

## TUKEMATTOMAN RAKENTEEN OMINAISTAAJUUKSIEN MÄÄRITTÄMISESSÄ KÄYTETYN KEINON LUJUUSOPILLINEN TULKINTA

Antti Pramila

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 11  
No. 3 1978 s. 23...34

**YHTEENVETO:** Artikkelissa käsitellään keinoa, jolla voidaan välttää tukemattoman tai puutteellisesti tuetun rakenteen jäykkyysmatriisin singulaarisuudesta aiheutuvat esteet ominaistajuuksien määrittämiselle. Keinolle esitetään lujuusopillinen tulkinta, joka osoittaa sen läheiset yhteydet kimmoiseen tuentaan. Menetelmän käytön yhteydessä tapahtuvaa vakion valintaa koskevissa suosituksissa esiintyneitä virheitä pyritään oikaisemaan. Artikkelissa käsitellään kahta sovellutusesimerkkiä, jotka havainnollistavat tähän valintaan liittyviä seikkoja.

### JOHDANTO

Konetekniikassa joudutaan usein rakenteiden suunnittelun yhteydessä tekemään myös värähtelylaskelmia. Tavanomaisimmissa tapauksissa riittää, kun vakuutaudutaan siitä, ettei rakenteen mikään ominaistajuus ole liian lähellä mahdollisen herätteen taajuutta.

Monesti rakenne on niin monimutkainen, ettei analyttinen käsittely ole mahdollista, vaan joudutaan turvautumaan numeerisiin menetelmiin esim. elementtimenetelmään. Ominaistajuuksien määrittämistä varten on kehitetty standardiohjelmia, joilla ne voidaan määrittää vaivatta, kunhan vain rakenne on siten tuettu, että sen kaikki jäykän kappaleen vapausasteet on eliminoitu. Rakenteen jäykkyysmatriisi on tällöin ei-singulaarinen.

Tyypillisiä rakenteita, joita ominaistajuuksia määritettäessä ei voida ajatella mistään pisteestä kiinnitetyiksi, ovat laivat ja lentokoneet. Laiva tosin lepää jatkuvalla kimmoisella alustalla, vedessä. Tälle pätee yksinkertainen ns. Winklerin alustamalli. Lähteessä [1] on kuitenkin todettu, ettei kimmoisella alustalla ole sanottavaa vaikutusta laivan vertikaalisten taivutusvärähtelyjen ominaistajuuksiin ainakaan silloin, kun laivaa approksimoidaan ajatteleamalla se tasapaksuksi palkiksi. Kimmoinen tuenta jätetään yleensä aina ottamatta huomioon laivan värähtelyjä laskettaessa.

Tuennan puuttuminen ei aiheuta hankaluuksia analyttisen ratkaisun yhteydessä. Diskreettejä likimääräismenetelmiä käytettäessä tuennan puuttuminen tai vain osittainen tuenta johtaa singulaariseen jäykkyysmatriisiin, mikä taas estää siirtymien tai ominaistajuuksien ja ominaisvektoreiden ratkaisemisen tavanomaisin menetelmin, joihin sisältyy jäykkyysmatriisin käänteismatriisin muodostaminen.

Staattisessa analyysissä tukematon rakenne voidaan aina tukea sopivalla staattisesti määrätyllä tavalla ja saattaa täten rakenteen jäykkymatriisi ei-singulaariseksi ilman että menettely aiheuttaa virhettä. Ominaistajuuksia määritettäessä tuenta muuttaa ratkaisua, paitsi tietysti siinä tapauksessa, että kutakin värähtelymuotoa laskettaessa osataan arvata etukäteen ko. värähtelymuodon solmujen paikat ja sijoitetaan tukipisteet näihin.

Tukemattoman rakenteen taajuusanalyysin mahdollistamiseksi on kehitetty useitakin menettelytapoja. Periaatteessa ne ovat kahta eri tyyppiä: a) rakenteen diskreetit liikeyhtälöt esitetään käyttäen yleistettyjä koordinaatteja, jotka sisältävät muodonmuutosvapausasteet ja jäykän kappaleen vapausasteet eksplisiittisesti (ks. esim. lähde [2]), b) jäykkymatriisiin lisätään positiivisesti definiitti massamatriisi valitulla vakion  $\alpha$  kerrottuna (ks. esim. lähteet [3] ja [4]). Viimeksimainittu keino on laajimmin käytössä menetelyn suoraviivaisuuden ja helpon ohjelmitavuuden takia. Sen käytöstä on lyhyt maininta Zienkiewiczin elementtimenetelmä-oppikirjassa, [5], missä lähteeseen [3] vedoten annetaan myös ohjeita vakion  $\alpha$  valitsemiseksi.

Tässä artikkelissa esitetään käytetylle keinolle lujuusopillinen tulkinta, joka osoittaa keinon läheiset yhteydet kimmoiseen tuentaan. Vakion  $\alpha$  valintaan liittyviä seikkoja käsitellään hieman tarkemmin, koska osoittautuu, että em. lähteissä esitetyt suositukset ovat hieman puutteellisia. Valintaan liittyviä seikkoja havainnollistetaan kahden esimerkin avulla.

## DISKREETIT LIIKEYHTÄLÖT

Liikeyhtälöiden yksityiskohtaisen johdon osalta viitataan lähteeseen [5], jossa käytettyjä merkintöjä seuraavassa pyritään mahdollisuuksien mukaan noudattamaan. Elementtimenetelmää sovellettaessa kappaleen tuntemattomia siirtymäkomponentteja  $\{u\}$  approksimoidaan käyttäen esitystä

$$\{u\} = [N]\{a\}, \quad (1)$$

missä  $[N]$  on nk. muotofunktio-matriisi ja  $\{a\}$  on solmuparametriverktori.

Esimerkiksi virtuaalisen työn periaatetta soveltaen saadaan (geometrisesti ja fysikaalisesti lineaarinen tapaus, ei vaimennusta) vapaille värähtelyille diskreetit liikeyhtälöt

$$[K]\{a\} + [M]\{\dot{a}\} = \{0\}, \quad (2)$$

missä

$$[M] = \int_V m[N]^T [N] dV \quad (3)$$

ja

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV. \quad (4)$$

Massaa määrittelyalueen yksikköä kohti on merkitty  $m$ :llä. Matriisit  $[B]$  ja

[D] määrittävät yhteyksistä

$$\{\epsilon\} = [B]\{a\} \quad (5)$$

ja

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} , \quad (6)$$

missä  $\{\epsilon\}$  on muodonmuutosvektori ja  $\{\sigma\}$  jännitysvektori.

#### OMINAISTAAJUUDET

Differentiaaliyhtälöryhmän (2) ratkaisua haetaan muodossa

$$\{a(t)\} = \{\bar{a}\} \sin(\omega t + \varphi) . \quad (7)$$

Kun tämä yrite sijoitetaan liikeyhtälöihin (2), saadaan puolittain  $\sin(\omega t + \varphi)$ :llä jakamisen jälkeen  $\{\bar{a}\}$ :n määrittämiseksi lineaarinen yhtälöryhmä

$$([K] - \omega^2[M])\{\bar{a}\} = \{0\} , \quad (8)$$

jolla voi olla triviaaliratkaisusta  $\{\bar{a}\} = \{0\}$  poikkeava ratkaisu vain niillä  $\omega$ :n arvoilla, joilla

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 . \quad (9)$$

Jos matriisit  $[K]$  ja  $[M]$  ovat kokoa  $n \times n$ , saadaan ehdosta (9)  $\omega^2$ :n määrittämiseksi  $n$ :nnen asteen yhtälö, jolla matriisien  $[K]$  ja  $[M]$  ominaisuuksista johdetaan on yleensä  $n$  reaaliuurta. Kun  $n$  on suuri, kuten yleensä käytännön probleemeissa on asianlaita, ei ominaisarvoja  $\omega^2$  kannata etsiä determinantin kehittämistä, vaan yleensä käytetään ominaisarvotehtävälle

$$[A]\{X\} = \lambda\{X\} \quad (10)$$

kehitettyjä iteratiivisia algoritmeja, joilla saadaan ominaisvektorit ja ominaisarvot suurimmasta alkaen. Ominaisarvotehtävä (8) saadaan tähän muotoon kertomalla vasemmalta  $[K]^{-1}$ :llä, jolloin

$$[A] = [K]^{-1}[M] \quad (11)$$

ja  $\lambda = 1/\omega^2$ . Tällöin saadaan ominaistajuudet pienimmästä alkaen. Yleensä rakenteiden suunnittelun yhteydessä ollaan kiinnostuneita juuri alimmista ominaistajuuksista.

Usein joudutaan käyttämään vielä lineaarista muunnosta, jotta ominaisarvotehtävän (10) matriisi  $[A]$  olisi symmetrinen.

Kun rakenne on vapaa tai vain vaillinaisesti tuettu, jäykkyysmatriisi  $[K]$  on singulaarinen, eikä sille ole olemassa käänteismatriisia  $[K]^{-1}$ . Täten ominaisarvotehtävää (8) ei saada suoraan matriisi-iteroinnin vaatimaan muotoon (10).

Lähteessä [3] tämän ongelman ratkaisemiseksi esitetty tapa on yksinkertainen: Yhtälöryhmän (8) vasemman puolen sulkulausekkeeseen lisätään ja siitä vähennetään massamatriisi  $[M]$  valitulla, rakenteen ensimmäisen nollasta eroavan

ominaiskulmataajuuden neliön suuruusluokkaa olevalla vakioilla  $\alpha$  kerrottuna. Tämä toimenpide ei muuta yhtälöryhmää mitenkään ratkaisun oikeellisuuden kannalta. Ratkaistavaksi saadaan ominaisarvot tehtävä

$$([\bar{K}] - (\omega^2 + \alpha)[M])\{\bar{a}\} = \{0\} , \quad (12)$$

missä

$$[\bar{K}] = [K] + \alpha[M] . \quad (13)$$

Kuten lähteessä [3] on todettu,  $[\bar{K}]$  on ei-singulaarinen, joten ominaisarvot tehtävä (12) voidaan saattaa muotoon (10), josta saadaan nyt ominaisarvot  $\lambda = 1/(\omega^2 + \alpha)$  ja näistä edelleen ominaiskulmataajuudet  $\omega$ , koska  $\alpha$  on tunnettu. Menettely on matemaattisesti korrekti, mutta siitä ei suoraan näy mitä se fyysikaalisesti merkitsee.

Vastaavaa menettelyä ovat matemaatikot jo huomattavasti aikaisemmin käyttäneet tyyppiä (10) olevan ominaisarvot tehtävän yhteydessä iteroinnin kiihdyttämiseen ja väli-ominaisarvojen laskemiseen (ks. esim. lähteet [6] ja [7]). Menettelystä käytetään myös nimitystä shifting.

#### TULKINTA

Tarkastellaan rakennetta, johon on lisätty tyyppiä

$$\{f\} = -k\{u\} \quad (14)$$

oleva kimmainen tuenta.  $\{f\}$  on voima määrittelyalueen yksikköä kohti (tilavuusyksikkö kolmidimensioisessa tehtävässä, pinta-alayksikkö kaksidimensioisessa tehtävässä jne.) ja  $\{u\}$  on siirtymävektori. Jos massa määrittelyalueen yksikköä kohti,  $m$ , ei ole vakio, valitaan "jousivakio"  $k$  siten, että suhde

$$k/m = \alpha , \quad (15)$$

missä  $\alpha$  on valittu vakio.

Esimerkiksi virtuaalisen työn periaatetta soveltamalla on helppo havaita, että saadun kimmoisesti tuetun rakenteen jäykkyyismatriisi saa muodon

$$[K]^* = [K] + [S] , \quad (16)$$

mihin rakenteen omasta jäykkyydestä aiheutuva osuus  $[K]$  saadaan lausekkeesta (4) ja  $[S]$  kaavasta

$$[S] = \int_V k[N]^T[N] dV . \quad (17)$$

Kimmoisesta tuennasta johtuen on selvää, että  $[K]^*$  ei ole singulaarinen, joten kimmoisesti tuetun tapauksen ominaisarvot tehtävä

$$[K]^*\{\bar{a}\} = \omega^2[M]\{\bar{a}\} \quad (18)$$

voidaan ratkaista standardimenettelyllä saattamalla se ensiksi muotoon (10).

Tukemattoman tapauksen ratkaisemiseksi  $[S]$  tulisi vähentää  $[K]^*$ :stä. Jos vähentäminen tehdään suoraviivaisesti, päädytään jäykkyyismatriisiin  $[K]$ , joka

oli singulaarinen.

Kaavoja (3) ja (17) vertaamalla sekä ottamalla huomioon oletamus (15) havaitaan, että

$$[S] = \alpha[M] . \quad (19)$$

Näinollen voidaan yhtälössä (18) lisätä oikealle puolelle  $\alpha[M]\{\bar{a}\}$ , millä toimenpiteellä on sama vaikutus kuin  $[S]$ :n vähentämisellä vasemmalta puolelta. Tukemattoman tapauksen ominaistuuksien ratkaisemiseksi saadaan täten kaavat (16), (18) ja (19) huomioonottaen yhtälö

$$([K] + \alpha[M])\{\bar{a}\} = (\omega^2 + \alpha)[M]\{\bar{a}\} , \quad (20)$$

joka on identtinen kaavan (12) kanssa. Yhtälöitä (18) ja (20) puolittain vertaamalla havaitaan lisäksi, että

$$\omega_*^2 = \omega^2 + \alpha . \quad (21)$$

Lähteessä [3] esitetylle keinolle voidaan nyt esittää tulkinta: rakenteen jäykän kappaleen vapausasteet eliminoidaan ja jäykkyysmatriisista tehdään ei-singulaarinen lisäämällä kimmoisen tuenta, jonka "jousivakio"  $k = \alpha m$  ja -koska rakenne on todellisuudessa tukematon - kimmoisen tuennan aiheuttama lisäjäykkyys poistetaan rakenteesta kasvattamalla massamatriisia vastaavalla määrällä.

Sama tulkinta soveltuu tapauksiin, joissa käytetään keskitettyä (engl. lumped) massamatriisia. Tällöin käytetään "jakautuneiden jousien" sijasta jousta, jonka jousivakio  $k_j = \alpha m_j$ , estämään jäykän kappaleen liike  $j$ :nneen vapausasteen suunnassa.

#### VAKION $\alpha$ VALINTA

Vakion  $\alpha$  valintaa rajoittaa kaksi seikkaa: hyvin pieni  $\alpha$ :n arvo (tai  $k$ :n arvo,  $k = \alpha m$ ) jättää systeemin jäykkyysmatriisin lähes-singulaariseksi ja suuri  $\alpha$ :n arvo hidastaa matriisi-iteroinnin konvergointia kohti oikeita ominaisarvoja ja -vektoreita.

Yhtälösystemin (12) (tai (20)) kaksi alinta erisuurta ominaisarvoa ovat  $\alpha$  ja  $\omega_{\ell+1}^2 + \alpha$ . Jäykän kappaleen vapausasteista ( $\ell$  kappaletta) johtuen systeemin (8)  $\ell$  ensimmäistä ominaisarvoa  $\omega_i^2 = 0$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , ja tämän vuoksi systeemin (12)  $\ell$  ensimmäistä ominaisarvoa ovat  $\alpha$ :n suuruisia. Molempien systeemien kaikki ominaismuodot ovat identtisiä ja niistä  $\ell$  ensimmäistä ovat siis jäykän kappaleen liikkeen mukaisia.

Matriisi-iterointia sovellettaessa konvergointinopeus (dimensioton luku välillä  $[0,1]$ ; kun se on 0, iteraatio konvergoi nopeasti, kun se on 1, iteraatio ei konvergoi lainkaan) on sama kuin kahden alimman erisuuren ominaisarvon suhteen itseisarvo, [8], eli käsittelyn alaisessa probleemassa konvergointinopeus on  $\alpha/(\omega_{\ell+1}^2 + \alpha)$ . Konvergenssi on siis sitä parempi mitä pienempi  $\alpha$  on.

Jäykkyysmatriisin  $[K]^*$  lähes-singulaarisuus riippuu matriisin  $[S] = \alpha[M]$  ja matriisin  $[K]$  alkioiden välisestä suhteesta. Kun suhde on nolla ( $\alpha = 0$ ),  $[K]^*$  on singulaarinen ja kun se on hyvin pieni  $[K]^*$  on lähes-singulaarinen. Se suhteen arvo, jolla ratkaisu alkaa käyttäytyä huonosti lähes-singulaarisuuden takia, riippuu tietysti laskennassa käytettävien merkitsevien numeroiden määrästä.

Jotta  $\alpha$ :n arvo voitaisiin valita rationaalisesti, tulee puheena oleva suhde lausua  $\alpha$ :n ja  $\omega_{\ell+1}^2$ :n avulla, koska nämä määräävät myös konvergointinopeuden.

Palkin taiputuksessa suhde voidaan esittää muodossa

$$\frac{S_{ii}}{K_{ii}} = \frac{156 \alpha n h}{420} \frac{2EI}{h^3}, \quad (22)$$

missä E on kimmomoduli, I on jäyhyysmomentti ja h on elementin pituus. Molemmista päistään vapaan palkin alin nollasta poikkeava ominaiskulmataajuus on

$$\omega_{\ell+1} = 22.37 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, \quad (23)$$

missä L on palkin pituus. Kun palkki oletetaan jaetuksi n:ään elementtiin, jolloin  $L = nh$ ,

$$\frac{S_{ii}}{K_{ii}} = 93.0 \frac{1}{n} \frac{\alpha}{\omega_{\ell+1}^2}, \quad (24)$$

josta  $\alpha$ :n suuruus voidaan päätellä, kun tiedetään kuinka suuri suhteen  $S_{ii}/K_{ii}$  tulee olla, jotta  $[K]^*$ :n lähes-singulaarisuus ei johda ratkaisun huonosti käyttäytymiseen.

Vastaavalla tavalla saadaan laatan värähtelytapaukselle

$$\frac{S_{ii}}{K_{ii}} = c \frac{1}{n} \frac{\alpha}{\omega_{\ell+1}^2}, \quad (25)$$

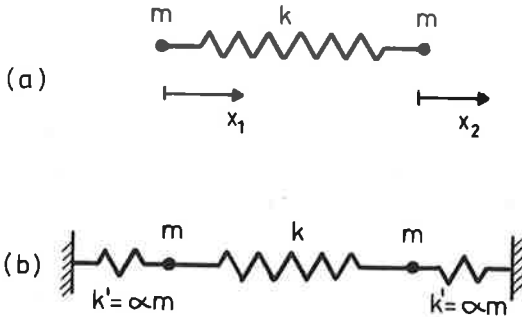
missä kerroin c riippuu laatan sivusuhteesta ja n on elementtien lukumäärä yhdellä sivulla.

Tekijän kokemusten perusteella suhteelle  $S_{ii}/K_{ii}$  voi suositella alarajaksi  $10^{-5}$ :ttä käytettäessä VTKK:n Univac 1108-tietokonetta ja yksinkertaista sananpituutta. Huomionarvoista kaavoissa (24) ja (25) on tekijä  $n^4$  nimittäjässä. Elementtijakoa tihennettäessä on suhdetta  $\alpha/\omega_{\ell+1}^2$  kasvatettava suhteessa n:n neljänteen potenssiin, jotta suhde  $S_{ii}/K_{ii}$  säilyisi vakiona. Voidaan siis todeta, että lähteen [3] suositus (, johon myös lähteessä [5] viitataan) on vakavasti puutteellinen, koska siinä ei lainkaan oteta huomioon lähes-singulaarisuuden riippuvuutta n:stä.

Kolmidimensioisissa tapauksissa – ja muissakin tapauksissa, joissa muodonmuutokset ovat verrannollisia siirtymien ensimmäisiin derivaattoihin – tarvitsee suhdetta  $\alpha/\omega_{\ell+1}^2$  muuttaa vain suhteessa n:n toiseen potenssiin  $S_{ii}/K_{ii}$ :n pitämiseksi vakiona.

## ESIMERKKEJÄ

Tarkastellaan  $\alpha$ :n valintaan liittyvien näkökohtien havainnollistamiseksi ensiksi pelkistettyä tapausta, johon liittyvät laskelmat voidaan saattaa loppuun käsin. Tarkoituksena on määrittää kuvan 1a mukaisen "rakenteen" ominaiskulmataajuudet ja ominaismuodot matriisi-iterointia käyttäen.



Kuva 1 Yksinkertainen esimerkki.

Rakenteen jäykkymatriisiksi saadaan

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (26)$$

ja massamatriisi on

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}. \quad (27)$$

$[K]$  on selvästi singulaarinen. Tämä voidaan päätellä rakenteen tukemattomuudesta tai laskemalla kaavan (26) oikealla puolella olevan matriisin determinantti, jonka arvoksi saadaan nolla.

Rakenteen ominaiskulmataajuudet voitaisiin nyt ratkaista helposti ehdosta (9), jolloin tuloksena olisi

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (28)$$

Matriisi-iteroinnilla tapahtuvaa ratkaisua varten muodostetaan kaavan (12) (tai (20)) systeemissä tarvittava modifioitu jäykkymatriisi kaavalla (13), jolloin saadaan

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} k + \alpha m & -k \\ -k & k + \alpha m \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Tämä on esitetyn tulokinnan perusteella kuvan 1b esittämän korvikerakenteen jäykkymatriisi. Kirjoitetaan tämä vielä muotoon

$$[\bar{K}] = k \begin{bmatrix} 1 + \alpha \frac{m}{k} & -1 \\ -1 & 1 + \alpha \frac{m}{k} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

josta havaitaan, että  $\alpha/\omega_2^2$ :n tulee olla vähintään suuruusluokkaa  $10^{-t+1}$ , jotta  $[\bar{K}]$  olisi ei-singulaarinen, kun laskennassa pidetään mukana  $t$  merkitsevää

numeroa. Ts.  $\alpha$ :n tulee olla niin suuri, että se ei heti alussa pyöristy "pois". Esimerkiksi, kun  $\alpha = 0.001$  k/m ja laskelmissa käytetään neljää merkitsevää numeroa, saadaan

$$[\bar{K}] = k \begin{bmatrix} 1.001 & -1.000 \\ -1.000 & 1.001 \end{bmatrix} \quad (31)$$

ja tästä Gaussin eliminaatiota käyttäen

$$[\bar{K}]^{-1} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 500.5 & 500.0 \\ 500.0 & 500.5 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Käänteismatriisi on oikein kaikkien laskelmissa mukana pidettyjen neljän merkitsevän numeron osalta, kuten voidaan helposti havaita sijoittamalla  $\alpha$ :n arvo yleisessä muodossa esitettyyn  $[\bar{K}]$ :n käänteismatriisiin

$$[\bar{K}]^{-1} = \frac{1}{k(2\alpha\frac{m}{k} + \alpha\frac{2m^2}{k^2})} \begin{bmatrix} 1 + \alpha\frac{m}{k} & 1 \\ 1 & 1 + \alpha\frac{m}{k} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Matriisi-iterointia käyttäen tapahtuva ratkaisu edellyttää, että ominaisarvoprobleema saatetaan muotoon (10). Kertomalla kaavan (33)  $[\bar{K}]^{-1}$ :llä kaavassa (27) esitetty  $[M]$  saadaan iterointia varten

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2 + \alpha}{(2\alpha + \alpha\frac{2m}{k})} \begin{bmatrix} 1 + \alpha\frac{m}{k} & 1 \\ 1 & 1 + \alpha\frac{m}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Käytetään edelleen laskelmissa mukana neljää merkitsevää numeroa ja otetaan ensimmäiseksi tapaukseksi  $\alpha = 1.000$  k/m. Valitaan aloitusvektoriksi

$$\{X\}^{(0)} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.500 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Sijoitetaan tämä kaavan (34) oikealle puolelle, jolloin saadaan

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} = \frac{\omega^2 + \alpha}{3\alpha} \begin{Bmatrix} 2.500 \\ 2.000 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

josta saadaan normalisoimalla oikean puolen pystyvektorin ensimmäinen alkio ykköseksi

$$\{X\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.800 \end{Bmatrix}, \quad \omega_1^{(1)} = 0.4472\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (37)$$

Iteraation kulku tästä eteenpäin on esitetty taulukossa I.



Taulukko I Iteraation kulku,  $\alpha = 1.000 \text{ k/m}$

	Iteraatiokierroksia						Tarkka ratkaisu
	1	2	3	4	5	6	
$x_1$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$x_2$	0.8000	0.9286	0.9756	0.9918	0.9973	0.9991	1.000
$\omega_1/\sqrt{\frac{k}{m}}$	0.4472	0.2673	0.1561	0.0906	0.0524	0.0300	0.0000

Valitaan toiseksi tapaukseksi  $\alpha = 0.1000 \text{ k/m}$  ja aloitusvektori kaavasta (35). Menetellen vastaavalla tavalla kuin edellä saadaan nyt taulukossa II esitetyt tulokset. Käytettäessä arvoa  $\alpha = 0.0100 \text{ k/m}$  päädytään taulukon III tuloksiin.

Taulukko II Iteraation kulku,  $\alpha = 0.1000 \text{ k/m}$

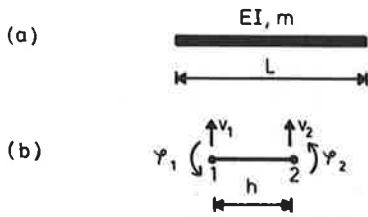
	Iteraatiokierroksia				Tarkka ratkaisu
	1	2	3	4	
$x_1$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$x_2$	0.9688	0.9984	0.9999	1.000	1.000
$\omega_1/\sqrt{\frac{k}{m}}$	0.5590	0.1224	0.0309	0.0000	0.0000

Taulukko III Iteraation kulku,  $\alpha = 0.0100 \text{ k/m}$

	Iteraatiokierroksia			Tarkka ratkaisu
	1	2	3	
$x_1$	1.000	1.000	1.000	1.000
$x_2$	0.9967	1.000	1.000	1.000
$\omega_1/\sqrt{\frac{k}{m}}$	0.5754	0.0387	0.0000	0.0000

Muita aloitusvektoreita käyttäen voidaan todeta ominaisarvoiteroinnin tunnettu ominaisuus: lopputulos ei ole aloitusvektorista riippuvainen. Muita  $\alpha$ :n arvoja kokeilemalla havaitaan, että mitä suurempi  $\alpha$  on sitä enemmän iteraatiokierroksia tarvitaan. Esimerkki toimii siis täysin edellisessä kohdassa esitetyn teorian mukaisesti.

Tarkastellaan toisena esimerkkinä molemmista päistään vapaan palkin (ks. kuva 2a) taivutusvärähtelyjä. Otaksutaan, että teknillinen taivutusoppi pätee. Tyypillinen elementti on esitetty kuvassa 2b. Elementin jäykkymatriisi saadaan esimerkiksi lähteestä [9]



Kuva 2 Palkki ja palkkielementti.

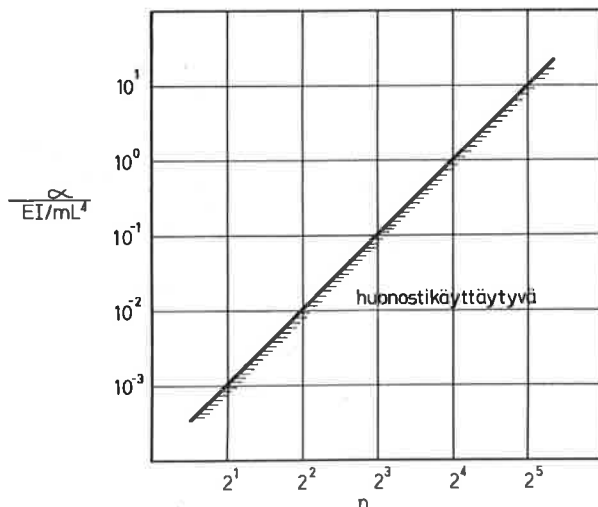
$$[K]^e = \frac{2EI}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & 3h & -6 & 3h \\ 3h & 2h^2 & -3h & h^2 \\ -6 & -3h & 6 & -3h \\ 3h & h^2 & -3h & 2h^2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

ja elementin massamatriisi on

$$[M]^e = \frac{mh}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Kokoamalla koko systeemin jäykkyysoatriisi ja massamatriisi tavanomaiseen tapaan päädytään ominaiskulmataajuuksien määrittämiseksi yhtälöryhmään (8). Vapaiden päiden johdosta ei oleellisia reunaehtoja ole lainkaan, joten  $[K]$  on singulaarinen. Ratkaisussa täytyy siis käyttää kaavoissa (12) ja (13) esitettyä menettelyä.

Kuvassa 3 on esitetty Univac 1108:lla (yksinkertainen tarkkuus) saatu jäykkyysoatriisin lähes-singulaarisuudesta johtuvan huonostikäyttäytymisen riippuvuus elementtijaosta.



Kuva 3 Huonosti käyttäytyvyyden riippuvuus elementtijaosta.

Taulukossa IV on esitetty eri elementtijakoja käyttäen saatuja kolmen alimman ominaiskulmataajuuden arvoja ja verrattu niitä tarkkaan ratkaisuun.

Taulukko IV Molemmista päistään vapaan palkin ominaiskulmataajuuksia

Elementtejä	$\omega \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$			
	I	II	III	
2	22.42	70.18	175.44	...
4	22.40	62.06	121.86	...
8	22.38	61.70	121.16	...
16	22.37	61.67	120.93	...
Tarkka	22.37	61.67	120.91	...

#### LOPPUHUOMAUTUKSIA

Cox'in [3] ensimmäisenä esittämä keino tukemattomien rakenteiden diskreetillä menetelmällä tapahtuvan taajuusanalyysin mahdollistamiseksi voidaan tulkita lujusopillisesti: jäykkymatriisi tehdään ei-singulaariseksi lisäämällä rakenteeseen kimmainen tuenta, jonka aiheuttama jäykkyyksissä eliminoidaan massamatriisin alkioita kasvattamalla. Tulkinnan perusteella voidaan päätellä, että keinoon käyttöön liittyvän vakion  $\alpha$  valinnasta alkuperäisliikenteessä ja siihen viittaavissa myöhemmissä kirjoituksissa (esim. Zienkiewicz, [5]) esitetyt suositukset ovat osaksi virheellisiä.

Esitetty tulkinta antaa mahdollisuuden määrittää yksinkertaisesti esim. kimmoisesti tuetun, tasapaksun laatan ominaiskulmataajuudet ilmassa värähtelevän vastaavan laatan ominaiskulmataajuuksien (nämä saadaan standardiohjelmalla) avulla kaavasta (21), johon sijoitetaan  $\alpha$ :n lauseke (15). Toinen tapa on tietysti laajentaa olemassaolevaa ohjelmaa siten, että siihen lisätään ylimääräinen aliohjelma, joka kasvattaa jäykkymatriisia alustasta tulevalle osuudella. Jälkimmäinen tapa on luonnollisesti työlämpi.

#### KIRJALLISUUTTA

- [1] Pramila, A., Kimmoisella alustalla olevan palkin vapaat värähtelyt. Rakenteiden Mekaniikka Vol 10 No. 1, 1977
- [2] Hurty, W.C., and Rubinstein, M.F., Dynamics of Structures. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
- [3] Cox, H.L., Vibration of Missiles, Part I and II. Aircraft Engineering Vol 33 No. 1 and No. 2, 1961.
- [4] Jennings, A., Natural Vibrations of a Free Structure. Aircraft Engineering Vol 34 No. 3, 1962.

- [5] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method. 3 rd edition. McGraw-Hill, London, 1977.
- [6] Aitken, A.C., The Evaluation of the Latent Roots and Latent Vectors of a Matrix. Proceedings of the Royal Society in Edinburgh Vol 62, s. 269-304, 1937.
- [7] Wielandt, H., Das Iterationsverfahren bei nicht selbstadjungierten linearen Eigenwertaufgaben. Mathematische Zeitschrift Vol 50, s. 93-143, 1944.
- [8] Bathe, K.J., and Wilson, E.L., Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [9] Aalto, J. ja Pramila, A., Yksinkertainen elementtimenetelmäohjelma. Rakenteiden Mekaniikka Vol 8 No. 1, 1975.

*Antti Pramila, tutkimusass., Suomen Akatemia, Valtion teknillistieteellinen toimikunta, Otaniemi.*