

Hannu Sinisalo, Markku Tuomala  
ja Martti Mikkola

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 11  
No. 1 1978 s. 26...46

**YHTEENVETO:** Artikkelissa käsitellään pyörähdyssymmetrisen rakenteen jännitys-  
muodonmuutostilaa transientin dynaamisen kuorman alaisena. Tasapainoyhtälöt  
on johdettu virtuaalisen työn periaatteella. Yhtälöiden diskretointi on teh-  
ty paikan suhteen elementtimenetelmän ja ajan suhteen differenssimenetelmän  
mukaan. Sovellutusesimerkeissä on tarkasteltu kimmoisten, plastisten ja vis-  
koplastisten aineominaisuuksien vaikutusta rakenteen vasteeseen. Klassisen  
plastisuusteorian lisäksi on käytetty endokroonista plastisuusteoriaa. Käy-  
tettyjä aikaintegrointimenetelmiä on vertailtu tarkkuuden ja laskenta-ajan  
suhteen yksivapausasteisen värähtelijän ja sauvan aksiaalisen iskun tapauk-  
sissa. Lopuksi on tarkasteltu eri materiaalilakeja noudattavien lieriöiden  
törmäystä jäykkään alustaan.

#### JOHDANTO

Dynaamisia rasituksia rakenteisiin aiheuttavat esim. koneiden tärinä, rä-  
jähdykset, sinkoutuvat kappaleet ja luonnon kuormat, kuten tuuli, veden aal-  
toliike ja maanjäristykset. Dynaamiset kuormat jaetaan vaikutusajan perus-  
teella lyhytaikaisiin ja pitkäaikaisiin kuormiin.

Dynaamisesti kuormitetut rakenteet mitoitetaan usein likimääräisesti siten,  
että dynaaminen lisävaikutus huomioidaan staattisena kuormana sysäyskertojen  
avulla.

Suuria rasituksia aiheuttavien transienttien dynaamisten kuormien vaikutus  
joudutaan usein tutkimaan hitaita ja vähäisiä dynaamisia vaikutuksia tarkem-  
min. Rakenteen todellinen vaste ja kantokyky saadaan selville, kun todelli-  
set materiaaliominaisuudet ja suurten muodonmuutosten aiheuttama geometrinen  
epälineaarisuus otetaan tasapainoyhtälöissä huomioon. Käyttökelpoisia ratkai-  
sumenetelmiä ovat ominaisvärähdysmuotoihin perustuva menetelmä, karakteristi-  
ka- ja differenssimenetelmät. Differentiaaliyhtälöiden tarkka ratkaisu on-  
nistuu vain yksinkertaisissa tapauksissa. Ratkaisumenetelmä, jossa yhtälöt  
diskretoidaan paikan suhteen elementtimenetelmän mukaan ja ajan suhteen dif-  
ferenssimenetelmän mukaan, on erittäin tarkka ja käyttökelpoinen, vaikka täl-  
löin joudutaankin suuriin yhtälöryhmiin ja kohtalaisen pitkiin laskuaikoihin.

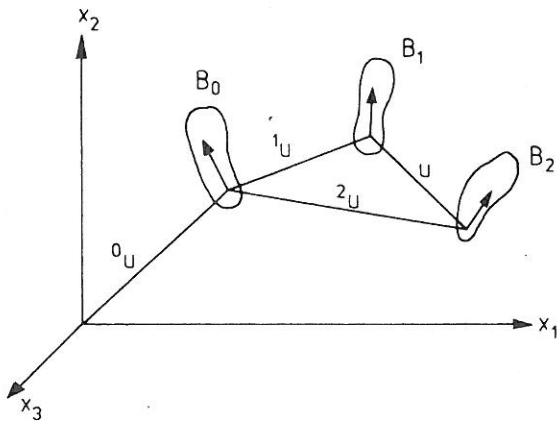
Tässä artikkelissa tarkastellaan pyörähdyssymmetrisen rakenteen vastetta  
transientissa dynaamisessa kuormituksessa. Tasapainoyhtälöt muodostetaan vir-  
tuaalisen työn periaatteella ja niiden diskretointi paikan suhteen suoritetaan

elementtimenetelmän ja ajan suhteen differenssimenetelmän mukaan. Käytettyjä aikaintegrointimenetelmiä vertaillaan tarkkuuden suhteen yksivapausasteisen värähtelijän tapauksessa. Toisena esimerkkinä käsitellään lieriömäisen sauvan törmäystä jäykkään tai kimmoiseen alustaan. Tehtävä ratkaistaan sekä pyörähdysymmetrisen kappaleen yhtälöiden että sauvan yksidimensioisten yhtälöiden mukaan. Tässä tapauksessa vertaillaan myös kimmoisten, plastisten ja visko-plastisten materiaaliominaisuuksien vaikutusta rakenteen vasteeseen.

## LIIEKEYHTÄLÖT

Liikkeyhtälöt yleisessä muodossa

Liikkeyhtälöt johdetaan virtuaalisen työn periaatetta käyttäen. Kappaleen alkutilaa merkitään  $B_0$ :lla, deformatiivista tilaa  $B_1$ :llä ja  $B_1$ :tä seuraavaa läheistä tilaa  $B_2$ :lla. Virtuaalisen työn yhtälö tilassa  $B_2$  on (ks. [6])



Kuva 1 Kappaleen B deformatiivisuus.

$$\int \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} dV + \int \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}} dV = \int \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{t}} dA + \int \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{f}} dV \quad (1)$$

jossa

$\underline{\underline{\sigma}}$  on 2. Piolan-Kirchhoffin jännitys

$\underline{\underline{\varepsilon}}$  on Greenin-Lagrangen muodonmuutos

$\underline{\underline{p}}$  on hitaus- ja vaimennusvoimavektori

$\underline{\underline{t}}$  on pintakuormavektori

$\underline{\underline{f}}$  on tilavuusvoimavektori

$\delta \underline{\underline{u}}$  on siirtymän  $\underline{\underline{u}}$  variaatio

$\underline{\underline{\rho}}$  on tiheys

Elementtimenetelmässä siirtymiä approksimoidaan lausekkeella

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{N}} \underline{\underline{q}}, \quad (2)$$

jossa  $\underline{\underline{q}}$  on solmupisteiden siirtymävektori ja  $\underline{\underline{N}}$  muotofunktioiden matriisi.

Vasen yläindeksi 1 tai 2 viittaa tilaan  $B_1$  tai  $B_2$ . Yläindeksittömät suureet

kuvaavat muutosta tilasta  $B_1$  tilaan  $B_2$ , esim.  $\underline{u} = {}^2\underline{u} - {}^1\underline{u}$ . Geometrisesti epälineaarissa tapauksessa muodonmuutoksen lisäys on

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B}_1 \underline{q} + \underline{B}_2 ({}^1 \underline{q}) \underline{q} + \frac{1}{2} \underline{B}_3 ({}^1 \underline{q}) \underline{q} \quad (3)$$

jossa ensimmäinen termi esittää lineaarista ja seuraavat epälineaarista osaa. Muodonmuutoksen lisäyksen variaatio on

$$\delta \underline{\varepsilon} = \underline{B}_1 \delta \underline{q} + \underline{B}_2 \delta \underline{q} + \underline{B}_3 \delta \underline{q} \quad (4)$$

Jännityksen lisäys on likimäärin

$$\underline{\sigma} = {}^1 \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (5)$$

jossa esiintyvä kimmomatriisi  ${}^1 \underline{D}$  on muodostettu tilassa  $B_1$ .

Yhtälön (1) ensimmäisestä termistä tulee

$$\begin{aligned} \int \delta \underline{\varepsilon}^T {}^2 \underline{\sigma} dV &= \int \delta \underline{\varepsilon}^T {}^1 \underline{D} \underline{\varepsilon} dV + \int \delta \underline{\varepsilon}^T {}^1 \underline{\sigma} dV \\ &= \delta \underline{q}^T \int (\underline{B}_1 + \underline{B}_2 + \underline{B}_3)^T {}^1 \underline{D} (\underline{B}_1 + \underline{B}_2 + \frac{1}{2} \underline{B}_3) dV \underline{q} + \delta \underline{q}^T \int \underline{B}_3^T {}^1 \underline{\sigma} dV + \\ &\quad + \delta \underline{q}^T \int (\underline{B}_1 + \underline{B}_2)^T {}^1 \underline{\sigma} dV \end{aligned} \quad (6)$$

(6):n oikean puolen kahdesta ensimmäisestä termistä muodostuu tangentiaalinen jäykkyyssmatriisi  $\underline{K}$  ( $\underline{B}_3$  riippuu  $q$ :sta) ja kolmas termi lisätään sisäiseen kuormavektoriin.

Yhtälön (1) toisesta termistä tulee

$$\begin{aligned} \int \delta \underline{u}^T {}^2 \underline{p} dV &= \int \delta \underline{u}^T \rho {}^2 \underline{\dot{u}} dV + \int \delta \underline{u}^T \mu {}^2 \underline{\dot{u}} dV \\ &= \delta \underline{q}^T \int \underline{N}^T \rho \underline{N} dV \underline{\dot{q}} + \delta \underline{q}^T \int \underline{N}^T \rho \underline{N} dV {}^1 \underline{\dot{q}} + \delta \underline{q}^T \int \underline{N}^T \mu \underline{N} dV \underline{\dot{q}} + \delta \underline{q}^T \int \underline{N}^T \mu \underline{N} dV {}^1 \underline{\dot{q}} \end{aligned} \quad (7)$$

(7):n ensimmäisen termin integraali esittää massamatriisia  $\underline{M}$  ja kolmannen termin integraali vaimennusmatriisia  $\underline{C}$ . Toinen ja neljäs termi lisätään sisäiseen kuormavektoriin.

Yhtälön (1) oikeasta puolesta tulee ulkoinen kuormavektori  ${}^2 \underline{Q}$

$$\int \delta \underline{u}^T {}^2 \underline{t} dA + \int \delta \underline{u}^T \rho {}^2 \underline{f} dV = \delta \underline{q}^T \int \underline{N}^T {}^2 \underline{t} dA + \delta \underline{q}^T \int \underline{N}^T \rho {}^2 \underline{f} dV = \delta \underline{q}^T {}^2 \underline{Q} \quad (8)$$

Sisäinen kuormavektori vastaa tilaa  $B_1$ .

$${}^1 \underline{R} = \int (\underline{B}_1 + \underline{B}_2)^T {}^1 \underline{\sigma} dV + \underline{M} {}^1 \underline{\dot{q}} + \underline{C} {}^1 \underline{\dot{q}} \quad (9)$$

Virtuaalisen työn yhtälöstä (1) seuraa edellä esitetyn perusteella liikeyhtälö

$$\underline{M} \underline{\dot{q}} + \underline{C} \underline{\dot{q}} + \underline{K} \underline{q} = {}^2 \underline{Q} - {}^1 \underline{R} \quad (10)$$

joka on 2. kertaluvun tavallisten epälineaaristen differentiaaliyhtälöiden järjestelmä.

## Pyörähdyssymmetrisen rakenteen liikeyhtälöt

Pyörähdyssymmetristen rakenteiden ratkaisemista elementtimenetelmällä on käsitelty mm. lähteissä [7], [8] ja [19].

Geometrisesti epälinearisessa tapauksessa muodonmuutosten ja siirtymien väliset yhteydet ovat [9]

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= u_{,r} + (u_{,r}^2 + v_{,r}^2)/2 \\ \epsilon_z &= v_{,z} + (u_{,z}^2 + v_{,z}^2)/2 \\ \gamma_{rz} &= u_{,z} + v_{,r} + u_{,r}u_{,z} + v_{,r}v_{,z} \\ \epsilon_\varphi &= u/r + (u/r)^2/2 \end{aligned} \tag{11}$$

$u$  on säteen ja  $v$  symmetria-akselin suuntainen siirtymä. Leikkausmuodonmuutokset  $\gamma_{r\varphi}$  ja  $\gamma_{z\varphi}$  samoin kuin leikkausjännitykset  $\tau_{r\varphi}$  ja  $\tau_{z\varphi}$  ovat nolliä.

Käytetään 4-solmuista  $4 \times 2$ -vapausasteista isoparametrinen elementtiä. Elementin muotoa ja siirtymiä approksimoidaan samanasteisilla polynomeilla. Siirtymien approksimaatiot ovat

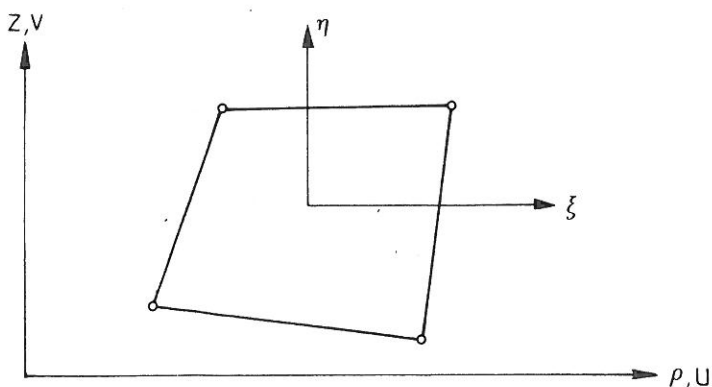
$$\begin{aligned} u &= \underline{N}q_u \\ v &= \underline{N}q_v \end{aligned} \tag{12}$$

missä  $q_u$  ja  $q_v$  ovat solmupisteiden siirtymävektorit ja  $\underline{N}$  muotofunktio matriisi

$$\underline{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]. \tag{13}$$

Muotofunktiot ovat

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4 \\ N_2 &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4 \\ N_3 &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4 \\ N_4 &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4 \end{aligned} \tag{14}$$



Kuva 2 Nelisolmuinen isoparametrinen elementti.

Muodonmuutoksia laskettaessa joudutaan suorittamaan derivointi  $r:n$  ja  $z:n$  suhteen, esim.  $\epsilon_r = u_{,r} = \frac{\partial N}{\partial r} q_n$ . Derivaatat saadaan kaavalla

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{15}$$

jossa  $\underline{J}$  on Jacobin matriisi

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ r_4 & z_4 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Muodonmuutoksen lisäyksen variaation lausekkeen (4) matriisit ovat pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa (ks. [8] tai [19])

$$\underline{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial z} \\ \frac{\partial N}{\partial z} & \frac{\partial N}{\partial r} \\ \underline{N}/r & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\underline{B}_2 = \underline{A}({}^1q)\underline{G} \quad (18)$$

$$\underline{B}_3 = \underline{A}(q)\underline{G} \quad (19)$$

joissa

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{r}/r \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial r} \\ \frac{\partial N}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial z} \\ \underline{N}/r & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Tangentiaalisen jäykkymatriisin termi lausekkeesta (6) voidaan saattaa muotoon

$$\underline{B}_3^T \underline{\sigma} = \underline{G}^T \underline{\phi} \underline{G} \quad (22)$$

jossa  $\underline{\phi}$  on symmetrinen jännityskomponentteja sisältävä matriisi

$$\underline{\phi} = \begin{pmatrix} {}^1\sigma_r & 0 & {}^1\tau_{rz} & 0 & 0 \\ 0 & {}^1\sigma_r & 0 & {}^1\tau_{rz} & 0 \\ {}^1\tau_{rz} & 0 & {}^1\sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & {}^1\tau_{rz} & 0 & {}^1\sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1\sigma_\varphi \end{pmatrix} \quad (23)$$

Yksiakselisessä tapauksessa saadaan vastaavasti

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x})^2 \quad (24)$$

$$\underline{B}_1 = \underline{G} = d\underline{N}/dx \quad (25)$$

$$\underline{A} = d\underline{u}/dx = (d\underline{N}/dx)\underline{q} \quad (26)$$

$${}^1\underline{\phi} = {}^1\sigma \quad (27)$$

#### KONSTITUTIIVISET YHTÄLÖT

Kimmoplastinen aine

Kimmoplastiselle aineelle, jonka myötöehto on

$$f(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}^P, \kappa) = 0 \quad (28)$$

saadaan plastisen muodonmuutoksen tapahtuessa konstitutiivinen yhtälö (ks. esim. [19])

$$d\underline{\sigma} = \underline{D}_{ep} d\underline{\varepsilon} \quad (29)$$

$$\underline{D}_{ep} = \underline{D} - \underline{D} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right\}^T \underline{D} [E^P + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right\}^T \underline{D} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right\}]^{-1} \quad (29)$$

jossa  $\underline{D}$  on kimmomatriisi ja  $E^P$  myötölujuenemiskerroin

$$E^P = - \frac{\partial f}{\partial \kappa} \left\{ \frac{\partial \kappa}{\partial \underline{\varepsilon}^P} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right\} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial \underline{\varepsilon}^P} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right\} \quad (30)$$

Viskoplastinen aine

Muodonmuutosnopeus jaetaan kimmoiseen ja viskoplastiseen osaan

$$\dot{\underline{\varepsilon}} = \dot{\underline{\varepsilon}}^e + \dot{\underline{\varepsilon}}^{vp} \quad (31)$$

Perzynan mukaan [10] viskoplastinen muodonmuutosnopeus on

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^{vp} = \gamma \langle \phi(f) \rangle \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (32)$$

missä

$$\langle f \rangle = \begin{cases} f & \text{kun } f > 0 \\ 0 & \text{kun } f \leq 0 \end{cases} \quad (33)$$

ja  $\gamma$  viskoosisuuskerroin.

Endokrooninen teoria

Valanis [11] on kehittänyt ns. endokroonisen teorian, jolla voidaan esittää materiaalien plastisia tai viskoplastisia ominaisuuksia. Aineen ominaisuudet riippuvat sisäisestä eli endokroonisesta ajasta, jonka mitta  $\xi$  riippuu muodon-

muutoksista ja todellisesta ajasta

$$d\xi^2 = d\underline{\epsilon}^T \underline{P} d\underline{\epsilon} + k_3 dt^2 \quad (34)$$

$\underline{P}$  on aineelle ominainen symmetrinen matriisi. Jos  $k_3 = 0$ , niin  $\xi$  ei riipu todellisesta ajasta. Lisäksi otetaan käyttöön sisäinen aikamittakaava  $z = z(\xi)$ . Valanis on käyttänyt menestyksellisesti funktiota

$$d\xi/dz = 1 + \beta\xi, \quad z = [\ln(1 + \beta\xi)]/\beta. \quad (35)$$

Jännitys-muodonmuutoslaki lausutaan integraalimuodossa, joka pienten muodonmuutosten isotermisessä ja isotrooppisessa tapauksessa on

$$\underline{s} = 2 \int_{z_0}^z G(z - z') \frac{\partial \underline{e}}{\partial z'} dz' \quad (36)$$

$$\sigma_{kk} = \int_{z_0}^z K(z - z') \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial z'} dz'$$

jossa  $\underline{s}$  ja  $\underline{e}$  ovat jännitys- ja muodonmuutostensorien deviaatiokomponentit. Valanis on käyttänyt  $K$ :lle vakioarvoa ja  $G$ :lle lauseketta  $G = G_0 e^{-\alpha z}$  tai  $G_1 + G_0 e^{-\alpha z}$ . Tässä käytetään yksidimensioiselle tapaukselle (36):n mukaista yhtälöä

$$d\sigma = [E - \alpha\sigma/(1 + \beta\xi)] d\underline{\epsilon} \quad (37)$$

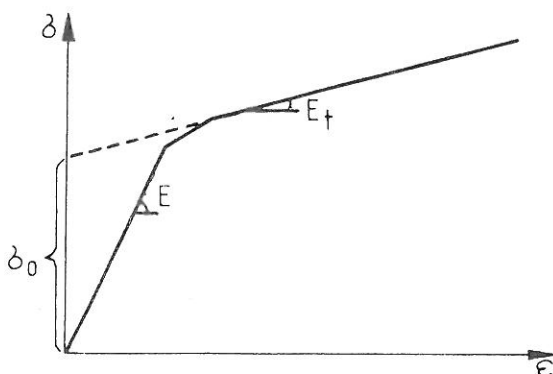
jossa vakiot  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat (ks. kuvio)

$$\beta = E_t/\sigma_0, \quad \alpha = (E/E_t - 1)\beta \quad (38)$$

Useampidimensioisissa tapauksissa konstitutiivinen laki on

$$d\underline{\sigma} = \underline{D}_{ek} d\underline{\epsilon}$$

$$\underline{D}_{ek} = \underline{D} - \alpha \underline{\sigma} \underline{\sigma}^T / [(1 + \beta\xi) \underline{\sigma}^T \{ \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \xi} \}] \quad (39)$$



Kuva 3 Endokroonisen teorian mukaisen materiaalin jännitys-muodonmuutosyhteys.

Yleistä

Numeerisessa aikainegroinnissa lähdetään tunnetuista alkuarvoista ja pyritään toteuttamaan liikeyhtälöt jokaisen aikavälin päätepisteessä.

Implisiittisissä menetelmissä aikavälin päätepisteessä määritettävä arvo joudutaan epälineaarisisessa tapauksessa hakemaan iteroimalla.

Eksplisiittimenetelmissä ratkaistava arvo riippuu vain edellisistä aikapististä, joten iteraatiota ei tarvita. Epälineaarisuuden vaikutus huomioidaan seuraavaa askelta otettaessa. Tämä aiheuttaa sen, että yleensä eksplisiittimenetelmiä käytettäessä, ja implisiittimenetelmien kanssa samaan tarkuuteen pyrittäessä, joudutaan käyttämään lyhyempää aika-askelta. Useilla integrointimenetelmillä on askelpituuden yläraja, jonka ylittäminen aiheuttaa virheen rajoittoman kasvun. Tällaista menetelmää sanotaan ehdollisesti stabiiliksi. Eksplisiittimenetelmät ja esimerkiksi taaksepäindifferenssimenetelmät ovat ehdollisesti stabiileja. Eräät implisiittimenetelmät kuten trapetsikaava ja Houboltin menetelmä ovat ehdoitta stabiileja, mikä tarkoittaa, että virhe ja energia eivät kasva rajatta askelpituuden kasvaessa. Trapetsikaava ei tee lainkaan virhettä energiaan.

Taloudelliseen laskentaan ja riittävän tarkkaan lopputulokseen pääsemiseksi on edullista käyttää vaihtuvaa askelpituutta. Tällöin askelpituutta kontrolloidaan paikallisen katkaisuvirheen ja energiavirheen avulla. Laskenta-aikaa voidaan lyhentää etenkin eksplisiittimenetelmiä käytettäessä käyttämällä diagonaalista massamatriisia. Pitkiä askelpituuksia käytettäessä numeerinen vaimennus ja ratkaisun vääristyminen kasvavat.

Yksiaskelmenetelmät ovat moniaskelmenetelmiä joustavampia, koska ne eivät vaadi erityistä aloitusmenetelmää. Lisäksi moniaskelmenetelmien kertoimet muuttuvat askelpituuden vaihdoksen yhteydessä, joka lisää laskutyötä.

Edellisen perusteella voitaisiin sanoa, että ihanteellinen integrointimenetelmä olisi ehdoitta stabiili yksiaskelinen eksplisiittimenetelmä.

Keskeisdifferenssimenetelmä

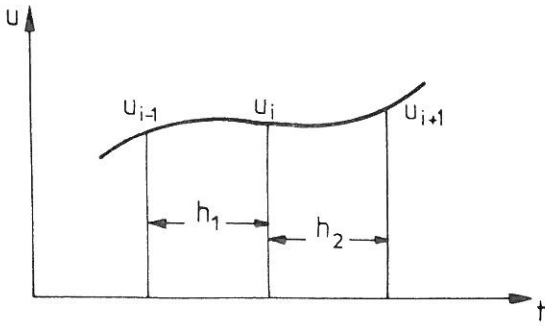
Keskeisdifferenssimenetelmä [1] on eksplisiittinen. Toisen derivaatan lauseke on vaihtuva-askelisenä muotoa

$$\ddot{q}_i = \frac{2(q_{i+1} - q_i \frac{h_1 + h_2}{h_1} + q_{i-1} \frac{h_2}{h_1})}{h_2^2 + h_1 h_2} \quad (40)$$

Tämä supistuu vakioaskelisenä muotoon

$$\ddot{q}_i = \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{h^2} \quad (41)$$





Kuva 4 Keskeisdifferenssimenetelmän tarvitsemät alkuarvot.

Kun lauseke sijoitetaan liikeyhtälöön saadaan siirtymänlisäykselle lauseke

$$\frac{M}{\Delta t^2} q = F_i + \left[ \frac{M}{\Delta t^2} - K \right] q_i - \frac{M}{\Delta t^2} q_{i-1} \quad (42)$$

Mikäli massamatriisi on diagonaalinen ovat ratkaistavat yhtälöt erillisiä. Diagonaalisen massamatriisin käyttö on juuri tästä syystä taloudellista eksplisiittimenetelmien yhteydessä. Keskeisdifferenssimenetelmä on ehdollisesti stabiili ja sen stabiilisuusraja on  $h_{kr} = 2/\omega$ , jossa  $\omega$  on rakenteen suurin ominaisvärähdysluku.

Lineaarinen moniaskelmanetelmä

Lineaarinen moniaskelmanetelmä [1], [2], [3] on muotoa

$$\sum \alpha_i \dot{q}_{n+1-i} = h \sum \beta_i \ddot{q}_{n+1-i} \quad (43)$$

$$\sum \alpha_i q_{n+1-i} = h \sum \beta_i \dot{q}_{n+1-i} \quad (44)$$

Uusi siirtymän arvo lasketaan epälineaarisisessa tapauksessa kaavasta

$$q_{n+1}^{j+1} = q_{n+1}^j + q^{j+1} \quad (45)$$

jossa j tarkoittaa iteraatiokierrosta.

Kun lausekkeet (43) ja (44) sijoitetaan liikeyhtälöön, saadaan

$$\left[ \left( \frac{\alpha_0}{\beta_0 h} \right)^2 M + K^j \right] q^{j+1} = f_{n+1} - r_n^j \quad (46)$$

$$\text{missä } r_n^j \text{ on sisäinen ja } f_{n+1} \text{ ulkoinen kuormavektori} \quad (47)$$

$$r_n^j = \left[ \left( \frac{\alpha_0}{\beta_0 h} \right)^2 M + K^j \right] q_n^j + \frac{M}{\beta_0 h} \left[ \sum \left[ \frac{\alpha_0}{\beta_0 h} \alpha_i q_{n+1-i} + \left[ \alpha_i - \frac{\alpha_0 \beta_i}{\beta_0} \right] \dot{q}_{n+1-i} - h \beta_i \ddot{q}_{n+1-i} \right] \right]$$

Uusi nopeus lasketaan kaavasta

$$\dot{q}_{n+1} = \frac{\alpha_0}{\beta_0 h} q_{n+1} + \frac{1}{\beta_0 h} \sum (\alpha_i q_{n+1-i} - h \beta_i \dot{q}_{n+1-i}) \quad (48)$$

Kiihtyvyyden uusi arvo on

$$\ddot{q}_{n+1} = \frac{\alpha_0}{\beta_0 h} \dot{q}_{n+1} + \frac{1}{\beta_0 h} \sum^n (\alpha_i \dot{q}_{n+1-i} - h\beta_i \ddot{q}_{n+1-i}) \quad (49)$$

$\alpha_0$  ja  $\beta_0$  ovat integrointimenetelmästä riippuvia vakioita.

$$\text{ED1} \quad q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n$$

$$\text{TD1} \quad q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_{n+1}$$

$$\text{TD2} \quad \dot{q}_{n+1} = [3q_{n+1} - 4q_n + q_{n-1}]/2h$$

$$\text{TD3} \quad \dot{q}_{n+1} = [11q_{n+1} - 18q_n + 9q_{n-1} - 2q_{n-2}]/6h$$

$$\text{TR} \quad \dot{q}_{n+1} = 2[q_{n+1} - q_n]/h - \dot{q}_n \quad (50)$$

$$\text{H} \quad \ddot{q}_{n+1} = 2[q_{n+1} - 5q_n + 4q_{n-1} - q_{n-2}]/h^2$$

ED = eteenpäin differenssi

TD = taaksepäin differenssi

TR = trapetsikaava

H = Houboltin menetelmä

Muita integrointimenetelmiä

Runge-Kutta-tyyppiset integrointimenetelmät ovat erittäin tarkkoja ja soveltuvat aloitusmenetelmiksi. Ohjelmassa on käytetty Runge-Kutta-Nyström-menetelmää aloitusmenetelmänä [4] ja [5]. Newmarkin  $\beta$ -menetelmä ja Wilsonin  $\theta$ -menetelmä ovat käytännöllisiä, koska ne voidaan ohjelmoida yhtenevästi ja integrointimenetelmän ominaisuudet muuttuvat parametrien  $\beta$ ,  $\gamma$  ja  $\theta$  muuttuessa.

Muunmuassa tunnetut ohjelmat Nonsap ja Adina käyttävät näitä menetelmiä.

Newmarkin  $\beta$ -menetelmän /6/ ja /7/ siirtymä ja nopeus ovat

$$q_{n+1} = q_n + \dot{q}_n h + [(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{q}_n + \beta\ddot{q}_{n+1}]h^2 \quad (51)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + [(1 - \gamma)\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1}]h \quad (52)$$

$\gamma = \frac{1}{2}$   $\beta = 0$  menetelmä on keskeisdifferenssimenetelmä

"  $\beta = 1/6$  lineaarinen kiihtyvyyden menetelmä

"  $\beta = 1/4$  trapetsikaava

Wilsonin  $\theta$ -menetelmässä /6/ ja /7/ on kiihtyvyyksien välillä yhteys

$$\ddot{q}_{i+\theta} = \ddot{q}_i + \theta\ddot{q}_{i+1} \quad (53)$$

Kun tämä sijoitetaan lineaariseen kiihtyvyyden menetelmän kaavaan saadaan nopeudeksi ja siirtymäksi

$$\dot{q}_{n+1} = \frac{3}{\theta h} (q_{n+\theta} - q_n) + (1 - \frac{3}{2\theta})\dot{q}_n + (1 - \frac{3}{2\theta})h\ddot{q}_n \quad (54)$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{\theta^3} q_{n+\theta} + (1 - \frac{1}{\theta^3}) q_n + (1 - \frac{1}{\theta^2}) \dot{q}_n h + (1 - \frac{1}{\theta}) \frac{h^2}{2} \ddot{q}_n \quad (55)$$

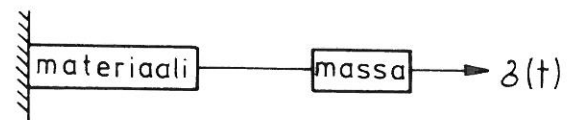
Wilsonin  $\theta$ -menetelmä on ehdoitta stabiili, kun  $\theta > 1.37$  yleensä käytetään arvoa  $\theta = 1.4$ . Mikäli  $\theta$ :n arvo pannaan suureksi kasvavat sekä ratkaisun vääristymä että numeerinen vaimennus.

Newmarkin menetelmissä  $\gamma = .15$  ja  $\beta = .25$  eli trapetsikaava on myös ehdoitta stabiili ja lisäksi trapetsikaava ei tee lainkaan energiavirhettä. Stabiiliusehto pätee yhtälöryhmille, joiden jäykkyys pysyy vakiona tai kasvaa ajan mukana. Yhtälöryhmät, joiden jäykkyys pienenee, ovat yleensä ehdollisesti stabiileja.

## SOVELLUTUKSIA

### Yksivapausasteinen värähtelijä

Yksivapausasteista värähtelijää on käytetty esimerkkinä, jonka avulla on vertailtu eri integrointimenetelmien ominaisuuksia. Esimerkki on lähteestä [16].



Kuva 5 Yksivapausastevärähtelijä.

$$M = 2.5$$

$$K = 9860$$

$$\sigma_m = 750$$

$$\sigma(t) = 1000(1 - \frac{t}{1})$$

Epälineaarisisessa tapauksessa kuorma ja myötöraja ovat 10-kertaiset.

$$\sigma_m = 7500$$

$$\sigma(t) = 10000(1 - \frac{t}{1})$$

Viskoplastisessa tapauksessa muodonmuutosnopeus on laskettu kaavasta

$$\dot{\epsilon}_{vp} = 40(\frac{\sigma}{\sigma_m} - 1.)^5$$

Endokroonisessa tapauksessa ovat materiaalivakiot

$$E_t = 98.6$$

$$E = 9860$$

$$\alpha = 13.3$$

$$\beta = .133$$

Integrointimenetelmien käyttämä laskenta-aika

Vertailut on suoritettu Univac 1108 tietokoneella.

Menetelmä	materiaali	ajoaika/askel	suhde
CD	PL	.265	1
TR	PL	.861	3.3
H	PL	.777	2.9
W	PL	.611	2.3
R-K	PL	1.07	4.0
CD	VP	.34	1
H	VP	.90	2.6
CD	EK	.283	1
TR	EK	.829	2.9

CD = Keskeisdifferenssimenetelmä (Central Difference)

H = Houboltin menetelmä

W = Wilsonin  $\theta$ -menetelmä

R-K = Runge - Kutta-menetelmä

TR = Trapetsikaava

Iskuaallon eteneminen sauvassa

Problemaa on käsitelty lähteissä [12], [13], [14] ja [15]. Kimmoisen pitkittäisaallon etenemisnopeus aksiaalisessa tapauksessa on teoreettisesti

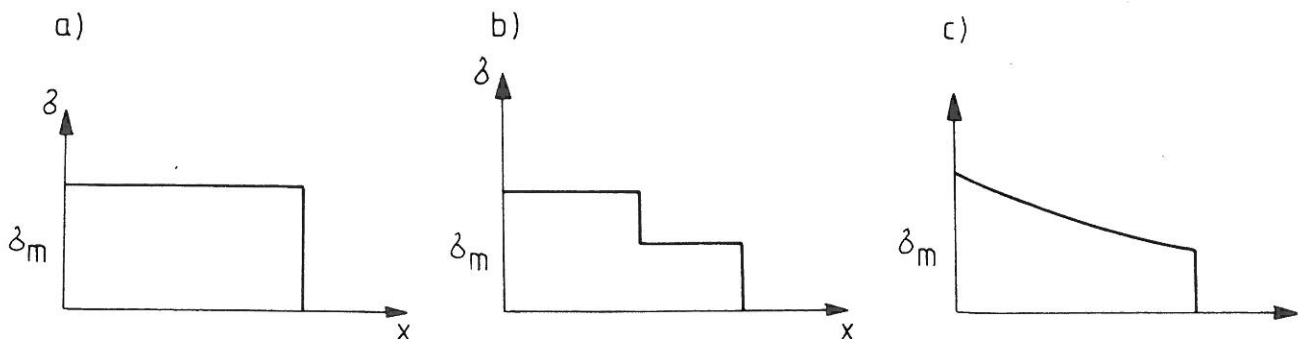
$$v = \sqrt{E/\rho} \quad (56)$$

Plastisessa tai viskoplastisessa aineessa pitkittäisaalto etenee nopeudella

$$v = \sqrt{(d\sigma/d\varepsilon)/\rho} \quad (57)$$

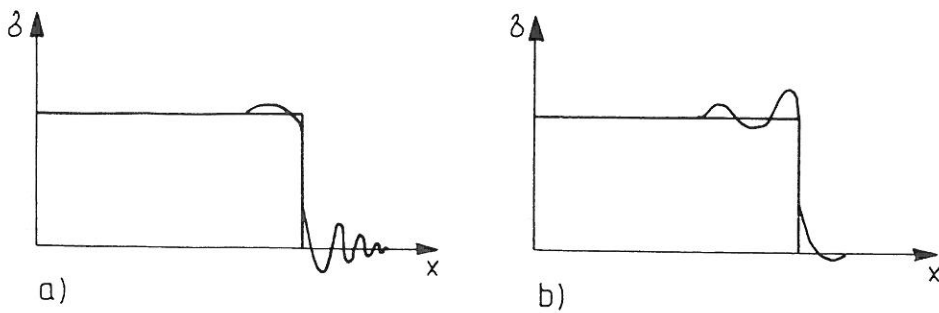
$\rho$  on aineen tiheys.

Teoreettisesti suorakaiteaalto kulkee sauvassa kuvan 7 mukaisesti.



Kuva 6 Suorakaiteen muotoisen jännitysaallon eteneminen a) kimmoisessa, b) plastisessa, c) viskoplastisessa aineessa.

Ratkaisua approksimoidaan sekä ajan että paikan suhteen polynomeilla. Polynomit ovat epäjatkuvia elementtien rajalla ja aikaintegroinnissa välin alku- ja loppupisteissä. Laskentaa nopeuttava massan diagonalisointi on epätarkempi kuin konsistentti massamatriisi, kun askelpituus on sama.



Kuva 7 Numeerisen integroinnin aiheuttama häiriöaalto a) aaltorintaman eteen b) aaltorintaman päälle.

Konsistentti massamatriisi aiheuttaa häiriöaallon aaltorintaman eteen ja diagonaalimassamatriisi aaltorintaman päälle (kuva 7).

Iskuaallon etenemistä on verrattu seuraavan esimerkin avulla

$$\begin{aligned}
 E &= 200000 \text{ N/mm}^2 & v_E &= 5E+6 \text{ mm/s} \\
 E_p &= 50000 \text{ N/mm}^2 & v_{Ep} &= 2.5E+6 \text{ mm/s} \\
 \rho &= 8.E-9 \text{ Ns}^2/\text{mm}^4 & \epsilon_{vp} &= 40 \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} - 1 \right) \\
 L &= 2000 \text{ mm (sauvan pituus)} & \alpha &= 750. \\
 L_e &= 20 \text{ mm (elementin pituus)} & \beta &= 250. \\
 \sigma_m &= 200 \text{ N/mm}^2 & &
 \end{aligned}$$

Eri materiaalilakeja noudattavien lieriöiden törmäys jäykkään alustaan

Lieriö on esimerkeissä jaettu 20 elementtiin. Sauvaelementin tapauksessa on käytetty kuutiollista Hermiten polynomia ja pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa 8-vapausasteista Lagrangen tyyppistä elementtiä.

Jäykän alustan tapauksessa on rakenteen alapäässä ehdollinen reunaehto

$$u_i = \begin{cases} 0 & \text{kun } u_i \leq 0 \\ u_i & \text{kun } u_i \geq 0 \end{cases} \quad (58)$$

$i$  käy läpi kaikki alustaan mahdollisesti koskettavat vapausesteet.

Kappaleen iskeytymistä on käsitelty esimerkiksi lähteissä [17] ja [18]. Kimmoisen alustan tapauksessa voidaan yhteensopivuusehdot törmäyksen tapahtumisesta irtoamiseen saakka määritellä kahdella tavalla.

Yksinkertaisin otaksoma on että alusta ja sylinteri erillisinä kappaleina laskettuina siirtyvät kummankin rakenteen reunaehtonurkkien summan puolikkaan verran kullakin askeleella.

$$u = (u_i + u_j)/2 \quad (59)$$

jossa  $i$  ja  $j$  käyvät läpi vastaavat reunaehtovapausasteet. Jos vaaditaan liikemäärän säilymistä reunaehtovapausasteille ehdoksi nopeuksille ja samoin massalla painotettua kiihtyvyyttä kiihtyvyyksille, edellisen ehdon lisäksi, on tulos tarkempi.

$$\dot{u} = [M_i \dot{u}_i + M_j \dot{u}_j] / [M_i + M_j] \quad (60)$$

$$\ddot{u} = [M_i \ddot{u}_i + M_j \ddot{u}_j] / [M_i + M_j] \quad (61)$$

Kuvassa 10 kimmainen sauva irtoaa hetkeillä  $.155E-3$  alustasta ja lähtönopeus on sama kuin tulonopeus. Muita materiaalilakeja noudattavat lieriöt kuluttavat osan energiasta pysyviin muodonmuutoksiin ja siten irtoamisnopeus on pienempi ja myös irtoamishetki myöhempi kuin kimmoisessa tapauksessa. Myös muualla kuin sauvan alapäässä on tapahtunut plastisia muodonmuutoksia. Tämä näkyy eri pisteiden välisistä eroista irtoamishetken jälkeen.

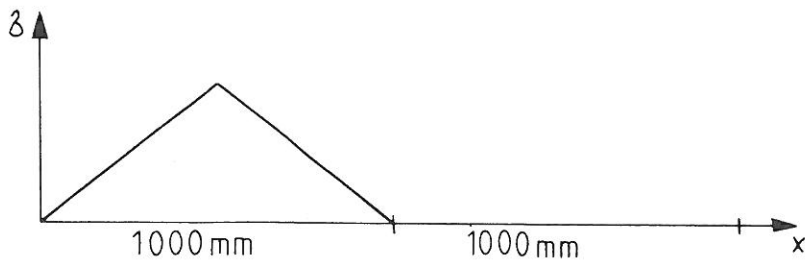
Kuvassa 11 on verrattu annettujen vapausasteiden vaikutusta ratkaisuun. Pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa tapahtuu myös säteen suuntaista siirtymää.

Pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa ei nopeudella 12 m/s tapahdu juuri lainkaan plastisia muodonmuutoksia ja nopeudella 15 m/s ei viskoplastinen ratkaisu eroa havaittavassa määrin kimmoisesta ratkaisusta kun  $\gamma = 40$ . ja  $N=5$ . Kuva 12.

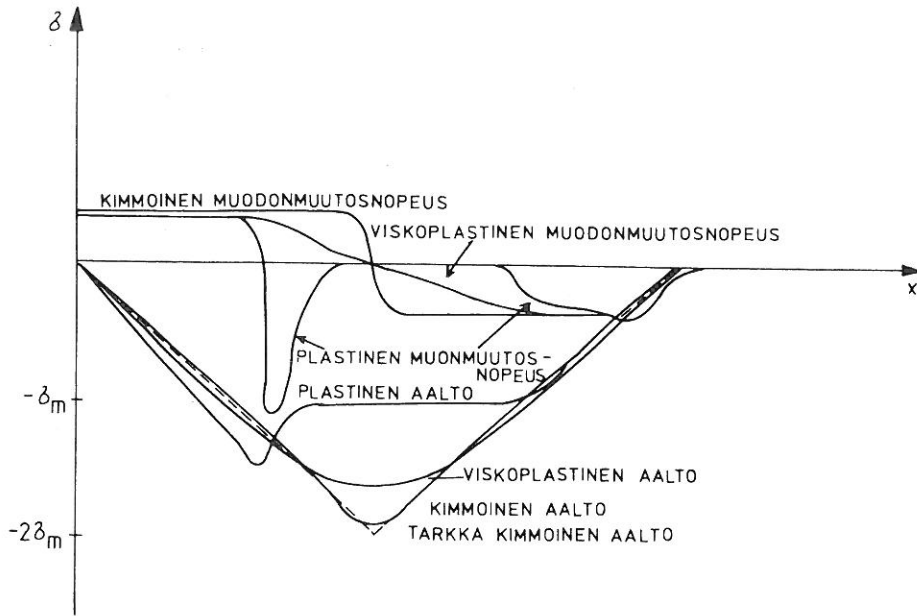
Irtoaminen jäykästä alustasta kestää kauemmin kuin kimmoisesta alustasta. Kuvassa 13 on verrattu sylinterin irtoamista kimmoisesta ja jäykästä alustasta. Esimerkkejä vertaamalla havaitaan myös, että suuremman tulonopeuden omaava kappale irtoaa alustasta nopeammin.

#### SYMBOLLUETTELO

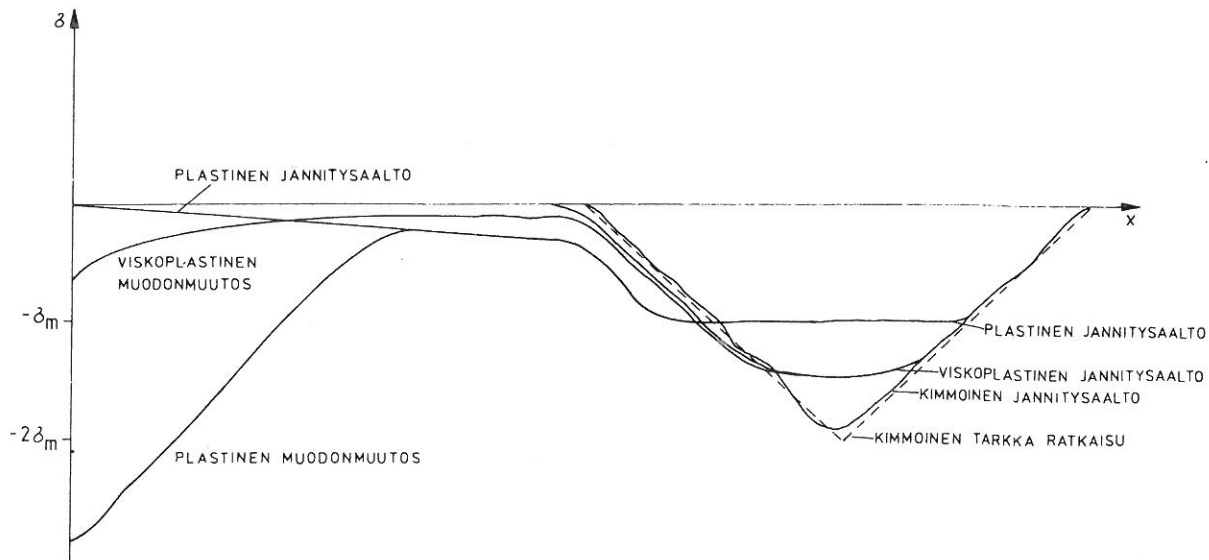
$\sigma$	jännitys
$\epsilon$	muodonmuuto
$u, v$	siirtymiä
$u, r$	paikkaderivaatta
$u$	aikaderivaatta
$\delta_u$	$u$ :n variaatio
$D$	materiaaliominaisuusmatriisi
$C$	vaimennusmatriisi
$M$	massamatriisi
$K$	jäykkyysmatriisi
$N$	muotofunktiot
$P$	hitaus- ja vaimennusvoimavektori
$t$	pintakuormavektori
$f$	tilavuusvoimavektori
$\rho$	tiheys
$\mu$	vaimennuskerroin
$q$	nurkkasiirtymä
$R$	sisäinen voimavektori
$J$	Jacobin matriisi
$Q$	kuormavektori
$E$	kimmokerroin



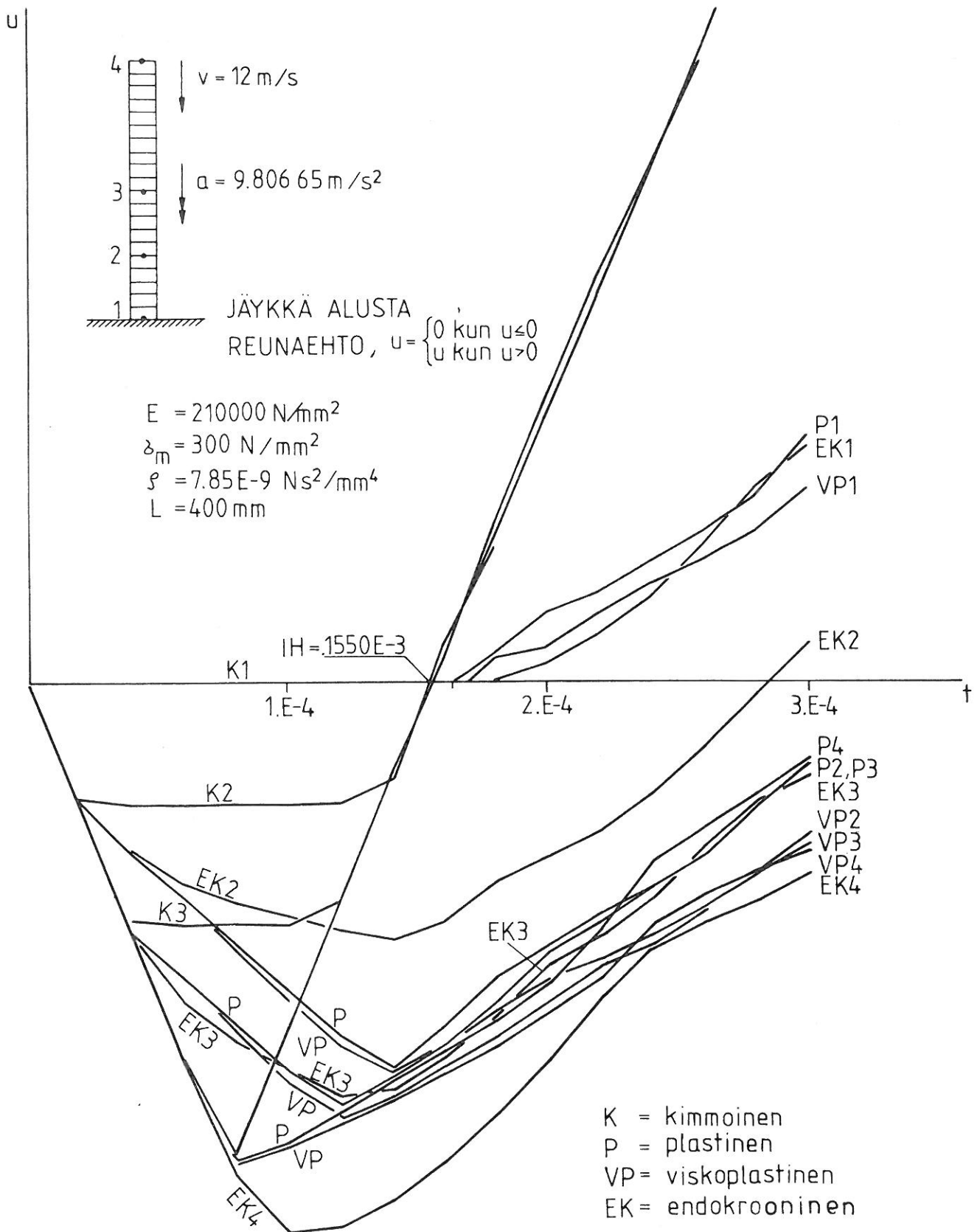
Kuva 8 Iskun muoto ja pituus.



Kuva 9a Jännitysaalto aksiaalisessa tapauksessa hetkellä 2.E-4s. Eri materiaalien vaikutus jännitysaaltoon sekä muodonmuutosnopeuteen. (Muodonmuutosnopeuden kuvaajissa on häiriöt poistettu.)

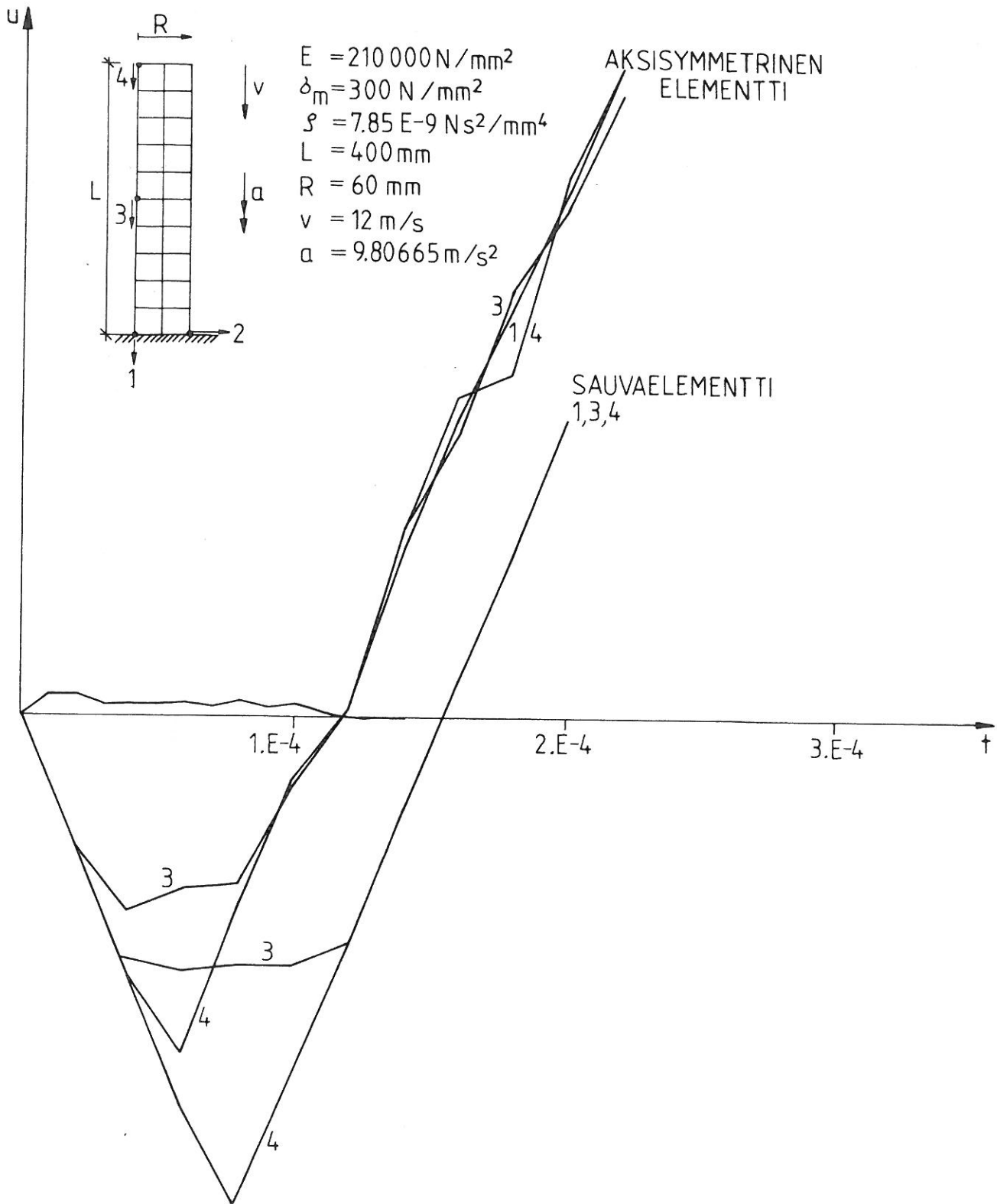


Kuva 9b Jännitysaalto aksiaalisessa tapauksessa hetkellä 4.E-4s. Eri materiaalien vaikutus jännitysaaltoon sekä plastiseen muodonmuutokseen.

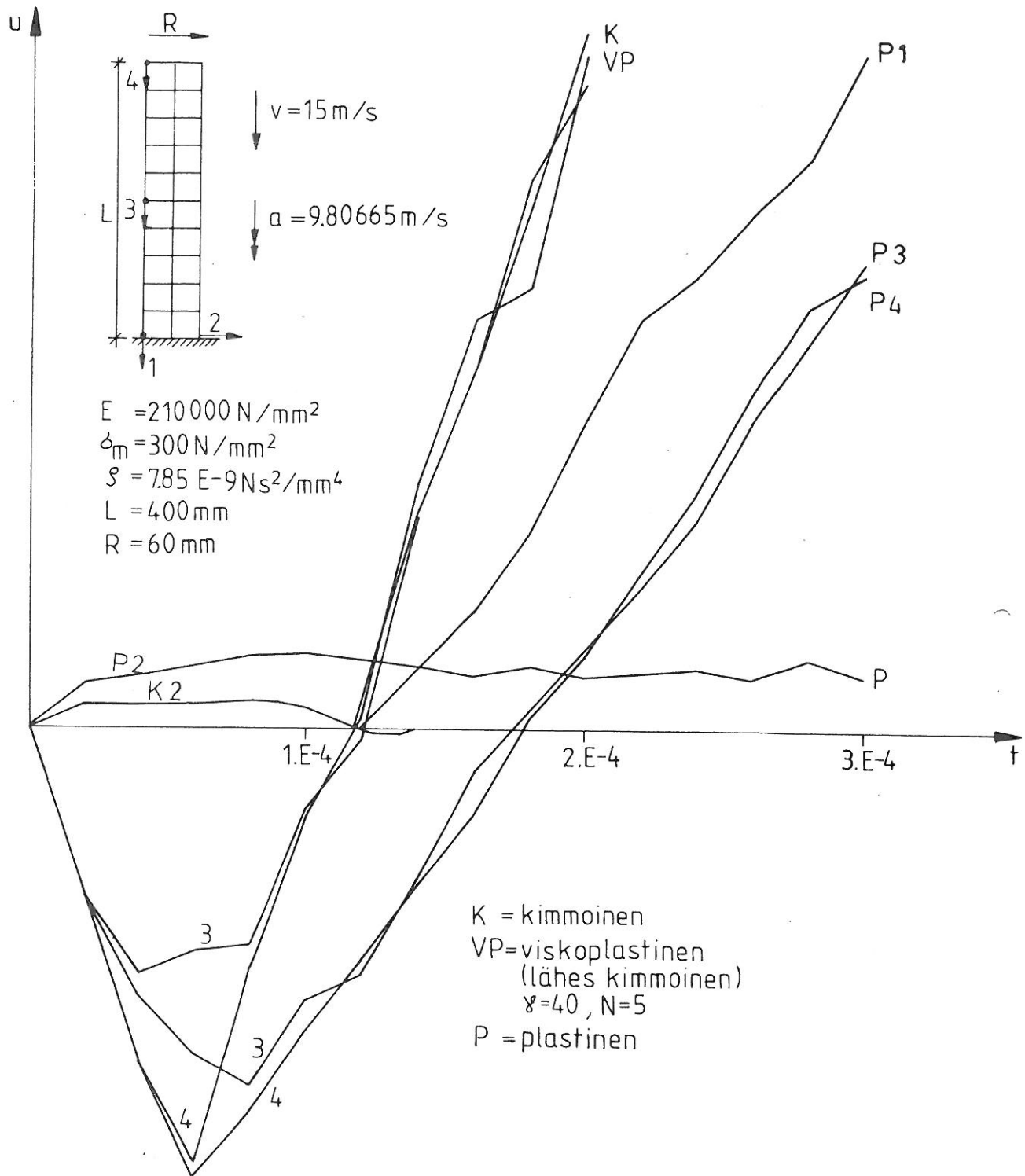


Kuva 10 Eri materiaalilakeja noudattavan sauvan törmäys jäykkään alustaan.

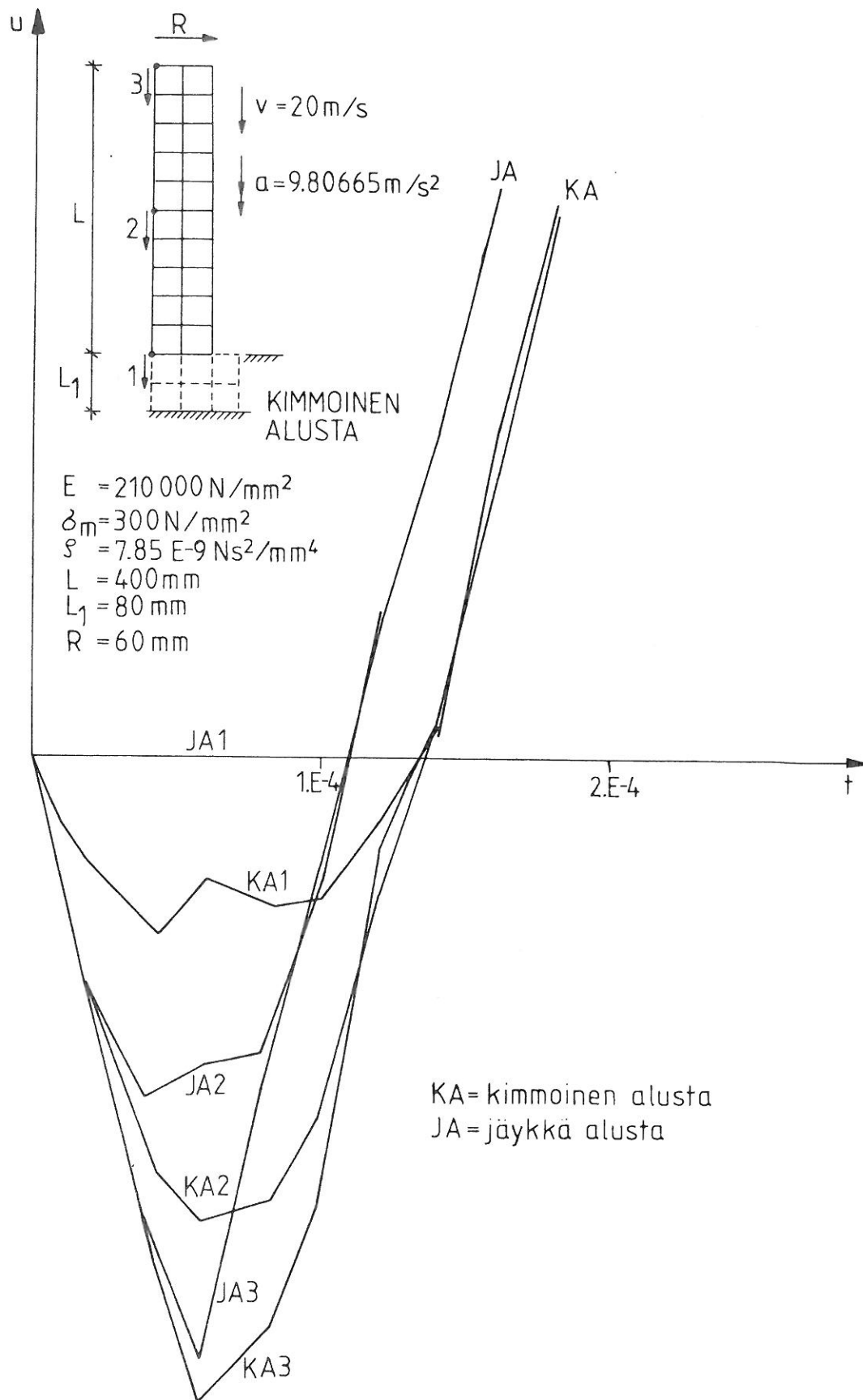




Kuva 11 Aksiaalisen ja pyörähdyssymmetrisen ratkaisun ero kimmoisessa tapauksessa.



Kuva 12 Eri materiaalilakeja noudattavan sylinterin törmäys jäykkään alustaan.



Kuva 13 Kimmoisen teräslieriön törmäys jäykkään ja kimmoiseen alustaan. KA = kimmoinen alusta, JA = jäykkä alusta.

$E^P$  myötölujenemisparametri  
 $\eta, \xi$  koordinaatteja

#### LÄHDEKIRJALLISUUS

- [1] Park, K.C., An improved stiffly stable method for direct integration of nonlinear structural dynamic equations. *J. Appl. Mech. ASME* 42 (1975), s. 464...470.
- [2] Henrici, P., *Discrete variable methods in ordinary differential equations*. New York, Wiley, 1962.
- [3] Cooke, C.H., A characterization of stiffly stable linear multistep methods. *Int. J. Num. Meth. in Eng.* 9 (1975), s. 117...124.
- [4] Fehlberg, E., Klassische Runge-Kutta-Nyström-Formeln mit Schrittweiten-Kontrolle für Differentialgleichungen  $\dot{x} = f(x)$ . *Comp.* 10 (1972), s. 305...315.
- [5] Fehlberg, E., Klassische Runge-Kutta-Formeln vierter und niedriger Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme. *Com.* 6 (1970), s. 61...71.
- [6] Bathe, K-J., Ramm, E., Wilson, E.L., Finite element formulation for large deformation dynamic analysis. *Int. J. Num. Meth. in Eng.* 4 (1972), s. 163...174.
- [7] Bathe, K-J., Wilson, E.L., *Numerical methods in finite element analysis*, Englewood Cliffs. New Jersey, Prentice-Hall, 1976.
- [8] Wood, R.D., Zienkiewicz, O.C., Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells. *Computers & Structures*, Vol. 7 (1977) pp. 725...735.
- [9] Novozhilov, V.V., *Foundations of the nonlinear theory of elasticity*. Graylock, Rochester, New York, 1953.
- [10] Perzyna, P., Fundamental problems in viscoplasticity. *Advances in Applied Mechanics* 9 (1966), s. 243...377.
- [11] Valanis, K.C., A theory of viscoplasticity without a yield surface, part I, General Theory, part II, application to mechanical behavior of metals. *Archiwum mechaniki stosowanej*. 23 (1971) s. 517...551.
- [12] Key, S.W., Beisinger, Z.E., The transient dynamic analysis of thin shells by the finite element method. 3rd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech. Report AD 785968, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 26-28, 1971.
- [13] Fost, R.B., Oden, T.J., Wellford, L.C. Jr., A finite element analysis of shocks and finite amplitude waves in one-dimensional hyper-elastic bodies at finite strains. *IJSS* 11 (1975) 4, s. 327...334.
- [14] Garnet, H., Armen, H., One dimensional elasto-plastic wave integration and boundary reflections. *Comp.* 5 (1975), s. 327...334.
- [15] Krieg, R.D., Key, S.W., Transient shell response by numerical time integration. *Int. J. Num. Meth. in Eng.* 7 (1975) s. 273...286.
- [16] Norris, C.H., Hansen, R.J., Holley, M.J., Biggs, J.M., Namyet, S., Minami, J.K., *Structural design for dynamic loads*. McGraw-Hill, New York, 1959.

- [17] Hughes, T.J.R., Taylor, R.J., Kanoknukulchai, W., A finite element method for large displacement contact and impact problems. U.S.-Ger. symp. on F.E.M. M.I.T. 1976.
- [18] Spilker, R.L., Wither, E.A., Theoretical and experimental studies of the nonlinear transient responses of plates subjected to fragment impact. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Tech. San Francisco 1977.
- [19] Zienkiewicz, O.C., The finite element method., 3 rd edition, McGraw-Hill, 1977.

*Martti Mikkola, prof., Suomen Akatemian tutkijaprofessori, Htkk, Otaniemi*  
*Hannu Sinisalo, dipl.ins., Suomen Akatemian tutkimusassistentti, Htkk, Otaniemi*  
*Markku Tuomala, dipl.ins., Suomen Akatemian tutkimusassistentti, Htkk, Otaniemi*