

# ISOPARAMETRINEN OHUEN PYÖRÄHDYSKUOREN ELEMENTTI

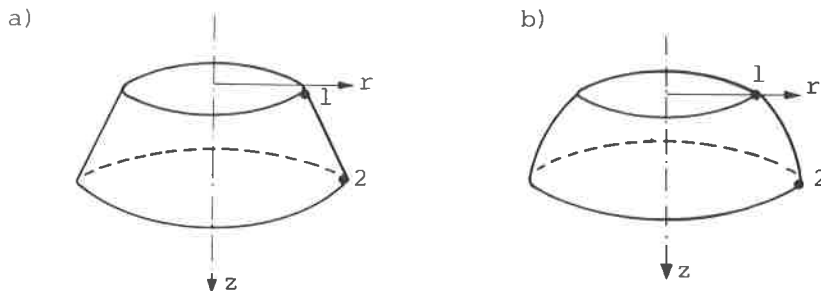
Seppo Orivuori

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 10  
No. 4 1977 s. 21...42.

**YHTEENVETO:** Artikkelissa käsitellään 2-solmuista isoparametrasta ohuen pyörähdyskuoren elementtiä. Tästä tehokkaasta kaarevasta elementistä on varsin vähän kirjallisia esityksiä. Artikkelissa esitetään elementin jäykkyyssmatriisin sekä kuormitusvektorin muodostamiseen tarvittavat kaavat yksityiskohdittain. Kaavoja muokataan haarautuvan kuoren ratkaisemiseksi. Elementtiä käyttävän IVOKUORI-ohjelman lyhyen kuvauksen jälkeen esitetään kolme ohjelmalla laskettua esimerkkiä.

## JOHDANTO

Ohuen kuoren jännitys- ja muodonmuutostila on vaikea määrittää analyytisesti. Käytännön tehtävissä joudutaan usein turvautumaan numeerisiin menetelmiin. Elementtimenetelmä on nykyisin yleisimmin käytetty numeerinen menetelmä aiemman differenssimenetelmän sijasta. Alkeellisin pyörähdyskuorielementti on katkaistu kartio (kuva 1a). Tällaisen elementin jäykkyyssmatriisi voidaan kirjoittaa eksplisiittisesti [1, sivu 244]. Elementin yksinkertaisuuden takia tarvitaan hyvään tulokseen pääsemiseksi kuitenkin tiheätä elementtijakoa. Käyräviivainen isoparametrinen kuorielementti (kuva 1b) on käytännössä osoittautunut tehokkaaksi. Tarkastellaan jatkossa tällaista elementtiä olettamalla myös kuormitus pyörähdyssymmetriseksi.



Kuva 1 Ohuita pyörähdyskuorielementtejä  
a) kartioelementti  
b) kaarevaelementti.

TARVITAVIA KUORITEOREETTISIA KAAVOJA

Muodonmuutosten ja siirtymien välinen yhteys on /2, sivut 30...32/

$$e_s = e_s^0 + z' \kappa_s^0$$

ja

$$e_\theta = e_\theta^0 + z' \kappa_\theta^0,$$

missä

$e_s$  on pituuspiirin suuntainen venymä,

$e_\theta$  on leveyspiirin suuntainen venymä,

$\kappa_s$  on pituuspiirin käyristymä,

$\kappa_\theta$  on leveyspiirin käyristymä.

Kuoren keskipinnan venymät ja käyristymät ovat

$$e_s^0 = \frac{du'}{ds} + \frac{w'}{R},$$

$$e_\theta^0 = \frac{w}{r},$$

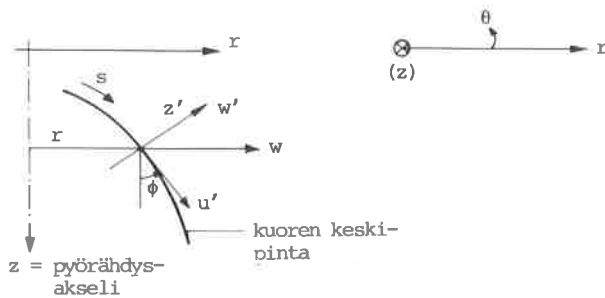
$$\kappa_s^0 = \frac{1}{R} \frac{du'}{ds} - \frac{d^2 w'}{ds^2}$$

(1b)

ja

$$\kappa_\theta^0 = \frac{\sin \phi}{r} \left( \frac{u'}{R} - \frac{dw'}{ds} \right)$$

Yläindeksi 0 tarkoittaa kuoren keskipinnan suuretta, pilkulliset suuret on lausuttu paikallisen koordinaatiston suhteen (kuva 2), R on pituuspiirin kaarevuussäde. Suureiden r, s,  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $z'$ ,  $u'$ , w ja  $w'$  merkitys selviää kuvasta 2.



Kuva 2 Kuorikaavoihin liittyviä merkintöjä.

Jännitysten ja muodonmuutosten välinen yhteys on

$$\sigma_s = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_s + \nu \epsilon_\theta)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_s),$$

(2)

missä

$\sigma_s$  on pituuspiirin suuntainen jännitys,

$\sigma_\theta$  on leveyspiirin suuntainen jännitys.

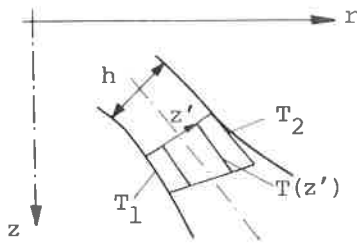
Kimmoiset muodonmuutokset  $\epsilon_i$  ( $i=s,\theta$ ) saadaan kokonaismuodonmuutoksista  $e_i$  kaavan (2a) mukaisesti.

$$\epsilon_i = e_i - \alpha T(z'), \quad (i=s,\theta) \quad (2a)$$

missä

$$T(z') = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \frac{z'}{h}(T_2 - T_1), \quad (\text{vrt. kuva 3})$$

$T_1$  ja  $T_2$  ovat lämpötilat kuoren pinnalla peruslämpötilaan nähden,  $h$  on kuoren paksuus ja  $\alpha$  on lämpöpitenekerroin.



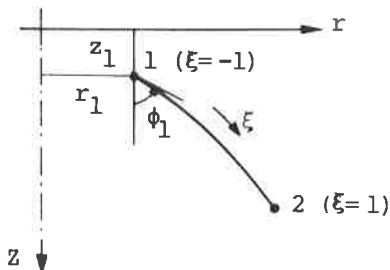
Kuva 3 Lämpötilajakautuma kuoren paksuussuunnassa.

#### KUOREN GEOMETRIAN KUVAAMINEN

Approksimoidaan kuorielementin keskipinnan geometriaa kaavoilla

$$r(\xi) = N_{11}(\xi)r_1 + N_{12}(\xi)\left(\frac{dr}{d\xi}\right)_1 + N_{21}(\xi)r_2 + N_{22}(\xi)\left(\frac{dr}{d\xi}\right)_2 \quad (3)$$

$$z(\xi) = N_{11}(\xi)z_1 + N_{12}(\xi)\left(\frac{dz}{d\xi}\right)_1 + N_{21}(\xi)z_2 + N_{22}(\xi)\left(\frac{dz}{d\xi}\right)_2.$$



Kuva 4 Elementin paikallinen koordinaatisto.

Muotofunktiot  $N_{ij}$  ( $i,j = 1,2$ ) ovat

$$N_{11}(\xi) = \frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi + 2),$$

$$N_{12}(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(1 + \xi),$$

$$N_{21}(\xi) = \frac{1}{4}(-\xi^3 + 3\xi + 2) \quad (3a)$$

ja

$$N_{22}(\xi) = -\frac{1}{4}(1 + \xi)^2(1 - \xi).$$

Kuoren keskipinnan kaltevuuskulmalle  $\varphi$  pätee

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\frac{dr}{d\xi}}{\frac{ds}{d\xi}} = \sin\varphi$$

ja

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\frac{dz}{d\xi}}{\frac{ds}{d\xi}} = \cos\varphi,$$

(3b)

missä  $\xi$  on elementin paikallinen dimensioton koordinaatti.

Kaavoista (3b) seuraa

$$\left(\frac{dr}{d\xi}\right)_i = \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_i \sin\varphi_i \quad (i=1,2)$$

ja

(3c)

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)_i = \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_i \cos\varphi_i.$$

Valitsemalla lineaarinen kuvaus  $s : s \rightarrow \xi$  siten, että  $s(-1) = 0$  ja  $s(+1) = L$ ,  $L =$  elementin keskipinnan pituuspiirin suuntainen pituus, saadaan

$$\left(\frac{ds}{d\xi}\right)_i = \frac{L}{2}. \quad (i=1,2) \quad (3d)$$

Kaavojen (3) parametrit  $\left(\frac{dr}{d\xi}\right)_i$  ja  $\left(\frac{dz}{d\xi}\right)_i$  ( $i=1,2$ ) saadaan nyt lausutuksi  $\varphi$ :n avulla kaavoja (3c) ja (3d) käyttämällä

$$\left(\frac{dr}{d\xi}\right)_i = \frac{L}{2} \sin\varphi_i \quad (i=1,2)$$

ja

(3e)

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)_i = \frac{L}{2} \cos\varphi_i.$$

#### SIIRTYMÄTILAN APPROKSIMOINTI

Isoparametrian perusteella käytetään siirtymätilan approksimointiin samoja muotofunktioita kuin geometriankin kuvaamiseen.

$$u(\xi) = N_{11}(\xi)u_1 + N_{12}(\xi)\left(\frac{du}{d\xi}\right)_1 + N_{21}(\xi)u_2 + N_{22}(\xi)\left(\frac{du}{d\xi}\right)_2$$

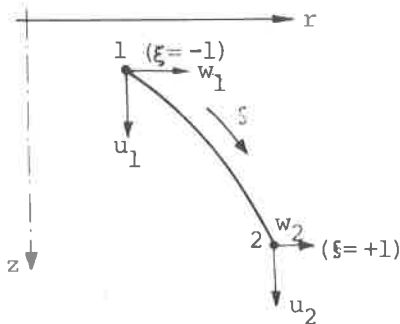
(4)

$$w(\xi) = N_{11}(\xi)w_1 + N_{12}(\xi)\left(\frac{dw}{d\xi}\right)_1 + N_{21}(\xi)w_2 + N_{22}(\xi)\left(\frac{dw}{d\xi}\right)_2,$$

missä

$u$  on aksiaalinen siirtymä ja

$w$  on radiaalinen siirtymä (vrt. kuva 5).



Kuva 5 Solmujen aksiaaliset ja radikaaliset siirtymäkomponentit.

Kaavat (4) voidaan kirjoittaa lyhyemmin muotoon

$$u(\xi) = [N(\xi)]\{u\}^e$$

$$w(\xi) = [N(\xi)]\{w\}^e,$$

(5)

missä

$$[N(\xi)] = [N_{11}(\xi) \quad N_{12}(\xi) \quad N_{21}(\xi) \quad N_{22}(\xi)],$$

$$\{u\}^e = [u_1 \left(\frac{du}{d\xi}\right)_1 \quad u_2 \left(\frac{du}{d\xi}\right)_2]^T,$$

$$\{w\}^e = [w_1 \left(\frac{dw}{d\xi}\right)_1 \quad w_2 \left(\frac{dw}{d\xi}\right)_2]^T.$$

Globaalien siirtymien  $u$ ,  $w$  ja paikallisten siirtymien  $u'$ ,  $w'$  välillä vallitsevat riippuvuudet

$$\begin{aligned} u &= \cos\varphi u' - \sin\varphi w' \\ w &= \sin\varphi u' + \cos\varphi w'. \end{aligned} \quad (6)$$

Kaavat (6) voidaan saattaa myös matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = [L] \begin{bmatrix} u' \\ w' \end{bmatrix}, \quad (7)$$

missä

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Vastaavasti pätee käänteismuunnos

$$\begin{bmatrix} u' \\ w' \end{bmatrix} = [L]^T \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}. \quad (8)$$

## MUODONMUUTOSENERGIA

Elementin muodonmuutosenergia saadaan lausekkeesta

$$\pi_s = \frac{1}{2} \int_{V^e} (\sigma_s \epsilon_s + \sigma_\theta \epsilon_\theta) dv, \quad (9)$$

missä

$V^e$  on elementin tilavuus.

Kaavojen (2) ja (1) avulla sekä integroimalla paksuuden suhteen ( $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\ ) dz'$ ) saadaan muodonmuutosenergian lauseke muotoon

$$\pi_s = \frac{1}{2} \int_{A^e} \{e\}^T [D] \{e\} da - \int_{A^e} \{e\}^T [D] \{e\}_t da + \int_{A^e} \{e\}_t^T [D] \{e\}_t da, \quad (10)$$

missä

$$\{e\}^T = [e_s^0 \quad e_\theta^0 \quad \kappa_s^0 \quad \kappa_\theta^0],$$

$$\{e\}_t^T = \left[ \alpha \frac{1}{2} (T_1 + T_2) \quad \alpha \frac{1}{2} (T_1 + T_2) \quad \alpha \frac{T_2 - T_1}{h} \quad \alpha \frac{T_2 - T_1}{h} \right],$$

$A^e$  on elementin keskipinta

ja

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} h & \nu h & 0 & 0 \\ \nu h & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & \nu \frac{h^3}{12} \\ 0 & 0 & \nu \frac{h^3}{12} & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad \text{on kimmomatriisi.}$$

#### MUODONMUUTOSTEN JA NURKKASIIRTYMIEN VÄLINEN YHTEYS

Sijoittamalla siirtymäapproksimaatio (4), käyttämällä muunnoskaavoja (8) sekä ottamalla huomioon geometrian approksimaatio (3) saadaan kaavojen (1b) avulla muodonmuutosmatriisi [B]:

$$\{e\} = [B]\{d\}^e, \quad (11)$$

4x1      4x88x1

missä

$$\{d\}^e = [u_1 w_1 \left(\frac{du}{ds}\right)_1 \left(\frac{dw}{ds}\right)_1 u_2 w_2 \left(\frac{du}{ds}\right)_2 \left(\frac{dw}{ds}\right)_2]^T$$

on elementin solmuparametrivektori,

$$\left(\frac{du}{ds}\right)_i = \left(\frac{du}{d\xi}\right)_i / \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_i \quad (i=1,2)$$

ja

	$u_1$	$w_1$	$\left(\frac{du}{ds}\right)_1$	$\left(\frac{dw}{ds}\right)_1$
[B] =	$A \frac{dN_{11}}{d\xi}$	$B \frac{dN_{11}}{d\xi}$	$A \frac{dN_{12}}{d\xi} \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_1$	$B \frac{dN_{12}}{d\xi} \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_1$
	0	$\frac{N_{11}}{r}$	0	$\frac{N_{12}}{r} \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_1$
	$C \frac{d^2 N_{11}}{d\xi^2} + D \frac{dN_{11}}{d\xi} + EN_{11}$	$F \frac{d^2 N_{11}}{d\xi^2} + G \frac{dN_{11}}{d\xi} + HN_{11}$	$(C \frac{d^2 N_{12}}{d\xi^2} + D \frac{dN_{12}}{d\xi} + EN_{12}) \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_1$	$(F \frac{d^2 N_{12}}{d\xi^2} + G \frac{dN_{12}}{d\xi} + HN_{12}) \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_1$
	$K \frac{dN_{11}}{d\xi}$	$M \frac{dN_{11}}{d\xi}$	$K \frac{dN_{12}}{d\xi} \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_1$	$M \frac{dN_{12}}{d\xi} \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_1$
	$u_2$	$w_2$	$\left(\frac{du}{ds}\right)_2$	$\left(\frac{dw}{ds}\right)_2$
	$A \frac{dN_{21}}{d\xi}$	$B \frac{dN_{21}}{d\xi}$	$A \frac{dN_{22}}{d\xi} \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_2$	$B \frac{dN_{22}}{d\xi} \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_2$
	0	$\frac{N_{21}}{r}$	0	$\frac{N_{22}}{r} \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_2$
	$C \frac{d^2 N_{21}}{d\xi^2} + D \frac{dN_{21}}{d\xi} + EN_{21}$	$F \frac{d^2 N_{21}}{d\xi^2} + G \frac{dN_{21}}{d\xi} + HN_{21}$	$(C \frac{d^2 N_{22}}{d\xi^2} + D \frac{dN_{22}}{d\xi} + EN_{22}) \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_2$	$(F \frac{d^2 N_{22}}{d\xi^2} + G \frac{dN_{22}}{d\xi} + HN_{22}) \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_2$
	$K \frac{dN_{21}}{d\xi}$	$M \frac{dN_{21}}{d\xi}$	$K \frac{dN_{22}}{d\xi} \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_2$	$M \frac{dN_{22}}{d\xi} \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_2$

Edellä esitetyn muodonmuutosmatriisiin lausekkeessa on käytetty lyhennysmerkintöjä

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\cos\varphi}{\frac{ds}{d\xi}}; & B &= \frac{\sin\varphi}{\frac{ds}{d\xi}}; & C &= \frac{\sin\varphi}{\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2} \\
 D &= -\frac{\frac{d^2s}{d\xi^2} \sin\varphi}{\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^3} + \frac{\frac{ds}{d\xi} \cos\varphi}{\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2}; & E &= \frac{\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} \cos\varphi}{\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2} - \frac{\frac{d^2s}{d\xi^2} \frac{d\varphi}{d\xi} \cos\varphi}{\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^3} \\
 F &= -\frac{\cos\varphi}{\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2}; & G &= \frac{\frac{d^2s}{d\xi^2} \cos\varphi}{\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^3} + \frac{\frac{d\varphi}{d\xi} \sin\varphi}{\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2} \\
 H &= \frac{\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} \sin\varphi}{\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2} - \frac{\frac{d^2s}{d\xi^2} \frac{d\varphi}{d\xi} \sin\varphi}{\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^3}; & K &= \frac{\sin^2\varphi}{r \frac{ds}{d\xi}}; & M &= -\frac{\sin\varphi \cos\varphi}{r \frac{ds}{d\xi}}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

B-matriisien laskemisessa tarvitaan seuraavia kaavoja:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^n r}{d\xi^n} &= \frac{d^n}{d\xi^n} [N(\xi)] \{r_1 \left(\frac{dr}{d\xi}\right)_1, r_2 \left(\frac{dr}{d\xi}\right)_2\}, \\
 \frac{d^n z}{d\xi^n} &= \frac{d^n}{d\xi^n} [N(\xi)] \{z_1 \left(\frac{dz}{d\xi}\right)_1, z_2 \left(\frac{dz}{d\xi}\right)_2\}, \\
 \frac{ds}{d\xi} &= \sqrt{\left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2},
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\sin\varphi = \frac{\frac{dr}{d\xi}}{\frac{ds}{d\xi}}; \quad \cos\varphi = \frac{\frac{dz}{d\xi}}{\frac{ds}{d\xi}}; \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\frac{dr}{d\xi}}{\frac{dz}{d\xi}}\right),$$

$$\frac{d^2s}{d\xi^2} = \frac{\frac{dr}{d\xi} \frac{d^2r}{d\xi^2} + \frac{dz}{d\xi} \frac{d^2z}{d\xi^2}}{\frac{ds}{d\xi}},$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\frac{d^2r}{d\xi^2} \frac{dz}{d\xi} - \frac{d^2z}{d\xi^2} \frac{dr}{d\xi}}{\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2},$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = \frac{\frac{d^3r}{d\xi^3} \frac{dz}{d\xi} - \frac{d^3z}{d\xi^3} \frac{dr}{d\xi}}{\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2} - \frac{2 \frac{d^2s}{d\xi^2}}{\frac{ds}{d\xi}} \frac{d\varphi}{d\xi}$$

$$\frac{d^n}{d\xi^n} [N(\xi)] = \begin{bmatrix} \frac{d^n N_{11}}{d\xi^n} & \frac{d^n N_{12}}{d\xi^n} & \frac{d^n N_{21}}{d\xi^n} & \frac{d^n N_{22}}{d\xi^n} \\ \frac{d^n N_{11}}{d\xi^n} & \frac{d^n N_{12}}{d\xi^n} & \frac{d^n N_{21}}{d\xi^n} & \frac{d^n N_{22}}{d\xi^n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dN_{11}}{d\xi} = \frac{3}{4}(\xi^2 - 1); \quad \frac{dN_{12}}{d\xi} = \frac{1}{4}(3\xi^2 - 2\xi - 1); \quad \frac{dN_{21}}{d\xi} = \frac{3}{4}(-\xi^2 + 1);$$

$$\frac{dN_{22}}{d\xi} = \frac{1}{4}(3\xi^2 + 2\xi - 1)$$

$$\frac{d^2N_{11}}{d\xi^2} = \frac{3}{2}\xi; \quad \frac{d^2N_{12}}{d\xi^2} = \frac{1}{2}(3\xi - 1); \quad \frac{d^2N_{21}}{d\xi^2} = -\frac{3}{2}\xi; \quad \frac{d^2N_{22}}{d\xi^2} = \frac{1}{2}(3\xi + 1)$$

$$\frac{d^3N_{11}}{d\xi^3} = \frac{3}{2}; \quad \frac{d^3N_{12}}{d\xi^3} = \frac{3}{2}; \quad \frac{d^3N_{21}}{d\xi^3} = -\frac{3}{2}; \quad \frac{d^3N_{22}}{d\xi^3} = \frac{3}{2}$$

#### KOKONAISPOTENTIALIAALIENERGIAN LAUSEKE

Kokonaispotentiaalienergia koostuu sisäisen ja ulkoisen energian summasta

$$\pi = \pi_s + \pi_u \quad (14)$$

missä

$$\pi_s = \frac{1}{2}(\{d\}^e)^T \int_{A^e} [B]^T [D][B] da \{d\}^e = (\{d\}^e)^T \int_{A^e} [B]^T [D] \{e\}_T da,$$

$$\pi_u = -(\{d\}^e)^T \{F\}^e$$

ja

$\{F\}^e$  muodostuu tilavuus- ja pintavoimista sekä mahdollisesti solmuihin vaikuttavista voimista.

#### ELEMENTIN JÄYKKYYSMATRIISI JA KULRMITUSVEKTORI

Minimoimalla elementin kokonaispotentiaalienergia solmuparametrien suhteen saadaan

$$\frac{\partial \pi}{\partial \{d\}^e} = [k]^e \{d\}^e - \{F\}_F^e - \{F\}_T^e - \{F\}_t^e - \{R\}^e = \{0\}, \quad (15)$$

missä

$$[k]^e = 2\pi \int_{-1}^{+1} [B]^T [D][B] r \frac{ds}{d\xi} d\xi$$

on elementin jäykkyysoatriisi,

$$\{F^x\}_F^e = 2\pi \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_1^x & 0 \\ 0 & N_1^x \end{bmatrix}^T \{F\} r \frac{ds}{d\xi} d\xi,$$



$$\{F^*\}_T^e = 2\pi \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_1^T & 0 \\ 0 & N^T \end{bmatrix}^T \{T\}_r \frac{ds}{d\xi} d\xi,$$

$$\{F\}_t^e = 2\pi \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] \{e\}_t r \frac{ds}{d\xi} d\xi$$

on lämpökuormia vastaava solmuvektori,

$\{R\}^e$  = elementin solmuihin vaikuttavat piste kuormat,

$$\{F\}_F^e = [\mathcal{L}]\{F^*\}_F^e$$

on tilavuusvoimia vastaava solmuvoimavektori

ja

$$\{F\}_T^e = [\mathcal{L}]\{F^*\}_T^e$$

on pintavoimia vastaava solmuvoimavektori.

Muunnos  $[\mathcal{L}]$  on

$$[\mathcal{L}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_2 \end{bmatrix}. \quad (15a)$$

Kaavoissa (15) tarvitaan muunnosta (15a), koska \*-yläindeksillä merkityissä vektoreissa olevat voimakomponentit ovat eri järjestyksessä kuin solmuparametrit. Muunnoksessa otetaan lisäksi huomioon, että muotofunktioissa on  $\xi$ -derivaattoja, kun taas solmuparametreina on  $s$ -derivaattoja. Oman painon aiheuttama kuormitus voidaan jakaa solmuvoimiksi kaavojen (15) avulla. Painovoiman vaikuttaessa positiivisen  $z$ -akselin suuntaan (pyörähdysakseli) pätee

$$\{F\} = \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

missä  $\gamma$  = ominaispaino (= painovoima/tilavuusyksikkö).

Sijoittamalla tilavuusvoima (16) kaavoihin (15) tulee

$$\{F\}_Y^e = 2\pi \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_{11}(\xi) \gamma h r \frac{ds}{d\xi} \\ 0 \\ N_{12}(\xi) \gamma h r \frac{ds}{d\xi} \\ 0 \\ N_{21}(\xi) \gamma h r \frac{ds}{d\xi} \\ 0 \\ N_{22}(\xi) \gamma h r \frac{ds}{d\xi} \\ 0 \end{bmatrix} d\xi \quad (17)$$

Kaavan (17) integroinnit suoritetaan numeerisesti, useimmiten Gaussin integrointikaavoja käyttäen /1, sivut 144...147/. Tällöin voidaan solmuvoimien komponentit laskea kaavasta

$$2\pi \sum_{i=1}^n W_i N_{kl}(\xi_i) \gamma h_i r_i \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_i \quad (k, l=1, 2) \quad (18)$$

missä

$n$  on integrointipisteiden lukumäärä,

$W_i$  on  $i$ :nnen integrointipisteen painokerroin,

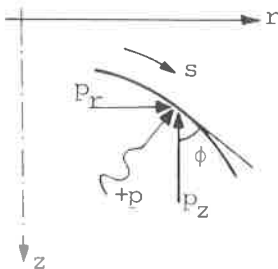
$\xi_i$  on  $i$ :nnen integrointipisteen koordinaatti,

$h_i = h(\xi_i)$  on elementin paksuus kohdassa  $\xi = \xi_i$ ,

$r_i = r(\xi_i)$ ,

$$\left(\frac{ds}{d\xi}\right)_i = \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_{\xi = \xi_i}.$$

Painekuorma voidaan jakaa vastaavalla tavalla solmuvoimiksi. Määrittelemällä positiivinen paine oheisen kuvan 6 mukaan pätee



Kuva 6 Painekuorman jakaminen komponentteihin.

$$\{T\} = \begin{bmatrix} -p \sin \phi \\ p \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Sijoittamalla kaava (19) kaavoihin (15) saadaan painekuorman ekvivalentit solmuvoimat

$$\{F\}_p^e = 2\pi \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -\sin\varphi N_{11}(\xi) \\ \cos\varphi N_{11}(\xi) \\ -\sin\varphi N_{12}(\xi) \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_1 \\ \cos\varphi N_{12}(\xi) \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_1 \\ -\sin\varphi N_{21}(\xi) \\ \cos\varphi N_{21}(\xi) \\ -\sin\varphi N_{22}(\xi) \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_2 \\ \cos\varphi N_{22}(\xi) \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_2 \end{bmatrix} r(\xi) p(\xi) \frac{ds}{d\xi} d\xi. \quad (20)$$

Kaavan (20) integraalit lasketaan myös numeerisesti.

Lämpökuormien ekvivalentit solmuvoimat sekä itse jäykkyysmatriisi lasketaan samoin numeerista integrointia käyttäen

$$\{F\}_t^e = 2\pi \sum_{i=1}^n W_i [B_i]^T [D_i] \{e_i\}_t r_i \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_i,$$

$$[k]^e = 2\pi \sum_{i=1}^n W_i [B_i]^T [D_i] [B_i] r_i \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_i,$$
(21)

missä

$n$  on integrointipisteiden lukumäärä,

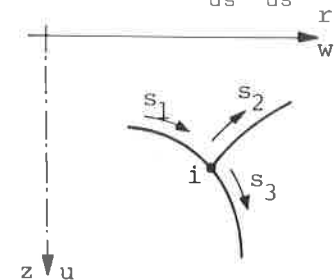
$W_i$  on  $i$ :n:n integrointipisteen painokerroin,

alaindeksi  $i$  tarkoittaa kyseisen suureen arvoa pisteessä  $\xi = \xi_i$ .

$n$ :n arvolla viisi saavutetaan jo riittävä integroimistarkkuus. Mainittua integroimistarkkuutta käyttää mm. MARC-CDC-ohjelma /3/. Sittemmin MARC-ohjelma on siirtynyt kolmen pisteen integrointiin (H-versio).

## HAARAUTUVA KUORI

Haarautuvan kuoren tapauksessa (kuva 7) ei edellä esitettyjä nurkan vapausasteita  $u$ ,  $w$ ,  $\frac{du}{ds}$ ,  $\frac{dw}{ds}$  voida kaikkia kytkeä toisiinsa haarautumiskohtassa.



Kuva 7 Kuoren haarautumiskohta.

Tässä tapauksessa menetellään seuraavasti: otetaan käyttöön uudet nurkan vapausasteet  $u$ ,  $w$ ,  $\phi$ ,  $\frac{du}{ds}'$ , missä  $\phi$  on kiertymä ( $\phi = \frac{dw'}{ds} - \frac{u'}{R}$ ).

jälkeen kunkin solmun neljäs vapausaste  $\frac{du'}{ds}$  poistetaan.

Kaavojen (6) avulla voidaan kirjoittaa solmupisteen  $i$  vanhojen ja uusien vapausasteiden välille yhteys

$$\{d_i\}_{\text{vanha}} = [L_i] \{d_i\}_{\text{uusi}} \quad (22)$$

missä

$$\{d_i\}_{\text{vanha}} = [u_i \ w_i \ (\frac{du}{ds})_i \ (\frac{dw}{ds})_i]^T,$$

$$\{d_i\}_{\text{uusi}} = [u_i \ w_i \ \phi_i \ (\frac{du'}{ds})_i]^T$$

ja

$$[L_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi_i \cos\phi_i (\frac{d\phi}{ds})_i & -\cos^2\phi_i (\frac{d\phi}{ds})_i & -\sin\phi_i & \cos\phi_i \\ \sin^2\phi_i (\frac{d\phi}{ds})_i & \sin\phi_i \cos\phi_i (\frac{d\phi}{ds})_i & \cos\phi_i & \sin\phi_i \end{bmatrix}.$$

Täten elementin  $e$  vanhat vapausasteet uusien avulla lausuttuna ovat

$$\{d\}^e_{\text{vanha}} = [T]^e \{d\}^e_{\text{uusi}} \quad (23)$$

missä

$$\{d\}^e_{\text{vanha}} = [\{d_1\}^T | \{d_2\}^T]^T_{\text{vanha}},$$

$$\{d\}^e_{\text{uusi}} = [\{d_1\}^T | \{d_2\}^T]^T_{\text{uusi}},$$

$$[T]^e = \begin{bmatrix} [L_1] & 0 \\ 0 & [L_2] \end{bmatrix}.$$

Muunnoksen (23) avulla on uusi elementin jäykkyyssyhtälö

$$[k]^e_{\text{uusi}} \{d\}^e_{\text{uusi}} = \{F\}^e_{\text{uusi}} \quad (24)$$

missä

$$[k]^e_{\text{uusi}} = [T]^T [k]^e_{\text{vanha}} [T],$$

$$\{F\}^e_{\text{uusi}} = [T]^T \{F\}^e_{\text{vanha}}.$$

Staatista eliminointia varten järjestellään yhtälöitä siten, että eliminoitavat vapausasteet  $(\frac{du'}{ds})_1$  ja  $(\frac{du'}{ds})_2$  tulevat viimeisiksi tuntemattomiksi

$$\begin{bmatrix} [k_{aa}] & [k_{ab}] \\ [k_{ba}] & [k_{bb}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{d_a\} \\ \{d_b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_a\} \\ \{F_b\} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

missä

$$\{d_a\} = [u_1 \ w_1 \ \phi_1 \ u_2 \ w_2 \ \phi_2]^T,$$

$$\{d_b\} = \left[ \left( \frac{du'}{ds} \right)_1 \left( \frac{du'}{ds} \right)_2 \right]^T \text{ ovat eliminoitavat vapausasteet,}$$

$\{F_a\}$ ,  $\{F_b\}$  ovat edellisiä vastaavat solmuvoimat,

$[k_{aa}]$ ,  $[k_{ab}]$ ,  $[k_{ba}]$ ,  $[k_{bb}]$  edellisiä vapausasteita vastaava  $[k]_{\text{uusi}}^e$ -matriisin ositus.

Eliminoidaan yhtälöryhmästä (25) vapausasteet  $\{d_b\}$ , jolloin saadaan elementin e redusoitu jäykkyysyhtälö

$$[k]_{\text{red}}^e \{d\}_{\text{red}}^e = \{F\}_{\text{red}}^e, \quad (26)$$

$6 \times 6 \quad \quad 6 \times 1 \quad \quad 6 \times 1$

missä

$$[k]_{\text{red}}^e = [k_{aa}] - [k_{ab}][k_{bb}]^{-1}[k_{ba}],$$

$$\{F\}_{\text{red}}^e = \{F_a\} - [k_{ab}][k_{bb}]^{-1}\{F_b\},$$

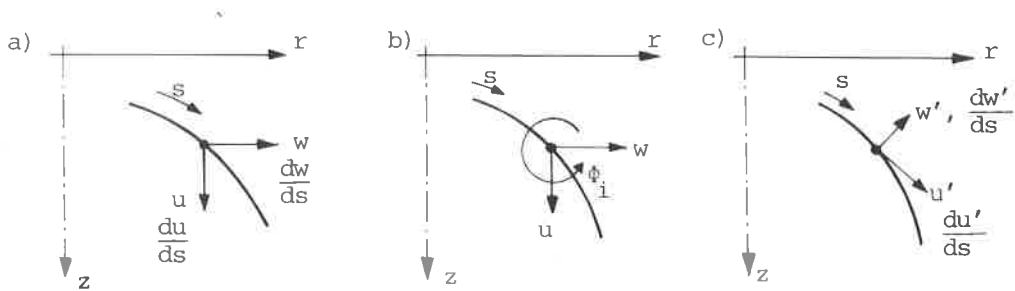
$$\{d\}_{\text{red}}^e = \{d_a\} = [u_1 \ w_1 \ \phi_1 \ u_2 \ w_2 \ \phi_2]^T.$$

Nämä nurkan redusoidut vapausasteet voidaan kytkeä toisiinsa haarautumiskohdissakin jolloin myös haarautuvien kuorten käsittely on mahdollista.

#### ELEMENTTIEN KÄYTÖSTÄ

Keväällä 1973 tehtiin Imatran Voima Osakeyhtiön rakennusosastolla diplomityö /4/, jonka tuloksena syntyi edellä kuvattua elementtiä käyttävä pyöräh-dyskuorioriohjelma. Sittemmin on ohjelmaa uudistettu siten, että alkuperäisestä versiosta on jäljellä ainoastaan osia lähtöarvojen sisäänluku- ja tulostusmoduuleista. Vuoden 1976 alkupuolella ilmestyi tämän ohjelman uudistettu versio IVOKUORI-nimisenä. Ohjelman rakenne vastaa täysin IVOFEM-ohjelman rakenetta /5/. IVOKUORI-ohjelman mahdollisuuksista mainittakoon mm.

- usean eri materiaalin käyttömahdollisuus
- materiaalien mahdollinen anisotrooppisuus
- lähtöarvojen runsas generoitavuus
- lähtöarvot vapaassa formaatissa
- lähtöarvojen anto käyttäjäystävällistä
- kuoren haarautumismahdollisuus
- erilaisten vapausasteiden käyttömahdollisuus (kuva 8):



Kuva 8 IVOKUORI-ohjelman käyttämiä vapausasteita  
 a) globaalit siirtymät sekä näiden s-derivaatat  
 b) globaalit siirtymät sekä kiertymä  
 c) paikalliset siirtymät sekä näiden s-derivaatat.

- kimmoiset tuet
- pakkosiirtymät
- lineaarisesti muuttuva paine- ja lämpökuorma
- oma paino
- ajojen käynnistys päätteeltä sekä tulosten otto päätteelle tai rivikirjoittimelle
- tulostus jaettu halutulle sivun rivimäärälle.

Seuraavassa tiivistelmä lähtöarvojen anto-ohjeesta.

Tehtävän otsikko	(P)	(P) pakollinen
MATERIAALIOMINAISUUDET	(P)	(V) vapaaehtoinen
n, E1, E2, nu1, nu2, gamma, alpha1, alpha2		
END		
TULOSTUSPARAMETRIIT	(V)	
t1, t2, ..., t7		
END		
SIVUN RIVIMAARA	(V)	
nrivi		
END		
GAUSSIN PISTEITÄ	(V)	geometria
ngauss		
END		
KONDENSOIDAAN	(V)	
ELEMENTTITIEDOT	(P)	
n1, n2, m, z1, r1, phi1, z2, r2, phi2, h, mat		
END		
REUNA EHDOT	(V)	
m, b1, b2, b3, b4 tai		
m, b1, b2, b3		
END		
PAKKOSIIRTYMÄT	(V)	
m, d1, d2, d3, d4 tai		

m,d1,d2,d3			
END			
JOUSIVAKIOT	(V)		
m,k1,k2,k3,k4 tai			
m,k1,k2,k3			
END			
KUORMITUSTAPAUKSET	(P)		
Kuormitustapauksen otsikko	(P)		
LINEAARINEN PAINENUORMA	(V)		
e1,e2,de,m1,m2,dp1,p2			
END			
NURKKAVOIMAT	(V)	kuorm.	
e1,e2,de,m,dp,F1,...,F4 tai		tap.1	
e1,e2,de,m,dp,F1,F2,F3			
END			
LAMPOKUORMA	(V)		kuormitukset
e1,e2,de,ts1,tu1,ts2,tu2			
END			
PAKKOSIIRTYMÄT	(V)		
m,d1,d2,d3,d4 tai			
m,d1,d2,d3			
END			
OMAPAINO	(V)		
END CASE	(P)		
.		2	
.		.	
.		.	
ALL DONE	(P)	.	
END DATA	(P)	.	

ESIMERKKEJÄ

PAINENUORMAN KUORMITTAMA TORUS

Ratkaistaan kuvan 9 esittämän toruksen siirtymät ja jännitykset (symmetria-  
systä riittää puolikkaan käsittely). Rakenne on jaettu 18 yhtäpitkään ele-  
mentiin. Pisteille 1 ja 19 on asetettu symmetriaehdot  $w = 0$  ja  $\frac{dw}{ds} = 0$ .  
Tehtävää IVOKUORI-ohjelmalla ratkaistaessa tarvittavat lähtöarvot on esitetty  
alla.

```

440torus/paine. laadut kn ja m
450MATERIAALIOMINAISUUDET
460 1,.689e8,.689e8,.3,.3,0,0,0
470END

```

```

475tulostusparametrit
476 1,1,1,-1,0,0,0
480ELEMENTITIEDOT
490 1,19,18,0.,.127,0.,0.,.635,180.,.0127,1
500END
510REUNAHDOT
520 1,1,0,0,1
530 19,1,0,0,1
540END
550 KUORMITUSTAPAUKSET
560Paine kuorman kuormittama torus
570lineaarinen painekuorma
590 1,18,1,1,19,1,-6.89 -6.89
600END
610END CASE
620ALL DONE
630END DATA

```

Tuloksia on vertailtu kirjallisuudessa esitettyihin. Kuvassa 10 on esitetty tuloksista laskettu kuoren normaalisiirtymä. Kuvassa 11 on esitetty pituuspiirin kalvovoiman  $N_s$  jakautuma, kuvassa 12 leveyspiirin suuntaisen kalvovoiman  $N_\theta$  jakautuma verrattuna lähdekirjallisuudessa esitettyihin vastaaviin suureisiin.

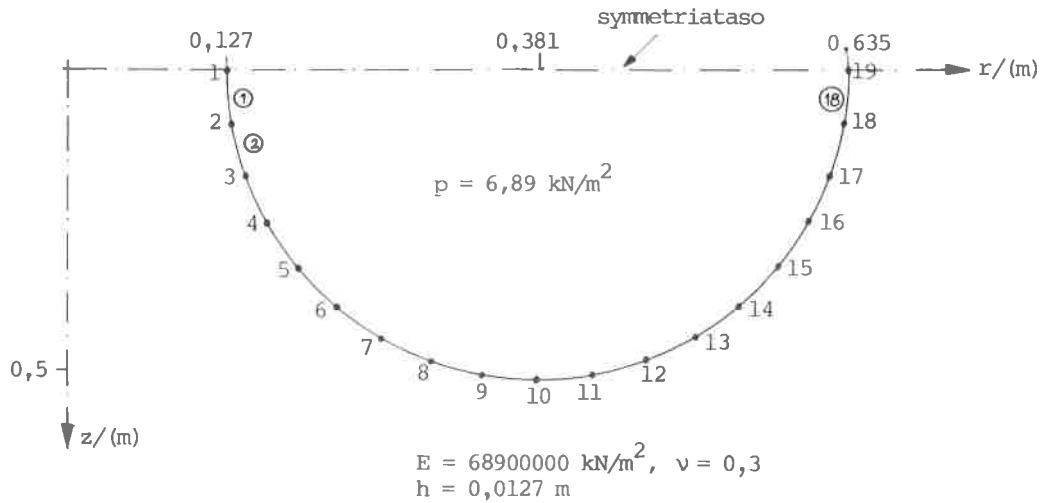
#### TASAISEN KUORMAN KUORMITTAMA JÄYKÄSTI KIINNITETTY YMPYRÄLAATTA

Ratkaistaan kuvan 13 ympyrälaatta eri elementtijaolla. Kuvassa 14 on esitetty saatu taipuman jakautuma sekä vertailtu eri elementtijaolla saatua keskipisteen siirtymää analyyttiseen ratkaisuun. Kuvassa 15 on esitetty säteen suuntaisen taivutusmomentin analyttinen jakautuma sekä eri elementtijaolla saatuja arvoja.

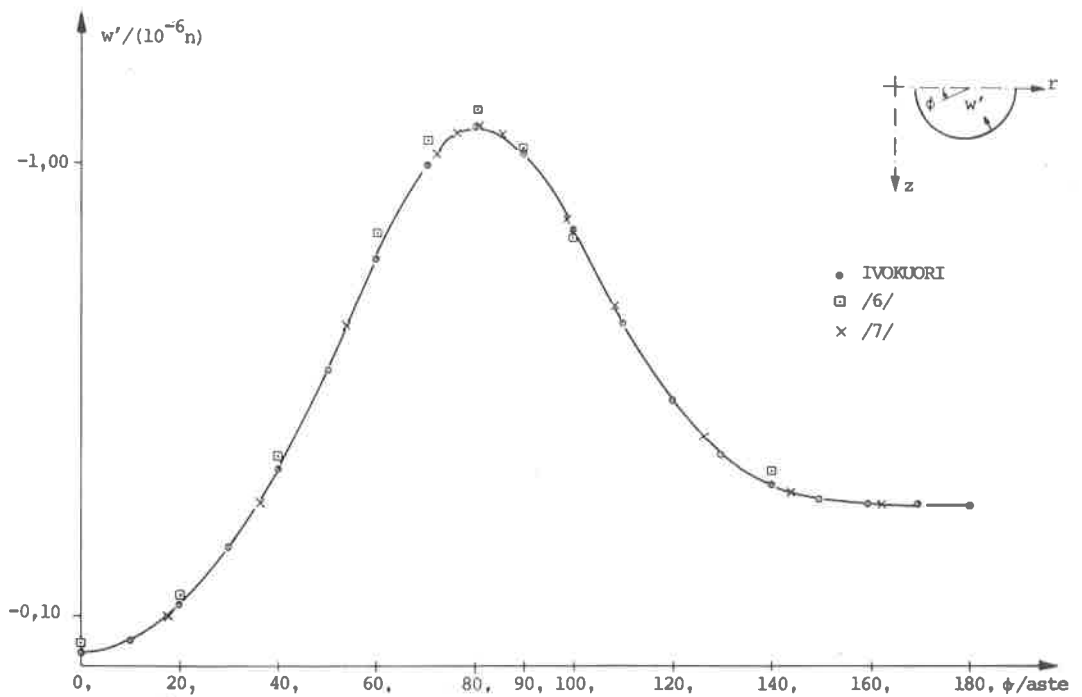
#### KÄYTÄNNÖN TEHTÄVÄ. TUHKASIILO

Kuvassa 16 esitettyä elementtimallia käyttäen on ratkaistu oman painon ja tuhkapaineen rasittama siilo. Osa saaduista tuloksista on esitetty kuvassa 17.

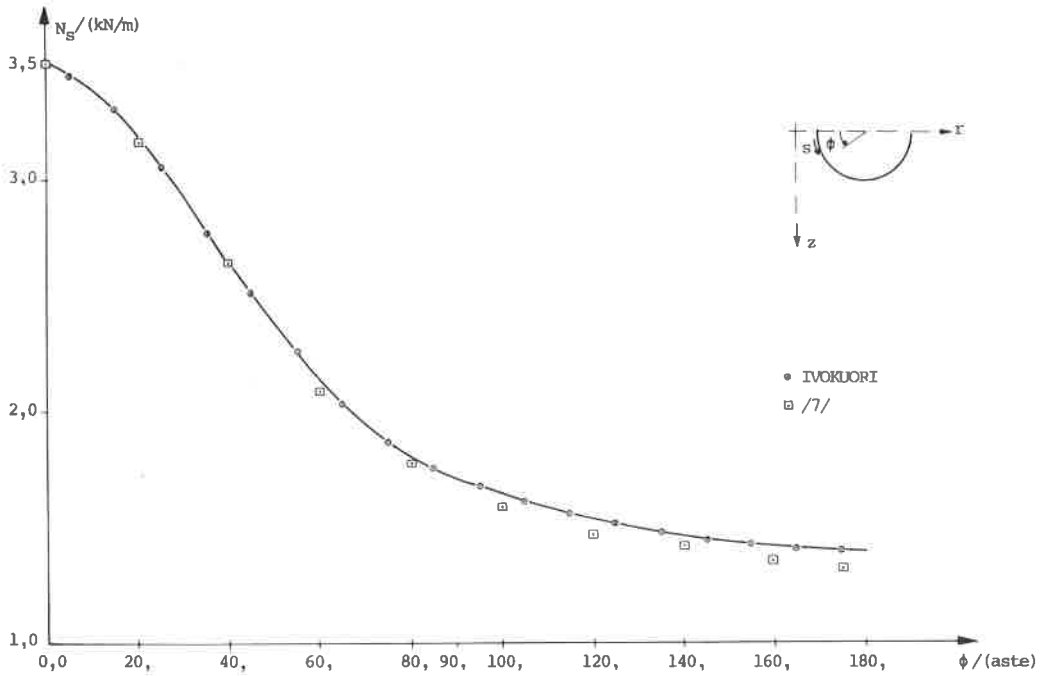




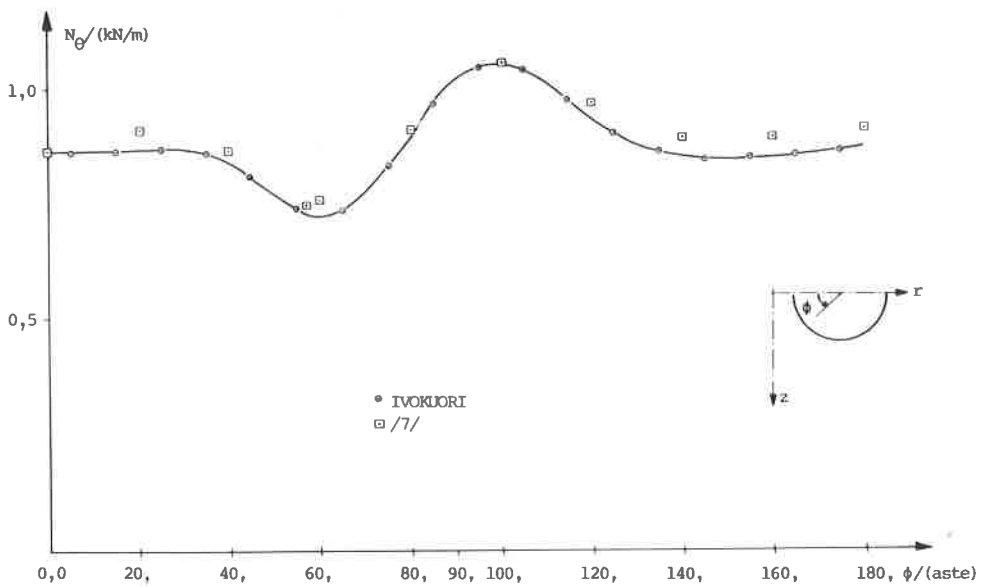
Kuva 9 Painekuorman kuormittama torus. Elementtijako. Tarvittavat lähtötiedot.



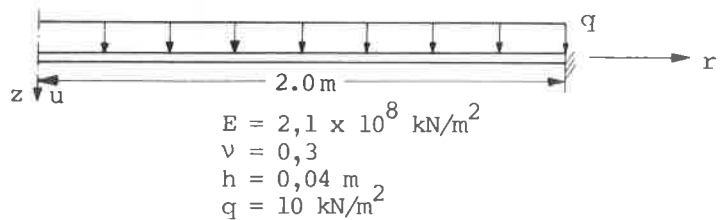
Kuva 10 Painekuorman kuormittaman toruksen normaalisiiirtymä. Vertailu eri lähteisiin. Lähde /6/.



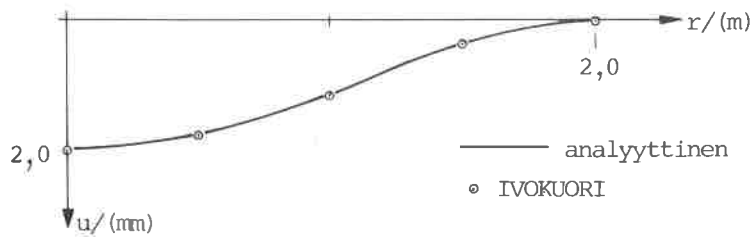
Kuva 11 Painekuorman kuormittaman toruksen pituuspiirin suuntainen normaali-voima.



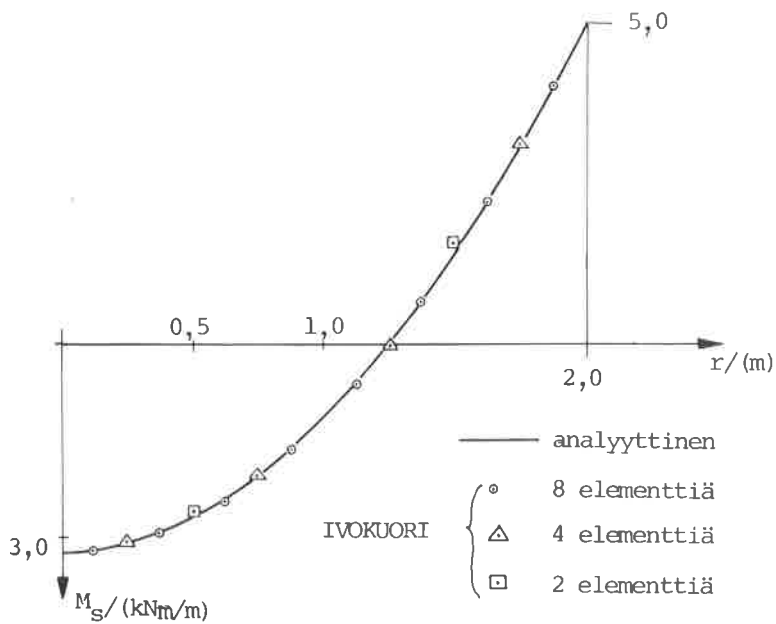
Kuva 12 Painekuorman kuormittaman toruksen leveyspiirin suuntainen normaali-voima (kehävoima).



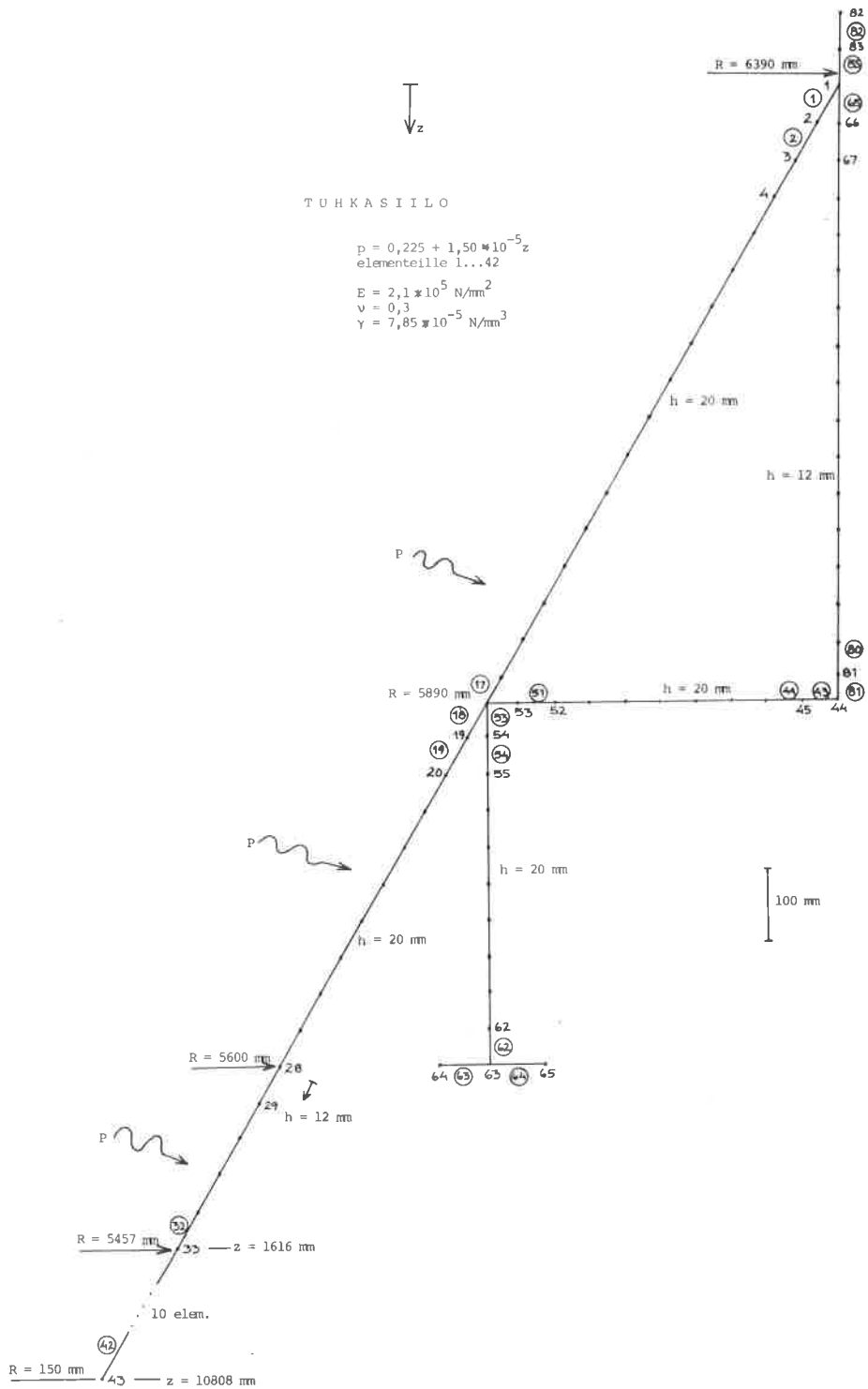
Kuva 13 Jäykästi kiinnitetty ympyrälaatta.



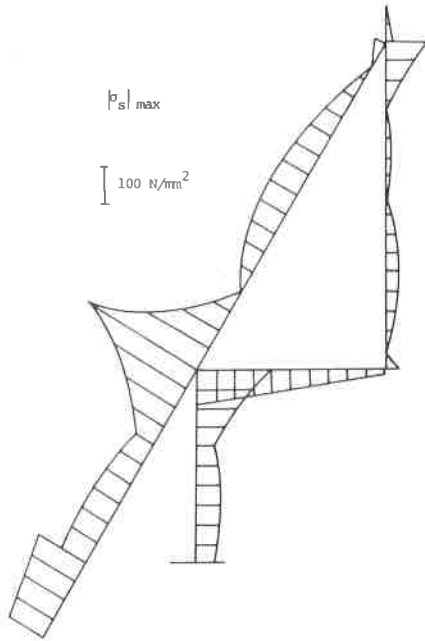
Kuva 14 Ympyrälaatan taipuma säteen funktiona.



Kuva 15 Ympyrälaatan säteen suuntainen taivutusmomentti.



Kuva 16 Tuhkasiilon laskentamalli.



Kuva 17 Tuhkasiilon laskennassa tuloksena saatuja jännityksiä.

## LOPPUSANAT

IVOKUORI on osoittautunut käytössä tehokkaaksi, halvaksi ja helppokäyttöiseksi tietokoneohjelmaksi. Se on käytettävissä Oy NOKIA Ab:n GE-635 tietokoneella. Vertailulaskelmat saman elementin sisältävän MARC-ohjelman kanssa ovat varmistaneet ohjelman oikeellisuuden. Lämpökuormitettujen haarautuvien kuorien yhteydessä on kuitenkin havaittu joitakin epäloogisuuksia saaduissa tuloksissa. Tämän johdosta ollaan luopumassa vapausasteiden eliminoinnista. Haarautumiskohtien solmut on tarkoitus kytkeä toisiinsa sidoksella, joka pakottaa vastinsolmujen siirtymät ja kiertymät yhtäsuuriksi (kiertymä lausuttu solmuvapausasteiden  $u$ ,  $w$ ,  $\frac{du}{ds}$  ja  $\frac{dw}{ds}$  avulla). Tätä kirjoitettaessa on mainittu muutoksen toteuttaminen vielä kesken.

## KIRJALLISUUTTA

- [1] O.Zienkiewicz, The finite element method in engineering science. McGraw-Hill. 1971
- [2] H. Kraus, Thin elastic shells. Wiley. 1967

- [3] MAR-CDC, User information manual, Vol I-II, Publ.no. 17309500 and 17311600. Control Data Corporation 1976
- [4] J.Uschanoff, Pyörähdyssymmetrisen kuoren muodonmuutos- ja jännitystilän määrittäminen. Diplomityö, TKK/R-os. 1973
- [5] S.Orivuori, Elementtimenetelmään perustuvan ohjelmajärjestelmän IVOFEM esittely. Rakenteiden Mekaniikka 8. (1975) 3-4.
- [6] O.Zienkiewicz, J.Bauer, K.Morgan and E.Onate, A simple and efficient element for axisymmetric shells. Int. J. Num. Methods in Engn 11 (1977)
- [7] A.Kalnis, Analysis of shells of revolution subjected to symmetrical and nonsymmetrical loads, Journal of Applied Mechanics. Sept. 1964. s. 467... 476

*Seppo Orivuori, dipl.ins., Imatran Voima Oy, Helsinki.*