kirjoitetaan kaava (26b) liiketilalle $\{u''\} \in \Xi$ ja kuormille $P_c = P^1 + \lambda_c k$ ja $P'' = P^1 + \lambda'' k$, jossa $\Sigma \hat{P}'' \cdot \hat{u}'' = 0$

$$(\lambda'' - \lambda_c) \cdot \Sigma \hat{k} \cdot \hat{u}'' \geq 0,$$

jolloin $\lambda_+'' = \lambda_{c+}$, kun $u'' = u_+''$; $\lambda_- \leq \lambda_{c-}$, kun $u'' = u_-''$.

Lause IIb. Annettua stabiilia kuormaa $\{P^1\}$ ja suuntaa $\{k\}$ vastaava todellinen vakavuuskulma θ on suurin staattisesti määritellyistä vakavuuskulmista θ_σ ja stabiilien intensiteettien alueen määrittelee suurin luovallisten intensiteettien avoin väli

$(\lambda_{\sigma-}, \lambda_{\sigma+})$. (Suurimman vakavuuskulman periaate.)

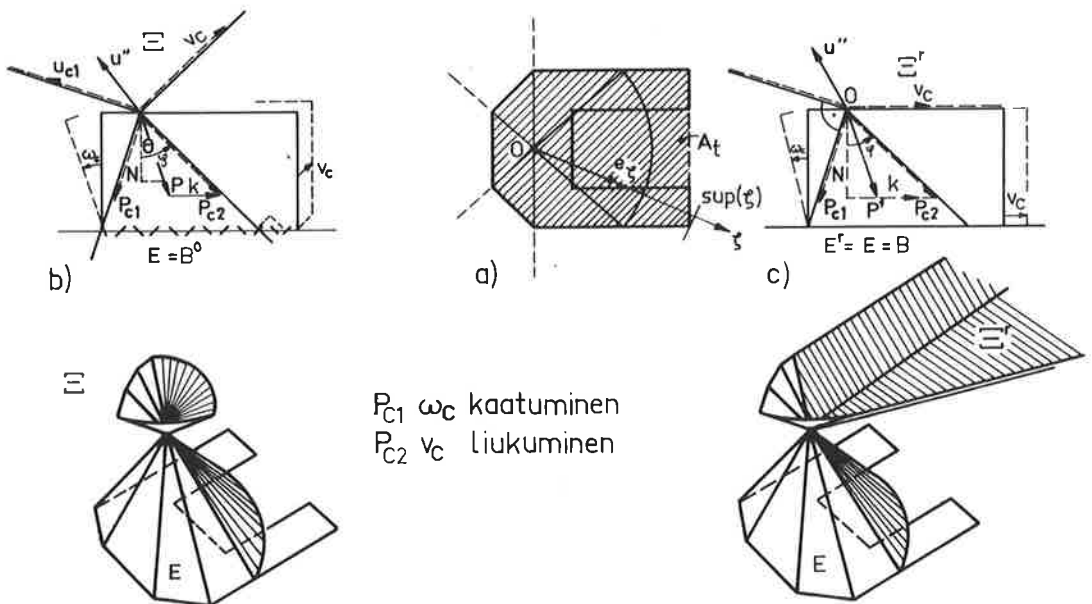
Todistus. Kirjoitetaan kaava (25a) luovallisille tasapainotiloille $\{P^1 + \lambda' k_1 S'\}$ ja $\{P^1 + \lambda_c k, S_c\}$, jossa $P^1 \in E$ ja yhteenkuuluvalla liiketilalla $\{u_c \cdot \gamma_c\}$

$$(\lambda_c - \lambda') \Sigma \hat{k} \cdot \hat{u}_c \geq 0, \quad (29b)$$

jolloin $\lambda_{c+} > \lambda'$, kun $u_c = u_{c+}$, $\lambda_{c-} < \lambda'$, kun $u_c = u_{c-}$.

Geometrisesti IIa ilmaisee, että vakavuuskartion E määrittely E :n aidon osajoukon E'' polaarikartiona $E'' = (E'')^*$, merkitsee kaavan (26') mukaan, että E'' :hen sisältyy ei-luovallisia kuormia.

IIb seuraa välittömästi siitä, että jokainen $E_c \subset \bar{E} = B$.



Kuva 6. a) Tukipinta, b) Jähmeä kitka, c) Reaalikitka, koska $P^1 = NEE^r$ on $E^r = E$

Luvallista liiketilaa rajoittavat ehdot muodostavat IIa:n minimittehtävän ehtoyhtälöt, jonka perusteella saadaan seurauslauseet:

1. Siteiden lisääminen, toispuolisten siteiden muuttaminen kaksipuoliseksi, kuten kuivien saumojen korvaaminen kiinteillä saumoilla ja köysien

tangoilla tai köysien lukumäärän lisääminen, ei voi pienentää vakavuuskulmaa θ .

2. Siteiden katkaisu tai rikkominen läpitukenemattomuusehtoa vastaan ei voi suurentaa θ .

Vastaavasti toimivat luvallista jännitystilaa koskevat ehdot lauseen IIB:n maksimitehtävän ehtoyhtälöinä, jonka perusteella saadaan seurauslause:

3. Tasapainoehtojen relaxointi, vetojännitysten salliminen saumoissa, kitkakulman suurentaminen ei voi pienentää vakavuuskulmaa.

Lauseet 2. ja 3. ilmaisevat myös ne rajoitukset, joiden puitteissa ääriarvo on olemassa, ja niiden avulla voidaan kehittää tiettyjä hybridi-ratkaisuja.

Dynaamista kosketusta toispuolisessa liitoksessa sanotaan maksimaaliseksi, jos liitoksessa vallitsee täydellinen dynaaminen kosketus. Vastaavien tasapainotilojen $\{P_a, S_a\}$ kuormat P_a muodostavat stabiilien kuormien aidon osajoukon $E_a \neq E$; $E_a \in E$. Sen vuoksi sanomme tiloja $\{P_a, S_a\}$ "varmoiksi" tasapainotiloiksi. Stabiilin tilan olemassaolo jähmeän kitkan tapauksessa todetaan seuraavan varman tasapainotilan säännön mukaan:

Seurauslause I. Jos annettun kuormituksen $\{P\}$ vaikuttaessa löytyy edes yksi varma tasapainotila $\{P_a, S_a\}$, rakenne on stabiili.

Annetun kuormituksen stabiilisuus voidaan myöskin todeta seuraavan lauseisiin I ja IIb perustuvan monikäsitteisyysperiaatteen avulla.

Seurauslause II. Jos annettun kuorman $\{P\}$ vaikuttaessa on olemassa kaksi luvallista tasapainotilaa $\{P, S\}$ ja $\{P', S'\}$, joita ei vastaa yhteinen luvallinen liiketila $\{u_c, \gamma_c\}$, tasapaino on stabiili.

Stabiili tasapainotila on siis monikäsitteinen, paitsi jos rakenne on staattisesti määrätty. Rajatasapainotila on sen sijaan tietyssä mielessä yksikäsitteinen.

Reaalisen kitkan tapaus

$$(E = \infty, \sigma_m \leq \infty)$$

Luvalliset jännitystilat ja luvalliset liiketilat määritellään eräin poikkeuksin samojen ehtojen perusteella kuin jähmeän kitkan tapauksessa. Koska kitkanalaisessa liukumisessa saumojen epätasaisuudet leikkaantuvat, jolloin vastaava saumasierros on saumatason suuntainen, läpitukenemattomuusehto (6) on

$$\gamma_n = \hat{n}_v \cdot \hat{\gamma} = 0, \quad (30)$$

mikä vastaa jähmeän kitkan tapauksessa arvoa $f = 0$.

Jos saumarasitus $\hat{S} = S_n \hat{n} + \hat{S}_s$, merkintää $\hat{t} = \hat{S}_s / |S_n|$ käyttäen, kirjoitetaan muotoon

$$\hat{S} = |S_n|(\hat{t} - \hat{n}_v) \quad (30')$$

voidaan kitkalaki lausua

$$|\hat{t}| - |\hat{f}(\hat{t})| \leq 0, \quad (30'')$$

jossa $|\hat{f}(\hat{t})| = \max |t| = tg\phi$ ja ϕ on voiman suuntaa \hat{t} vastaava kitkakulma.

Jos reaalisen kitkan lähtökohdaksi otetaan palstisuusteoria, jokaista saumavoimaa S_n tulee vastaamaan konvekssi leikkausvoimakäyrä $\hat{S}'_s = |S_n| \hat{f}$, joten myös reaalinen kitkakartio γ^r on konvekssi. Leikkausvoimakäyrän konveksisuus ehdot ovat

$$\hat{f} \cdot \hat{\mu} > 0 \quad (30a)$$

$$(\hat{f} - \hat{t}') \cdot \hat{\mu}(f) \geq 0, \quad (30b)$$

jossa $\hat{\mu}$ on käyrän \hat{S}'_s ulospäin suunnattu normaalipisteessä \hat{f} ja \hat{t}' luvallista \hat{S}' vastaava vektori.

Yhteenkuuluvat saumarasitukset \hat{S} ja siirrokset $\hat{\gamma}$ täyttävät seuraavat ehdot.

Taulukko 3 Saumarasitusten ja siirrosten välinen yhteys

Kosketus	Dynaaminen	Geometrinen	työ $\hat{S} \cdot \hat{\gamma}$
Täydellinen	$S_n < 0; \left \frac{S_s}{S_n} \right < f(S) $	$\gamma_n = 0; \gamma_s = 0$	0
Osittainen (kitkallinen liukuminen)	$S_n < 0; \left \frac{S_s}{S_n} \right = f(S_s) $	$\gamma_n = 0; \hat{\gamma}_s = C\hat{\mu} \quad (C > 0)$	$ S_n \hat{f} \cdot \hat{\gamma} > 0$
Puuttuva	$S_n, S_s = 0$	$\gamma_n \geq 0$	0

Rasitusten todellinen työ on siten 0, paitsi kitkallisen liukumisen tapauksessa, jolloin

$$\hat{S} \cdot \hat{\gamma} = |S_n| \hat{f} \cdot \hat{\gamma} > 0. \quad (31)$$

Muodonmuutostyö käsittää kitkavoimien työn saumoissa

$$\Delta D = \sum \sum |S_n| \hat{f} \cdot \hat{\gamma} > 0.$$

Tulo $\hat{f} \cdot \hat{\gamma}$ riippuu pelkästään liiketilasta $\{u, \gamma\}$. Koska tiloja rajoittavat ehdot määrittelevät konveksiset joukot, voidaan tässäkin tapauksessa osoittaa, että luvallinen siirtymätila ja siis myöskin kuormitus siirtymät muodostavat konveksin kartion E^r . Luvalliset kuormat muodostavat konveksin kartion B kuormitusavaruudessa.

Stabiilin tasapainotilan $\{P, S\}$ on taulukon 1 mukaan täytettävä jokaisessa luvallisessa tilassa $\{u, \gamma\}$ ehto

$$\sum \hat{P} \cdot \hat{u} < \sum \sum |S_n| \hat{f} \cdot \hat{\gamma}. \quad (32)$$

Stabiilien kuormien joukko E^r on kartio, koska tila $\{\alpha P, \alpha S\}$ täyttää ehdon (32), jos $\alpha > 0$.

Yhteenkuuluvien rajatilojen $\{P_c, S_c\}$ ja $\{u_c, \gamma_c\}$ työyhtälö (24) antaa taasen

$$\Sigma \hat{P}_c \cdot \hat{u}_c = \Sigma \Sigma |S_n| \hat{f}_c \cdot \hat{\gamma}_c \geq 0. \quad (32')$$

Tämä merkitsee, että kuormitusavaruudessa $\{P_c\}$ ja $\{u_c\}$ yleensä muodostavat keskenään terävän kulman ($(P_c | u_c) > 0$). Ne ovat ortogonaaliset vain, jos liukumista ei esiinny saumoissa, missä $\hat{S} \neq 0$.

Vakavuuskartion E^r kärkikulmia θ^r tutkitaan tarkastamalla kuorman $\{P' + \lambda k'\}$ stabiilisuusrajoja. Rajat suunnassa k voidaan määrittellä kinemaattisesti työyhtälön (32') avulla, mikä antaa

$$\lambda'_e = \frac{|\Sigma P^1 u'|}{\Sigma k \cdot u''} + \frac{\Sigma \Sigma |S_n| |\hat{f}_c \cdot \hat{\gamma}_c|}{\Sigma k \cdot u''} \quad (33)$$

tai staattisesti luvallisten tasapainotilojen avulla otaksumalla kartio $E_\sigma^r \in B$.

Ääriarvoperiaatteen olemassaolo ja puitteet riippuvat konveksisuusehdosta (30b)

$$\left(\frac{\hat{S}_{sc}}{|S_n|} - \frac{\hat{S}'_s}{|S'_n|} \right) \cdot \hat{\gamma} \geq 0. \quad (30c)$$

Erikoisesti, jos $S'_n = S''_n$, voidaan tämä kirjoittaa

$$(\hat{S}_c - \hat{S}') \cdot \hat{\gamma}_c \geq 0, \quad (30c')$$

jolloin ovat voimassa kaavat

$$\Sigma (\hat{P}_c - \hat{P}') \cdot \hat{u}_c = \Sigma \Sigma (S_c - S') \gamma_c \geq 0 \quad P' \in B \quad (31a)$$

$$\Sigma (\hat{P}'' - \hat{P}_c) \cdot \hat{u}'' = -\Sigma \Sigma S_c \gamma'' \geq 0 \quad \Sigma P'' \cdot u'' = 0 \quad u'' \in E^r. \quad (31b)$$

Nämä kaavat vastaavat silloin täysin kaavoja (25a-26b), joihin lauseet I, IIa ja IIb perustuivat, joten

Lause I'. Jos annetun alkukuorman $\{P^1\}$ lisäksi rakenteeseen vaikuttaa lisäkuorma $\{\lambda k\}$, on rajatila $\{P^1 + \lambda_{c+} k, S_{c+}\}$ $\{P^1 + \lambda_{c-} k, S_{c-}\}$ yksikäsitteisesti määrätty vain siinä tapauksessa, että kaikissa kitkasaumoissa normaalirasitukset S_n riippuvat vain P^1 :stä eikä λk :sta.

Lause II'. Jos vetoakestämättömien kitkasaumojen normaalirasitukset S_n riippuvat pelkästään alkukuormasta P^1 , niin silloin:

a) Suuntaa k vastaava todellinen vakavuuskulma θ on pienin kinemaattisesti määritellyistä vakavuuskulmista θ_c ja stabiilin intensiteetin alueen määrittellee pie-

nin avoin väli $(\lambda_{e-}, \lambda_{e+})$. (Pienimmän vakavuuskulman periaate).

b) Suuntaa $k(B)$ vastaava todellinen vakavuuskulma θ on suurin staattisesti määritellyistä vakavuuskulmista θ_σ ja stabiilien intensiteettien alueen määrittelee suurin luvallisten intensiteettien avoin väli $(\lambda_{e-}, \lambda_{e+})$. (Suurimman vakavuuskulman periaate reaaliselle kitkalle.)

Jos normaalirasitusten S_n jakautumaa ei tunneta, ei vakavuuskartiota E^R voida määrittää, mutta se voidaan yleisessä tapauksessa kuitenkin rajata kahdella luvallisten kuormien kartiolla.

Lause III. Jos saumojen kitkakulmat ovat samat ($f = f^R$), sisältyy reaalin kitkan vakavuuskartio $E^R(f)$ jähmeään kitkan vakavuuskartiota $E^R(\theta) \subset E(f)$ ja kitkattoman rakenteen vakavuuskartio $E(0)$ sisältyy puolestaan reaaliseseen kitkakartiota $E(f)$

$$B(0) \subset E^R(f) \subset B(f) \quad (34)$$

Todistus. Koska $(P_C^R | u_C^R) \geq 0$; $E(0) = E^R(f)$; $E^*(0) = B(0) = \bar{E}(0) \Rightarrow B(0) \subset E^R$. Lauseesta IIb seuraa $E^R(f) \subset B^0(f)$. Jos kitkan alaista liukumista ei esiinny $E^R(f) = E(f)$.

Koska yllä esitetty teoria käsittelee rakenteen vakavuutta pienten siirtymien puitteissa, sitä voidaan nimittää lineaariseksi stabiilisuusteoriaksi.

KIVIRAKENTEIDEN STATIIKKA

Yleistä

Kivirakenteissa saumojä voidaan pitää vetoakestämättöminä laastin pienen vetolujuuden takia. Koska jännitykset yleensä ovat pieniä luonnonkiven murtolujuuteen verrattuna ja rakenteissa käytettyjen neljäkäskivien muodonmuutokset ovat pieniä verrattuna saumojen siirrokseen, niitä voidaan pitää jähmeinä ($\sigma_m = E = \infty$). Sen vuoksi lineaarinen stabiilisuusteoria on sovellettavissa kivirakenteisiin ja eräin rajoituksin myös muurattuihin tiilirakenteisiin.

Tällöin on huomattava, että jähmeään kitkan hypoteesi antaa yksikäsitteisesti määritellyt stabiilisuusrajat ja vakavuuskulman (siis kuormituslaajuuden) ylärajan. Vakavuuskartiota E voidaan ääriarvoperiaatteiden perusteella rajata kahdella kartiolla $E'_\sigma \subset E \subset E''_\sigma$. Vaikkei hypoteesi todellisuudessa aina toteudu, voidaan konstruktiivisin keinoin hammastuksin tai vaaranojen avulla varmistaa sitä vastaavat olosuhteet. Suunnittelun kannalta on tärkeitä, että siihen voidaan soveltaa varman tasapainotilan lausetta ja monikäsitteisyyslausetta.

Reaalisen kitkan hypoteesin puutteena on, että se vain staattisesti mää-
räytyissä rakenteissa antaa yleispäteviä yksikäsitteisiä stabiilisuusra-
joja. Muissa tapauksissa nämä jäävät epämääräisiksi. Jähmeän kitkan ja
reaalisen kitkan stabiilisuusrajat poikkeavat toisistaan vain, jos raken-
teessa esiintyy kitkallista liukumista.

Sauva- ja holvirakenteet

Sauva- ja tasorakenteiden vakavuusrajat määritetään valitsemalla mahdolli-
simman yksinkertainen luovallinen tasapainotila. Yksinkertaisin tila on se,
joka jokaisessa saumassa täyttää ehdot: a) Saumavoimat voidaan redusoida yh-
deksi resultantiksi R , b) R :n vaikutuspiste sijaitsee sauman tukipinnan
sisäpuolella. c) $N \leq 0$, d) $|Q| \leq |N| |f|$, jossa N ja Q ovat sauman normaali-
voima ja leikkausvoima. Tämän mukaan voidaan tasapainotila määrittellä pelk-
kien rakenteen sisällä pysyvien puristusviivojen avulla. Ehto a) on yksin-
kertaisen kitkaehdon d) edellytys ja se koskee lähinnä avaruussauvarakenteita.

Jokaiselle stabiilille kuormalle voidaan piirtää ääretön joukko puristus-
viivoja monikäsitteisyyslauseen IV mukaan, mutta rajakuormalle voidaan piir-
tää vain yksi, jota vastaa määrätty mekanismi.

Jähmeän kitkan tapauksessa varman tasapainon olemassaolon takaa perus-
sääntö A. Kivinen sauva- tai levyrakenne on
stabiilissa tilassa, jos annetuille kuor-
malle voidaan piirtää yksi puristusvi-
vojen yhdistelmä, joka liitoksissa pysyy
sauman tukipinnan A_t ja kitkakartion sisä-
puolella.

Kiviholveissa mahdollisimman yksinkertainen luovallinen tasapainotila, joka
täyttää edellä mainitut ehdot a), b), c) ja d), on ilmeisesti sellainen, jossa
sisäiset holvivoimat voidaan redusoida holvin sisällä pysyvän pinnan nk. pu-
ristuspinnan kalvovoimiksi. Puristuspinnan ei tarvitse yhtyä ns. kuoren kes-
kipintaan ja sen muoto riippuu kuormituksesta.

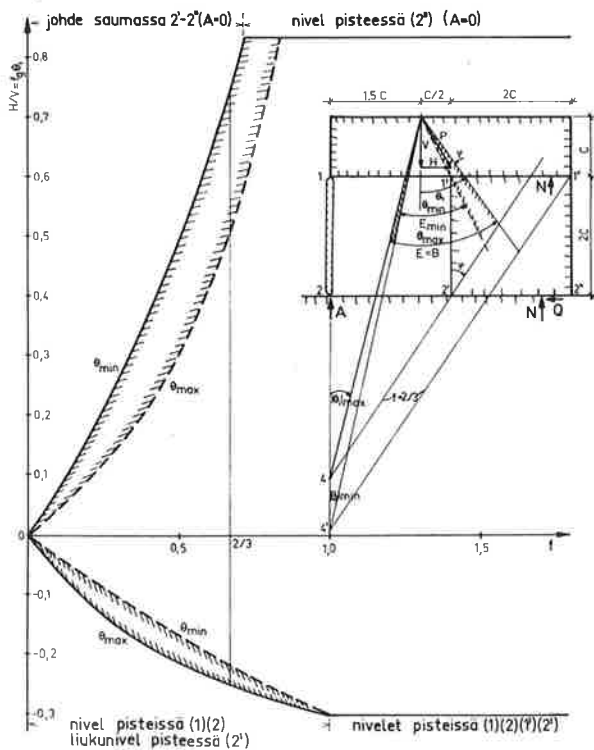
Vakaa tasapaino todetaan seuraavasti: Perussääntö A'. Holvira-
kenne on stabiilissa tilassa, jos kuormi-
tusta vastaa edes yksi holvin sisällä py-
syvän pinnan kalvotila, jossa jokaisessa
saumassa esiintyy puristusta ja rezultoi-
va kalvovoima pysyy sauman kitkakartion
sisäpuolella, tai on olemassa vastaavia
varmojen puristusviivojen parveja.

Stabiilin alueen yläraja määrätään kinemaattisesti jakamalla rakenne sa-
rananiveliin ja johteiden (kuva 5b) sekä niiden yhdistelmien, liukuniveliin
ja ruuviakseleiden, avulla jähmeisiin osiin, jotka muodostavat mekanismin.

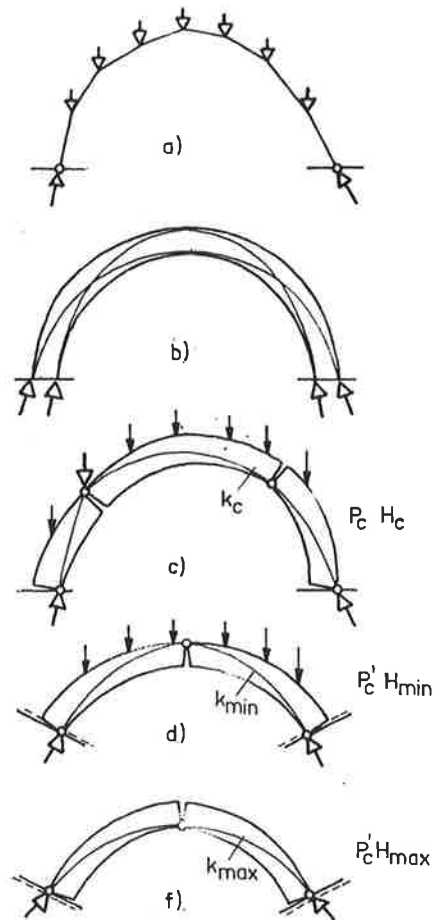
Reaalisen kitkan esiintyessä esim. laastilla saumatuissa rakenteissa ei
edellä mainittujen varman puristuspinnan olemassaolo sinänsä takaa rakenteen

stabiilisuutta, jos lisäksi löytyy luvalinen puristuspinna, jonka saumaresultantin kaltevuus saavuttaa kitkakulman. Reaalisen kitkan vakavuuskartiota E^r ei poikkeustapauksia lukuunottamatta pystytä määrittämään ei-jähmeiden kapaleiden statiikan eikä edes kimmoteorian perusteella.

Kivirakenteissa tapaus on ongelmallinen ja on aiheuttanut sortumia, kun liukumista on esiintynyt paksuseinäisten kaarien pystysaumoissa. Liukuminen riippuu ennen kaikkea saumojen normaalivoimasta N . Tällöin on turvauduttava haarukointiin. Suurimman kuormituslaajuuden antaa jähmeän kitkan teoria. Kuormituslaajuuden alarajan antavat sellaiset puristusviivat ja pinnat, joissa saumojen normaalivoimat ovat pienimmät. Alarajan määrittäminen on kuitenkin hankala.



Kuva 7. Levyrakenteen stabiilin sektorin E^r rajaaminen reaalisen kitkan tapauksessa.



Kuva 8. Kaaren rajatilat ja mekanismit.

Kuvassa 7 on esitetty levyrakenteen stabiilisuussektorin E^r yläraja sekä vastaavat kulmat $|\theta|_{\max}$ kitkakertoimen $f = \operatorname{tg}\phi$ funktiona, kulman maksimilauseen perusteella puristusviivaa käyttäen. Tätä ratkaisua vastaa jähmeän kitkan mekanismi ($E = (E^*)^0$). Pienintä normaalivoimaa N vastaa kuormituslaajuuden alaraja $|\theta|_{\min}$. Reaalista kirkkaa vastaavan sektorin E^r rajasäteet sijaitsevat E ja E_{\min} rajasäteiden välissä. θ^r :n tarkkaa arvoa ei voida määrätä.

Kaarissa määrää saumojen normaalivoiman kaarivoima H saumojen leikkausvoimien Q riippuessa pääasiassa kuormista P . Tällöin riittää stabiilisuuden toteamiseksi, että pienintä kaarivoimaa H_{\min} vastaava puristusviiva $K'(H_{\min})$ on varma, koska tällöin saumaresultantilla myös on suurin kaltevuus. Suurinta ja pienintä kaarivoimaa vastaavilla puristusviivoilla K_{\min} ja K_{\max} on tärkeä merkitys kaaren tukien mitoituksessa. Niiden määrittäminen tapahtuu johdannossa esitettyjen tehtävien e ja f mukaisesti (kuva 2). Puristusviivat K_{\min} ja K_{\max} vastaavat kaaritukien siirtymistä sisäänpäin ja ulospäin (kuva 8). Luonnollista on, että mitä ohutseinäisempi rakenne on sitä pienemmäksi muodostuu rakenteen sisällä pysyvien ei-luovallisten puristusviivojen joukko ja sitä pienemmäksi muodostuvat luovallisten puristusviivojen ja -viivojen kaltevuudet saumapinnoissa. Kun rakenne on riittävän ohutseinäinen, tulee kaikkien puristusviivojen kaltevuus alittamaan saumojen kitkakulmat. Tällöin liukuminen on estetty ja säännöistä A seuraa ohutseinäisten kivrakenteiden staattinen perussääntö.

Perussääntö B. Jos ohutseinäisessä kivrakenteessa annettua kuormaa vastaa ainakin yksi rakenteen sisällä pysyvä puristusviivojen ja -viivojen yhdistelmä, mutta ei löydy ainoatakaan rakenteen sisällä pysyvää puristusviivaa tai -viivaa, jonka kaltevuus saumoissa saavuttaa tai ylittää kitkakulman, rakenne on stabiili.

On huomattava, että mikäli säännön B mukaisesti liukuminen on estynyt, kaikki jähmeään kitkaan perustuvan teorian lauseet ja rakenteen stabiilisuus- ja siirtymäkartiota koskevat säännöt ovat muuttumattomina voimassa.

Tällöin mahdollisista mekanismeista on poistettava johteet, liukuvivelet ja ruuviakselit, ja liiketila E voidaan rajoittaa pelkkiin nivelmekanismeihin, jolloin lauseen IIa mukaan pätee:

Perussääntö C. Vakavuuskartiota C määrittää laajimman pelkkien nivelmekanismien generoiman liikekartion E'_m polaarikartio $E^r = (E_m^*)^0$.

Annetun rakenteen kuormituslaajuus θ voidaan määrätä staattisesti puristusviivaa käyttäen tai kinemaattisesti (kuva 8). Päinvastoin voidaan kaarien ja holvien ja niiden tukirakenteiden mitoitus suorittaa perussäännön B nojalla.

Kaarien ja pilareiden vahvuus d minimoitiin äärimmäisiin kuormitustapauksia vastaavien varmojen ja optimaalisesti valittujen puristusviivojen avulla (kuva 10).

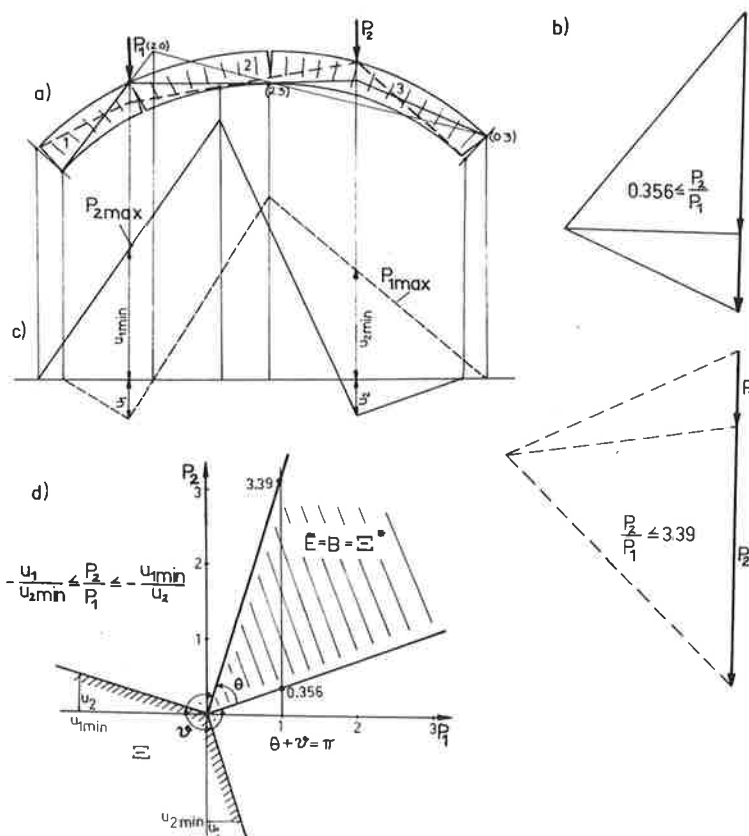
Nykyajan teknillisestä kirjallisuudesta löytyy vain joitakin jäänteitä perussäännön käytöstä. Eräissä normeissa /4/ on maininta, että suurimpia muurattuja kaaria on laskettava kimmoteorian mukaan. Pienempiä perinteisiä kaaria ja holveja voidaan käsitellä nk. puristusviivamenetelmän /5/ avulla, jossa omanpainon g ja liikkuvan kuorman p seuraaville yhdistelmille määrätään puristusviivat (kuva 11):

a) Puristusviiva kuormalle $g+p/2$, joka valitaan kaaren akseliksi.

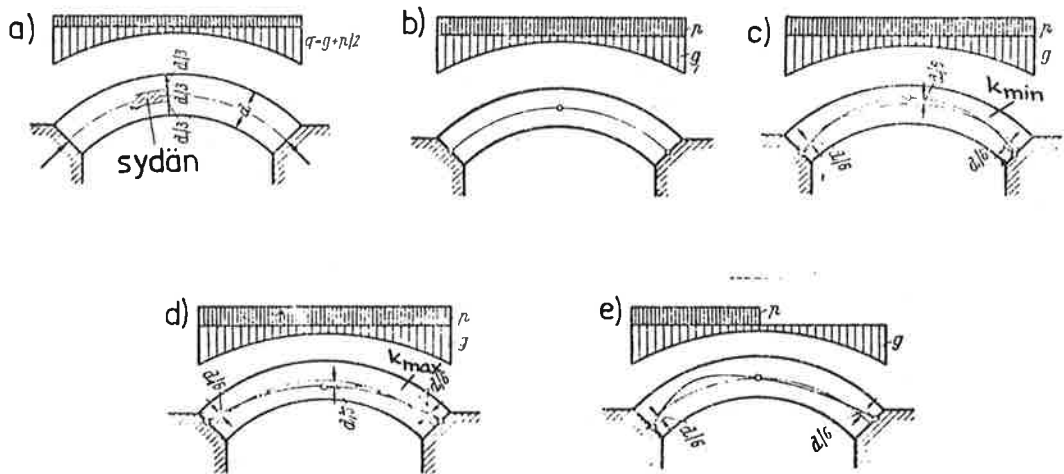
b) Puristusviivan kuormalle $g+p$ keskiviivan kantapisteiden ja lakipisteen kautta.

c) Samalle kuormalle puristusviivat K_{min} ja K_{max} kannan ja tuen vastakaisten sydänpisteiden kautta.

e) Puristusviiva kuormalle g t toispuolinen p .



Kuva 9. Kaaren vakavuussektorin E määrittäminen (a & b) puristusviivan avulla. (a & c) tarkistus kinemaattisen ketjun avulla. (d) E :n määrittäminen E_c :n avulla.



Kuva 10. Holvin mitoitus puristusviivamenetelmän mukaan.

Jos kaaren paksuus on sellainen, että yllä mainittujen puristusviivojen epäkeskeisyys $e \leq d/2$ ja puristusjännitykset, otaksumalla lineaarinen jakautuma, eivät ylitä sallittuja puristusjännityksiä, rakenteen katsotaan olevan stabiili.

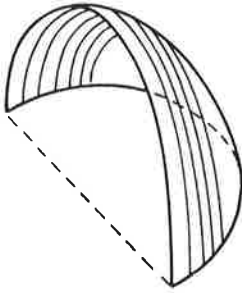
Nämä ohjeet ovat perussäännön mukaisia paitsi, että maksimi epäkeskeisyys on rajoitettu $e = d/3$ perussäännön edellyttämän arvon $d/2$ asemesta, mikä voidaan pitää eräänlaisena varmuutena. Heyman [2], joka on tutkinut asiaa perusteellisesti, katsoo, että kivirakenteissa voitaisiin sallia epäkeskeisyys $e \leq \frac{9d}{20}$.

Holveissa voidaan yleensä katsoa liukumisen keskipinnan suunnassa olevan estetty, joten perussääntöä voidaan soveltaa holveihin kuten kaariin. Staatistiset menetelmät käsittävät holvin jaon joko yksinkertaisiin (kuva 11a) tai kaksinkertaisiin ristikkäisiin kaarisuikaleisiin (kuva 11 b). Nämä menetelmät vastaavat luonteeltaan täysin laattojen plastisuusteorian nk. suikalemenetelmää, jossa laatta jaetaan risteileviin palkkeihin.

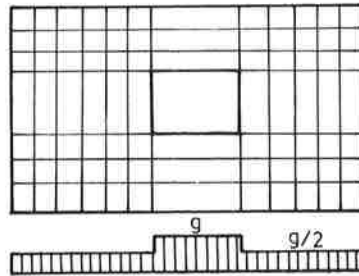
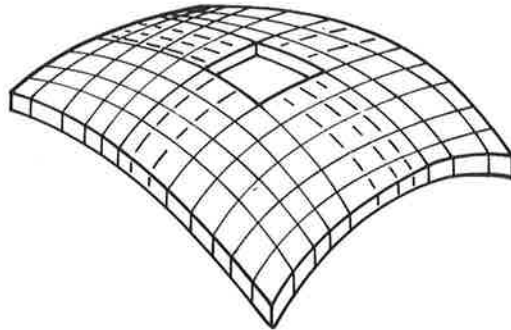
Kinemaattisessa menetelmässä voidaan käyttää samoja sarananivelmekanismeja kuin teräsbetonikuorien plastisuusteoriassa. Ratkaisu muodostuu kuitenkin huomattavasti yksinkertaisemmaksi liikekartion E ja vakavuuskartion B^0 polaarisuuden johdosta, jolloin kinemaattisesti määrätyn E pyramidin vaippatasojen normaalit muodostavat B -pyramidin särmät (kuva 6). Sarananivelmekanismeissa osien absoluuttiset kiertoakselit $[v_0]$ $[\mu_0]$ ja keskinäiset kiertoakselit $[v_{ij}]$ täyttävät kolmen kiertoakselin perussäännön, jonka mukaan ne leikkaavat toisensa samassa pisteessä (v_{ij}) ja sijaitsevat samassa tasossa π (kuva 12a).

Yhdensuuntaisten kuormien vakavuuskartion määrittäminen muodostuu erikoisen yksinkertaiseksi. Kaareissa keskimmäisen kaariosan (2) O -napa (O_2) toimii

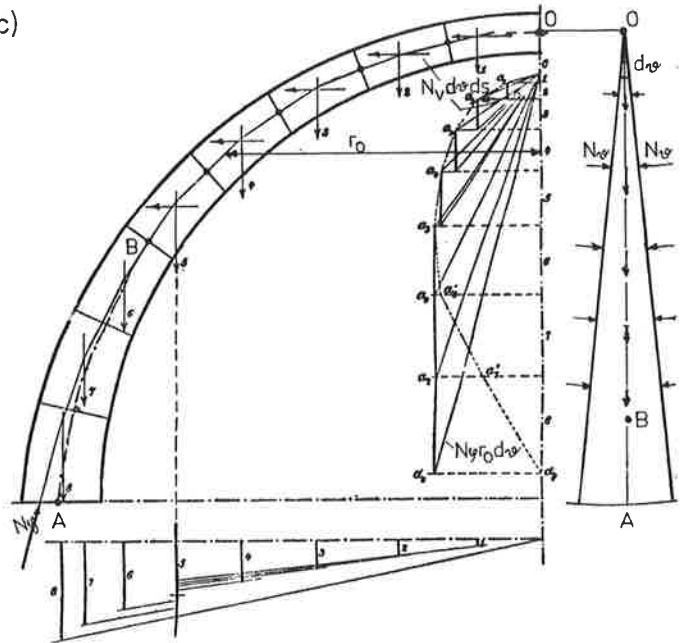
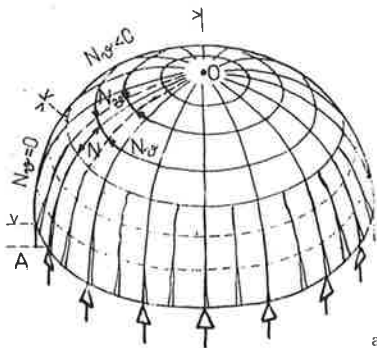
a)



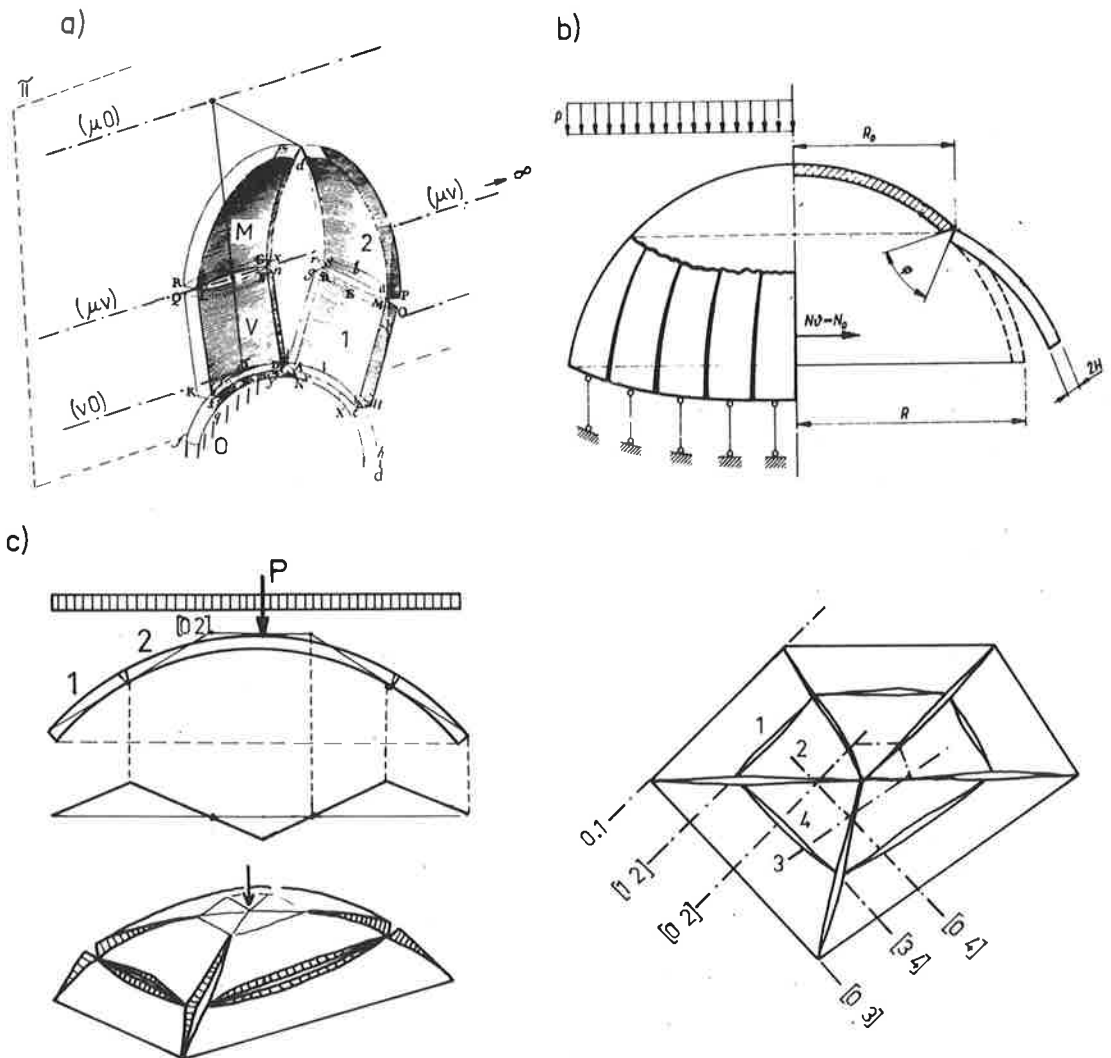
b)



c)



Kuva 11. Puristusviivan käyttö holveissa. a), b) Jako puristusviivaparviin. c) Pyörähdyskuoren kalvoratkaisu puristusviivan avulla. Osalla OB puristusviiva pakotetaan N_{θ} voimien avulla yhtymään keskiviivaan. Osalla AB on $N_{\theta} = 0$.



Kuva 12. a), b) Pyörähdyssymmetrisen holvin mekanismi. c) Hybriidimekanismi. Laessa 0-akselien sisäpuolisissa murtoviivoissa $\gamma_n \leq 0$.

tukena, jolloin kaaren pystysiirtymät vastaavat päistään ja navassa (02) tuetua nivelpalkkia. Täysin vastaavasti holvissa liikkuvien osien 0-akselit vastaavat laatan tukisuoria, joten kuoren taipuma voidaan palauttaa vastaavasti tuetun laatan taipumaksi ja voidaan siihen soveltaa samoja myötöviivakuviota (13c). Taipuman suunta on nyt kuitenkin kuvion määräämä. Liikkuvien tukien sijainti riippuu myös murtoviivakuviosta (akselista $[\nu\mu]$). Tällöin on stabiilisuusrajoja määrättäessä suljettava pois sellaiset kuviot, joissa kaikki kuormat suorittavat negatiivista työtä. Jos kuori voidaan osiltaan levittää tasoksi, voidaan laatta-analogia yleensä toteuttaa rikkomatta läpituokemattomuus ehtoa vastaan. Muissa tapauksissa voidaan kuitenkin poistamalla ainetta saumoissa ts. rikkomalla em. ehtoa vastaan päästä

yksinkertaisiin tase rakenteita vastaaviin mekanismeihin. Näin saadut hybridiratkaisut saattavat antaa kinemaattista perussääntöä suppeamman vakausskartion $E' \ll B^0$.

Kaaren arvoitus

Palataksemme johdannossa mainittuun Hooken arvoitukseen toteamme, että köysikulmion kääntösääntö ei sellaisenaan takaa kaaren vakaan tasapainon olemassaoloa. Vakaa tasapaino toteutuu, jos on olemassa edes yksi seuraavia ehtoja täyttävä puristusviiva:

- i) pysyy kaaren sisäpuolella
- ii) joka saumassa vallitsee puristus
- iii) kosketus on täydellinen, saumapinta äärellinen.

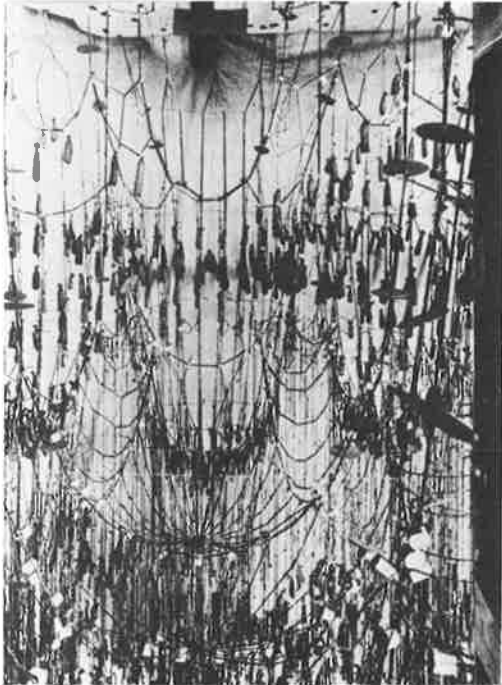
Täysin taipuisa, kuormitettu köysi tai ketju täyttää ehdon i). Siinä vallitsee pelkkä veto, joten johdannon kääntösäännön c) mukaan ehto ii) tulee täytetyksi. Vakaan tasapainon varmistaa kuitenkin vasta ehdon iii) mukainen äärellisten saumapintojen toteuttama täydellinen kosketus.

Staattinen perussääntö, jonka mukaan tasapainon mahdollisuus takaa vakaan tasapainon olemassaolon, antaa suunnittelijalle arvaamattomia mahdollisuuksia. Jos ripustetaan köysiin, verkkoihin tai kalvoihin kuormia siten, että kaikkialla vaikuttaa veto, niin vastaava käännetty rakenne, joka koostuu vetäkeestämättömästi yhdistetyistä kivistä, seisoo vakaana samojen kuormitusten alaisena ilman, että yksikään kivi siitä irtaana.

Tämän rakennusten suunnittelulle avaaman mahdollisuuden oivalsi ensimmäisenä espanjalainen arkkitehti Antonio Gaudi (1852-1926). Gaudi oli toimintansa aikana omaksunut syvällisen statiikan ja muuraustekniikan tuntemuksen. Hän perusti tiilikuorien suunnittelun painoilla kuormitettujen, ripustettujen verkkojen ja kalvojen pienoismallikokeisiin (kuva 3). Tällä keinolla hän yhdellä iskulla loi aivan uusia muotoja kaari- ja pilarirakenteita sekä tiiliholveja varten. Hänen vaikutuksensa vuosisatamme kuorirakennetekniikan kehitykseen onkin ollut merkittävä. Voimien toispuolisuus kivirakenteiden saumoissa rajoittaa tuntuvasti stabiilien tilojen joukkoa, jotka voidaan kuvata varmojen, rakenteen sisällä pysyvien perustusviivojen avulla. Suunnittelussa voidaan päinvastoin pakottaa rakenteen muodot seuraamaan annettua puristusviivayhdistelmää. Tällöin rakenteen painot mitoitetaan suoraan johdannon köysikulmionsäännön b) mukaan. Sen vuoksi muodon ja kantavien voimien yhteys ja vuorovaikutus ilmenee täydellisimmin kivirakenteissa. Monoliittisissa rakenteissa tämä yhteys joko puuttuu tai se on niin monimutkainen, ettei silmä sitä hahmota (kerroskehät, ristikot). Muodon mukautuminen voiman kulkuun vähentää myöskin materiaalirasituksia. Sen vuoksi kiviholveissa ei esiinny monoliittisille kuorille ominaisia reunahäiriöitä.

Kivirakenteiden edellä selostetun suunnittelun samoin kuin vakavuuden mää-

a)



b)



Kuva 13. Gaudin köysikulmion kääntösääntöön perustuvat pienoismallit. a) kuormitettu verkko. b) Kuormitettu kirkon kalvomalli.

rityksen yksinkertaisuus perustuu stabiilin tilan monikäsitteisyyteen. "Puristusviiva voidaan vetää mielivaltaisesti", lausui Gaudi 1898. Vastaava menettely monoliittisessa, kimmoisessa rakenteessa ei kimmoisen ratkaisun yksikäsitteisyyden takia olisi mielekäs.

Vakavuuden määrittämisen yksinkertaisuus ja siihen liittyvä suoranainen mitoitus selittää myöskin, miten entisajan rohkeita kivirakenteita on voitu pystyttää ilman laskelmia jo kauan ennen köysikulmion keksimistä. Kokeneet muurarit tasapainottivat työn edistyessä muurausmassoja vakavuuskartion konveksisuusominaisuuksia hyväksikäyttäen, varoen kuormituksen lähestymistä kartion vaippaa ennakoivaa saumojen aukenemista ja rakenteen huojumista.

Stabiilin alueen kartiomaisuudesta seuraa, että painojen lisääminen siis muuraaminen on aina turvallisempaa kuin painon poisto eli purkaminen. Siihen perustuu myös kivirakenteissa usein havaittava lujusmitoituksen vastainen painomassojen korkea sijainti.

MERKINNÄT

\hat{A}	vektori fysikaalisessa avaruudessa R^3
$A, \{A\} = \{A_1 \dots A_n\}$	vektori abstraktisessa avaruudessa (kuormitusavaruudessa V)
B	mahdollisten kuormien kartio
E	stabiilien kuormien kartio (jähmeä kitka)
E^r	stabiilien kuormien kartio (reaalikitka)
P, \hat{P}	rakenteeseen vaikuttava tunnettu kuormitus
$M, \hat{M}, M_{\nu\mu} = \sum \hat{r} \times \hat{S}_\nu$	kappaleeseen ν vaikuttava momentti liitoksessa $\nu\mu$
$R, \hat{R} = \hat{R}_{\nu\mu} = \sum \hat{S}_\nu$	kappaleeseen ν vaikuttava resultantti liitoksessa $\nu\mu$
$S, \hat{S} = \hat{S}_{\nu\mu}$	kappaleeseen ν vaikuttava liitosvoima liitoksessa $\nu\mu$
$X(\hat{Y})$	liitoksen paikallisia liikerajoituksia kuvaava karliu
$Y(\hat{S})$	liitoksen paikallisia voimarajoituksia kuvaava kartio
$E(u)$	rakenteen liikerajoituksia (kuormitussiiirtymiä) kuvaava kartio
H	kaarivoima
$\hat{n}_{\nu i}$	kappaleen ν sauman ($\nu\mu$) ulospäin suunnattu paikallinen normaali
\hat{n}_ν	kappaleen ν sauman ($\nu\mu$) ulospäin suunnattu keskipinnan normaali
\hat{r}	paikkavektori
\hat{r}_ν	liitospinnan ($\nu\mu$) pisteen paikkavektori
u, \hat{u}	siirtymä, kuormituspisteiden siirtymät
$\hat{u}_\mu(r_\nu)$	kappaleeseen μ jäykästi kiinnitetyn pisteen \hat{r}_ν siirtymä
$\hat{v}_\mu = \hat{u}_\mu(0)$	kappaleen μ translaatio
$v, \hat{v}, v_{\mu\nu} = \hat{v}_\mu - v_\nu$	kappaleiden μ ja ν keskinäinen translaatio
$\gamma, \hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{\mu\nu} = u_\mu(r_\nu) - \hat{u}_\nu(r_\nu)$	siirros liitoksessa ($\nu\mu$)
λ	kuormitusintensiteetti
$\hat{\phi}_\nu$	kappaleen ν kiertymä
$\omega, \hat{\omega} = \hat{\omega}_{\mu\nu} = \hat{\phi}_\mu - \hat{\phi}_\nu$	kappaleiden μ ja ν keskinäinen rotaatio

Alaindeksit

c	rajatila
n	normaalikomponentti
s	sauman tangentialikomponentti

Yläindeksit

*	polaarisuure
o	sisus

KIRJALLISUUSLUETTELO

- [1] Kooharian, A., Limit analysis of voussoir and concrete arches. Proc. Am. Concr. Inst. 89. 3A, 1953.
- [2] Heyman, J. The stone skeleton. Int. J. Solids Structures Vol 2 (1966). s. 249...279.
- [3] Parland, H., Jähmeiden kappeleiden statiikan ääriarvoperiaatteet. Rakenteiden mekaniikka. Vol 5 No. 3, 1972, s. 286-306.
- [4] DIN 1053. Bl. 1. Abschn. 5.4...5.5.
- [5] Betonkalender 1968 II. Massive D en. s. 192...193.
- [6] Heyman, J., Equilibrium of shell structures. London, 1977.
- [7] Föppl, J.A., Technische Mechanik II. Graphische Statik. 1926.
- [8] Martinelli, C., Gaudi. London, 1975.

Herman Parland, prof., Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto