LUJITEMUOVILAMINAATIN KIMMO- JA LUJUUSOMINAISUUKSIEN TARKASTELUPERIAATTEET

Pentti Mäkeläinen

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 11
No. 1 1978 s. 1...16.

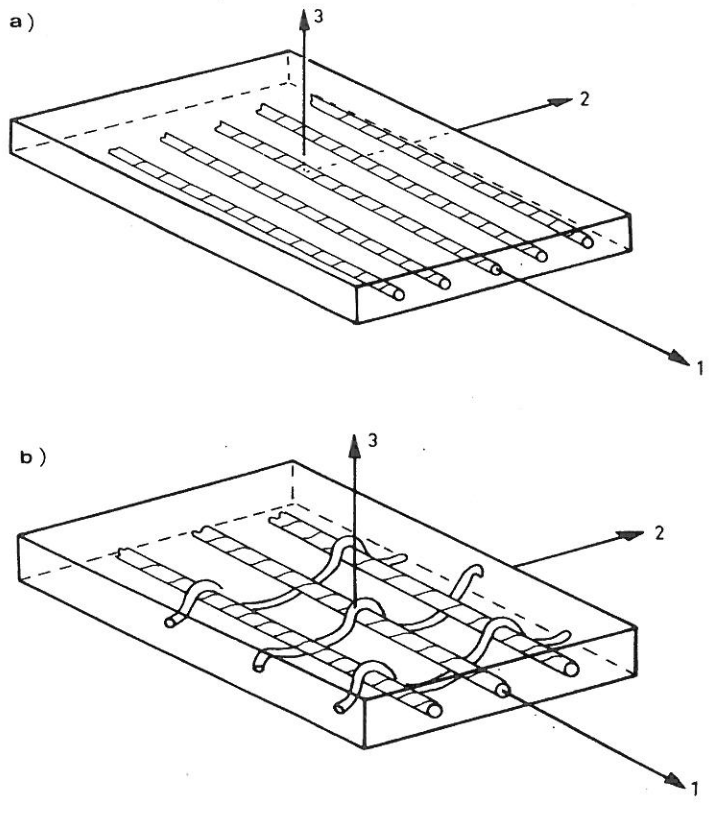
YHTEENVETO: Artikkeli on yleisluonteinen selvitys lujitemuovilaminaattien mekaanisen käyttäytymisen tarkasteluperiaatteista. Aihetta käsittelevän suomenkielisen tekstin vähäisyydestä johtuen kirjoitukseen on sisällytetty myös lujitemuovilaminaatteihin liittyvän perusterminologian selvittelyä. Ortotrooppisen laminaattikerroksen tasojännitystilan selvittelyn taustaksi on luotu lyhyt katsaus yleisiin anisotrooppisten aineiden jännitys-muodonmuutosyhteyksiin. Laminaattikerroksen tasojännitystilan tarkastelun jälkeen on esitetty tärkeimmät käytössä olevat laminaattikerroksen kaksiakseliset lujuuskriteerit. Tämän jälkeen on siirrytty itse lujitemuovilaminaatin lujuus- ja jäykkyystarkasteluun, mikä on aloitettu laminaattikerroksen kimmovakioiden määrittämisperiaatteiden selvittelyllä. Laminaatin jäykkyystarkastelun yhteydessä on esitetty myös jäykkyysvakioiden laskentakaavoja.

JOHDANTO

Lujitemuovit (LM), joiksi tavallisimmin käsitetään kuiduilla vahvistetut eli lujitetut muovit, kuuluvat ns. yhdistettyjen aineiden (engl. composite materials, "komposiittiaineet") laajaan ryhmään. Yhdistettyjen aineiden mekaanisten ominaisuuksien monet erityispiirteet ja niiden joidenkin ominaisuuksien täysi poikkeaminen perinteisten rakennemateriaalien ominaisuuksista tulevat esiin erityisen selvästi juuri kuitulujitteisissa muoveissa. Kaksikomponenttisina aineina lujitemuovit ovat *epähomogeenisia* eli *heterogeenisia* ; siten niiden ominaisuudet muuttuvat aineessa paikkakoordinaateista riippuen. Lujitemuovit ovat tämän lisäksi myös *anisotrooppisia* aineita ts. niiden mekaaniset ominaisuudet aineen eri pisteissä riippuvat siitä pisteen kautta kulkevan suoran tai tason suunnasta, jonka suhteen tarkastelu suoritetaan.

Lujitemuovien mekaanisen käyttäytymisen tarkastelu voi pohjautua kahteen erilaiseen tarkastelutapaan: *mikromekaaniseen* tai *makromekaaniseen* tarkasteluun. Mikromekaanisessa tarkastelussa tutkitaan mikrotasolta käsin kuitulujitteen ja muovimatriisin keskinäistä vuorovaikutusta osana koko heterogeenisen lujitemuovin käyttäytymistä. Makromekaanisessa tarkastelussa lujitemuovimateriaali otaksutaan kokonaisuutena homogeeniseksi ja kuitulujitteen sekä muovimatriisin vaikutus mekaanisessa käyttäytymisessä ilmaistaan vain niiden keskimääräisinä, näennäisinä mekaanisten ominaisuuksien arvoina ilman osakomponenttien välisen vuorovaikutuksen tarkkaa huomioonottamista. Tässä artikkelissa lujitemuovia tarkastellaan lähes yksinomaan makromekaanista tapaa käyttäen.

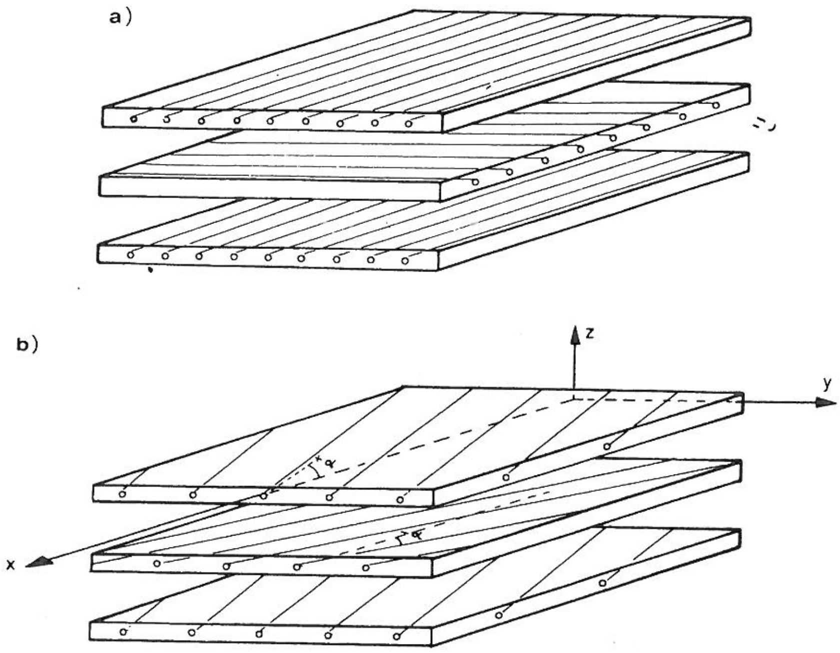
Lujitemuovin lujitteet, kuidut, voivat olla karkeasti ottaen muovimatriisissa joko lyhyinä (esimerkiksi ns. whiskersit) tai katkottuina kuituina jakautuneina tasaisesti mutta järjestymättömästi matriisiin, tai pitkinä suunnattuina kuitumuodostelmina. Teknisen käytön kannalta kuitulujitteisen muovin rakenteellinen perusmuoto on yhdensuuntaiskuitujen tai kudottujen kuitujen ja niiden ympärillä olevan muovimatriisin muodostama litteä *laminaattikerros* (engl. lamina,"(lujitemuovi)säle"). Kuvassa 1 on esitetty kaaviot yhdensuuntaiskuitujen ja kudottujen kuitujen muodostamista laminaattikerroksista.



Kuva 1 Kaksi laminaattikerrosten päätyyppiä: a) yhdensuuntaiskuiduilla b) kudotuilla kuiduilla lujitettu kerros.

Kahden tai useamman laminaattikerroksen yhteenliittämisellä (laminoinnilla) aikaansaatua yhtenäistä rakenteellista kokonaisuutta sanotaan *laminaatiksi* (engl. laminate). Kuitujen suuntautuneisuus on yleensä erilainen laminaatin päällekkäisissä kerroksissa. Laminoinnilla saadaan siten rakennemateriaalin lujuus ja jäykkyys suunnatuksi sopivaksi ulkoisen kuormituksen vastaanottamiseen.

Laminaatin päällekkäisten kerrosten kuitujen suunnat sijoitetaan tavallisimmin kohtisuoraan toisiaan vastaan, jolloin syntyy nk. *ristikkäislaminaatti* (engl. cross-ply laminate). Kuitusuunnat voidaan järjestää päällekkäisissä kerroksissa myös niin, että ne muodostavat kiinteän perussuoran eri puolille vuorotellen vakiosuuruisen terävän kulman. Näin muodostuu nk. *vinokulmalaminaatti* (engl. angle-ply laminate). Kuvassa 2 on esitetty periaatepiirrokset ristikkäislaminaatin ja vinokulmalaminaatin rakenteesta.



Kuva 2 Ristikkäislaminaatin (a) ja vinokulmalaminaatin (b) rakenne (kerrokset irroitettuina toisistaan).

Laminaatit muodostetaan monesti käyttämällä samanaikaisesti molempia edellä mainittuja laminointitapoja vuorotellen eri kerroksissa. Laminaatin kerroksiin voidaan sisällyttää yhdensuuntais- ja kuitukudoskerrosten ohella myös ns. kuitumattokerroksia. Näissä laminaattikerroksissa lujitteena on katkotuista kuiduista huopamaiseksi levyksi muodostettu kuitumatto.

Seuraavassa esityksessä lujitemuovilaminaattia tarkastellaan makroskooppisesti homogeenisena aineena. Molemmat sekä lujiteaine, kuidut, että matriisiaine, muovi, otaksutaan homogeenisiksi ja isotrooppisiksi aineiksi, jotka toimivat rajatta lineaarisina kimmoisina. Muovimatriisin ajasta riippuvan käyttäytymisen, viskoelastisen käyttäytymisen, vaikutusta ei oteta mukaan seuraavaan laminaattitarkasteluun.

LAMINAATTIKERROKSEN KIMMO- JA LUJUUSOMINAISUUDET

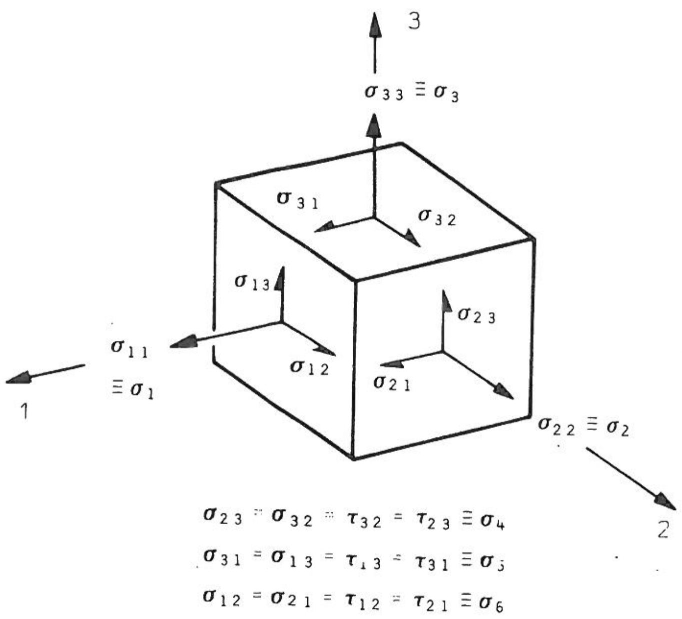
Anisotrooppisten aineiden jännitys-muodonmuutosyhteydet

Yleistetty Hooke'n laki, joka ilmaisee kolmidimensioiset jännitys-muodonmuutosyhteydet aineessa, voidaan esittää lyhennetyin merkinnöin seuraavasti:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad (i,j=1,2,...,6) \tag{1}$$

Kaavan (1) toistuvaan indeksiin j sovelletaan summaussääntöä. Lyhennysmerkinnöin esitetyt jännityskomponentit σ_i ja venymäkomponentit ε_j vastaavat kuvan 3 mukaisesti tavallisia kaksi-indeksisinä merkittyjä jännitys- ja venymäkomponentteja.

Yhtälön (1) jäykkyysmatriisi $[C_{ij}]$ sisältää 6×6 eli 36 eri vakiota. Aineen muodonmuutosenergiatarkastelulla voidaan kuitenkin osoittaa, että jäykkyysmatriisi on symmetrinen ts. $C_{ij} = C_{ji}$. Niinpä aineen jäykkyysmatriisi sisältää silloin yleisessä tapauksessa 21 (=36-30/2) erisuurta vakiota, kimmo- eli elastisuusvakiota. Aineen jännitysmuodonmuutosyhteydet voidaan esittää siten yleisesti seuraavan matriisiyhtälön avulla:



Kuva 3 Jännityskomponentit ja niiden merkinnät.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

Tämä on yleisin jännitys-muodonmuutosyhteyksien esitysmuoto lineaariselle kimmoiselle aineelle. Itse asiassa matriisiyhtälö (2) määrittelee *anisotrooppisen aineen*, joka siis sisältää kolmidimensioisessa tapauksessa kaikkiaan 21 eri kimmovakiota.

Anisotrooppisessa aineessa ei ole löydettävissä yhtään tasoa, jonka suhteen sen kimmo-ominaisuudet olisivat symmetriset. Jos aineessa on yksi taso, esimerkiksi taso 1-2, jonka suhteen sen kimmo-ominaisuudet ovat symmetriset, tällaisen aineen jäykkyysmatriisi $[C_{ij}]$ sisältää silloin nollatermit alkioiden C_{14}, C_{15}, C_{24}, C_{25}, C_{34}, C_{35}, C_{46} ja C_{56}:n kohdilla päälävistäjän molemmilla puolilla. Tämä ns. *monokliinisen aineen* jäykkyysmatriisi sisältää siten kolmidimensioisessa tapauksessa kaikkiaan 13 riippumatonta kimmovakiota.

Jos aineessa on kaksi toisiinsa nähden kohtisuoraa tasoa, joiden suhteen vallitsee kimmo-ominaisuuksien symmetria, silloin tämän symmetrian täytyy vallita kolmannenkin, näitä molempia tasoja vastaan kohtisuoran tason suhteen. Aineen jännitys-venymäyhteydet ilmaistuna koordinaatistossa, jonka akselit ovat edellä mainittujen kohtisuorien tasojen leikkaussuoria, ovat silloin

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

Tämä matriisiyhtälö määrittelee *ortotrooppisen* (ortogonaalisesti isotrooppisen) *aineen*. Matriisiyhtälöstä (3) näkyy mm. se, että ortotrooppisessa aineessa normaalijännitysten (σ_1, σ_2, σ_3) ja liukumien (γ_{23}, γ_{31}, γ_{12}) välillä ei ole minkäänlaista yhteyttä tai vuorovaikutusta. Ortotrooppisen aineen jäykkyysmatriisi sisältää siten kolmidimensioisessa tapauksessa 9 riippumatonta kimmovakiota.

Jos aineen jokaisessa pisteessä on olemassa yksi taso, jossa mekaaniset ominaisuudet ovat samat tason kaikissa suunnissa, tällaista ainetta sanotaan *poikittais-* eli *transversaali-isotrooppiseksi*. Esimerkiksi jos taso 1-2 on sellainen taso, jossa aineen ominaisuudet ovat samat tason kaikissa suunnissa eli taso 1-2 on isotropiataso, silloin indeksit 1 ja 2 ovat korvattavissa toinen toisillaan matriisiyhtälön (3) eri termeissä. Käyttämällä indeksia 1 yhteisenä indeksinä transversaali-isotrooppisen aineen jännitys-venymäyhteydet voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

Transversaali-isotrooppisella aineella on siten yleisessä tapauksessa 5 riippumatonta kimmovakiota.

Ainetta, jossa on äärettömän monta tasoa, joiden suhteen sen mekaaniset ominaisuudet ovat symmetriset, sanotaan tunnetusti *isotrooppiseksi*. Isotrooppisen aineen kolmidimensioiset jännitys-muodonmuutosyhteydet ovat matriisiyhtälön (4) mukaiset, kun jäykkyysmatriisiin asetetaan $C_{13} = C_{23} = C_{12}$ ja $C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})$. Aineen 2 riippumatonta kimmovakiota C_{11} ja C_{12} voidaan kirjoittaa kimmomoduulin E, liukumoduulin G ja Poisson'in vakion ν avulla seuraavasti:

$$C_{11}=E/(1-\nu^2), \quad C_{12}=\nu C_{11}, \quad \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})=E/2(1+\nu)=G \qquad (5)$$

Aineiden mekaaninen käyttäytyminen on monesti edullisempaa esittää venymä-jännitysyhteytenä kuin jännitys-venymäyhteytenä. Esimerkiksi ortotrooppisel-le aineelle yhtälön (3) käänteisesitys saadaan muotoon

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & \nu_{21}/E_2 & \nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{12}/E_2 & 1/E_2 & \nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{13}/E_1 & \nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \qquad (6)$$

Kerroinmatriisi, joka on nyt nimeltään joustomatriisi, on ilmaistu kolmessa suunnassa mitattujen E- ja ν-arvojen sekä kolmessa tasossa mitattujen G-arvojen avulla. Poisson'in vakiot ν_{ij} on määritelty siten, että ensimmäinen indeksi i ilmaisee jännityksen (σ_i) suunnan ja toinen indeksi j suppeuman suunnan ts. $\nu_{ij} = \varepsilon_j/\varepsilon_i$. Joustomatriisin symmetrisyydestä seuraa se, että kimmomoduulien ja Poisson'in vakioiden välillä vallitsevat yhteydet

$$\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j \qquad (i,j=1,2,3) \qquad (7)$$

Ortotrooppisen aineen kolmidimensioisessa tarkastelussa tarvitaan siten 3 ν-arvoa ν_{12}, ν_{13} ja ν_{23}, koska loput 3 ν-arvoa voidaan ilmaista edellisten arvojen ja E-arvojen avulla.

Yhtälöstä (7) näkyy että, jos E-arvot kahdessa kohtisuorassa suunnassa poikkeavat huomattavasti toisistaan, silloin toinen ν-arvo voi kasvaa huomattavan suureksi. Ortotrooppisen aineen ν-arvoille ei siis päde isotrooppisen tapauksen ehto $-1<\nu<1/2$, vaan yhtälöstä (7) saatavat ehdot

$$\nu_{ij}<(E_i/E_j)^{1/2} \qquad (i,j=1,2,3) \qquad (8)$$

Tällöin joku ν-arvoista voi olla huomattavasti yli 1, monesti jopa suuruusluokkaa 2-3.

Ortotrooppisen laminaattikerroksen tasojännitystila

Kuvan 1 mukaisen ortotrooppisen laminaattikerroksen tasojännitystila ($\sigma_3=0$, $\tau_{23}=\tau_{31}=0$) edellyttää yhtälön (6) perusteella, että $\gamma_{23}=\gamma_{31}=0$ ja $\varepsilon_3=\nu_{13}\sigma_1/E_1+\nu_{23}\sigma_2/E_2$. Venymä-jännitysyhteydet voidaan kirjoittaa siten matriisiyhtälönä

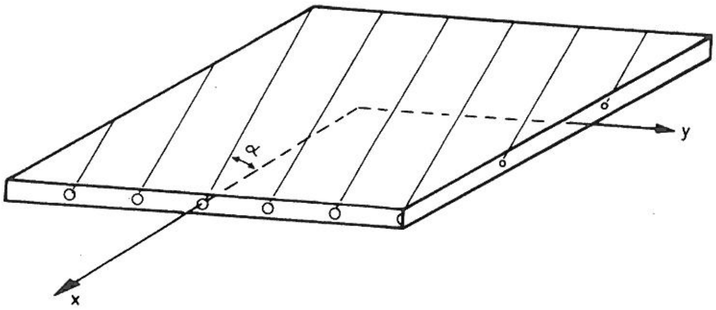
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & \nu_{12}/E_1 & 0 \\ \nu_{21}/E_2 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \qquad (9)$$

Tämän käänteisesitys, jännitys-venymäyhteys, on puolestaan seuraava:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & \nu_{21}E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ \nu_{12}E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{10}$$

Edellä esitetyistä yhteyksistä näkyy, että ortrooppisen laminaattikerroksen mekaanisen käyttäytymisen kuvaamiseen tarvitaan vain 4 riippumatonta kimmovakiota E_1, E_2, ν_{12} ja G_{12}, sillä yhtälöstä (7) saadaan riippuvuus $\nu_{12}E_2=\nu_{21}E_1$.

Laminaattikerrokselle, jossa kuitujen suunta muodostaa kuvan 4 mukaisesti kulman α kerroksen "luonnollisen" pääsuunnan x kanssa, jännitys-venymä- ja venymä-jännitysyhteydet x- ja y-suunnissa voidaan johtaa lähtien materiaalipääakselistossa 1-2 ilmaistujen jännitys- ja venymävektorien muunnoksista xy-koordinaatistoon:



Kuva 4 Laminaattikerroksen kuitulujitus yleisessä tapauksessa.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin 2\alpha \\ \frac{1}{2}\sin 2\alpha & -\frac{1}{2}\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \; ; \; \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{11}$$

Yhtälöitä (9) ja (10) vastaavat esitykset xy-koordinaatistossa saadaan silloin seuraaviksi:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{S}] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \; ; \; [\bar{S}] = \left([T]^{-1}\right)^T [S][T]^{-1} \tag{12}$$

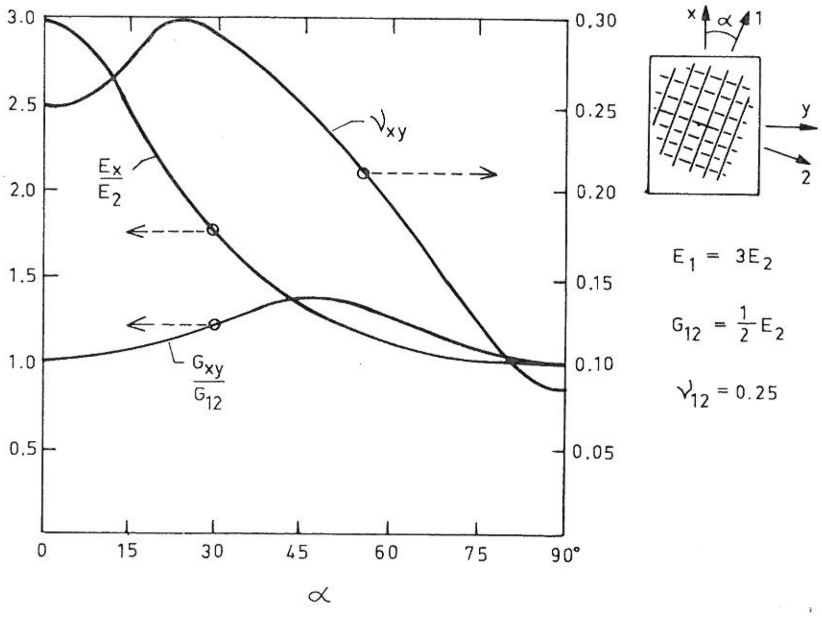
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \; ; \; [\bar{Q}] = [T][Q][T]^T \tag{13}$$

Edellä esitettyihin yhtälöihin sisältyvät joustomatriisin $[\bar{S}]$ ja jäykkyysmatriisin $[\bar{Q}]$ alkiot ovat mutkikkaita trigonometristen funktioiden sekä matriisin [S] ja matriisin [Q] alkioiden kombinaatioita. Matriisien $[\bar{S}]$ ja $[\bar{Q}]$ alkiot ovat kaikki nollasta poikkeavia. Koska siis alkiot $\bar{S}_{13}$, $\bar{S}_{23}$ ja $\bar{Q}_{13}$, $\bar{Q}_{23}$ ovat nollasta poikkeavia, niin liukuma xy-tasossa synnyttää aina myös normaalijännityksiä x- ja y-suunnissa tai käänteisesti, aksiaaliset venymät x- ja y-suunnissa aiheuttavat aina myös leikkausjännityksiä laminaattikerroksen xy-tasossa.

Ortotrooppisen laminaattikerroksen riippumattomat kimmovakiot mielivaltaisen xy-koordinaatiston suhteen voidaan lausua laminaattikerroksen pääsuunnissa 1 ja 2 mitattujen vakioiden E_1, E_2, ν_{12} ja G_{12} avulla vertaamalla keskenään yhtälöiden (9) ja (12) joustomatriisien alkioita. Kimmovakioille E_x, E_y, ν_{xy} ja G_{xy} saadaan silloin seuraavat yhtälöt:

$$
\begin{aligned}
1/E_x &= \cos^4\alpha/E_1 + \tfrac{1}{4}(1/G_{12} - 2\nu_{12}/E_1)\sin^2 2\alpha + \sin^4\alpha/E_2 \\
1/E_y &= \sin^4\alpha/E_1 + \tfrac{1}{4}(1/G_{12} - 2\nu_{12}/E_1)\sin^2 2\alpha + \cos^4\alpha/E_2 \\
\nu_{xy}/E_x &= (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)\nu_{12}/E_1 - \tfrac{1}{4}(1/E_1 + 1/E_2 - 1/G_{12})\sin^2 2\alpha \\
1/G_{xy} &= (1/E_1 + 1/E_2 + 2\nu_{12}/E_1)\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha/G_{12}
\end{aligned} \qquad (14)
$$

Kuvassa 5 on esitetty käyrinä kaavojen (14) riippuvuudet erikoistapauksessa $E_1 = 3E_2 = 6G_{12}$ ja $\nu_{12} = 1/4$.



Kuva 5 Kimmovakioiden muuttuminen pääsuuntien välisissä suunnissa.

Laminaattikerroksen lujuuskriteerit

Ortotrooppisen laminaattikerroksen lujuustarkastelun peruslähtökohtina ovat kerroksen pääsuunnissa mitatut lujuusarvot; siis kuitujen suuntainen aksiaalinen lujuus f_1, aksiaalinen lujuus f_2 kuitusuuntaa vastaan kohtisuorassa suunnassa sekä leikkauslujuus f_{12} kerroksen tasossa. Pääjännityksillä ja päävenymillä ei ole merkitystä laminaattikerroksen lujuustarkastelussa, koska niiden suunnat eivät yhdy tällaisessa ortotrooppisessa aineessa.

Laminaattikerroksen materiaalilla on usein erisuuret pääsuuntien lujuusarvot aksiaalisessa puristuksessa ja vedossa. Tällöin tarvitaan kaikkiaan 5 eri lujuusarvoa: f_1:n ja f_2:n arvot sekä puristuksessa että vedossa ja f_{12}. Kerroksen materiaalipääsuunnissa vallitseva leikkauslujuus f_{12} on siten riippumaton aksiaalisten veto- ja puristuslujuuksien eroavuudesta. Leikkausjännityksen merkillä eli sen suunnalla ei siis ole vaikutusta leikkauslujuuden arvoon. Tämä pätee vain laminaattikerroksen pääsuuntien 1 ja 2 suhteen. Jos leikkaus aiheutetaan esimerkiksi suunnissa, jotka muodostavat 45^o:n kulman pääsuuntien kanssa, leikkausjännityksen etumerkki vaikuttaa syntyvän kuitujen suuntaisen normaalijännityksen ja kuituja vastaan kohtisuoran normaalijännityksen etumerkkeihin. Kun laminaattikerroksen pääsuuntien veto- ja puristuslujuus ovat eri suuret, niin kerroksen leikkauslujuus mielivaltaisessa suunnassa riippuu silloin tarkasteltavan leikkausrasituksen suunnasta eli leikkausjännityksen etumerkistä.

Ortotrooppisen laminaattikerroksen 2-akselisen lujuuden määrittäminen, ts. kerroksen tasojännitystilan rajatilan määrääminen, voidaan tehdä klassisia murtumishypoteeseja soveltaen. Yksinkertaisin murtumiskriteeri on tällöin ns. *maksimijännityskriteeri*. Sen mukaan murtuminen tapahtuu silloin, kun joku laminaattikerroken pääsuunnissa mitatuista jännityksistä (σ_1, σ_2 tai τ_{12}) ylittää vastaavan pääsuunnan lujuusarvon (f_1, f_2 tai f_{12}). Toinen yksinkertainen murtumiskriteeri on ns. *maksimivenymäkriteeri*. Se on periaatteeltaan maksimijännityskriteerin kaltainen; murtumisrajatila on nyt määritelty venymien perusteella.

Edellä mainitut yksinkertaiset murtumiskriteerit ovat todellisiin laminaattikerrosten murtumistuloksiin verrattuna vielä melko karkeita murtumismalleja. Hill'in anisotrooppiselle aineelle v. 1948 esittämää Mises'in isotrooppisen aineen myötöehdon laajennusta

$$(G+H)\sigma_1^2+(F+H)\sigma_2^2+(F+G)\sigma_3^2-2H\sigma_1\sigma_2-2G\sigma_1\sigma_3-2F\sigma_2\sigma_3+2L\tau_{23}^2+2M\tau_{13}^2+2N\tau_{12}^2=1 \tag{15}$$

soveltaen Tsai [1,2] on johtanut koetuloksiin hyvin sopivan myötökriteerin, ns. *Tsai-Hill-murtumiskriteerin*. Laminaattikerroksen tasojännitystilan ($\sigma_3=\tau_{23}=\tau_{13}=0$) tapauksessa yhtälön (15) parametreille F, G, H, L, M ja N saadaan riippuvuudet pääsuuntien lujuuksiin f_1, f_2 ($=f_3$) ja f_{12} tarkastelemalla ehdon (15) avulla tilanteita, joissa kerrokseen vaikuttaa peräkkäin yksi jännityksistä σ_1, σ_2, σ_3 tai τ_{12} kerrallaan. Laminaattikerroksen materiaalipääsuuntien muodostamassa koordinaatistossa Tsai-Hill-murtumiskriteeriksi tulee silloin

$$(\sigma_1/f_1)^2-\sigma_1\sigma_2/f_1^2+(\sigma_2/f_2)^2+(\tau_{12}/f_{12})^2=1 \tag{16}$$

Laminaattikerroksen mielivaltaisessa suunnassa x vaikuttava aksiaalinen jännitys σ_x, jonka suunta muodostaa kulman α kuitusuunnan 1 kanssa, aiheuttaa kerrokseen seuraavan tasojännitystilan:

$$\sigma_1=\sigma_x\cos^2\alpha, \quad \sigma_2=\sigma_x\sin^2\alpha, \quad \tau_{12}=-\tfrac{1}{2}\sigma_x\sin 2\alpha \tag{17}$$

Sijoittamalla nämä jännitysten lausekkeet yhtälöön (16) tulokseksi saadaan Tsai-Hill-murtumiskriteeri laminaattikerroksen aksiaaliselle vedolle tai puristukselle mielivaltaisessa suunnassa

$$\cos^4\alpha/f_1{}^2+\frac{1}{4}(1/f_{12}{}^2-1/f_1{}^2)\sin^2 2\alpha+\sin^4\alpha/f_2{}^2=1/\sigma_x{}^2 \qquad (18)$$

Kriteerit (16) ja (18) ovat osoittautuneet huomattavasti paremmin koetuloksiin sopiviksi kuin maksimijännitys- tai maksimivenymäkriteerit.

Laminaattikerroksille on sovellettu monia muitakin murtumiskriteerejä kuin mitä edellä on mainittu. Muun muassa nk. Norris-Ashkenazi-murtumiskriteeriä [3,4], joka on yhtälön (16) "riisuttu muoto" ilman sen toista tekijää eli

$$(\sigma_1/f_1)^2+(\sigma_2/f_2)^2+(\tau_{12}/f_{12})^2=1, \qquad (19)$$

on sovellettu paljon lasikuitulujitteisiin laminaattikerroksiin. Mutkikas nk. Tsai-Wun tensoriteoria [1], missä murtopinnan yhtälö jännitysavaruudessa on yleistä muotoa

$$F_i\sigma_i+F_{ij}\sigma_i\sigma_j=1 \qquad (i,j=1,...,6), \qquad (20)$$

sisältää yleistetyn eri jännityksien välisen vuorovaikutuksen huomioonottavan termin (F_{ij}). Tasojännitystilassa tämä termi (F_{12}) sisältää aksiaalisten lujuuksien (f_1 ja f_2) sekä kaksiakselisen murtolujuuden välisen riippuvuuden. Tsai-Wun tensoriteoria on syntynyt vasta tämän vuosikymmenen alkupuolella, joten sen käyttökelpoisuudesta ei ole vielä riittävästi tutkimustulosten antamaa tietoa.

LUJITEMUOVILAMINAATIN JÄYKKYYS- JA LUJUUSTARKASTELU

Laminaattikerroksen kimmovakiot

Lujitemuovilaminaattikerroksen kimmovakiot määritetään tavallisimmin yksinkertaistetulla mikromekaanisella tarkastelulla, missä perusotaksumana on se, että matriisin (m, matrix) ja kuidun (f, fiber) venymät lujitesuunnassa ovat yhtäsuuret. Laminaattikerroksen kimmomoduuli kuitujen suunnassa, E_1, voidaan esittää silloin ns. *seossäännön* avulla seuraavasti:

$$E_1=V_fE_f+(1-V_f)E_m \qquad (21)$$

Kaavassa (21) V_f merkitsee kuitujen tilavuusosuutta ($V_f=A_f/A$) laminaattikerroksessa, E_f kuidun ja E_m matriisiaineen kimmomoduulia. Kimmomoduuli E_2 kuituja vastaan kohtisuorassa suunnassa saadaan olettamalla jännityksen σ_2 vaikuttavan samansuuruisena kuitujen pituusleikkauksessa ja matriisiaineessa. E_2:lle voidaan kirjoittaa silloin lauseke

$$E_2=E_fE_m/[V_fE_m+(1-V_f)E_f] \qquad (22)$$

Poisson'in vakion ν_{12} määritysyhtälöksi tulee vastaavalla tavalla kuin E_1:n tarkastelussa ns. seossääntö:

$$\nu_{12}=V_f\nu_f+(1-V_f)\nu_m \qquad (23)$$

Liukumoduuli G_{12} saadaan samantyyppisellä tarkastelulla kuin E_2:ta määritettäessä muotoon

$$G_{12} = G_f G_m / V_f G_m + (1-V_f) G_f \tag{24}$$

Seossääntöä on esitetty myös modifioidussa muodossa, mikä on saatu tarkennetulla tarkastelulla eli tarkastelemalla kuidun ja sitä ympäröivän matriisiaineen kolmidimensioista jännitystilaa. Tällöin esimerkiksi E_1:n lauseke (21) on modifioitu muotoon

$$E_1 = V_f E_f + (1-V_f) E_m / (1-2\nu_m^2) \tag{25}$$

Kuitujen ja muovihartsin muodostaman yhdistetyn aineen tarkat kimmoteoriaan pohjautuvat mikromekaaniset tarkastelut antavat kimmovakioille E_1, E_2, ν_{12} ja G_{12} mutkikkaita lausekkeita, jotka sisältävät kuitu- ja matriisiaineen kimmovakioiden sekä kuitutilavuussuhteen lisäksi myös kuitujen keskinäisestä asemasta riippuvan parametrin. Halpin ja Tsai [1] ovat yksinkertaistaneet näitä lausekkeita ja esittäneet niiden approksimoituina lausekkeina käyttökelpoiset nk. *Halpin-Tsai yhtälöt* kimmovakioiden määrittämiseen. Ne voidaan esittää kolmena eri yhtälönä, joista kaksi ensimmäistä yhtälöä ovat seossääntöyhtälöt (21) ja (23). Kolmas yhtälö on yhteisesitys vakioille E_2, G_{12} sekä ν_{23} ja se on muotoa

$$M/M_m = (1+\zeta\eta V_f)/1-\zeta V_f), \tag{26}$$

missä

$$\eta = (M_f/M_m - 1)/M_f/M_m + \xi) \tag{27}$$

Symboli M voi olla E_2, G_{12} tai ν_{23}, jolloin vastaavasti M_f:n paikalle tulee E_f, G_f tai ν_f ja M_m:n paikalle E_m, G_m tai ν_m. Parametri ξ on nk. kuitulujitusmitta ja sen arvo riippuu kuidun poikkileikkauksen muodosta, kuitujen järjestyksestä laminaattikerroksen poikkileikkauksessa sekä kuormitustavasta. Niinpä ξ:llä on eri arvo määritettäessä E_2:ta ja G_{12}:ta. Tavallisille ympyräpoikkipintaisille kuiduille, jotka asettuvat laminaattikerroksen poikkileikkauksessa neliöverkkoon, $\xi=2$ pätee E_2:ta laskettaessa ja $\xi=1$ G_{12}:ta laskettaessa.

Halpin-Tsai yhtälöiden ohella nk. *Puck'in yhtälöitä* [4,5] on myös käytetty laminaattikerroksen kimmovakioiden määrittämiseen. Näissäkin yhtälöissä E_1:lle ja ν_{12}:lle käytetään seossääntöyhtälöitä (21) ja (23). E_2:lle ja G_{12}:lle Puck'in yhtälöt antavat lausekkeet

$$E_2 = \frac{E_m}{1-\nu_m^2} \cdot \frac{1+0.85V_f^2}{(1-V_f)^{5/4} + V_f E_m/(1-\nu_m^2)E_f} \tag{28}$$

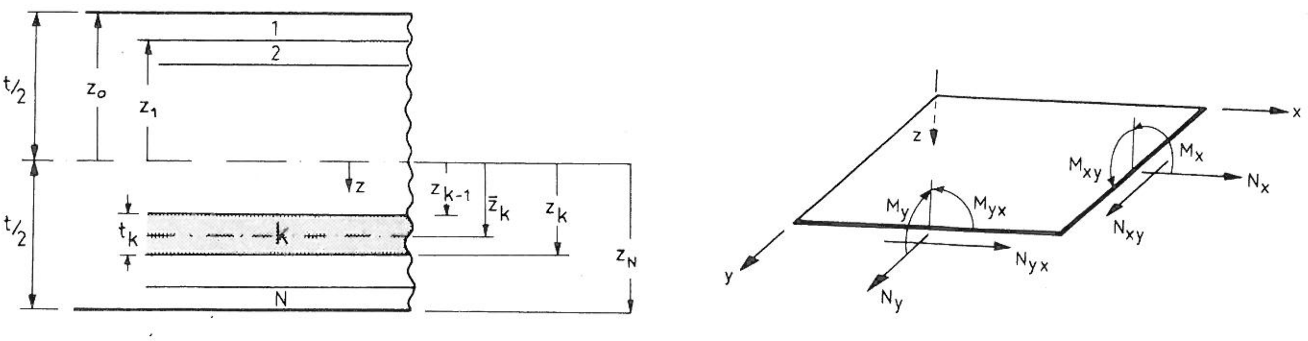
$$G_{12} = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \cdot \frac{1+0.60V_f^{1/2}}{(1-V_f)^{5/4}+V_f(1+\nu_m)E_f/(1+\nu_f)E_m} , \qquad (29)$$

jotka sisältävät empiirisesti määritettyjä "korjauskertoimia". Sekä Puck'in yhtälöistä että Halpin-Tsai yhtälöistä on tehty erilaisia modifioituja muotoja, jotka soveltuvat käytettäviksi tietyntyyppisten laminaattikerrosten tarkastelussa.

Laminaatin jäykkyystarkastelu

Kahden tai useamman laminaattikerroksen yhteenliittämisellä aikaansaadun yhtenäisen laminaatin jännitys-muodonmuutosyhteydet määritetään klassista ohuiden levyjen ja laattojen lineaarista teoriaa soveltaen. Tällöin Kirchhoffin otaksumasta seuraa mm. se, että venymät (ε_x, ε_y ja γ_{xy}) muuttuvat päällekkäisissä laminaattikerroksissa lineaarisesti läpi koko laminaatin paksuuden. Laminaatin jokaisen kerroksen jännitys-venymäyhteydet voidaan ilmaista aiemmin esitetyllä matriisiyhtälöllä (13). Lausumalla venymävektorin komponentit (ε_x, ε_y, γ_{xy}) laminaatin keskipinnan venymien (ε_x^0, ε_y^0, γ_{xy}^0) ja keskipinnan käyristymien ($\kappa_x = -\partial^2 w_0/\partial_x^2$, $\kappa_y = -\partial^2 w_0/\partial_y^2$, $\kappa_{xy} = -2\partial^2 w_0/\partial_x \partial_y$) avulla kuvan 6 mukaiselle k:nnelle laminaattikerrokselle voidaan kirjoittaa silloin yhteydet

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}]_k \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \qquad (30)$$



Kuva 6 Laminaatin geometriset suureet sekä jännitysresultantit.

Laminaatin poikkipinnan jännitysresultantit eli normaalivoima- (N_x, N_y, N_{xy}) ja momenttikomponentit (M_x, M_y, M_{xy}) saadaan yhtälön (30) avulla seuraaviksi:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} [\bar{Q}]_k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\varepsilon_x^0 \varepsilon_y^0 \gamma_{xy}^0\}^T dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\kappa_x \kappa_y \kappa_{xy}\}^T z dz \right\} \qquad (31)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} [\bar{Q}]_k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\varepsilon_x^o \varepsilon_y^o \gamma_{xy}^o\}^T z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\kappa_x \kappa_y \kappa_{xy}\}^T z^2 dz \right\} \tag{32}$$

Nämä yhtälöt voidaan kirjoittaa seuraavanmuotoisina matriisiyhtälöinä erottamalla integrandeista z:sta riippumattomat keskipinnan venymä- ja käyristymävektorit:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{33}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{34}$$

Kerroinmatriisin [A] komponentit

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N} (Q_{ij})_k t_k \tag{35}$$

ovat laminaatin *venymisjäykkyyksiä* (engl. extensional stiffnesses) ja kerroinmatriisin [D] komponentit

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k (t_k \bar{z}_k^2 + \frac{1}{12} t_k^3) \tag{36}$$

laminaatin *taivutusjäykkyyksiä*. Kerroinmatriisin [B] komponentit

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k t_k \bar{z}_k \tag{37}$$

ilmaisevat ne vuorovaikutukset, mitkä vallitsevat laminaatissa toisaalta aksiaalisten muodonmuutosten ja taivutuksen välillä sekä toisaalta liukumien ja väännön välillä. Kuten yhtälöstä (37) voi havaita, nämä nk. *vuorovaikutusjäykkyydet* (engl. coupling stiffnesses) esiintyvät vain keskipintansa suhteen epäsymmetrisissä laminaateissa.

Yhtälöt (35), (36) ja (37) antavat erikoistapauksessa N=1 ja $\bar{Q}_{ij}=C_{ij}$ (C_{ij}:t yhtälöistä (5)) isotrooppisen laatan jäykkyysvakiot. Ortotrooppisen laatan (paksuus t) jäykkyysvakiot tapauksessa, missä ortotropia-akselit yhtyvät koordinaattiakseleihin, saadaan soveltamalla yhtälön (10) jäykkyysmatriisia em. yhtälöihin. Vakioille A_{ij}, B_{ij} ja D_{ij} voidaan kirjoittaa silloin lausekkeet

$$A_{11}=Q_{11}t=E_1 t/(1-\nu_{12}\nu_{21}), \quad A_{12}=A_{21}=\nu_{21}A_{11}, \quad A_{22}=E_2 A_{11}/E_1, \quad A_{13}=A_{23}=0,$$

$$A_{33}=Q_{33}t=G_{12}t$$

$$B_{ij}=0 \tag{38}$$

$$D_{11}=Q_{11}t^3/12,\quad D_{12}=\nu_{21}D_{11},\quad D_{22}=E_2D_{11}/E_1,\quad D_{13}=D_{23}=0,$$
$$D_{33}=Q_{33}t^3/12=G_{12}t^3/12 \tag{38}$$

Ortotrooppisen laatan jäykkyysvakiot ovat yleisessä tapauksessa yhtälöiden (35), (36) ja (37) mukaan seuraavat:

$$A_{ij}=\bar{Q}_{ij}t,\quad B_{ij}=0,\quad D_{ij}=\bar{Q}_{ij}t^3/12 \tag{39}$$

Symmetrisen ristikkäislaminaatin, joka koostuu parittomasta määrästä N ristikkäin laminoituja yhdensuuntaislujitteisia kerroksia, jäykkyysvakiot A_{ij} ja D_{ij} voidaan laskea yleisessä tapauksessa kaavoista (35) ja (36). Käytännössä tällaisen laminaatin eri kerroksilla on useimmiten samat pääsuuntien kimmovakiot E_1, E_2, ν_{12} ja G_{12}. Kerrosten paksuus voi sen sijaan vaihdella. Jos laminaatin paritonta järjestysnumeroa vastaavilla kerroksilla on kaikilla vakiopaksuus t'_k ja parillista järjestysnumeroa vastaavilla kerroksilla kaikilla vakiopaksuus t''_k, silloin parittomien ja parillisten kerrosten kokonaispaksuuksien suhteelle s (engl cross-ply ratio) saadaan lauseke

$$s=\sum_{k=1,3,\ldots}^{N} t_k \Big/ \sum_{k=2,4,\ldots}^{N-1} t_k = (N+1)t'_k/(N-1)t''_k \tag{40}$$

Merkitsemällä lisäksi laminaattikerrosten pääsuuntien jäykkyyssuhdetta q:lla eli $q=Q_{22}/Q_{11}=E_2/E_1$ kaavoista (35) ja (36) voidaan johtaa ristikkäislaminaatin (kokonaispaksuus t) jäykkyysvakioille lausekkeet

$$A_{11}=\frac{s+q}{1+s}Q_{11}t,\quad A_{12}=A_{21}=Q_{12}t,\quad A_{22}=\frac{1+sq}{s+q}A_{11},$$
$$A_{13}=A_{23}=0,\quad A_{33}=Q_{33}t \tag{41}$$

$$D_{11}=[(q-1)p+1]Q_{11}t^3/12,\quad D_{12}=D_{21}=Q_{12}t^3/12,$$
$$D_{22}=[(1-q)p+q]Q_{11}t^3/12,\quad D_{13}=D_{23}=0,\quad D_{33}=Q_{33}t^3/12 \tag{42}$$

Kaavoissa (42) p on lyhennysmerkintä lausekkeesta

$$p=1/(1+s)^3+s(N-3)[s(N-1)+2(N+1)]/(N^2-1)(1+s)^3 \tag{43}$$

Epäsymmetrisen ristikkäislaminaatin, joka sisältää parillisen määrän N edellisen tarkastelun mukaisia kerroksia, jäykkyysvakiot A_{ij} ovat tässäkin tapauksessa lausekkeiden (41) mukaiset. Nk. vuorovaikutusjäykkyyksille B_{ij} saadaan kaksi nollasta eroavaa komponenttia B_{11} ja B_{22}:

$$B_{11}=\frac{s(q-1)}{N(1+s)^2}Q_{11}t^2=-B_{22} \tag{44}$$

Taivutusjäykkyyksien D_{ij} lausekkeet ovat epäsymmetrisellä ristikkäislaminaatilla seuraavanmuotoiset:

$$D_{11}=[(q-1)r+1]Q_{11}t^3/12, \quad D_{12}=D_{21}=Q_{12}t^3/12,$$
$$D_{22}=[(1-q)r+q]Q_{11}t^3/12, \quad D_{13}=D_{23}=0, \quad D_{33}=Q_{33}t^3/12 \tag{45}$$

Lyhennysmerkintä r kaavoissa (45) vastaa lauseketta

$$r=1/(1+s) + 8s(s-1)/N^2(1+s)^3 \tag{46}$$

Nk. vinokulmalaminaatin jäykkyysvakiot määrittyvät myös yhtälöiden (35), (36) ja (37) summalausekkeita käyttäen. Saatavat A_{ij}-, B_{ij}- ja D_{ij}-jäykkyysvakioiden lausekkeet tulevat nyt hyvin monimutkaisiksi laminaattikerrosten jäykkyyksien $\bar{Q}_{ij}$ mutkikkuudesta johtuen.

LOPPUSANAT

Edellä oleva katsaus lujitemuovilaminaatin mekaanisen käyttäytymisen tarkasteluperiaatteisiin pyrkii antamaan viitteitä niistä erityispiirteistä, mitkä liittyvät ortotrooppisten tai yleensä anisotrooppisten aineiden tarkasteluun. Katsauksessa on rajoituttu selvittelemään yleisluonteisesti laminaatin lujuuden ja jäykkyyden määrittämisperiaatteita. Tavallisimpien laminaattityyppien lujuuden ja jäykkyyden arvioimiseksi artikkelissa on esitetty laskentakaavoja sekä laminaattikerrosten kimmovakioiden että itse laminaatin jäykkyysvakioiden määrittämiseksi.

Koska tämän artikkelin tarkoituksena on ollut aiheen perusteiden selvittely, sen ulkopuolelle ovat jääneet pidemmälle menevät laminaattiteoriat, jotka ottavat huomioon laminaattikerrosten välisten jännitysten vuorovaikutukset. Laminaattien stabiiliustarkastelut ovat jääneet niinikään artikkelin ulkopuolelle. Näissä stabiiliustarkasteluissa olennaisina esiintyvät jäykkyysvakiot ovat kuitenkin jo määrittämistä varten valmiina tämän artikkelin kaavoissa.

LÄHDEKIRJALLISUUS

[1] Jones, R.M., Mechanics of Composite Materials. McGraw-Hill Book Company, New York, 1975.

[2] Ashton, J.E., J.C. Halpin and P.H. Petit, Primer on Composite Materials: Analysis. Technomic Publishing Company, Westport, Conn., 1969.

[3] Guess, T.R. and Gerstle, F.P., Jr., Deformation and Fracture of Resin Matrix Composites in Combined Stress States. Journal of Composite Materials 11 (April 1977) pp. 146-163.

[4] Puck, A., Zur Beanspruchung und Verformung von GFK-Mehrschichtenverbund-Bauelementen. Teil 1, Kunststoffe 57 Heft 4(1967) S. 284-293.

[5] Manera, M., Elastic Properties of Randomly Oriented Short Fiber-Glass Composites. Journal of Composite Materials 11 (April 1977) pp. 235-247.

[6] Brintrup, H., Beitrag zum zeitabhängigen Verformungsverhalten und zur Rissbildung orthotrop glasfaserverstärkter ungesättigter Polyesterharze unter ebener Normalbeanspruchung. Dissertation, RWTH Aachen, 1975.

[7] Menges, G. und Roskothen, H.J., Neue einfache Dimensionierungsmöglichkeiten bei glasfaserverstärkten Kunststoffen. Kunststoff-Rundschau Heft 9 (1972)S. 479-487.

[8] Mäkeläinen, P. und Thebing, U., Näherungsverfahren zur Bestimmung des Verformungsverhaltens anisotrop faserverstärkter UP-Harzlaminate bei alternierender Beanspruchung. Kunststoffe 68 (1978) im Druck.

[9] Perälä, H. ja Saarela, O., Lasi- ja hiilikuituvahvisteisten lujitemuovien lujuusominaisuuksista. Tutkimus ja tekniikka 7/1977 ss. 29-38.

Pentti Mäkeläinen, tekn.tri, Helsingin teknillinen korkeakoulu, Otaniemi