

SAKKOFUNKTIOMENETTELY

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 11
No. 3 1978 s. 1...22

Eero-Matti Salonen

YHTEENVETO: Artikkelin tarkoituksena on esitellä sidottujen ääriarvotehtävien yhteydessä nykyään melko paljon käyttöä saanutta sakkofunktiomenettelyä. Menettelyn etuja ja haittoja verrataan aluksi diskreetissä tapauksessa Lagrangen kertojamenettelyyn pitäen sovellutus esimerkkinä yksinkertaista jousisysteemiä. Tämän jälkeen menettelyn käyttöä jatkuvissa probleemeissa selostetaan palkin taivutukseen liittyvän esimerkin avulla. Jatkuvat probleemit diskretoidaan elementtimenetelmän avulla. Onnistuneen diskreetin mallin muodostamisessa huomioonotettavia seikkoja tarkastellaan laatan taivutuksen ja kokoonpuristumattoman aineen tapauksessa.

JOHDANTO

Rakenteiden mekaniikan probleemien ratkaisuisa käytetään usein apuna jotakin ääriarvoperiaatetta kuten esimerkiksi potentiaalienergian minimiä. Joskus probleeman muuttujat eivät ole täysin vapaita, vaan niitä sitovat tietyt rajoitusyhtälöt eli side-ehdot. Tällöin probleemasta tulee ns. sidottu ääriarvotehtävä. Tavanomainen klassillinen ratkaisutapa sidotun ääriarvotehtävän yhteydessä on Lagrangen kertojamenettely. Viime vuosina on kuitenkin ryhdytty soveltamaan yhä enemmän ns. sakkofunktiomenettelyä (engl. penalty function method) vastaavaan tarkoitukseen. Menettelyn periaatteen on esittänyt tietävästi ensimmäisenä Courant v. 1943 merkittävässä artikkelissaan [1] (jota pidetään lisäksi elementtimenetelmän matemaattisena syntykirjoituksena). Sakkofunktiomenettelyllä on omat etunsa ja haittansa, joita pyritään selostamaan seuraavassa. Aluksi käsitellään kuitenkin hieman Lagrangen kertojamenettelyä vertailukohdan saamiseksi.

LAGRANGEN KERTOJAMENETTELY

Tarkastellaan $n:n$ muuttujan x_1, x_2, \dots, x_n funktiota $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, jonka mahdollinen ääriarvokohta on määritettävä $m:n$ ($m < n$) rajoitusyhtälön

$$g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

ollessa voimassa. Rajoitusyhtälöiden lukumäärän tulee olla pienempi kuin muuttujien lukumäärän, jotta yleensä vapaita muuttujia jäisi jäljelle.

Periaatteessa voidaan ajatella m kappaletta muuttujista x ratkaistuksi ra-

joitusyhtälöistä (1) lausuttuina jäljelle jääneissä muuttujissa ja sijoitetuksi f :n lausekkeeseen, jolloin f :stä tulee $n-m$:n riippumattoman muuttujan funktio ja probleema palautuu tavalliseksi vapaaksi ääriarvotehtäväksi.

Käytännössä edellisen toimenpiteen suorittaminen on yleensä hankalaa ja sen sijaan käytetään suoraviivaisempaa Lagrangen kertojamenettelyä, jossa tarkastelun kohteeksi otetaan tunnetusti muunneltu funktio

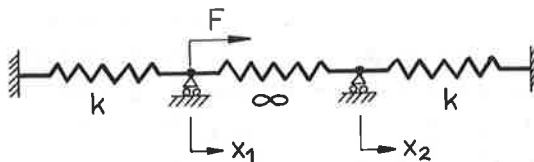
$$f_L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f + \sum_{k=1}^m \lambda_k g_k \quad (2)$$

jossa λ :t ovat tehtävässä lisätuntemattomia, ns. Lagrangen kertojia. Suureita x ja λ pidetään täysin vapaina ja mahdollinen ääriarvokohta määräytyy yhtälöryhmän

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_L}{\partial x_i} &\equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0, \quad i=1,2,\dots,n \\ \frac{\partial f_L}{\partial \lambda_k} &\equiv g_k = 0, \quad k=1,2,\dots,m \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ratkaisuna x_i, λ_k . Lagrangen menettelyn suoraviivaisuus kostautuu siis tuntemattomien lukumäärän kasvulla arvoon $n+m$.

Edellisen havainnollistamiseksi tarkastellaan äärimmäisen yksinkertaista esimerkkiä, jossa $n=2$ ja $m=1$. On määrittävä kuvassa 1 esitetyn lineaarisesti kimmoisen jousisysteemin nurkkien 1 ja 2 siirtymät x_1 ja x_2 voiman F johdosta. Keskimmäisen jousen jousivakion arvoa pidetään äärettömän suurena verrattuna kahden muun jousen vakioihin k .



Kuva 1. Yksinkertainen jousisysteemi.

Systeemin potentiaalienergia

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 - F x_1, \quad (4)$$

mutta koska keskimäinen jousi ei veny, muuttujat x_1 ja x_2 eivät ole riippumattomia, vaan niitä sitoo yhtälö

$$g_1(x_1, x_2) \equiv x_2 - x_1 = 0. \quad (5)$$

Tässä on helppoa eliminoida esimerkiksi x_2 side-ehdon (5) avulla, jolloin potentiaalienergian lauseke tulee olemaan

$$f(x_1) = k x_1^2 - F x_1 \quad (6)$$

ja potentiaalienergian minimin periaate antaa yhtälön

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2kx_1 - F = 0, \quad (7)$$

jonka ratkaisu on

$$x_1 = \frac{F}{2k}. \quad (8)$$

Kun käytetään Lagrangen menettelyä, kirjoitetaan muunnettu funktio

$$f_L(x_1, x_2, \lambda_1) = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 - Fx_1 + \lambda_1(x_2 - x_1). \quad (9)$$

Ääriarvovaatimus antaa yhtälöt

$$\begin{Bmatrix} \partial f_L / \partial x_1 \\ \partial f_L / \partial x_2 \\ \partial f_L / \partial \lambda_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -1 \\ 0 & k & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

joiden ratkaisu on

$$x_1 = \frac{F}{2k}, \quad x_2 = \frac{F}{2k}, \quad \lambda_1 = -\frac{F}{2}. \quad (11)$$

Kuvassa 2 on esitetty tasa-arvokäyriä funktioille f ja f_L käyttäen dimensiottomia muuttujia

$$f' = f/(kx_0^2), \quad f'_L = f_L/(kx_0^2), \quad x'_1 = x_1/x_0, \quad x'_2 = x_2/x_0, \quad x_0 = F/k. \quad (12)$$

f' :n tasa-arvokäyrät ovat ympyröitä, joiden keskipiste on pisteessä $A(1,0)$, jossa f' :lla on minimiarvo $-0,5$. Tämä ratkaisu $x_1 = F/k$, $x_2 = 0$ vastaisi systeemiä, josta puuttuu keskimäinen jousi. Rajoitusyhtälö (5) vaatii kuitenkin, että minimi tulee etsiä suoralta B . Minimiksi saavutetaan pisteessä C , jossa $x_1 = x_2 = F/(2k)$. Funktion $f'_L = f_L(x_1, x_2, \lambda_1 = -F/2)/(kx_0^2)$ tasa-arvokäyrät ovat piste C -keskisiä ympyröitä. Funktioiden f' ja f'_L kuvaajat (pyörähdysparaboloideja) leikkaavat toisensa pitkin käyrää, jonka projektio $x'_1 x'_2$ -tasolla on suora B . Tämä johtuu siitä, että pisteissä, joissa side-ehto toteutuu, funktioilla f ja f_L on sama arvo.

Edellinen sovellutus oli esimerkki siitä käytännössä tavallisimmasta tapauksesta, jossa funktio f on kvadraattinen ja sideyhtälöt ovat lineaarisia muuttujien x suhteen. Tällöin voidaan kirjoittaa matriisimerkintöjä käyttäen

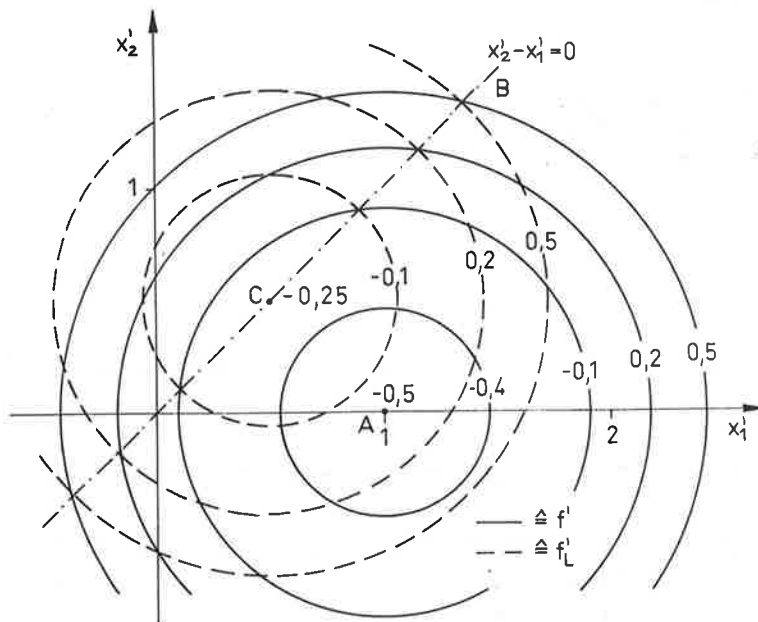
$$f(\underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{K} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{P} \quad (13)$$

ja sideyhtälöt (1) ovat muotoa

$$\underline{G}\underline{x} + \underline{d} = \underline{0}. \quad (14)$$

Edellä \underline{K} , \underline{P} , \underline{G} ja \underline{d} ovat annettuja, \underline{x} :stä riippumattomia matriiseja. Matriisi \underline{K} voidaan ottaa symmetriseksi ilman yleisyyden menetystä. Kerroin 1/2 on epäoleellinen ja liitetty lausekkeeseen (13) mukavuussyistä. Edellisessä esimerkissä

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad \underline{P} = \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{G} = [-1 \ 1], \quad \underline{d} = 0. \quad (15)$$



Kuva 2. Funktioiden f' ja f'_L tasa-arvokäyriä.

Lagrangen kertojien avulla laajennettu funktio

$$f_L(\underline{x}, \underline{\lambda}) = f(\underline{x}) + \underline{\lambda}^T (\underline{G}\underline{x} + \underline{d}), \quad (16)$$

jossa pystyvektorin $\underline{\lambda}$ koko on $m \times 1$. Lopullinen yhtälöryhmä tulee olemaan (vrt. yhtälö (10))

$$\begin{Bmatrix} \partial f_L / \partial \underline{x} \\ \partial f_L / \partial \underline{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{G}^T \\ \underline{G} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x} \\ \underline{\lambda} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{P} \\ \underline{d} \end{Bmatrix} = \underline{0}. \quad (17)$$

Systeemin kerroinmatriisi on symmetrinen. Diagonaalilla esiintyy nolla-alkioita, jonka perusteella matriisi ei voi olla positiivisesti definiitti. Tämä merkitsee, että tavanomainen yhtälöryhmän ratkaisualgoritmi, jossa eliminointi suoritetaan ennalta määrättyssä järjestyksessä ilman mahdollisia pystyriivien vaihtoja, saattaa joskus epäonnistua, vaikka matriisi olisikin ei-singulaarinen.

SAKKOFUNKTIOMENETTELY

Sakkofunktioita käytetään optimointiteoriassa muuntamaan sidottu ääriarvotekävä muodollisesti vapaaksi ääriarvotekäväksi. Tarkastellaan jälleen funktiota $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rajoitusyhtälöiden (1) alaisena. Muodostetaan muunnettu funktio

$$f_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = f + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \alpha_k g_k^2, \quad (18)$$

jossa termiä

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \alpha_k g_k^2 \quad (19)$$

nimitetään sakkofunktioksi (Optimointiteoriassa käytetään monentyyppisiä sakkofunktioita, mutta kaavan (19) mukainen lauseke on tavallisin yhtälöiden muodossa esitettyjen rajoitusten yhteydessä). Kerroin $1/2$ on epäoleellinen. Suureet α ovat valittuja positiivisia (kun kysymyksessä on minimiarvon etsintä) lukuja, joita voidaan nimittää painoiksi tai painotekijöiksi (engl. weight parameter, penalty number). Niiden laadut tulee valita siten, että f_p tulee dimensionaalisesti homogeeniseksi. Muodollinen ääriarvokohta saadaan yhtälöryhmän

$$\frac{\partial f_p}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^m \alpha_k g_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (20)$$

ratkaisuna. Sakkotermien tarkoituksena on pakottaa ratkaisu lähelle tilannetta, jossa rajoitusyhtälöt (1) toteutuvat.

Käytetty terminologia saa havainnollisen merkityksen, kun ajatellaan kohdefunktiota f kustannuksena, jota pyritään minimoimaan siten, että rajoitusyhtälöiden asettamat ehdot tai määräykset ovat samalla voimassa. Muunnettuun kohdefunktioon f_p on otettu mukaan lisäkustannuksina sakot, jotka syntyvät annettujen määräysten rikkomisesta. Kukin sakko on verrannollinen rikkomuksen elivirheen neliöön ja riippuu lisäksi valitusta painosta. Vaikka muuttujia x pidetään nyt täysin vapaina, f_p :n stationaarinen piste hakeutuu lähelle oikeata, tarkkaa pistettä, kun painot ovat suuria, koska pienikin virhe rajoitusyhtälöissä kasvattaa f_p :n arvoa voimakkaasti.

Sakkofunktiomenettely on Lagrangen menettelyyn verrattuna sikäli edullinen, että siinä tehtävän tuntemattomien lukumäärä säilyy arvossa n . Toisaalta kysymyksessä on likimenetelmä. Jos valitut painot ovat liian pieniä, rajoitusyhtälöt toteutuvat huonosti ja tulos on epätarkka. Kun painoja suurennetaan, tulokset paranevat, mutta kun painot tulevat yhä suuremmiksi, yhtälöryhmä (20) tulee yhä huonommin käyttäytyväksi, niin että sen numeerinen ratkaisu on lopuksi kelvoton. Koska tämä tapahtuu, riippuu paljolti paitsi funktioiden f ja g_k ominaisuuksista myös laskelmissa käytetystä merkitsevien numeroiden määrästä eli siis käytännössä tietokoneen ns. sananpituudesta.

Yhtälöryhmän huonosti käyttäytymisen syy selviää yhtälöitä (20) tarkastelemalla. Kun painot ovat suuria, termien $\partial f / \partial x_i$ osuus häviää sakkofunktiotermin osuuksien rinnalla ja jäljelle jää yhtälöitä, joiden vasemmat puolet ovat lineaarikombinaatioita m :stä lausekkeesta g_1, g_2, \dots, g_m . Koska näistä on muodostettu $n > m$ yhtälöä, syntyvät yhtälöt eivät ilmeisesti voi olla riippumattomia.

Tarkastellaan uudestaan kuvan 1 esittämää esimerkkiä. Sakkofunktion käyttö antaa muunnetun funktion

$$f_p(x_1, x_2) = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 - Fx_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 (x_2 - x_1)^2, \quad (21)$$

jossa α_1 :llä tulee olla sama dimensio kuin k :lla. Ääriarvovaatimus antaa yhtälöt

$$\begin{Bmatrix} \partial f_p / \partial x_1 \\ \partial f_p / \partial x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k + \alpha_1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & k + \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (22)$$

joiden ratkaisu on

$$x_1 = \frac{1 + \alpha_1/k}{1 + 2\alpha_1/k} \frac{F}{k}, \quad x_2 = \frac{\alpha_1/k}{1 + 2\alpha_1/k} \frac{F}{k}. \quad (23)$$

Suljetun ratkaisun (23) nähdään lähestyvän tarkkaa ratkaisua (11), kun $\alpha_1/k \rightarrow \infty$. Käytännön tehtävissä yhtälöryhmiä ei voida luonnollisestikaan käsitellä suljetussa muodossa, vaan on käytettävä numeerista ratkaisua. Kun otetaan esimerkiksi tapaus $\alpha_1 = 1000 k$, yhtälöryhmä (22) tulee k :lla jakamisen jälkeen muotoon

$$\begin{bmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1001 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{F}{k}. \quad (24)$$

Vastaava kaavoista (23) saatu ratkaisu

$$x_1 = 0,500249 \dots F/k, \quad x_2 = 0,499750 \dots F/k$$

olisi jo hyvin lähellä oikeaa tulos. Yhtälöryhmän (24) numeerinen ratkaisu (on sovellettu Cramerin sääntöä) antaa viittä merkitsevää numeroa käyttäen

$$x_1 = 0,50050 F/k, \quad x_2 = 0,50000 F/k,$$

neljää merkitsevää numeroa käyttäen vielä

$$x_1 = 0,5005 F/k, \quad x_2 = 0,5000 F/k,$$

mutta kolmella merkitsevällä numerolla kerroinmatriisi tulee jo singulaariseksi ja saadaan

$$x_1 = \infty, \quad x_2 = \infty.$$

Tietokoneet käyttävät tavallisesti 6...14 merkitsevää numeroa, mutta vastaava ilmiö tulee aina eteen, kun painojen arvot kohoavat riittävästi.

Yhtälöryhmän (22) huonosti käyttäytymisen syy näkyy tässä selvänä. Kun $\alpha_1 \gg k$, kerroinmatriisin rivit ovat merkkiä vaille identtiset.

Tarkastellaan vielä funktioita $f_p(x_1, x_2)$ käyttäen dimensiottomia muuttujia (12), joiden avulla

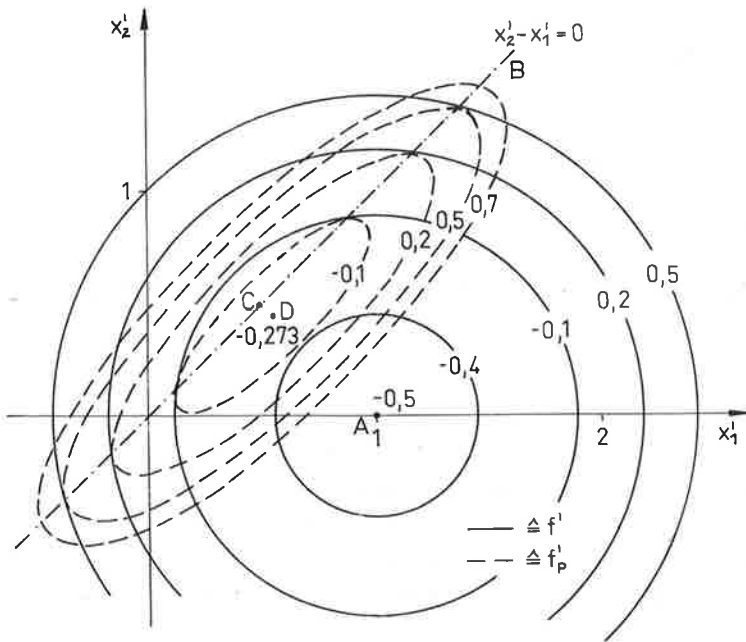
$$f'_p = \frac{1}{2} x_1'^2 + \frac{1}{2} x_2'^2 - x_1' + \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{k} (x_2' - x_1')^2. \quad (25)$$

Sakkotermin $1/2 \cdot \alpha_1/k \cdot (x_2' - x_1')^2$ esittää x_1', x_2', f'_p -koordinaatistossa poikkeileikkaukseltaan parabelin muotoista suoraa "laaksoa", jonka pohja kulkee x_1', x_2' -tasossa pitkin rajoitusehdon määräämää suoraa B (kuva 3). Laakson seinämän jyrkkyys riippuu suhteesta α_1/k . Itse funktion f'_p tasa-arvokäyrät tulevat olemaan samankeskisiä ellipsejä, joiden pitempi akseli on suoran B suuntainen. Ellipsien keskipiste D on sitä lähempänä tarkkaa ääriarvopistettä C ja ellipsit ovat sitä soikeampia, mitä suurempi suhde α_1/k on. Kuvaan on piirretty f'_p :n tasa-arvokäyriä tapauksessa $\alpha_1/k = 5$. Funktioiden f' ja f'_p kuvaajat leikkaavat toisensa pitkin käyrää, jonka projektio x_1', x_2' -tasolla on suora B. Tämä johtuu siitä, että niissä pisteissä, joissa side-ehto toteutuu, funktioilla f ja f_p on sama arvo.

Todettakoon, että painokertoimella α_1 on tässä esimerkissä havainnollinen fysikaalinen merkitys. Kaavasta (21) nähdään sakkotermin käytön merkitsevän itse asiassa, että rakenne analysoidaan tavanomaisesti potentiaalienergian minimin periaatteen avulla ottaen keskimmäisen jousen jousivakion arvoksi α_1 . Tämä tulkinta antaa myös selityksen sille tunnetulle seikalle, että analysoitaessa ristikkorakenteita siirtymämenetelmällä joudutaan numeerisiin vaikeuksiin, jos ristikon jonkin sauvan jäykkyys on suuri muihin verrattuna.

Jos taas f on kvadraattinen ja sideyhtälöt ovat lineaarisia kaavojen (13) ja (14) mukaisesti, saadaan matriisimerkinnöin

$$f_p(x) = f(x) + \frac{1}{2} (Gx + d)^T Q (Gx + d), \quad (26)$$



Kuva 3. Funktioiden f' ja f_p' tasa-arvokäyriä.

jossa $\underline{\alpha}^{m \times m}$ on diagonaalimatriisi, jonka alkiot ovat painoja α_k . Lopullinen yhtälöryhmä tulee olemaan (vrt. yhtälö (22))

$$\frac{\partial f_p}{\partial \underline{x}} = \underline{K}_p \underline{x} + \underline{p}_p = \underline{0}, \quad (27)$$

jossa

$$\underline{K}_p^{n \times n} = \underline{K} + \underline{G}^T \underline{\alpha} \underline{G}, \quad (28)$$

$$\underline{p}_p^{n \times 1} = \underline{p} + \underline{G}^T \underline{\alpha} \underline{d}. \quad (29)$$

Kerroinmatriisi \underline{K}_p on symmetrinen ja positiivisesti definiitti ainakin silloin kun \underline{K} on positiivisesti definiitti. Lisäksi \underline{K}_p tulee usein positiivisesti definiitiksi, vaikka \underline{K} olisi vain positiivisesti semidefiniitti.

Sakkofunktiomenettelyllä saadaan siis hieman virheellisiä tuloksia, kun painot on valittu hyvin ja muutoin enemmän tai vähemmän kelvottomia tuloksia. Painojen sopivien arvojen valinta on menettelyn vaikeutena. Yleensä täytyy turvautua numeerisiin kokeiluihin, joiden perusteella saadaan tietyt arvot, joita voidaan sitten soveltaa samantyyppisiin probleemoihin. On myös kehitetty iteratiivisia menetelmiä, joiden avulla virheet voidaan poistaa; esim. lähteet [2]...[4]. Samalla painojen arvoja voidaan alentaa yhtälöryhmän huonosti käyttäytymisen estämiseksi.

SAKKOFUNKTIOMENETTELY KONTINUUMIMEKANIKASSA

Tässä tarkastellaan vain kimmoisten kappaleiden käsittelyä potentiaalienergian minimin periaatteen avulla soveltaen elementtimenetelmää tehtävän diskretoinnissa. Sakkofunktiomenettely onkin saanut viime aikoina paljon käyttöä juuri elementtimenetelmän yhteydessä. Menettelyn käyttömahdollisuuksia on selostettu perusteellisesti lähteessä [5], jossa on lisäksi laaja alaan liittyvä kirjallisuusluettelo.

Lähdetään jälleen liikkeelle mahdollisimman yksinkertaisesta tapauksesta. Palkin potentiaalienergian lauseke on

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 EI \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^1 qv dx + rt., \quad (30)$$

jossa $v(x)$ on palkin taipuma, EI on palkin taivutusjäykkyys ja q on palkin kuormitus pituusyksikköä kohti. Merkinnällä $rt.$ tarkoitetaan palkin päistä $x = 0$ ja $x = 1$ tulevia reunatermejä, jotka riippuvat asetetuista reunaehdoista. Reunatermien yksityiskohtaisia lausekkeita ei ole esitetty, koska niillä ei ole tarkastelun kannalta tässä merkitystä.

Todellinen ratkaisu v antaa funktionaalille (30) minimiarvon luvallisten funktioiden joukossa. Luvallisten funktioiden tulee toteuttaa mahdolliset palkin päissä asetetut kinemaattiset ehdot. Lisäksi luvallisten funktioiden tulee olla riittävän sileitä, niin että integraalit voidaan laskea. Yleisesti jos integraaleissa esiintyy funktion n :s derivaatta, funktion ja sen derivaattojen kertalukuun $n-1$ asti tulee olla jatkuvia. Elementtimenetelmän eräänä heikkoutena on, että sillä pystytään yleensä muodostamaan helposti vain approksimaatioita, joissa pelkästään funktio (nollas derivaatta) on jatkuva. Kahdessa dimensiossa pystytään vielä monimutkaisin keinoin saamaan aikaan tilanne, jossa funktio ja sen ensimmäiset derivaatat ovat jatkuvia. Tätä approksimaatiota on tarvittu tavanomaisessa ohuen laatan taivutuksessa ja käsittelyn hankaluus on yleisessä tiedossa. Yhdessä dimensiossa jatkuvuus mielivaltaiseen derivaattaan asti on helposti saavutettavissa, mutta lauseke (30) palvelee silti tässä hyvin jatkuvuusvaatimusten alentamiseen käytetyn periaatteen yksinkertaisena havainnollistajana.

Otetaan käyttöön uusi funktio $\theta = dv/dx$, jonka avulla lauseke (30) saa muodon

$$\Pi(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^1 EI \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx - \int_0^1 qv dx + rt. \quad (31)$$

Funktiot v ja θ eivät ole riippumattomia, vaan niiden välillä on rajoitusyhtälö

$$\frac{dv}{dx} - \theta = 0. \quad (32)$$

Funktioiden v ja θ ensimmäisten derivaattojen ei tarvitse enää olla jatkuvia; lausekkeen (30) yhteydessä v :n ensimmäisen derivaatanhan tulee olla jatkuva. Yhtälöt (31) ja (32) esittävät nyt sidottua, jatkuvaa (vastakohtana diskreetille) ääriarvottehtävää, kun taas alkuperäiseen lausekkeeseen (30) liittyvä ääriarvottehtävä oli vapaa.

Myös jatkuvissa probleemoissa voidaan käyttää Lagrangen kertojamenettelyä tai sakkofunktiomenettelyä analogisesti diskreettien probleemien yhteydessä esitettyjen tapojen mukaisesti.

Lagrangen menettelyssä muodostetaan muunnettu funktionaali

$$\Pi_L(v, \theta, \lambda) = \frac{1}{2} \int_0^1 EI \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx - \int_0^1 qv dx + \int_0^1 \lambda \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) dx + rt., \quad (33)$$

jossa $\lambda(x)$ on uusi tuntematon funktio, ns. Lagrangen kertoja(funktio).

Sakkofunktiomenettelyssä muodostetaan muunnettu funktionaali

$$\Pi_P(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^1 EI \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx - \int_0^1 qv dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right)^2 dx + rt., \quad (34)$$

jossa $\alpha(x)$ on annettu funktio (tavallisesti vakio).

Funktionaaleille (33) ja (34) asetetuista ääriarvovaatimuksista seuraaviksi ns. Eulerin yhtälöiksi saadaan johdettua vastaavasti yhtälöt

$$\frac{d\lambda}{dx} + q = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\theta}{dx} \right) + \lambda = 0, \quad (35)$$

$$\frac{dv}{dx} - \theta = 0$$

ja

$$\frac{d}{dx} \left\{ \alpha \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) \right\} + q = 0, \quad (36)$$

$$\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\theta}{dx} \right) + \alpha \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) = 0.$$

Eliminoimalla yhtälöstä (35) derivointien avulla λ ja θ saadaan palkin taipuman differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - q = 0, \quad (37)$$

kuten pitääkin. Kun taas yhtälöissä (36) $\alpha \rightarrow \infty$, termin $\alpha(dv/dx - \theta)$ tulee säilyä äärellisenä, josta seuraa viimeinen yhtälöistä (35). Kun θ ja $\alpha(dv/dx - \theta)$ eliminoidaan, saadaan jälleen yhtälö (37).

Palkin taivutusmomentille $M(x)$ ja leikkausvoimalle $Q(x)$ ovat voimassa yhtälöt

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0, \quad \frac{dQ}{dx} + q = 0. \quad (38)$$

Vertaamalla yhtälöitä (35), (36) ja (38) saadaan tulkinnot

$$M = -EI \frac{d\theta}{dx}, \quad (39)$$

$$Q = \lambda = \alpha \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right). \quad (40)$$

Numeerista ratkaisua etsittäessä funktioita v , θ ja λ approksimoidaan esityksillä

$$\begin{aligned} v &= \tilde{N}^v(x) \tilde{a}^v, \\ \theta &= \tilde{N}^\theta(x) \tilde{a}^\theta \\ \lambda &= \tilde{N}^\lambda(x) \tilde{a}^\lambda, \end{aligned} \quad (41)$$

joissa $N(x)$:t ovat annetuista muotofunktioista muodostettuja matriiseja ja a :t ovat tuntemattomista paremètreista muodostettuja pystyvektoreita. Elementtimenetelmässä parametrit ovat (ensimmäisen kertaluvun esityksessä) funktioiden arvoja solmupisteiden kohdilla. Esitysten (41) sijoitus lausekkeisiin (33) ja (34) muuttaa funktionaalit $\Pi_L(v, \theta, \lambda)$ ja $\Pi_P(v, \theta)$ integrointien jälkeen tavalliseksi funktioiksi $\Pi_L(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ ja $\Pi_P(\tilde{x})$, joissa on merkitty

$$\tilde{x} = \begin{Bmatrix} \tilde{a}^v \\ \tilde{a}^\theta \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\lambda} = \tilde{a}^\lambda. \quad (42)$$

Tehtävät palautuvat siis diskretoinnin kautta edellisissä luvuissa käsiteltyyn funktioiden sidottujen ääriarvojen määrittämiseen ja lopulliset yhtälöt tulevat olemaan vastaavasti

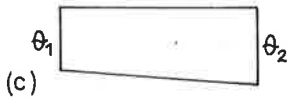
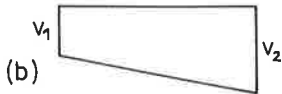
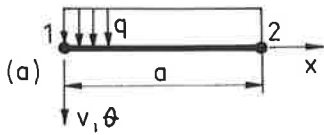
$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi_L}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial \Pi_L}{\partial \tilde{\lambda}} \end{Bmatrix} = \tilde{0}, \quad (43)$$

$$\frac{\partial \Pi_P}{\partial \tilde{x}} = \tilde{0}. \quad (44)$$

Yhtälöryhmät ovat tässä tapauksessa jälleen lineaarisia johtuen funktionaalien (33) ja (34) kvadraattisuudesta ja rajoitusyhtälön (32) lineaarisuudesta.

Sakkofunktiomenettelyssä ei tarvita λ :aa eikä siis sen diskretointia, joten tuntemattomien parametrien määrä on siinä vähäisempi.

Tässä tarkastellaan yksityiskohtaisemmin vain sakkofunktiomenettelyn soveltamista. Käytetään diskretointiin kaksisolmuisia elementtejä (kuva 4), joiden alueella v :tä ja θ :aa approksimoidaan lineaarisesti:



Kuva 4. (a) Kaksisolmuinen elementti (b) v :n approksimaatio (c) θ :n approksimaatio.

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2, \quad (45)$$

$$\theta = N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2,$$

joissa

$$N_1 = (1 - \frac{x}{a}), \quad N_2 = \frac{x}{a}. \quad (46)$$

Elementin osuus lausekkeesta (34) on kaavat (45) huomioonottaen

$$\Pi_P^e(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) = \frac{1}{2} \int_0^a EI \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx - \int_0^a q v dx + \frac{1}{2} \int_0^a \alpha \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right)^2 dx \quad (47)$$

ja elementin antamat termit lopulliseen yhtälöryhmään (44) ovat matriisimuotoon (EI , q ja α on otaksuttu vakioiksi) kerättyinä

$$\begin{Bmatrix} \partial \Pi_P^e / \partial v_1 \\ \partial \Pi_P^e / \partial \theta_1 \\ \partial \Pi_P^e / \partial v_2 \\ \partial \Pi_P^e / \partial \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EI \\ a \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1/a, & 1/2, & -1/a, & 1/2 \\ 1/2, & a/3, & -1/2, & a/6 \\ -1/a, & -1/2, & 1/a, & -1/2 \\ 1/2, & a/6, & -1/2, & a/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} - qa \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (48)$$

Kun elementtien avulla muodostetaan tiettyä elementtiverkkoa vastaava yhtälöryhmä ja ratkaistaan solmuparametrien arvot, saadaan sitä huonompia, nollaa lähestyviä arvoja mitä suurempi α :n arvo on ja sakkofunktiomenettely näyttää siis aluksi täysin käyttökelvottomalta tässä yhteydessä. Ko. ilmiöstä käytetään kirjallisuudessa nimitystä lukkiutuminen (engl. locking).

Lukkiutumiselle saadaan selitys seuraavasti. Termin $dv/dx - \theta$ lauseke on elementin alueella

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} - \theta &= -\frac{1}{a} v_1 + \frac{1}{a} v_2 - (1 - \frac{x}{a}) \theta_1 - \frac{x}{a} \theta_2 \\ &= -\frac{1}{a} v_1 + \frac{1}{a} v_2 - \theta_1 + x \left(\frac{1}{a} \theta_1 - \frac{1}{a} \theta_2 \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Jotta tämä $x:n$ suhteen ensimmäistä astetta oleva lauseke olisi identtisesti nolla, on oltava

$$-\frac{1}{a} v_1 + \frac{1}{a} v_2 - \theta_1 = 0,$$

$$\frac{1}{a} \theta_1 - \frac{1}{a} \theta_2 = 0 \quad (50)$$

eli

$$v_2 = v_1 + a\theta_1,$$

$$\theta_2 = \theta_1. \quad (51)$$

Kun $\alpha:n$ arvo kasvaa, ratkaisu pyrkii toteuttamaan ehdot (51) yhä tarkemmin kussakin elementissä. Ehdot (51) esittävät kahta rajoitusyhtälöä yhtä elementtiä kohti. Esimerkiksi kuvan 5 esittämän ulokepalkin tapauksessa kine-



Kuva 5. Ulokepalkki.

maattiset reunaehdot vaativat, että $v_1 = \theta_1 = 0$ ja rajoitusyhtälöistä (51) taas seuraa, että $v_2 = \theta_2 = 0$ jne. joten kaikki palkin siirtymät häviävät. Toisin sanoen diskreetissä mallissa on liikaa rajoitusyhtälöitä vapausasteiden lukumäärään verrattuna.

Hämmästyttävän yksinkertainen ja alunperin tavallaan vahingossa keksitty keino mallin parantamiseksi perustuu numeerisen integroinnin käyttöön. Kun valitaan vain yksi integrointipiste elementin keskipisteeseen, integraalien laskemiseksi saadaan kaava (porraskaava)

$$\int_0^a f(x) dx \approx af(a/2). \quad (52)$$

Ensimmäinen ja toinen integraaleista lausekkeessa (47) integroituvat vielä tarkasti kaavalla (52), koska integrandi on vastaavasti vakio ja lineaarinen $x:n$ suhteen. Sakkofunktiotermin integrandi on toista astetta $x:n$ suhteen ja saadaan approksimaatio

$$\frac{1}{2} \int_0^a \alpha \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right)^2 dx \approx \frac{1}{2} \alpha a \left(-\frac{1}{a} v_1 + \frac{1}{a} v_2 - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 \right)^2, \quad (53)$$

sillä

$$\left. \frac{dv}{dx} - \theta \right|_{x=a/2} = -\frac{1}{a} v_1 + \frac{1}{a} v_2 - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2. \quad (54)$$

Elementtiosuudet tulevat olemaan

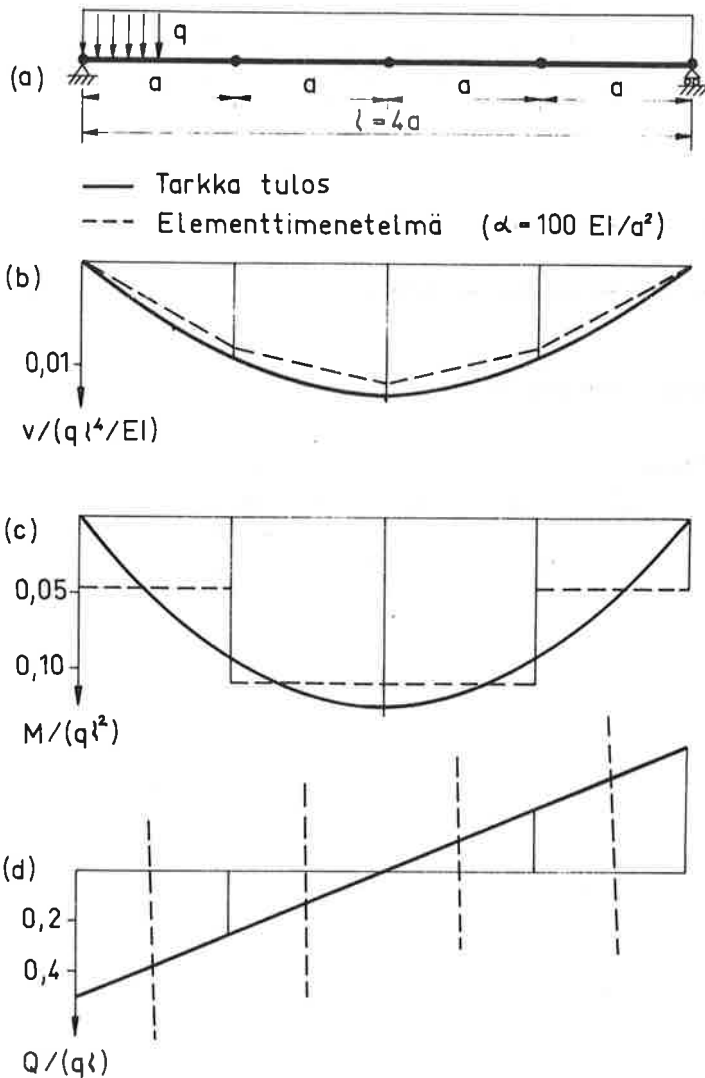
$$\begin{Bmatrix} \partial \Pi_P^e / \partial v_1 \\ \partial \Pi_P^e / \partial \theta_1 \\ \partial \Pi_P^e / \partial v_2 \\ \partial \Pi_P^e / \partial \theta_2 \end{Bmatrix} = \left[\frac{EI}{a} \right] \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1/a, & 1/2, & -1/a, & 1/2 \\ 1/2, & a/4, & -1/2, & a/4 \\ -1/a, & -1/2, & 1/a, & -1/2 \\ 1/2, & a/4, & -1/2, & a/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} - qa \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (55)$$

jossa α :lla kerrotun matriisin näennäisesti pieni ero vastaavaan kaavan (48) matriisiin nähden on kuitenkin aivan ratkaiseva, sillä diskreetti malli toimii nyt moitteettomasti. Ratkaisu pyrkii tekemään lausekkeen (54) nollassi kussakin elementissä α :n kasvaessa. Täten saadaan vain yksi rajoitusyhtälö elementtiä kohti ja useaa elementtiä käytettäessä mallin vapausasteiden lukumäärän VL (=2x solmupisteiden lukumäärä) suhde rajoitusyhtälöiden lukumäärään RL (=1x elementtien lukumäärä + palkin päissä asetettujen kinemaattisten ehtojen lukumäärä) on likimain VL/RL = 2, kun taas tarkkaa integrointia käytettäessä saadaan likimain VL/RL = 1.

Kuvan 6(a)esittämälle vapaasti tuetulle, tasajäykälle, tasaisen kuorman q kuormittamalle palkille saadut taipuman, taivutusmomentin ja leikkausvoiman jakautumat näkyvät kuvissa (b), (c) ja (d). Kuvan tulokset on saatu käyttäen painokertoimen arvoa $\alpha = 100 EI/a^2$. Laskelmat on suoritettu tietokoneella joka käyttää 6...7 merkitsevää numeroa. Tulokset ovat verrattain hyviä ottaen huomioon, että mallissa on vain neljä elementtiä. Tulosten hyvyys on osittain myös seurausta tehtävän staattisesti määrätystä luonteesta, jonka johdosta taivutusmomentin arvot sekä leikkausvoiman arvot integrointipisteiden kohdilla eivät riipu ollenkaan (ilman pyöristysvirheitä) α :n arvosta. Lisäksi leikkausvoiman arvot integroimispisteiden kohdilla sattuvat yhtymään tarkkaan arvoon. Sen sijaan leikkausvoiman arvot muualla, laskettuina siis jälkimmäisestä kaavasta (40) antavat aivan väärää kertaluokkaa olevia tuloksia; leikkausvoimat muuttuvat kunkin elementin alueella niin voimakkaasti, että niiden kuvaajat näyttävät olevan kuvassa (d) miltei pystysuoria viivoja. Tämä virheellisyys kasvaa α :n mukana ja on ymmärrettävissä seuraavasti. Leikkausvoimalle saadaan yleensä "hyvä" arvo niissä pisteissä (integrointipisteissä), joissa termin

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \theta \quad (56)$$

tulee toteuttaa rajoitusehto eli olla nolla. Suure γ ei tule kuitenkaan täsmälleen nollassi integrointipisteissä vaan saa hyvin pienen arvon γ_i , joka kerrottuna (hyvin suurella) luvulla α antaa hyvän leikkausvoiman arvon $\alpha\gamma_i$. Muissa pisteissä rajoitusyhtälö toteutuu huonommin ja vaikka γ voi olla yleisesti ottaen pieni, se voi silti olla helposti luokkaa $10 \dots 10000 \cdot \gamma_i$ ja antaa α :lla kerrottuna leikkausvoimalle väärää kertaluokkaa olevia tuloksia.

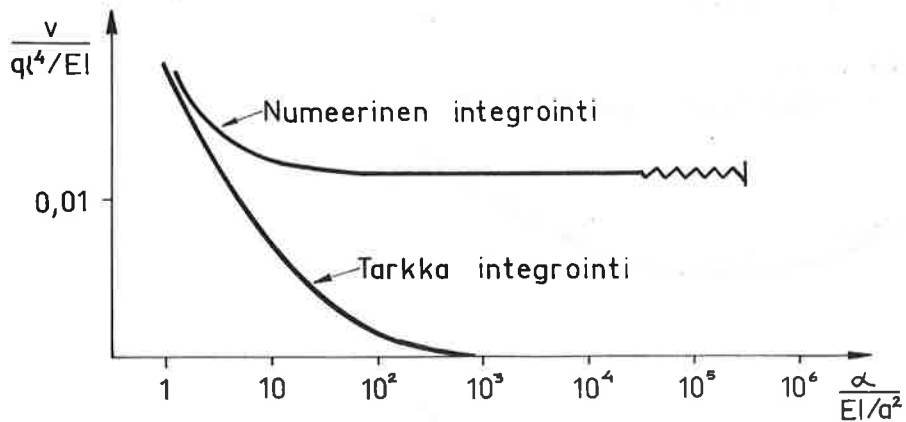


Kuva 6. (a) Vapaasti tuetun palkin elementtijako (b) taipuma (c) taivutusmomentti (d) leikkausvoima.

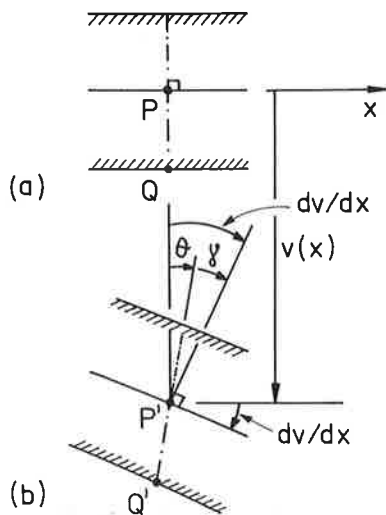
Kuvassa 7 palkin keskipisteen siirtymä on esitetty painokertoimen funktiona laskettuna sekä tarkkaa integrointia että yhtä integrointipistettä per elementti käyttäen. Tarkkaa integrointia sovellettaessa tapahtuu selvä lukkiutuminen. Yhden integrointipisteen tapaa käytettäessä tulokset ovat käytännöllisesti katsoen riippumattomia painokertoimen arvosta, kun se on välillä $\alpha = 10^2 \dots 3 \cdot 10^4 \cdot EI/a^2$. Kun $\alpha = 3 \cdot 10^5 \cdot EI/a^2$, tietokone ilmoitti kerroinmatriisin olevan lähes singulaarisen eikä siis pystynyt enää antamaan ratkaisua.

Painokertoimelle saadaan jälleen fysikaalinen tulkinta. Jos palkin analysoinnissa luovutaan teknillisen taivutusopin otaksumasta, että ennen muodon-

muutosta palkin poikkileikkaustasoilla olevat partikkelit muodostavat muodonmuutoksen jälkeen tasoja, jotka ovat kohtisuorassa palkin deformatiivista akselia vastaan ja otaksutaankin vain, että tasot pysyvät tasoina, saadaan ku-



Kuva 7. Palkin keskipisteen siirtymä painokertoimen funktiona.



Kuva 8. Palkin siirtymät liioiteltuina (a) alkutila (b) deformatiivinen tila.

van θ esittämä tilanne. Suure $\theta(x)$ tulkitaan palkin poikkileikkauksen kiertymäksi ja suureen

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \theta$$

nähdään tällöin esittävän palkin leikkausmuodonmuutosta. Palkin potentiaalienergia saadaan edelleen lausekkeesta (34), kun otetaan

$$\alpha = \kappa GA,$$

(57)

jossa κGA on palkin leikkausjäykkyys (κ on korjaustermi, jolla otetaan huomioon palkin poikkileikkausten todellisuuudessa tapahtuva käyristyminen).

Itse asiassa miltei sakkofunktioformulaatio syntyy siis fysikaalisin perustein luonnollisella tavalla itsestään, kun lähdetään liikkeelle leikkausmuodonmuutokset huomioonottavasta teoriasta eikä menettelyä tarvitsekaan välttämättä ajatella tässä jatkuvuusvaatimusten alentamiseksi käytettynä trikinä. Painokertoimen oikea arvo ei ole enää periaatteessa ääretön vaan kaavan (57) antama äärellinen luku, joka on kuitenkin käytännössä yleensä niin suuri, että on pystyttävä välttämään lukkiutuminen, jotta saataisiin realistinen malli.

Siirtymällä käyttämään dimensiottomia muuttujia $x' = x/a$, $v' = v/a$, $\theta' = \theta$ jne. on helpompaa saada selville eri termien antamien osuuksien suhde lausekkeesta (47). Dimensioton painokerroin α' tulee olemaan

$$\alpha' = \frac{\kappa GA}{EI/a^2} = 12\kappa \frac{G}{E} \left(\frac{a}{h}\right)^2, \quad (58)$$

jossa jälkimmäinen muoto on saatu isotrooppisesta aineesta olevalle poikkileikkaukseltaan suorakaiteen muotoiselle palkille, jonka korkeus on h (Tällöin $EI = Ebh^3/12$, $GA = Gbh$, $\kappa = 5/6$; b on palkin leveys, E on kimmomoduuli ja G liukumoduuli). Kun palkin korkeus h pienenee a :n pysyessä vakiona, α' kasvaa nopeasti ja lähestytään teknillisen taivutusopin esittämää tapausta.

Ensimmäiset, leikkausmuodonmuutokset huomioonottavaa teoriaa käyttävät elementtimenetelmäratkaisut epäonnistuiivat ohuiden palkkien tapauksissa, koska sovellettiin tarkkaa integrointia ja menettely hylättiin käyttökelvottomana. Numeerinen integrointi palautti myöhemmin formulaation hyväksyttäväksi.

Jos suhteen a/h arvo kasvaa suureksi, voi olla, että kaavan (58) antama α' on niin suuri, että yhtälöryhmä käyttäytyy liian huonosti ja saadaan pyöritysvirheistä johtuen käyttökelvottomia tuloksia. Jos näin tapahtuu, voidaan esimerkiksi G :lle antaa keinotekoisesti niin pieni arvo, että α' pysyy tietyn rajan alapuolella. Tämän menettelyn (josta käytetään nimitystä energy balancing) avulla vältetään siis numeerisia vaikeuksia ilman, että tehdään paljoakaan vääryyttä todellisuukselle; jos nimittäin ollaan jo pitkälti ohuen palkin taivutuksen alueella, palkin siirtymät johtuvat lähes pelkästään taivutusmomentin aiheuttamista muodonmuutoksista eikä leikkausjäykkyyden pienentäminen esimerkiksi sadanteen osaansa useinkaan vaikuta pahasti mitään tuloksiin.

Taivutettua palkkia on käsitelty edellä verrattain perusteellisesti havainnollisen kuvan saamiseksi. Käytännön kannalta tärkeämpiä tapauksia, joissa esiintyy analogisia ilmiöitä ovat laatan ja kuoren taivutus, kokoonpuristumaton kiinteä aine (joka tulee esille etenkin huokosnesteen täyttämän maan analysoinnissa) sekä kokoonpuristumaton neste. Tilan puute estää tässä perusteellisemmän käsittelyn. Tyydytään vain joihinkin hajahuomioihin.

Lähteessä [6] tehdään seuraava erittäin mielenkiintoinen toteamus: "On syytä otaksua, että elementtimenetelmä antaisi yleisesti ottaen parhaan approksimaation kimmoplastisessa probleemassa, mikäli vapausasteiden lukumäärän suhde

rajoitusyhtälöiden lukumäärään on sama kuin kontinuumilla". Tämä toteamus liittyy siis plastisuusteoriaan, jossa plastiset muodonmuutokset tapahtuvat ilman tilavuudenmuutosta - plastisten muodonmuutosten suhteen syntyy siis rajoitusyhtälö $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0$ - ja tämä seikka on aiheuttanut vaikeuksia elementtimenetelmässä. Yleistämällä edelläesitetty otaksuma koskemaan muitakin tapauksia saataisiin ohje: Diskreetti malli tulee pyrkiä muodostamaan siten, että suhde VL/RL on sama kuin kontinuumilla.

Vaikka tämä ohje ei edustakaan mitään absoluuttista totuutta, se tuntuu kuitenkin luonnolliselta, kun ajatellaan verkon tihentämistä, jolloin mallin tulisi lopulta yhtyä kontinuumiin. Useimmat numeeriset tulokset ovat olleet sopusoinnussa ohjeen kanssa. Esimerkiksi palkin kontinuumiteoriassa jokaisessa pisteessä x on kaksi vapausastetta $w(x)$ ja $\theta(x)$ sekä yksi rajoitusyhtälö (32). Täten kontinuumiteoriassa VL/RL = 2/1 = 2. Yhtä integrointipistettä per elementti käyttävä diskreetti malli antoi suunnilleen saman suhteen arvon ja toimi hyvin.

Kuvassa 9 suhteelle VL/RL on esitetty arvioita kolmelle eri nelikulmioelementille suuren elementtiverkon ollessa kyseessä käytettäessä erityyppisiä integrointikaavoja. On tarkasteltu tasomuodonmuutosta kokoonpuristumattomassa tapauksessa sekä ohuen laatan taiputusta. On katsottu, mikä on yhden elementin lisäämisen aiheuttamien uusien vapausasteiden lukumäärän suhde uusien rajoitusyhtälöiden lukumäärään ja tätä suhdetta on pidetty sitten likimain koko verkolle pätevänä.

Tasomuodonmuutoksessa kukin uusi solmu antaa kaksi vapausastetta (siirtymäkomponentit u ja v) ja laatan taiputuksessa kolme vapausastetta (taipuma w sekä jatkuvuusvaatimusten alentamiseksi käyttöön otetut suureet $\theta_x = \partial w / \partial x$ ja $\theta_y = \partial w / \partial y$). Kaikki suureita u , v , w , θ_x ja θ_y on siis approksimoitu samalla, ensimmäisen kertaluvun elementtiesityksellä.

Kokoonpuristumattomalla aineella suhteellinen tilavuudenmuutos häviää eli tasomuodonmuutoksessa saadaan rajoitusyhtälö

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (59)$$

Laatan tapauksessa saadaan rajoitusyhtälöt

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y = 0. \quad (60)$$

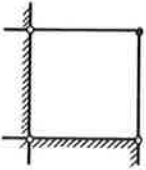


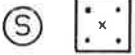
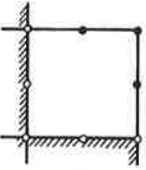



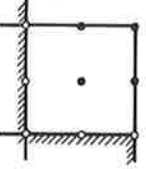



Potentiaalienergian lausekkeeseen tulee mukaan vastaavasti termi

$$\frac{1}{2} \int_A \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dA \quad (61)$$

tai termi

$$\frac{1}{2} \int_A [\alpha_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right)^2] dA, \quad (62)$$

joissa merkinnät ovat itsestään selviä.

| Elementti | Integrointipisteet | Tasomuodonmuutos | Laatta |
|---|--|--|--|
| 4-solmuinen elem.  | T  R  S  | $\frac{VL}{RL} = \frac{1 \times 2}{3^*} = 0,67$ $\frac{VL}{RL} = \frac{1 \times 2}{1 \times 1} = 2$ $\frac{VL}{RL} = \frac{1 \times 2}{1 \times 1} = 2$ | $\frac{VL}{RL} = \frac{1 \times 3}{4 \times 2} = 0,38$ $\frac{VL}{RL} = \frac{1 \times 3}{1 \times 2} = 1,5$ $\frac{VL}{RL} = \frac{1 \times 3}{1 \times 2} = 1,5$ |
| 8-solmuinen elem.  | T  R  S  | $\frac{VL}{RL} = \frac{3 \times 2}{6^*} = 1$ $\frac{VL}{RL} = \frac{3 \times 2}{4 \times 1} = 1,5$ $\frac{VL}{RL} = \frac{3 \times 2}{4 \times 1} = 1,5$ | $\frac{VL}{RL} = \frac{3 \times 3}{16^*} = 0,56$ $\frac{VL}{RL} = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = 1,13$ $\frac{VL}{RL} = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = 1,13$ |
| 9-solmuinen elem.  | T  R  S  | $\frac{VL}{RL} = \frac{4 \times 2}{8^*} = 1$ $\frac{VL}{RL} = \frac{4 \times 2}{4 \times 1} = 2$ $\frac{VL}{RL} = \frac{4 \times 2}{4 \times 1} = 2$ | $\frac{VL}{RL} = \frac{4 \times 3}{9 \times 2} = 0,67$ $\frac{VL}{RL} = \frac{4 \times 3}{4 \times 2} = 1,5$ $\frac{VL}{RL} = \frac{4 \times 3}{4 \times 2} = 1,5$ |
| <ul style="list-style-type: none"> • Uusi solmupiste × Sakkofunktio-termiin liit- tyvä integrointipiste • Muihin termeihin liitty- vä integrointipiste | | Kontinuumi $\frac{VL}{RL} = \frac{2}{1} = 2$ | Kontinuumi $\frac{VL}{RL} = \frac{3}{2} = 1,5$ |

Kuva 9. Suhteen VL/RL arvioita.

Numeerinen integrointi aiheuttaa, että sideyhtälöt (59) tai (60) pyrkiytyvät toteutumaan juuri integrointipisteiden kohdilla ja sitä tarkemmin, mitä suurempia painokertoimet ovat. Täten kukin integrointipiste aiheuttaa rajalla yhden rajoitusyhtälön tasomuodonmuutostapauksessa ja kaksi rajoitusyhtälöä laatan taivutuksessa.

On sovellettu Gaussin numeerista integrointikaavaa. Lyhenteet T, R ja S viittaavat ns. täyteen (engl. full), redusoituun (reduced) ja selektiiviseen (selective) integrointiin. Vastaavat integrointipisteet näkyvät kuvassa. Täysi integrointi ei aiheuta virheitä integraaleja laskettaessa vääristymättö-

män elementin tapauksessa. Redusoitu integrointi on yhtä kertalukua alempi. Selektiivisessä integroinnissa sakkofunktiotermit lasketaan alempaa kertalukua olevalla kaavalla kuin muut termit.

Numeeriset laskelmat ovat osoittaneet, että täysi integrointi synnyttää kaikkien kuvan elementtien yhteydessä lukkiutumista kuten voidaan jo arvella suhteen VL/RL arvon ≤ 1 perusteella. Redusoidulla integroinnilla on havaittu olevan tietyistä syistä - ks. esim. [5] - yleisesti ottaen tarkkuutta lisäävä vaikutus tuloksiin. Tässä yhteydessä redusoitu integrointi on täyteen integrointiin verrattuna lisäksi sikäli tarpeen, että rajoitusyhtälöiden määrä pienenee ja suhteelle VL/RL saadaan suurempia arvoja. Kuitenkin on osoittautunut, että etenkin ns. Lagrange-perheen elementit, joita tässä edustavat 4- ja 9-solmuinen elementti, antavat redusoitua integrointia käytettäessä integrointipisteiden suhteellisen pienen määrän johdosta usein koko rakenteelle singulaarisen jäykkymatriisin, joten redusoitu integrointi on tästä syystä hylättävä. Selektiivisessä integroinnissa edellistä haittaa ei yleensä enää esiinny ja suhde VL/RL pysyy kuitenkin samana. Kuvasta näkyy, että Lagrange-elementeillä saavutetaan täsmälleen sama VL/RL-suhde kuin kontinuumilla (Kontinuumissa on tasomuodonmuutoksessa jokaisessa pisteessä (x,y) kaksi vapausastetta u ja v sekä yksi rajoitusyhtälö (59), joten $VL/RL = 2/1 = 2$. Laatan taiputuksessa jokaisessa pisteessä (x,y) on kolme vapausastetta w , θ_x ja θ_y sekä kaksi rajoitusyhtälöä (60) ja siis $VL/RL = 3/2 = 1,5$). Lagrange-elementillä onkin saatu selektiivistä integrointia käyttäen erinomaisia tuloksia ja tätä valintaa voidaan hyvällä syyllä suositella. Selektiivinen integrointi tekee tosin ohjelman hieman monimutkaiseksi, koska jäykkymatriisin alkioiden numeerinen integrointi joudutaan suorittamaan kahdessa vaiheessa, mutta haitta on vähäinen.

8-solmuista elementtiä, joka on ns. Serendip-perheen edustaja, pidetään laajalti yleisesti ottaen kaikkein käyttökelpoisimpana elementtinä. Sakko-funktiomenettelyssä sen antamat tulokset eivät kuitenkaan ole olleet aina tyydyttäviä. Kuvasta 9 havaitaan tähän liittyen, ettei myöskään suhde VL/RL ole nyt kovin lähellä kontinuumin vastaavaa arvoa.

Kuvan 9 suhteen todettakoon vielä, että rajoitusyhtälöiden lukumäärää ei voida laskea aina varmuudella integrointipisteiden lukumäärän perusteella. Rajoitusyhtälöiden ei tarvitse nimittäin olla välttämättä riippumattomia. Näin on ilmeisesti tapaus aina, kun integrointipisteistä laskettujen rajoitusyhtälöiden lukumäärä ylittää niiden riippumattomien ehtojen määrän, joka johtaa rajoitusten (59) tai (60) täydelliseen toteutumiseen kaikkialla elementissä (vrt. palkkielementin yhteydessä tehtyyn tarkasteluun, jonka perusteella ehtojen maksimimäärä on kaksi). Kuvassa RL:n arvot ovat varustettu tähdellä, mikäli rajoitusyhtälöiden määrä on määräytynyt ehtojen täydellisen toteutumisen perusteella. Luvut on saatu vääristymättömille elementeille.

Painokertoimille voidaan saada fysikaaliset tulkinnot. Tasomuodonmuutoksessa termi (61) esittää kokoonpuristuvassa tapauksessa suhteelliseen tilavuudenmuutokseen e liittyvää muodonmuutosenergian lauseketta ja α on ko. aineen

ns. puristuskerroin k . Laatan taivutuksessa termi (62) esittää leikkausmuodonmuutoksiin liittyvää muodonmuutosenergian lauseketta, kun lähdetään liikkeelle tavanomaisesta ohuen laatan teoriasta poikkeavasta käsittelystä, joka sallii leikkausmuodonmuutosten γ_{xz} ja γ_{yz} syntymisen (ns. Mindlin laatta). Tämä on siis suora yleistys palkin taivutuksen yhteydessä esitetystä, leikkausmuodonmuutokset huomioonottavasta tapauksesta. Suureet θ_x ja θ_y esittävät nyt laatan keskitason normaalin kiertymiä ja saadaan

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y. \quad (63)$$

Isotrooppisen laatan tapauksessa

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \kappa Gh, \quad (64)$$

jossa G on liukumoduuli, h laatan korkeus ja $\kappa = 5/6$.

Jos painokertoimet ovat suuria, on mallin muodostamisessa varauduttava lukkiutumisen välttämiseen. Esimerkiksi tasomuodonmuutostapauksessa on saatu kehoja tuloksia 3-solmuisia kolmioelementtejä käyttäen jo Poissonin vakion arvolla 0.45 (täysin kokoonpuristumattomassa tapauksessa $\nu = 0,5$). Kuvassa 9 esitetyn tapainen tarkastelu osoittaa, että elementti on tyyppiä, joka ei sovi sakkofunktiomenettelyssä käytettäväksi. Selektiivistä integrointia ei voida soveltaa, koska täysi integrointi tapahtuu jo vain yhtä integrointipistettä käyttäen.

Samoin suurien painokertoimien tapauksissa jännityssuureiden laskemisessa on noudatettava harkintaa. Huonoja tuloksia syntyy, jos termejä ke tai $\alpha_1 \gamma_{xz}$ ja $\alpha_2 \gamma_{yz}$, jotka antavat keskimääräisen normaali-jännityksen tai leikkausvoimat Q_x ja Q_y , yritetään laskea muualla kuin sakkofunktiotermien integroinnissa käytetyissä integrointipisteissä (vrt. palkin taivutuksessa saatu leikkausvoiman jakautuminen). Vastaavat termit on syytä laskea muissa pisteissä ekstrapoloimalla integrointipisteiden kohdilla olevista arvoista. Palkin tapauksessa tämä tarkoittaisi vakioarvon otaksumista leikkausvoimalle kussakin elementissä.

LOPPUHUOMAUTUKSIA

Edellä esitettyjen esimerkkitapausten toivotaan antaneen kuvan sakkofunktiotformulaatioon liittyvistä tärkeimmistä piirteistä. Lukkiutumisen ymmärtäminen ja numeerinen integrointi keinona lukkiutumisen estämiseksi lisäävät entisestään siirtymämenetelmän valta-asemaa elementtimenetelmän yhteydessä, koska tietyt patologisesti käyttäytyvät tapaukset, joihin on jouduttu aikaisemmin soveltamaan sekamenetelmää (eli Lagrangen kertojamenettelyä) voidaan nyt käsitellä puhtaalla siirtymämenetelmällä. Elementtimenetelmässä usein välttämättömänä pahana pidetty numeerinen integrointi osoittautuu siis

sakkofunktiomenettelyä käytettäessä välttämättömäksi hyväksi.

Etenkin laattojen suhteen päädytään elementtimenetelmän kannalta huomattavasti yksinkertaisempaan käsittelyyn, kun luovutaan ottamasta perustaksi analyttiseltä kannalta yksinkertainen ohuen laatan teoria (vain yksi tuntematon funktio $w(x,y)$) ja lähdetäänkin liikkeelle analyttiseltä kannalta monimutkaisemmasta, leikkausmuodonmuutokset huomioonottavasta teoriasta (kolme tuntematonta funktiota $w(x,y)$, $\theta_x(x,y)$ ja $\theta_y(x,y)$). Koska approksimaatiot saavat olla ensimmäistä kertalukua, voidaan soveltaa isoparametrasta muunnosta ja saadaan kaarevaraunaisia laattaelementtejä, joita voidaan lisäksi soveltaa sekä paksujen että ohuiden laattojen tapauksissa.

Sakkofunktiomenettelyllä on ilmeisesti lupaavia mahdollisuuksia myös puhtaan voimamenetelmän yhteydessä käytettäessä perustana komplementaarisen energian minimin periaatetta. Luvallisten funktioidenhan tulee tässä periaatteessa toteuttaa etukäteen jännityksiä koskevat tasapainoyhtälöt. Nämä rajoitusyhtälöt voidaan ottaa huomioon sakkofunktiomenettelyllä.

Haluan kiittää dipl.ins. Jukka Aaltoa sekä tekn.lis. Antti Pramilaa artikkelin kirjoittamisen yhteydessä saamastani avusta.

LÄHDEKIRJALLISUUS

- [1] Courant, R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. Bull. Am. Math. Soc. 49 (1943), s. 1...23.
- [2] Hestenes, M.R., Multiplier and gradient methods. s. 143...163 teoksessa Zadeh, L.A., Neustadt, L.W., Balakrishnan, A.V. (toim.), Computing Methods in Optimization Problems-2, Academic Press, 1969.
- [3] Salonen, E-M., An iterative penalty function method in structural analysis. Int. J. Num. Meth. Eng. 10 (1976). s. 413...421.
- [4] Felippa, C.A., Iterative procedures for improving penalty function solution of algebraic systems, ilmestyy Int. J. Num. Meth. Eng.-lehdessä.
- [5] Zienkiewicz, O.C., The finite element method., 3rd edition, McGraw-Hill, 1977.
- [6] Nagtegaal, J.C., Parks, D.M., Rice, J.R., On numerically accurate finite element solutions in fully plastic range. Comp. Meths. Appl. Mech. Eng. 4 (1974) s. 153...177.

Eero-Matti Salonen, apul.prof., Teknillinen Korkeakoulu, Otaniemi