

JÄÄN VIRUMINEN II

Erkki KM Leppävuori

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 10
No. 4 1977 s. 1...20.

YHTEENVETO: Jään virumista käsittelevän kaksiosaisen artikkelin II osassa luodaan aluksi katsaus Helsingin teknillisen korkeakoulun Rakennetekniikan laitoksessa suoritettuihin jään lujuuskokeisiin, pääasiassa virumiskoejärjestelyyn ja -tuloksiin. Mitattujen muodonmuutosten pienuus johtuu koejään hyvästä laadusta sekä valitusta kuormitus suunnasta (c-akselin suunta). Saatuihin virumiskoetuloksiin on testattu neljää eri virumismallia. Sovellutuksia varten on muodostettu potenssimalli, jonka avulla on laskettu staattisia jäänpaineita muutamassa yksinkertaisessa tapauksessa. Esimerkkilaskelmissa saatuja paineita on verrattu Saimaan kanavan jäälle aiemmin muodostetun mallin antamiin tuloksiin sekä luonnossa tehtyihin mittauksiin.

JOHDANTO

Sekä jään erilliskiteen että monikiteisen jään mekaanisia ominaisuuksia on tutkittu runsaasti. Tutkimukset ovat kuitenkin pääasiassa olleet lyhytaikaisia puristus- ja vetokokeita laboratorio-olosuhteissa sekä luonnossa suoritettuja jääpeitteeseen sahattujen ulokepalkkien taivutuskokeita. Varsinaisia pitkäaikaisia virumiskokeita on tehty jokseenkin vähän.

Erilaisten jääkuormien teoreettisia tarkasteluja on kirjallisuudesta löydettävissä sängen niukalti. Varsinkin viskoelastisuusteorian tarjoamia mahdollisuuksia staattisten jääkuormien arvioinnissa ei ole aiemmin käytetty hyväksi.

Tämän artikkelin II osan tarkoituksena on esitellä muutaman yksinkertaisen esimerkin avulla jäänpaineiden laskemista. Menettelytapa on sovellettavissa mutkikkaampiinkin probleemoihin esim. elementtimenetelmän avulla.

JÄÄN LUJUUSKOKEET

Kaikille jääkokeille on ominaista koetulosten suuri hajonta. Tämä selittyy kokeissa vaikuttavien tekijöiden runsaudella: kuormitusnopeus, koelämpötila ja suhteellinen kosteus, koejään kiderakenne (myös käytetyn veden kemiallinen koostumus), jään lämpötila- ja muodonmuutoshistoria (koekappaleiden valmistuksessa muodostuu jäähän jännityksiä sekä muodonmuutoksia) ja koekappaleen koko (skaalaefekti). Merijäätä tutkittaessa tuloksiin vaikuttaa myös suolaonkaloiden runsaus sekä jään ikä.

Htkk:n virumiskokeet

Helsingin teknillisen korkeakoulun Rakennetekniikan laitoksessa aloitettiin vuonna 1971 erilaisten jääkuormien ja jään mekaanisten ominaisuuksien tutkiminen. Koska jään lujuuden, muodonmuutosten, liikkeiden ja kuormitusten tutkiminen edellyttää myös jään termoviskoelastisten ominaisuuksien selvittämistä, katsottiin tarpeelliseksi muodostaa jään termoreologisen käyttäytymisen kuvaamiseksi matemaattinen malli laboratoriokokeiden perusteella. Seuraavassa esitetään lyhyesti käytetty koejärjestely sekä muutamia koetuloksia. /5/.

Kylmä vesijohtovesi lämmitettiin 333 K:iin ilmapitoisuuden vähentämiseksi ennen jäädytystä, joka tapahtui 263 K:n lämpötilassa. Jäädytysastiat oli eristetty sekä pohjasta että reunoiltaan (kuva 1), jotta veden jäätyminen tapahtuisi luonnonmukaisesti pinnalta alaspäin. Näin varmistettiin kiteiden c-akselin suuntautuminen vaakasuoraan, jossa suunnassa lopulliset lieriömäiset (korkeus 160 mm, halkaisija 75 mm) koekappaleet 'lämpöporattiin' vastuslangan avulla (kuva 2). Koejään tiheydeksi saatiin vuoden 1976 koesarjassa noin 918 kg/m^3 . Koekappaleiden kuormitus kiteen c-akselin suunnassa tapahtui vipulaitteella (kuvat 3 ja 4) ja muodonmuutoksen mittaus suoraan koekappaleesta induktiivisen anturin avulla kuvan 5 mukaisesti. Mittaustulokset rekisteröitiin tietyin aikaväleihin reikänauhalle. Lopulliset koekäyrät saatiin suoraan tietokoneeseen kytketyllä piirturilla.

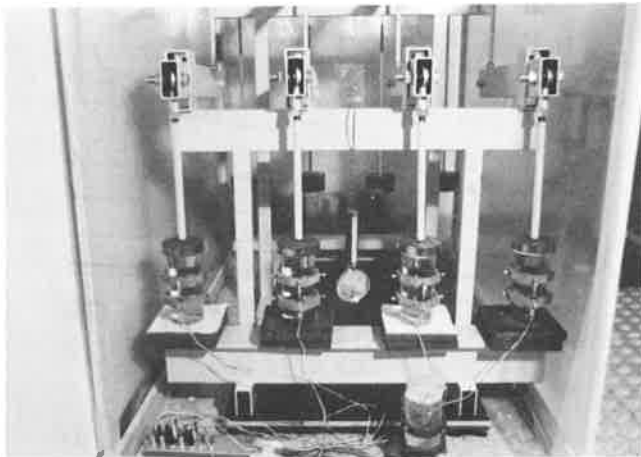
Vuoden 1976 koesarjassa (yhteensä 106 virumiskoetta) koelämpötiloina oli 271 K, 268 K ja 253 K. Kuormitustasoina käytettiin 0,1 MPa, 0,2 MPa, 0,5 MPa



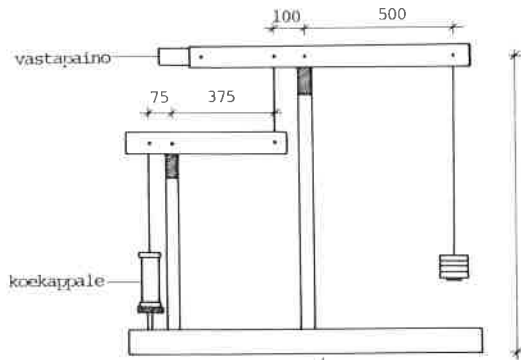
Kuva 1 Veden jäädytysastiat.



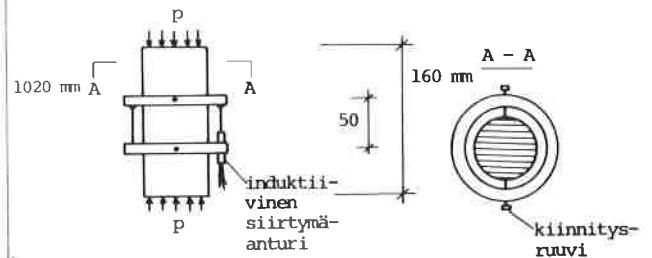
Kuva 2 Koekappaleen 'lämpöporaus'.



Kuva 3 Kuormituslaite.



Kuva 4 Kuormituslaitteen periaatepiirros.

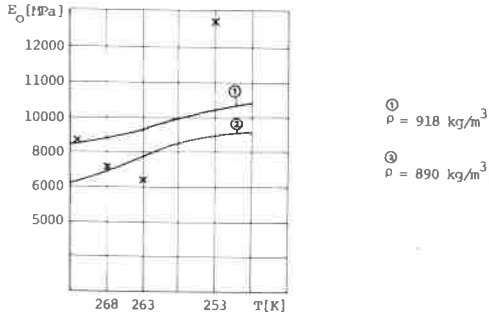


Kuva 5 Muodonmuutoksen mittausjärjestely.

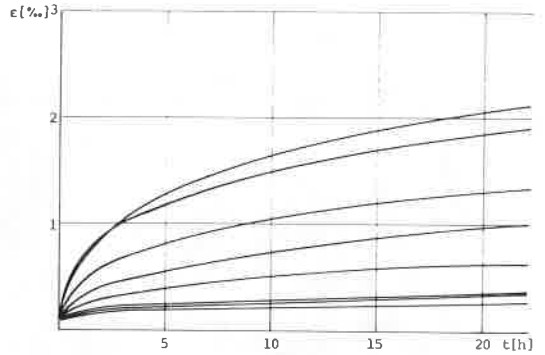
ja 0,7 MPa sekä kuormitusaikana pääasiassa 24 tuntia, jonka valintaperusteena oli normaalin vuorokausirytmien aiheuttaman jään lämpölaajenemisen synnyttämien kuormitusten kesto aika. Alhaiset jännitystasot valittiin sillä perusteella, että luonnossa mitatut staattiset jäänpainemat ovat suuruusluokaltaan 0,1...1 MPa. Lämpötila-alueet määrättiin sellaisiksi, että eri muodonmuutosprosessit (vrt. osa I /6/ siv. 42) kävisivät hyvin ilmi.

Kokeissa saadut alkukimmokertoimet, jotka vastaavat 1...2 s:n muodonmuutoksen arvoja kuormituksen alkamisesta, on merkitty pistein näkyviin kuvaan 6, jossa on kuvattu Bogorodskiin /2/ saamat arvot kahdelle jään eri tiheydelle.

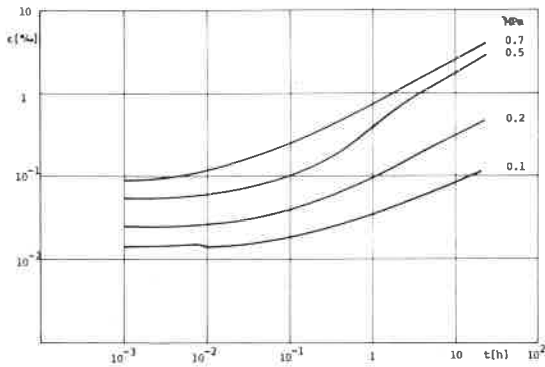
Kuvassa 7 on esitetty tyypillisiä virumakäyriä lämpötilassa 263 K ja jännitystasolla 0,5 MPa. Koetulosten hajonta on melkoinen, kuten kuvasta nähdään. Jännityksen vaikutus virumaan lämpötilassa 271 K ilmenee kuvasta 8 ja lämpötilan vaikutus jännitystasolla 0,3 MPa kuvasta 9, jossa esitetyt käyrät perustuvat Htkk:ssa vuonna 1973...1974 tehtyihin kokeisiin.



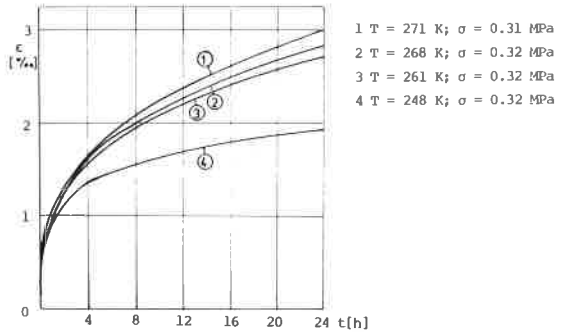
Kuva 6 Alkukimmokertoimet Bogorodskiin mukaan /2/. Omat mittaukset on merkitty pisteillä.



Kuva 7 Tyypillisiä virumiskäyriä (T=263 K ja $\sigma=0,5$ MPa).



Kuva 8 Jännitystason vaikutus virumaan (T=271 K).



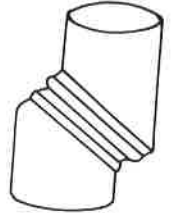
Kuva 9 Lämpötilan vaikutus virumaan.

Kuvia 8 ja 9 vertaamalla havaitaan virumassa suuri ero, joka johtuu paitsi mittaustekniikan paranemisesta niin myös jäälaadun erilaisuudesta.

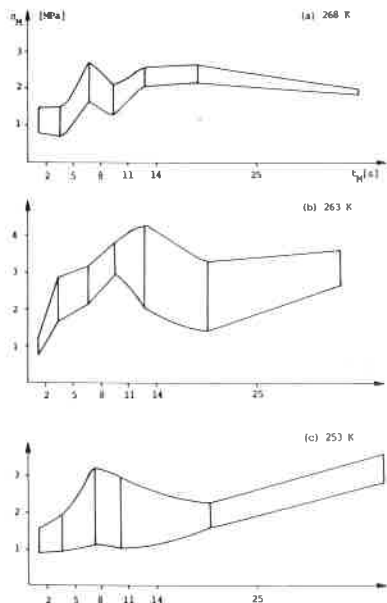
Jännitystasoilla 0,7 MPa lämpötiloissa 271 K ja 268 K tapahtui useissa kokeissa virumismurto, jolloin koekappaleen muoto muuttui kuvan 10 mukaisesti.

HTKK:n murtokokeet

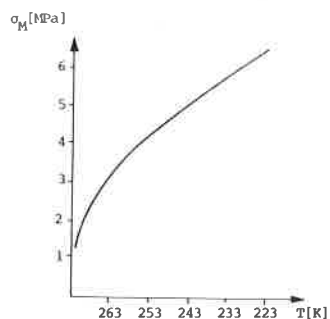
Tehdyn virumiskoesarjan ohella suoritettiin myös muutamia murtokokeita koekappaleen murtolujuuden suuruusluokan määrittämiseksi. Kokeita tehtiin lämpötiloissa 268 K, 263 K ja 253 K kuormitusnopeutta varioiden. Kuvassa 11 on esitetty saadut murtolujuudet hajontoineen murtoajan funktiona. Suurimmat lujuusarvot saatiin 263 K:n lämpötilassa. Lämpötilan laskiessa jää muuttui selvästi haureammaksi ja käytetyillä kuormitusnopeuden arvoilla saavutettu murtolujuus oli yllättävän pieni. Maserin /7/ saamat tulokset on vertailun vuoksi esitetty kuvassa 12. Kuvaan 13 on koottu havaitut koekappaleen murtumistavat, joista tapaukset b ja d olivat selvästi yleisimmät.



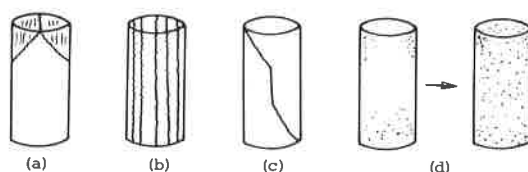
Kuva 10 Koekappaleen virmurto.



Kuva 11 Murtokoetulokset hajontoineen kuormitusajan funktiona.



Kuva 12 Jään murtolujuus /7/.



Kuva 13 Koekappaleiden murtumistavat.

Muutamia muita jään fysikaalisia ominaisuuksia

Jään fysikaalisten ominaisuuksien osalta viitataan lähteeseen /3/. Seuraavassa esitetään vain sovellutusten kannalta tarpeelliset arvot.

Jään tiheys

$$\rho = \{917,0 + (273-T) \frac{1}{10K}\} \text{ kg/m}^3 \quad (1)$$

Jään lämpöpiteneemiskerroin

$$\alpha_j = 5...6 \times 10^{-5} \text{ 1/K} \quad (2)$$

Jään Poissonin vakio

$$\nu_j = 0,01 T - 2,23 ; T \in [243 \text{ K}, 273 \text{ K}] \quad (3)$$

JÄÄN VIRUMISMALLIT

Vakiolämpötilassa virumisfunktio D määritellään seuraavasti

$$D(t, T_0, \sigma_0) = \frac{\epsilon(t, T_0, \sigma_0)}{\sigma_0} \quad (4)$$

Suoritetuissa kokeissa on kuormitus ollut vakio jännityksen muuttuessa koekappaleen poikkipinnan muodonmuutosten vuoksi. Tämä jännityksen vaihtelu on kuitenkin niin vähäinen puristettaessa jäälieriöitä pienillä kuormilla, että yhtälöä (4) voidaan soveltaa sellaisenaan saatuihin koetuloksiin.

Kuten tämän artikkelin I osassa todettiin, voidaan monikiteisen jään muodonmuutos ennen tertiaarista virumisvaihetta esittää Cottrell-Aytek'in yhtälöllä

$$\epsilon(t, T, \sigma) = \epsilon_0(T, \sigma) + \beta(T, \sigma)t^{n(T, \sigma)} + \dot{\epsilon}_s(T, \sigma)t, \quad (5)$$

jolloin virumisfunktiksi saadaan

$$D(t, T_0, \sigma_0) = \frac{1}{E_0(T_0)} + \frac{\beta(T_0, \sigma_0)}{\sigma_0} t^{n(T_0, \sigma_0)} + \frac{\dot{\epsilon}_s(T_0, \sigma_0)}{\sigma_0} t. \quad (6)$$

Alhaisilla jännitystasooilla ja kuormitusajan ollessa lyhyt voidaan sekundaarinen viruma jättää huomiotta. Näin päädytään malliin

$$D(t, T_0, \sigma_0) = A(T_0) + B(T_0, \sigma_0)t^{n(T_0, \sigma_0)}. \quad (7)$$

Yhtälön (6) sekundaariviruman nopeudelle on artikkelin I osassa esitetty muutamia yleisimpiä malleja (yhtälöt (5), (6) ja (8)).

Jään virumisen on useissa kokeissa todettu olevan jännityksen suhteen epälineaarinen etenkin sekundaarisessa virumisvaiheessa. Mallin (7) on sitävastoin havaittu olevan lievästi epälineaarinen.

Koetuloksiin testatut mallit

Htkk:ssa tehdyn koesarjan /5/ tuloksiin testattiin neljää mallia.

Yhtälön (7) mukainen malli oletettiin jännityksen suhteen lineaariseksi

$$D(t, T_0, \sigma_0) = a_1(T_0) + b_1(T_0) t^{n_1(T_0)}. \quad (8)$$

Metallien virumista tutkittaessa on usein käytetty Kelvin-Voigt'in mallia

$$D(t, T_0, \sigma_0) = a_2(T_0) - b_2(T_0) e^{-n_2(T_0)t}, \quad (9)$$

joka on myös jännityksen suhteen lineaarinen.

Kolmantena mallina testattiin Mäkeläisen /8/ muoveille kehittämää virumis-mallia

$$\log D(t, T_0, \sigma_0) = a_3(T_0, \sigma_0) + b_3(T_0, \sigma_0) \times \operatorname{arsinh} \left[\log (n_3(T_0, \sigma_0) t) \right], \quad (10)$$

joka voi olla epälineaarinenkin jännityksen suhteen.

Neljäntenä mallina tutkittiin klassinen Andradsen potenssimalli, jolloin yhtälössä (8) $n_1 = 1/3$.

Kunkin mallin sopivuus koepistejoukkoon testattiin pienimmän neliösumman menetelmää soveltaen /9/. Kaikille koesarjan kokeille kukin malli laskettiin erikseen. Taulukossa 1 on esitetty eri mallien hyvyys käyttäen kriteerinä nk. suhteellista keskihajontaa

$$s_r = \left(\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k \left(\frac{D_t(t_i) - D_m(t_i, T_0)}{D_m(t_i, T_0)} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Taulukosta nähdään selvästi, että Mäkeläisen malli (10) kuvaa parhaiten koepistejoukkoja. Malli (8) on lähes yhtä hyvä etenkin alhaisilla jännityksen arvoilla. Kelvin-Voigt'in malli (9) ei sitä vastoin sovellu kovinkaan hyvin jään virumisen kuvaamiseen ja Andradsen malli on täysin soveltumaton saatuihin koetuloksiin.

			MALLI (8)		MALLI (9)		MALLI (10)		ANDRADE	
T [K]	σ [MPa]	KOKEIDEN LKM	\bar{s}_r [%]	s_s [%]	\bar{s}_r [%]	s_s [%]	\bar{s}_r [%]	s_s [%]	\bar{s}_r [%]	s_s [%]
271	0.1	4	10.11	4.16	17.54	7.26	12.28	2.79	26.71	16.39
	0.2	10	12.51	11.12	13.48	5.90	8.10	4.98	47.20	47.83
	0.5	9	13.77	12.01	28.44	19.23	9.37	5.70	79.63	75.16
	0.7	3	13.73	11.44	66.90	14.55	7.89	1.34	103.76	59.07
268	0.1	7	5.41	3.56	11.46	6.54	11.33	6.32	32.16	15.44
	0.2	7	7.61	7.85	24.52	8.65	5.58	3.86	34.58	36.14
	0.5	7	3.99	2.38	18.34	6.02	6.81	6.02	23.62	35.78
	0.7	11	22.68	38.52	24.12	12.02	15.51	6.36	104.54	53.78
263	0.1	10	2.71	1.32	7.56	2.95	6.14	2.47	13.03	6.47
	0.2	7	13.83	10.43	22.93	9.28	5.77	2.83	30.52	23.10
	0.5	12	8.87	7.22	20.34	12.73	6.37	4.29	27.10	39.11
	0.7	7	9.55	7.64	15.06	13.55	8.54	3.68	43.82	60.48
273	0.2	4	10.51	5.84	10.26	6.60	9.56	4.36	25.33	16.91
	0.5	4	13.34	7.25	12.14	2.79	14.79	5.50	77.47	41.45
	0.7	4	15.40	10.84	21.29	11.72	13.30	5.03	92.98	85.45

Taulukko 1 Testattujen mallien hyvyys. \bar{s}_s on suhteellisen keskihajonnan (11) keskiarvo ja s_s vastaava hajonta.

Sovellutuksissa käytetyt mallit

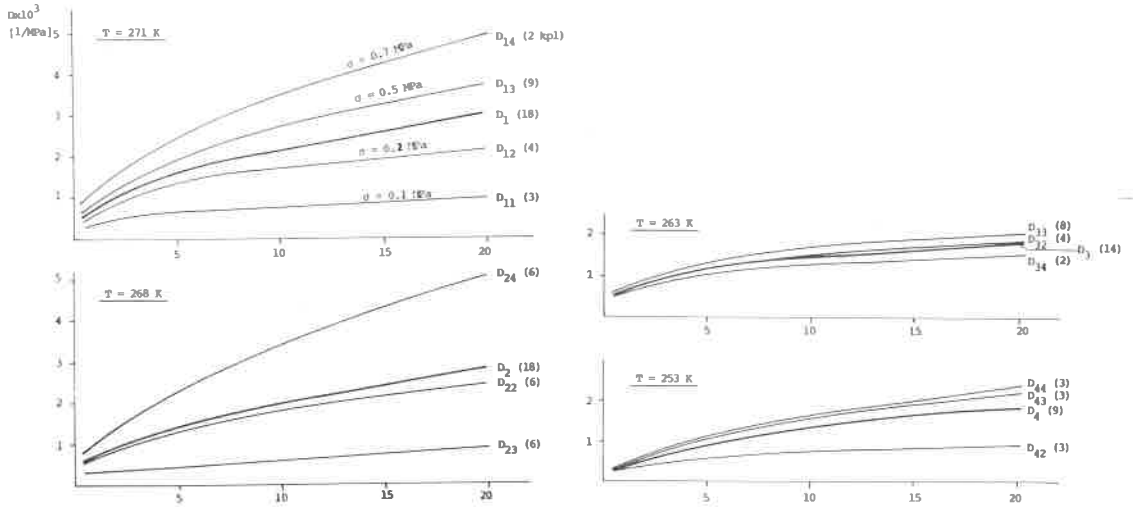
Myöhemmin esitettävät sovellutukset on laskettu yhtälön (8) mukaisella mallilla. Lopullisen mallin muodostamiseen käytettiin koesarjasta ainoastaan niitä tuloksia, joiden virumis aika on ylittänyt 20 h ja jotka käyräkohtaisen mallianalyysin perusteella ovat hyväksyttävissä. Tehtyjen rinnakkaiskokeiden keskiarvokäyrät ($D_{\ell m}$) jännitystasoinnain ja lämpötiloinnain on esitetty kuvassa 14. Rinnakkaiskokeiden lukumäärä vaihtelee kahdesta yhdeksään. Yhteensä kokeita hyväksyttiin lopullisen mallin muodostamiseen 59 kpl.

Kuvasta 14 ilmenee jälleen koetulosten suuri hajonta. Olettamalla virumisen lineaariseksi jännityksen suhteen saadaan lämpötiloinnain lopulliset virumiskäyrät D_{ℓ} ($\ell=1..4$), joille on pienimmän neliösumman keinolla määrätty malliparametrien $a_1(T_0)$ ja $b_1(T_0)$ arvot. Laskennassa on käytetty 88 koepistettä, jotka ovat jakaantuneet tasan log t:n suhteen.

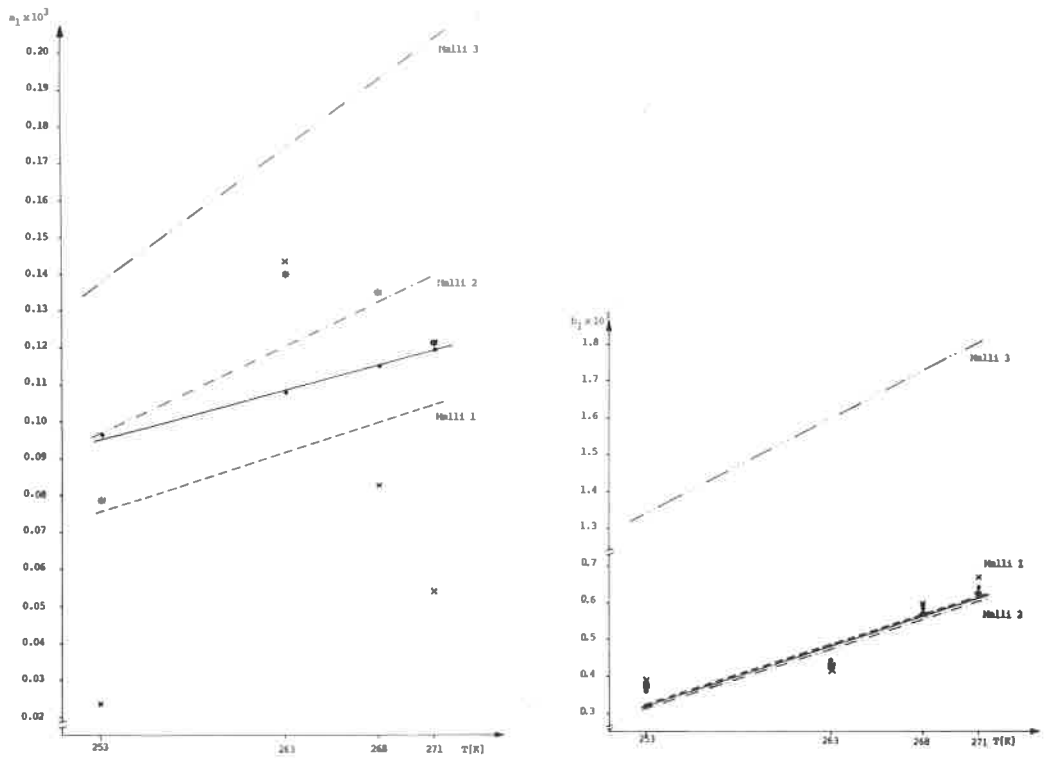
Eksponentin n_1 todettiin olevan riippumaton sekä lämpötilasta että jännityksestä ja sen arvoksi saatiin 0,491 laskemalla kunkin erillisen koekäyrämallin eksponentin keskiarvo (hajonta 0,155). Tässä yhteydessä on syytä todeta, ettei muita parametreja voida yhdistää erillisten koekäyrämallien parametreista, koska ne ovat osittain toisistaan riippuvia.

Kuvaan 15 on merkitty kussakin lämpötilassa saadun koekäyrän (D_1 kuvassa 14) mallin parametriarvopisteet. Käytettyä mallia testattiin kolmella erilaisella tavalla. Pisteet (x) kuvaavat tapausta, jossa parametrit a_1 ja b_1 ovat molemmat vapaat haettaessa virheen minimiä. Pisteet (*) on laskettu kiinnittämällä parametri a_1 kokeissa havaittujen alkukimmokertoimien (kuva 6) perusteella. Kolmantena vaihtoehtona on parametri a_1 kiinnitetty Bogorodskiin (kuva 6) saamien E_0 -arvojen perusteella.

Koska eksponentti n_1 on vakio, voidaan jään virumismallin lämpötilariippuvuus esittää parametrien a_1 ja b_1 avulla. Mittauslämpötilojen vähyden



Kuva 14 Koekäyrien yhdistely (D_{ℓ} on $D_{\ell m}$:n keskiarvokäyrä).



Kuva 15 Malliparametrien lämpötilariippuvuus ja sen Tšebyšev-approksimointi.

vuoksi on riittävää esittää parametrien lämpötilariippuvuus lineaarisena approksimaationa (kuva 15). Linearisointi on suoritettu Tšebyšev-approksimoinnilla /10/:

- Olkoon $f(x)$ määritelty diskreetissä joukossa X . Jos X :ssä on täsmälleen $n+1$ pistettä, saadaan approksimaatio $L(A^*, x_i)$ yhtälöryhmästä

$$L(A^*, x_i) - f(x_i) = (-1)^i d ; \quad (12)$$

$$i = 1 \dots n+1$$

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$$

$$x_i \in X$$

sillä parhaan approksimaation tulee alternoida n kertaa X :ssä. $|d|$ on $f(x)$:n parhaan X :ssä olevan approksimaation deviaatio.

- Jos X :ssä on pisteitä enemmän kuin $n+1$, niin haetaan paras approksimaatio kaikissa $(n+1)$:n pisteen osajoukoissa ja valitaan se, joka antaa suurimman deviaation.
- Käytettäessä lineaarista approksimaatiota

$$L(A^*, x) = A + Bx \quad (13)$$

tarvitaan parhaalle approksimaatiolle kolme pistettä ($n=2$).

Sovellutuksia varten muodostettiin kaksi mallia. Malli 1 on matemaattisessa mielessä hyvä, koska sekä a_1 että b_1 ovat vapaita parametreja. Malli 2 on fysikaalisessa mielessä hyvä, sillä parametri a_1 on kiinnitetty todettujen alkukimmokertoimien perusteella. Mallien 1 ja 2 parametrien lämpötilariippuvuudet ovat

$$\textcircled{1} \begin{cases} a_1 = -336,62 \times 10^{-6} + 1,6278 \times 10^{-6} T \\ b_1 = -3,5624 \times 10^{-3} + 15,394 \times 10^{-6} T \end{cases} \quad (14)$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} a_1 = -502,20 \times 10^{-6} + 2,3667 \times 10^{-6} T \\ b_1 = -3,4889 \times 10^{-3} + 15,067 \times 10^{-6} T \end{cases} \quad (15)$$

$$T \in [253 \text{ K}, 273 \text{ K}]$$

$$[D] = 1/\text{MPa} ; [t] = \text{h} .$$

Kolmantena tapauksena sovellutusesimerkeissä on käytetty vuonna 1973...1974 Htkk:ssa suoritettujen tutkimusten perusteella Saimaan kanavan jäälle kehitettyä virumismallia /4/, jossa eksponentti $n_1 = 1/3$ ja muiden parametrien lämpötilariippuvuudet (kuva 15) ovat

$$\textcircled{3} \begin{cases} a_1 = -792,18 \times 10^{-6} + 3,6735 \times 10^{-6} T \\ b_1 = -5,1059 \times 10^{-3} + 25,510 \times 10^{-6} T . \end{cases}$$

Mallien 1 ja 2 ero on pääasiassa alkukimmokertoimessa, joten virumisajan kasvaessa molempien mallien antamat tulokset yhtyvät kuten myöhemmistä esimerkeistä havaitaan. Malli 3 sitävastoin eroaa huomattavasti muista. Tämä johtuu siitä, että luonnonjää on lujuusmielessä heikompaa kuin laboratoriossa

valmistettu täysin ilmaton jää. Näin ollen voidaan mallin 1 antamia tuloksia pitää käytännön probleemojen ylälikiarvoina.

SOVELLUTUKSIA

Staatististen jääkuormien sovellutus-esimerkkeinä esitetään seuraavassa kolme erilaista tapausta, joissa jäänpaine aiheutuu lämpötilan muutoksesta johtuvasta lämpölaajenemisesta /1,4/. Jäänpaineen ratkaisu suoritetaan numeerisesti trapetsikaavaa soveltaen.

Numeerinen integrointi

Yksinkertaisissa tapauksissa jäänpaineita laskettaessa on paine $p(t)$ ratkaistava lausekkeesta

$$\int_0^t \left(D_j(t-\tau) + A(t)D_s(t-\tau) \right) \dot{p}(\tau) d\tau = B(t), \quad (17)$$

jossa jään virumisfunktioita merkitään D_j :llä ja jäätä rajoittavan materiaalin virumisfunktioita D_s :llä. Ajasta riippuvat termit A ja B kuvaavat reunaehtoja sekä materiaaliominaisuuksia. Yhtälöön (17) päädytään suoraan soveltamalla lineaarisessa viskoelastisuusteoriassa pätevää Boltzmannin periaatetta, jonka mukaan muodonmuutos on

$$\epsilon(t) \equiv \int_{-\infty}^t D(t-\tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Yhtälön (17) ratkaisu trapetsikaavalla tapahtuu seuraavasti:

Trapetsikaavan mukaan

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{x_n - x_0}{n} \left[\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{1}{2} f(x_n) \right]; \quad n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Jos nyt merkitään

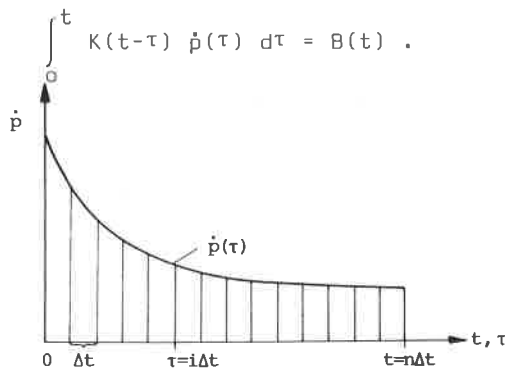
$$K(t-\tau) \equiv D_j(t-\tau) + A(t) D_s(t-\tau), \quad (20)$$

niin yhtälö (17) saadaan muotoon

$$\int_0^t K(t-\tau) \dot{p}(\tau) d\tau = B(t). \quad (21)$$

Jakamalla integrointiväli $[0, t]$ n :ään osaväliin 16 mukaisesti saadaan

$$\tau = i\Delta t; \quad t = n\Delta t. \quad (22)$$



Kuva 16 Paineen aikaderivaatan diskretointi.

Ottamalla käyttöön lyhennysmerkinnät

$$\begin{aligned} p_i &\equiv p(\tau) = p(i\Delta t) \\ K_{n-i} &\equiv K(t-\tau) = K(n-i)\Delta t \\ B_n &\equiv B(t) \end{aligned} \quad (23)$$

ja merkitsemällä paineen aikaderivaattoja

$$\begin{aligned} \dot{p}_0 &\equiv \dot{p}(0) = \frac{p_1 - p_0}{\Delta t} \\ \dot{p}_i &\equiv \dot{p}(\tau) = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta t} \\ \dot{p}_n &\equiv \dot{p}(t) = \frac{p_n - p_{n-1}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (24)$$

saadaan sijoittamalla yhtälöön (19)

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 ; \quad x_n = t ; \quad x = \tau \\ f(\tau) &= K(t-\tau) \dot{p}(\tau) \end{aligned} \quad (25)$$

paineen ratkaisemiseksi yhtälö (21) muotoon

$$\Delta t \left(\frac{1}{2} K_n \dot{p}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} K_{n-k} \dot{p}_k + \frac{1}{2} K_0 \dot{p}_n \right) = B_n . \quad (26)$$

Paine p_n voidaan nyt laskea iteratiivisesti yhtälöstä

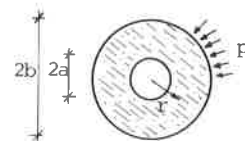
$$p_n = \frac{B_n - F p_0}{C} = \sum_{k=1}^{n-1} H_k p_k ; \quad n \in \mathbb{N} , \quad (27)$$

jossa on käytetty merkintöjä

$$\begin{aligned} F &\equiv -\frac{1}{2} (K_n + K_{n-1}) \\ H_k &\equiv \frac{1}{2} (K_{n-k+1} - K_{n-k-1}) \\ C &\equiv \frac{1}{2} (K_1 + K_0) . \end{aligned} \quad (28)$$

Jäälevyn ratkaisu

Esitettävissä esimerkeissä on tarkasteltu mm. ympyränmuotoisen jäälevyn lämpölaajenemisen aiheuttamia rasituksia. Jos ohuen, tasapaksun ja pyöreän levyn, jossa on samankeskinen pyöreä aukko (kuva 17), lämpötila muuttuu keskipisteen suhteen pyörähdys-symmetrisesti, on levyn säteen suuntainen siirtymä u tunnetusti /12/ muotoa



Kuva 17 Jäälevy.

$$u = (1+\nu) \frac{\alpha}{r} \int_0^r \Delta T r' dr' + Ar + B \frac{1}{r} , \quad (29)$$

jossa ν on levyn Poissonin vakio, α lämpöpiteneiskerroin sekä A ja B integroimisvakioita. Mikäli levyn lämpötilan muutos oletetaan vakioksi, saadaan ulkoreunan siirtymälle arvo

$$u|_{r=b} = (1+\nu) \frac{1}{2} \alpha \Delta T b + Ab + B/b . \quad (30)$$

Vastaavasti säteen suuntainen jännitys on muotoa

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu} \left(-(1+\nu) \frac{1}{2} \alpha \Delta T + \frac{1+\nu}{1-\nu} A - \frac{1}{r^2} B \right) . \quad (31)$$

Koska levyn ulkoreunaan vaikuttaa tasainen puristava paine p , reunaehdot ovat

$$\sigma_r|_{r=a} = 0 ; \quad \sigma_r|_{r=b} = -p . \quad (32)$$

Levyn ulkoreunan siirtymäksi reunaehdot huomioon ottaen saadaan

$$u|_{r=b} = \alpha \Delta T b - \frac{p b}{E(b^2 - a^2)} \left((1-\nu) b^2 + (1+\nu) a^2 \right) . \quad (33)$$

Olettamalla levyn Poissonin vakio ajasta riippumattomaksi saadaan elastis-viskoelastista analogiaa soveltamalla yhtälöstä (33) jäälevyn ulkoreunan viskoelastinen siirtymä

$$u_j(b,t) = \alpha_j b \Delta T(t) - \frac{b}{b^2 - a^2} \left((1-\nu_j(T)) b^2 + (1+\nu_j(T)) a^2 \right) \int_0^t D_j(t-\tau, T) \dot{p}(\tau) d\tau . \quad (34)$$

Tasotapauksen konstitutiivinen yhtälö jäälle

Vakiolämpötilassa T_0 voidaan tasotapauksen konstitutiivinen yhtälö lineaariselle, isotrooppiselle termoviskoelastiselle materiaalille esittää muodossa /1/

$$[E] = D_0 [I] + \int_0^t \left(D_1 [I] \text{tr}[S] + D_2 [S] \right) d\tau \quad (35)$$

kun matriisit $[E]$ ja $[S]$ ovat

$$[E] = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \epsilon_{xy} \\ \frac{1}{2} \epsilon_{xy} & \epsilon_y \end{pmatrix} ; \quad [S] = \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_x & \dot{\sigma}_{xy} \\ \dot{\sigma}_{xy} & \dot{\sigma}_y \end{pmatrix} . \quad (36)$$

Olettamalla alkumuodonmuutokset nollassi ($D_0 = 0$) saadaan yhtälö (35) komponenttimuotoon

$$\begin{cases} \epsilon_x &= \int_0^t \left(D_1 (\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y) + D_2 \dot{\sigma}_x \right) d\tau \\ \epsilon_y &= \int_0^t \left(D_1 (\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y) + D_2 \dot{\sigma}_y \right) d\tau \\ \epsilon_{xy} &= 2 \int_0^t D_2 \dot{\sigma}_{xy} d\tau . \end{cases} \quad (37)$$

Käsiteltäviä sovellutuksia silmällä pitäen esitetään yhtälöt (37) kahdessa erikoistapauksessa.

$$1^{\circ} \quad \sigma_x = \sigma \quad ; \quad \sigma_y = \sigma_{xy} = 0$$

$$\therefore \begin{cases} \epsilon_x = \int_0^t D(t-\tau, T_0) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \\ \epsilon_y = -\nu(T_0) \int_0^t D(t-\tau, T_0) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \\ \epsilon_{xy} = 0. \end{cases} \quad (38)$$

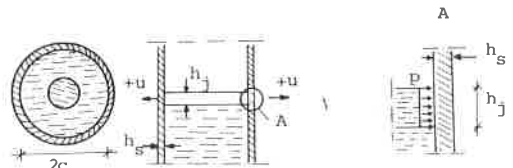
Nyt $D = D_1 + D_2$ kuvaa kimmokertoimen käänteisarvon aikariippuvuutta. Poissonin vakion on oletettu olevan ajasta riippumattoman.

$$2^{\circ} \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma \quad ; \quad \sigma_{xy} = 0$$

$$\therefore \begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = (1-\nu(T_0)) \int_0^t D(t-\tau, T_0) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \\ \epsilon_{xy} = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Esimerkki 1

Ensimmäisessä sovellutusesimerkissä tarkastellaan korkeata, sylinterimäistä vesisäiliötä (kuva 18), jonka vedenpinta on jäänyt. Koska jäälevyyn sen lämpölaajetessa vaikuttaa tasainen puristus-



Kuva 18 Korkea vesisäiliö, jonka vedenpinta on jäänyt.

paine p , on $\sigma_r = \sigma_\phi$. Näin ollen voidaan yhtälön (39) mukaisesti jäälevyn säteen suuntainen siirtymä esittää yhtälöllä (34).

$$u_s(c, t) = \alpha_s \Delta T(t) c + \frac{p(t) c^2}{E_s h_s} \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \beta h_j} \cos\left(\frac{1}{2} \beta h_j\right) \right), \quad (40)$$

jossa on käytetty merkintää

$$\beta = \left(\frac{3(1-\nu_s^2)}{c^2 h_s^2} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (41)$$

On syytä todeta, ettei ratkaisu (40) päde reunahäirön vaikutuksen vuoksi, jos kuormituksen etäisyys säiliön kiinnitetystä reunasta on pienempi kuin $2\pi/\beta$.

Mikäli kuorta halutaan käsitellä viskoelastisena materiaalina, saadaan ratkaisu siirtymälle (40) analogisesti jäälevyn ratkaisun kanssa. Tässä yhteydessä on kuitenkin tyydytty tarkastelemaan kuorta kimmoisena.

Yhteensopivuusehdon

$$u_j(b, t) = u_s(c, t) \quad ; \quad b = c \quad (42)$$

avulla saadaan paineen ratkaisemiseksi yhtälö

$$\int_0^t \left[D_j(t-\tau) + A(t)/E_s \right] \dot{p}(\tau) d\tau = B(t), \quad (43)$$

joka on samaa muotoa kuin yhtälö (17). Termit A ja B ovat nyt muotoa

$$A(t) = \frac{b \left[1 - e^{-\frac{1}{2} \beta h_j} \cos\left(\frac{1}{2} \beta h_j\right) \right] (b^2 - a^2)}{h_s \left[(1 - \nu_j(T)) b^2 + (1 + \nu_j(T)) a^2 \right]} \quad (44)$$

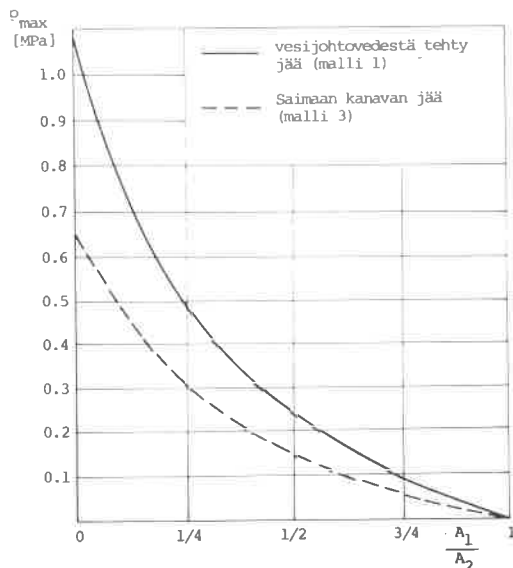
$$B(t) = \frac{(\alpha_j - \alpha_s) \Delta T(t) (b^2 - a^2)}{\left[(1 - \nu_j(T)) b^2 + (1 + \nu_j(T)) a^2 \right]} \quad (45)$$

Yhtälö (43) on ratkaistu numeerisesti integroiden aiemmin esitetyllä tavalla.

Kuvassa 19 on esitetty äärettömän jäykässä säiliössä muodostuvan jäänpaineen riippuvuus jäälevyissä olevan aukon koosta. Alkulämpötila $T_0 = 253$ K ja lämpenemisaika 12 h, jolloin lämpötila kohoaa lineaarisesti arvoon 273 K. Todettakoon, että kaikissa esimerkeissä lämpötilan on oletettu muuttuvan lineaarisesti.

Taulukossa 2 esitetään terässäiliön säteen vaikutus ja taulukossa 3 seinämän paksuuden vaikutus syntyvään maksimipaineeseen ja vastaavaan siirtymään.

Kuvaan 20 on piirretty jäälevyn paksuuden funktiona terässäiliön maksimisiirtymä ja vastaava paine.



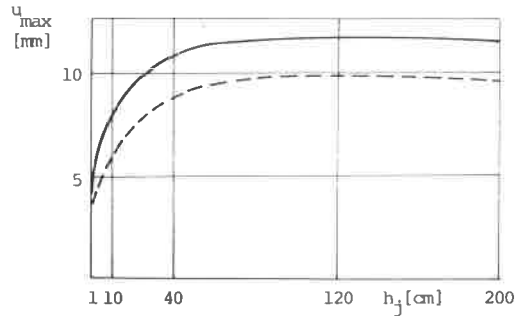
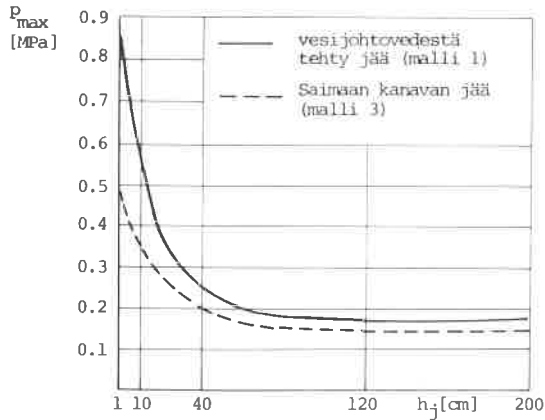
Kuva 19 Jääpeitteessä olevan aukon vaikutus maksimijäänpaineeseen. A_1 on jäärenkaan reiän pinta-ala ja A_2 säiliön seinän rajoittama sisäpinta-ala jäärenkaan tasossa.

c [m]	p_{max} [MPa]		u_{max} [mm]	
	MALLI 1	MALLI 3	MALLI 1	MALLI 3
5	0,31	0,23	5,0	4,1
10	0,20	0,16	11,0	9,6
15	0,15	0,13	17,1	15,3
20	0,13	0,11	23,1	21,0

Taulukko 2 Terässäiliön säteen vaikutus muodostuvaan maksimipaineeseen ja -siirtymään. $T_0 = 253$ K ; $t_L = 12$ h ; $h_s = 10$ mm ; $h_j = 600$ mm.

h_s [mm]	p_{max} [MPa]		u_{max} [mm]	
	MALLI 1	MALLI 3	MALLI 1	MALLI 3
5	0,10	0,09	11,9	11,0
10	0,20	0,16	11,0	9,6
20	0,39	0,28	9,3	7,3
30	0,53	0,35	7,8	5,9

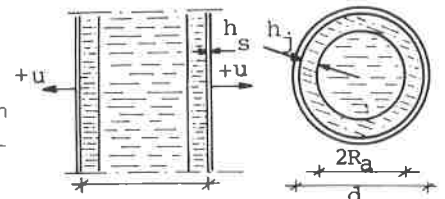
Taulukko 3 Terässäiliön seinämän paksuuden vaikutus maksimipaineeseen ja -siirtymään. $T_0 = 253$ K ; $t_L = 12$ h ; $c = 10$ m ; $h_j = 600$ mm.



Kuva 20 Jäälevyn paksuuden vaikutus ($h_s = 10$ mm, $c = 10$ m, $T_0 = 253$ K ja $t_L = 12$ h).

Esimerkki 2

Kuvan 21 tapauksessa vesisäiliön reunoille on muodostunut h_j :n paksuinen jääkerros. Olettamalla vesisäiliö korkeaksi voidaan säiliökuoren siirtymä ratkaista tunnetusta yhtälöstä /12/



Kuva 21 Reunoiltaan jäänyt vesisäiliö.

$$u = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha}{r} \int_0^r \Delta T r' dr' + Ar + B/r \quad (46)$$

kun lämpötila muuttuu ainoastaan säteen suunnassa akselin suhteen symmetrisesti. Säteen suuntaiselle jännitykselle saadaan otaksumalla ΔT vakioksi koko kuoren alueella yhteys

$$\sigma_r = \frac{E}{1 + \nu} \left[- \frac{1 + \nu}{2(1 - \nu)} \alpha \Delta T + \frac{1}{1 - 2\nu} A - B/r^2 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \epsilon_z \right]. \quad (47)$$

Reunaehtojen

$$\begin{cases} \sigma_r|_{r=c} = -p \\ \sigma_r|_{r=d} = 0 \end{cases} \quad (48)$$

avulla saadaan integroimisvakiot A ja B ratkaistua ja olettamalla, että säiliön akselin suuntainen muodonmuutos pääsee vapaasti tapahtumaan (eli $\epsilon_z = \alpha \Delta T$), saadaan lopulta siirtymälle lauseke

$$u_s(c, t) = c \alpha_s \Delta T(t) - \frac{c(1 + \nu_s) p(t)}{E(c^2 - d^2)} ((1 - 2\nu_s) c^2 + d^2). \quad (49)$$

Koska tässä yhteydessä tarkastellaan vain kimmoista säiliötä, saadaan yhteensopivuusehdoksi

$$u_j(b, t) = u_s(c, t); \quad b = c, \quad (50)$$

josta edelleen paineen ratkaisemiseksi

$$\int_0^t \left[D_j(t-\tau) + A(t)/E_s \right] \dot{p}(\tau) d\tau = B(t). \quad (51)$$

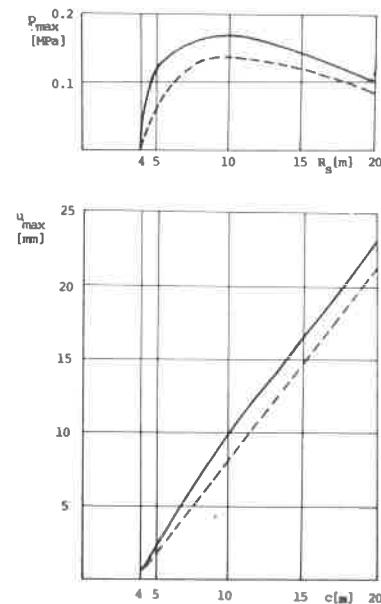
Termi A on nyt muotoa

$$A(t) \equiv \frac{(1+\nu_s) \left[(1-2\nu_s) b^2 + d^2 \right] (b^2 - a^2)}{(d^2 - b^2) \left[(1-\nu_j(T)) b^2 + (1+\nu_j(T)) a^2 \right]} \quad (52)$$

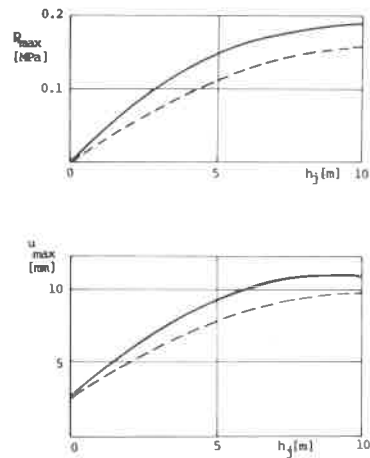
termin B ollessa sama kuin esimerkissä 1 eli (45).

Kuvassa 22 on esitetty terässäiliön säteen funktiona jään lämpölaajenemisesta syntyvä maksimipaine ja -siirtymä. Säiliön keskellä on oletettu olevan 4 m:n säteellä vapaata vettä muun osan ollessa jäässä.

Kuvaan 23 on piirretty 20 m halkaisijaltaan olevaan terässäiliöön syntyvä maksimijäänpaine ja -siirtymä jääkuoren paksuuden funktiona.



Kuva 22 Terässäiliön säteen vaikutus maksimijäänpaineeseen ja vastaavaan siirtymään ($h_s = 10$ mm, $T_0 = 253$ K ja $t_L = 12$ h).

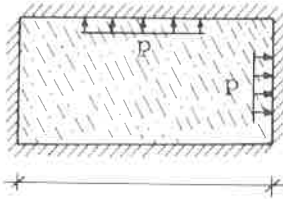


Kuva 23 Jääkuoren paksuuden vaikutus terässäiliössä muodostuvaan jäänpaineeseen ja siirtymään ($h_s = 10$ mm, $T_0 = 253$ K ja $t_L = 12$ h).

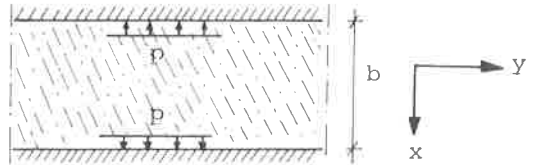
Esimerkki 3

Jos suorakaiteenmuotoisen altaan seinät oletetaan täysin jäykiksi (kuva 24), on $\sigma_x = \sigma_y$, ja tasainen paine p kohdistuu kaikkiin seiniin riippumatta mittasuhteista c/d . Koska $\sigma_x(t) = \sigma_y(t)$, niin $\epsilon_x(t) = \epsilon_y(t)$ ja ϵ saadaan yhtälön (39) mukaisesta lausekkeesta. Todetaan, että esimerkkien 1 ja 2 mukaisista lausekkeista saadaan myös tämän tapauksen ratkaisu merkitsemällä $E_s = \infty$ ja $a = 0$.

Mikäli altaan päät ovat avoimet (kuva 25), saadaan muodostuva jääpaine suoraan aksiaalista tapausta (38) tarkastelemalla olettamalla jään ν nolllaksi.



Kuva 24 Suorakaiteen muotoinen allas.



Kuva 25 Päistään avoin allas.

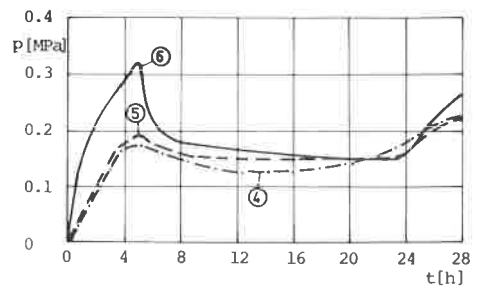
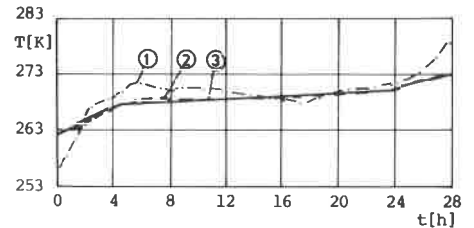
Vastaava muodonmuutos saadaan yhtälöstä (39), joten paineen ratkaisu palautuu yhtälöön (43) tai (51), kun $v_j = 0$ ja $a = 0$.

Taulukossa 4 on esitetty suurimmat jäänpaineet lämpenemisajan vaihdelta ja alkulämpötilan ollessa joko 253 K tai 263 K. Koska seinämän jäykkyys otaksutaan äärettömän suureksi ja lämpöjohtavuus nolllaksi, on altaan leveys mielivaltaisen. Tuloksista nähdään mallin 1 ja 2 antamien paineiden vain vähäinen eroavuus lämpenemisajan ollessa yli 2 h. Äkillisessä lämpenemisessä mallin alkukimmokertoimen (a_1 -termi) merkitys kasvaa, joten paineetkin poikkeavat jo huomattavasti toisistaan kun $t_L = 0,01$ h. Mallin 3 antamien tulosten poikkeavuus selittyy jäälaadun erilaisuudella (Saimaan kanavan jää).

t_L [h]	p_{max} [MPa]					
	$T_o = 253$ K			$T_o = 263$ K		
	MALLI 1	MALLI 2	MALLI 3	MALLI 1	MALLI 2	MALLI 3
0,01	8,76	7,26	2,23	4,14	3,41	1,07
0,5	2,62	2,56	0,88	1,36	1,30	0,43
2	1,40	1,40	0,61	0,75	0,75	0,30
4	1,01	1,02	0,51	0,55	0,55	0,25
12	0,59	0,60	0,37	0,33	0,33	0,18
24	0,42	0,43	0,30	0,24	0,24	0,15

Taulukko 4 Suurimmat jäänpaineet lämpenemisajan muuttuessa alkulämpötilan ollessa 253 K tai 263 K.

Talvella 1972...1973 Saimaan kanavalla suoritettuja (kuva 26) jäänpainemittauksia (käyrä 4) on simuloitu sekä malleilla 1 (käyrä 6) että 3 (käyrä 5). Lämpötilan muutos ilmassa on esitetty käyrällä 1 ja 8 cm:n syvyydestä jään sisältä mitattu lämpötila käyrällä 2. Jään lämpötilan muutoksen lineaarinen approksimaatio on laskennassa käyrän 3 mukainen. Tuloksista havaitaan selvästi mallin 1 antavan liian suuria paineita lämpenemisen alussa. Tämä selittyy koejään lähes virheettömästä laadusta, jolloin alkukimmokerroin on huomattavasti suurempi kuin malleilla 3. Myös mallien joustavuus relaksaatiovaiheessa tuntuu riittämättömältä. Suuruusluokaltaan



Kuva 26 Jäänpaineenmittauksen simulointi.

saatuja paineita voidaan kuitenkin pitää varsin oikeina.

LOPPUSANAT

Tämän jään virumista käsittelevän kaksiosaisen artikkelin tarkoituksena on lyhyesti kuvata jään ajasta riippuvia lujuusominaisuuksia ja niihin vaikuttavia tekijöitä. Sovellutusten avulla on haluttu korostaa mm. sitä, kuinka suuressi jään aiheuttamat rasitukset ovat ajasta riippuvia. Näin ollen kimmoteorian soveltaminen useimpiin jääprobleemoihin ei ole perusteltavissa.

Huolimatta maamme maantieteellisestä sijainnista johtuvista suurista jääprobleemoista niin rakentamisen kuin merenkulunkin alueella, on jään lujuuden tutkiminen Suomessa vielä vasta alkuvaiheessaan.

KÄYTETYT MERKINNÄT

- A, A_i vakio (usein ajasta riippuva), pinta-ala ($i=1,2$) kuvassa 19
 B, B_n vakio (usein ajasta riippuva)
 C apumuuttuja
 D, D_i virumisfunktio ($i=0..2$)
 D_j jään virumisfunktio
 D_s säiliön materiaalin virumisfunktio
 D_m virumiskoeikäyrän arvo
 D_t virumismallin arvo
 $D_{l,m}, D_l$ virumiskoeikäyriä (kuva 14)
 E, E_0 kimmokerroin
 E_s säiliön materiaalin kimmokerroin
 $[E]$ muodonmuutosmatriisi
 F apumuuttuja (yhtälö (28))
 H apumuuttuja (- " -)
 $[I]$ yksikkömatriisi
 K, K_i ydinfunktio
 $L(A^*, x_i)$ Tšebyšev-approksimaatio
 N luonnollisten lukujen joukko
 $[S]$ jännitysmatriisin aikaderivaatta
 T, T_0 lämpötila, alkulämpötila
 X diskreetti joukko (yhtälö (12))
 a jäälevyn reiän säde
 a_i vakio (usein lämpötilasta ja jännitystasosta riippuva $i=1..4$)
 b jäälevyn ulkosäde
 b_i vakio (usein lämpötilasta ja jännitystasosta riippuva $i=1..4$)
 c säiliön sisäsäde, altaan sivun pituus
 d deviaatio, säiliön ulkosäde, altaan sivun pituus
 f funktio

h_j jään paksuus
 h_s säiliön seinämän paksuus
 i indeksi
 k mittauspisteiden lukumäärä
 n, n_i vakio (usein lämpötilasta ja jännitystasosta riippuva $i=1\dots4$)
 p, p_i paine
 p_{\max} suurin jäänpainne
 r säde
 s_r suhteellinen keskihajonta (yhtälö (11))
 s_s s_r :n keskihajonta (taulukko 1)
 t aika
 t_L lämpenemisaika
 t_M murtoaika
 u siirtymä
 u_j jäälevyn siirtymä
 u_s säiliön seinämän siirtymä
 u_{\max} suurin säiliön seinämän siirtymä
 x, x_i parametri
 ΔT lämpötilan muutos
 Δt ajan muutos
 α lämpöpitenemiskerroin
 α_j jään lämpöpitenemiskerroin
 α_s säiliön lämpöpitenemiskerroin
 β vakio
 ϵ muodonmuutos
 $\epsilon_{x,y}$ x- ja y-akselin suuntainen venymä
 ϵ_{xy} liukuma
 ϵ_z säiliön akselin suuntainen venymä
 $\dot{\epsilon}_s$ sekundaarisen virumisen nopeus
 ν Poissonin vakio
 ν_j jään Poissonin vakio
 ν_s säiliön materiaalin Poissonin vakio
 ρ jään tiheys
 σ, σ_0 jännitys
 $\sigma_{x,y}$ x- ja y-akselin suuntainen normaalijännitys
 σ_{xy} leikkausjännitys
 σ_r säteen suuntainen normaalijännitys
 σ_M jään murtolujuus
 τ aika
 \bar{x} x:n keskiarvo
 \dot{x} $\partial x / \partial t$

LÄHDEKIRJALLISUUS

- [1] Jumppanen, P., Ice thermal loads against walls of water reservoirs. Proc. of the POAC 2nd conference. Reykjavik 1973
 - [2] Lavrov, V.V., Deformation and strength of ice (Leningrad 1969). Israel Progr. Sci. Transl. Jerusalem 1971
 - [3] Leppävuori, E.K.M., Jään fysikaaliset ominaisuudet. Helsingin teknillinen korkeakoulu, Rakennetekniikan laitos, Julkaisu 6, 1973
 - [4] Leppävuori, E.K.M., Lämpötilan muutoksesta johtuvat rakenteiden jäänpainet. Htkk, diplomityö 1974
 - [5] Leppävuori, E.K.M., Creep of fresh water ice at high homologous temperatures. The Winter Navigation Research Board (Helsinki and Norrköping), Res. rep. 19, 1976
 - [6] Leppävuori, E.K.M., Jään viruminen I. Rakenteiden Mekaniikka 10(1977)2
 - [7] Maser, K.R., An analysis of the small-scale strength testing of ice. MIT, rep. MITSG 72-6, 1972
 - [8] Mäkeläinen, P., On the modelling of long-term thermoviscoelastic behaviour of glassy polymers. Helsinki University of Technology. Res. pap. 56, 1976
 - [9] Mäkeläinen, P., Sinisalo, H., Järvinen, H., PVC-muovin virumiskokeet ja pitkäaikaislujuuden ennustaminen. Rakenteiden Mekaniikka 10(1977)2
 - [10] Rice, J.R., The approximation of functions. Vol. 1 Linear theory. Addison-Wesley, USA, 1964
 - [11] Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., Theory of plates and shells. McGraw-Hill, USA. 1959
 - [12] Ylinen, A., Kimmo- ja lujuusoppi II. WSOY, Porvoo 1970
- Erkki KM Leppävuori, dipl.ins., Helsingin teknillinen korkeakoulu, Otaniemi*