

POLYSTYREENI-YTIMINEN SANDWICH-RAKENNE

Paavo Hassinen

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 10
No. 2 1977 s. 13...30

YHTEENVETO: Artikkelissa tarkastellaan pitkäaikaisen kuormituksen vaikutusta sandwich-rakenteeseen. Rakenteen pintakerrokset käyttäytyvät lineaarisen kimmoisen ja ydinkerros lineaarisen viskoelastisen aineen tavoin. Ydinkerroksessa käytetään solupolystyreeniä, jonka leikkausvirumiselle on määritetty kokeellisesti virumismalleja. Virumismallien avulla analysoidaan sandwich-palkeja ohut- ja paksukuorisen sandwich-palkin teorian mukaan sekä ohutkuorisia sandwich-laattoja.

JOHDANTO

Sandwich-rakenne muodostuu tavallisesti kolmesta yhdessä toimivasta kerroksesta. Pintakerrokset ovat ohuita ja niiden lujuusominaisuudet ovat hyvät. Pintakerrokset ottavat vastaan etupäässä kerroksen tason suuntaisia voimia sekä suojaavat ydinkerrosta ympäristön aiheuttamilta vaurioilta. Ydinkerroksena käytetään tavallisimmin kevyttä solu- tai vaahdotuovia tai kennostoa. Pintakerrosten yhteistoiminnan edellytyksenä on ydinkerroksen riittävä jäykkyys ja lujuus leikkausvoimia vastaan. Ydinkerros estää myös pintakerrosten paikallisen lommahtamisen ja toimii lämmöneristeenä. Ydin- ja pintakerrokset liitetään tavallisesti yhteen liimaamalla.

Pitkäaikaisen kuorman vaikutuksen alaisena sandwich-rakenteen käyttäytymiseen vaikuttavat rakenteen eri kerrosten ja liitoksen pitkäaikaislujuus ja -muodonmuutokset. Useimmat pintakerrokset voidaan olettaa kimmoisiksi. Merkittävää virumista ajan mukana esiintyy muovi- ja puupohjaisissa levyissä. Sen sijaan aika vaikuttaa suuresti kevyen muoviytimen mekaanisiin ominaisuuksiin. Myös pinta- ja ydinkerroksia yhdistävän liimasauman käyttäytymiseen pitkäaikaisen leikkausjännityksen alaisena on kiinnitettävä huomiota.

Artikkelissa käsitellään soluuntuva polystyreeniä, jota nimitetään yksinkertaisesti polystyreeniksi. Solupolystyreeniytimisen sandwich-rakenteen pitkäaikaiskäyttämisen tarkastelemista varten tarvitaan viskoelastiselle ydinkerrokselle virumismalli. Mallissa voidaan ottaa huomioon myös liiman leikkausviruminen. Tällöin mallista tulee kuitenkin rakennekohtainen. Eri tyyppisiä kokeellisesti määritettyjä virumismalleja käytetään ratkaistaessa sandwich-rakenteita analyttisesti tai numeerisesti. Tässä rajoitutaan analyttisiin ratkaisumenetelmiin.

POLYSTYREENI

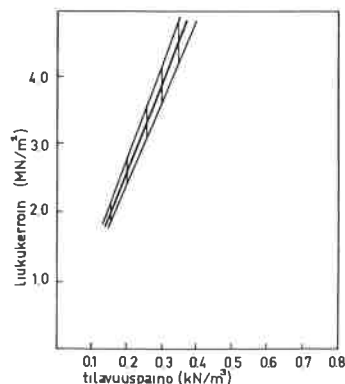
Solupolystyreenin (EPS) käyttäytymistä leikkausjännityksen alaisena on tutkittu kokeellisesti kirjallisuudesta saatavien tietojen niukkuuden vuoksi /12/. Kokeissa käytetty polystyreeni on valmistettu suurmuotissa ja sen tilavuuspaino on $0,2 \text{ kN/m}^3$.

Kuvassa 1 on esitetty joitakin kokeista saatuja leikkausjännitys-liukuma kuvaajia. Liukuman arvot vastaavat 1 min kuluttua jännitystason muuttamisesta tapahtunutta liukumaa. Jännitystasoa on kasvatettu n. $0,01 \text{ MPa:n}$ portaissa. Koekappaleissa merkintä VA tarkoittaa vaneripintaista koekappaletta, numerot 1...4 eri liimilaatuja sekä numerot 20...23 koekappaleen järjestysnumeroa. Koonpuristumisaste r ilmoittaa koekappaleiden valmistuksen yhteydessä tapahtuneen EPS-ytimen pysyvän keskimääräisen koonpuristumisen.

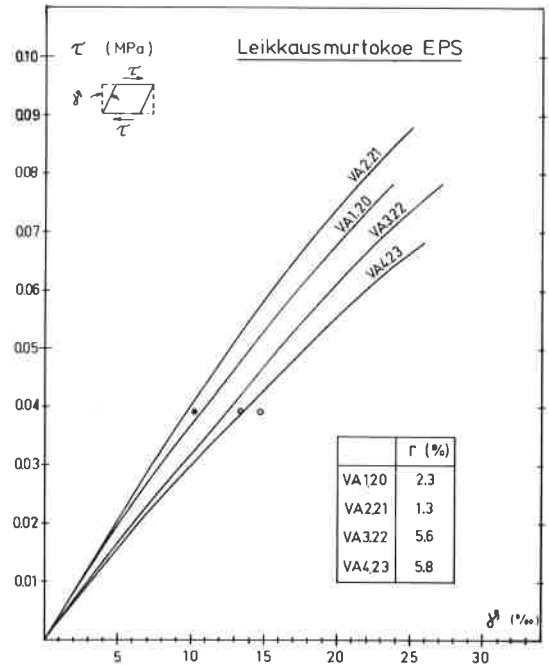
$$r = 100 \frac{40 - \bar{c}}{40}, \quad (1)$$

missä \bar{c} on koekappaleen EPS-ytimen keskimääräinen paksuus (mm). Alkuperäinen paksuus oli 40 mm.

Lyhytaikaisessa kuormituksessa pienillä jännityksillä leikkausjännityksen ja liukuman välistä suhdetta voidaan kuvata vakioarvolla, liukukertoimella.



Kuva 2 Polystyreenin liukukerroin, $T=23^{\circ}\text{C}/3/$.

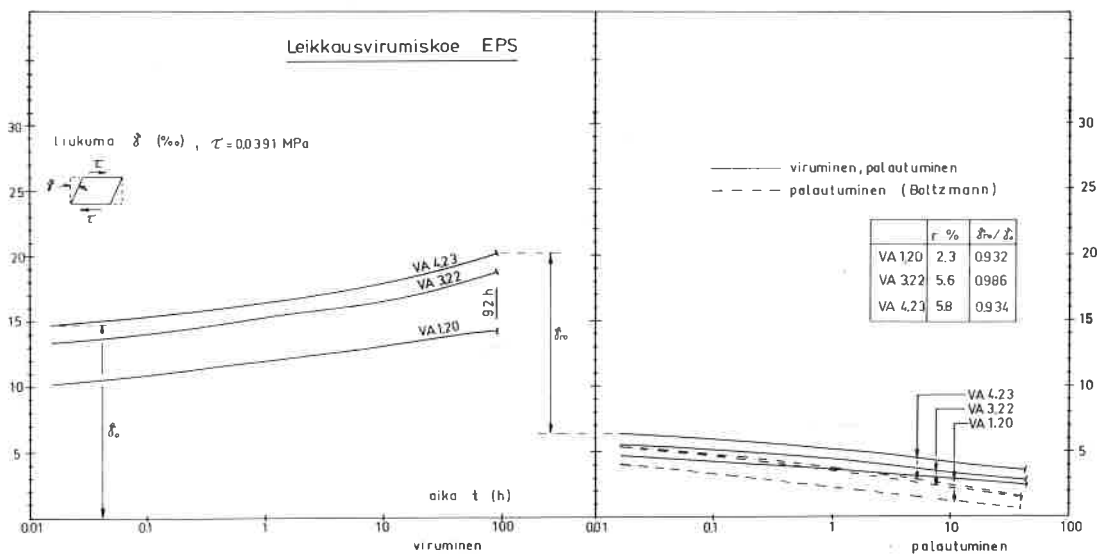


Kuva 1 Solupolystyreenin τ - γ -kuvaajia, tilavuuspaino $0,2 \text{ kN/m}^3$. \odot ilmoittaa vastaavan liukuman virumiskokeessa. Koekappaleen VA2,21 virumiskoetulos puuttuu /12/.

$$\frac{\tau}{\gamma} = G \quad (2)$$

Liukukertoimen suuruus riippuu polystyreenin solujen seinämien vahvuudesta, jota kuvaa tilavuuspaino (kuva 2). Tilavuuspainolla $0,2 \text{ kN/m}^3$ kuvan 2 mukaan saadaan liukukertoimeksi $G = 2,55 \dots 2,90 \text{ MN/m}^2$. Kuvan 1 koetulokset antavat jännitystasolla $\tau = 0,0391 \text{ MPa}$ sekanttiliukukertoimeksi $G = 2,89 \dots 4,07 \text{ MN/m}^2$. Virumiskokeen tulospisteistä saadaan vastaavasti $G = 2,64 \dots 3,87 \text{ MN/m}^2$. Koetulosarvoihin vaikuttaa voimakkaasti koekappaleen muoto, koko ja kuormitusnopeus.

Rakenteessa pitkäaikaisen leikkausjännityksen vaikuttaessa on otettava huomioon polystyreenin viskoelastiset ominaisuudet. Leikkausvirumisen tutkimiseksi on suoritettu kaksi koesarjaa. Alustavissa kokeissa tutkittiin polystyreenin virumista ja palautumista. Kuormitusaika vaihteli välillä 62...102 h ja palautumisaika 1...45 h. Pitkäaikaiskokeessa leikkausmuodonmuutosten kehittymistä seurattiin 1000 h:n ajan. Jännitystaso molemmissa sarjoissa oli 0,0390...0,0395 MPa koekappaleen dimensioista riippuen. Tämä on n. 30 % polystyreenin lyhytaikaisesta leikkausmurtolujuudesta tilavuuspainon ollessa $0,2 \text{ kN/m}^3$.



Kuva 3 Polystyreenin ($0,2 \text{ kN/m}^3$) leikkausviruminen ja palautuminen alustavissa kokeissa, vaneripintaiset koekappaleet /12/.

Kuvassa 3 on esitetty alustavista kokeista vaneripintaisille koekappaleille saatuja liukuma- ja palautumiskäyriä. Tuloksista havaitaan valmistuksen aikana tapahtuneen pysyvän kokoonpuristumisen voimakas vaikutus. Osittain rikkoutunut solurakenne edistää virumista ja vähentää palautumista.

Kuvaan 3 on piirretty myös Boltzmannin superpositioperiaatteen /2/ mukaan virumiskäyristä saatavat palautumiskäyrät.

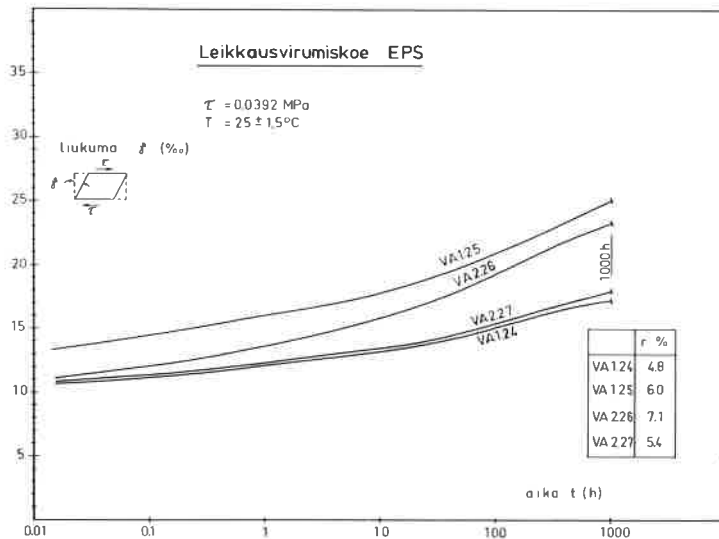
$$\gamma_r(t) = \gamma(t) - \gamma(t-t_2), \quad (3)$$

missä γ on liukumista ja γ_r palautumista kuvaava funktio sekä t aika kuormitushetkestä lähtien ja t_2 kokonaiskuormitusaika. Liukumakäyrien $\gamma(t)$ arvot ajalle $t > t_2$ on saatu ekstrapoloimalla.

Tuloksia tarkasteltaessa havaitaan polystyreenin käyttäytyvän elastisen viskoplastisen aineen tavoin. Muodonmuutoksessa on kimmainen ja ajasta

riippuva osa. Osa muodonmuutoksista on lisäksi palautumattomia. Nopeasti (1 min kuluessa) tapahtuvan palautumisen havaitaan olevan vastaavaa alkuliukumaa pienemmän. Suhdetta γ_{RO}/γ_0 pienentää voimakkaasti pysyvä kokoonpuristuma. Suhteelle γ_{RO}/γ_0 saatiin kokeissa arvoja 0,712...0,986, kun r vaihteli välillä 2,3...12,1%.

Pitkäaikaiskokeessa koekappaleita oli neljä. Koelämpötilaksi muodostui $25 \pm 1,5^\circ\text{C}$ ja keskimääräiseksi suhteelliseksi kosteudeksi 36 %. Koetulokset on esitetty kuvassa 4.



Kuva 4 Polystyreenin ($0,2 \text{ kN/m}^3$) leikkausvirumiskuvaajat 1000 h:n kokeesta /12/.

Rakenteiden analysointia varten polystyreenille on etsitty virumismalleja pitkäaikaiskokeen tuloksista. Virumismallin etsiminen perustuu tietynmuotoisen yhtälön parametrien arvojen määrittämiseen. Polystyreenille on sovellettu seuraavia malleja.

$$D(t) = \frac{\gamma(t)}{\tau_0} = a + b t^n \quad (4)$$

$$D(t) = a + b e^{nt} \quad (5)$$

$$\log D(t) = a + b \operatorname{arsinh} \left(\log \left(\frac{t}{n} \right) \right), \quad (6)$$

missä t on aika sekä a , b ja n parametreja. Malli (4) on useille aineille lyhyillä ajanjaksoilla sovellettu potenssimuotoinen malli, ns. Findleyn ja Khoslan malli. Malli (5) on kehittynyt lähinnä lineaarisen standardiaineen konstitutiivisen yhtälön pohjalta, ja se soveltuu hyvin rakenteiden analyttisiin tarkasteluihin. Malli (6) on P. Mäkeläisen /4/ PVC-muoville kehittämä virumismalli, joka kuvaa hyvin virumista pitemmillä ajanjaksoilla. Parametrien arvot määrätään pienimmän neliösumman keinolla minimoimalla vir-

hefunktio

$$\phi = \sum_{i=1}^r (D_a(t_i) - \bar{D}(t_i))^2, \quad (7)$$

missä $\bar{D}(t_i)$ on kokeellinen ja $D_a(t_i)$ approksimaation antama virumisfunktion arvo sekä r koetulospisteiden lukumäärä. Mallien sopivuuden kriteereinä koetulospistejoukon kuvaamiseen on käytetty suhteellista keskihajontaa ja maksimipoikkeamaa /5/,

$$s_r = \left(\frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r \left(\frac{D_a(t_i) - \bar{D}(t_i)}{\bar{D}(t_i)} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (8)$$

$$q = \max_i \left| \frac{D_a(t_i) - \bar{D}(t_i)}{\bar{D}(t_i)} \right|, \quad (9)$$

Taulukko 1 Pitkäaikaiskokeen koetuloksista laskettuja virumismallien parametrien arvoja

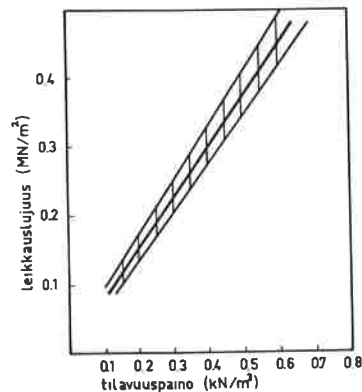
malli	koekappale	a	b	n	s_r	q
		m^2/MN	m^2/MN			
(4)	VA1,24	0,2303	0,07716	0,1520	0,0075	0,0242
	VA1,25	0,2823	0,1220	0,1560	0,0059	0,0143
	VA1,26	0,2039	0,1455	0,1460	0,0076	0,0198
	VA1,27	0,2305	0,08252	0,1440	0,0056	0,0139
	res.	0,2362	0,1074	0,1490	0,0056	0,0178
(5)		m^2/MN	M^2/MN	1/h		
	VA1,24	0,4265	-0,1284	-0,0180	0,0434	0,1023
	VA1,25	0,6006	-0,2103	-0,0170	0,0579	0,1414
	VA1,26	0,5559	-0,2255	-0,0210	0,0673	0,1640
	VA1,27	0,4275	-0,1249	-0,0210	0,0444	0,0973
res.	0,5028	-0,1723	-0,0190	0,0540	0,1277	
(6)		$\log(m^2/MN)$		h		
	VA1,24	-0,4200	0,06965	69,66	0,0076	0,0202
	VA1,25	-0,2810	0,08464	71,61	0,0127	0,0364
	VA1,26	-0,3409	0,09894	39,49	0,0124	0,0348
	VA1,27	-0,4169	0,06751	63,10	0,0094	0,0216
res.	-0,3603	0,08126	58,21	0,0101	0,0279	

Taulukossa 1 on esitetty mallien (4), (5) ja (6) parametrien arvot kuvan 4 koetulostäyrille sekä näiden käyrien keskiarvona saatavalla käyrälle. Mallien etsimisessä on käytetty 50 koetulospistettä.

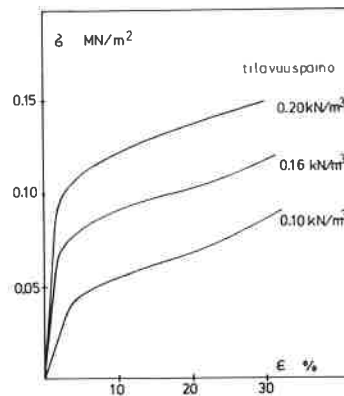
Viskoelastisen aineen viruminen korkeilla jännitystasoilla tapahtuu tertiäärisenä virumisena, joka johtaa virumismurtoon. Aineen murtolujuuteen vaikuttaa kuormitusaika ja -nopeus merkittävästi. Aineen sallittu jännitys ra-

kenteessä voidaan periaatteessa määrätä rakenteen käyttöiän mukaan. Samalla tavalla on määrättävä myös sallittu muodonmuutos. Kuva 5 esittää polystyreenin lyhytaikaista leikkausmurtolujuutta tilavuuspainon funktiona.

Sandwich-rakenteen ytimeen tulee puristus- ja vetojännityksiä ytimen es-täessä kuorikerrosten lommahtamisen. Puristusjännityksiä tulee lisäksi pin-tapaineesta. Puristusjännityksen vaikutusta polystyreeniin on tutkittu huo-mattavasti veto- ja leikkausjännityksen vaikutusta enemmän. Tiedot puristus- ja vetolujuusominaisuuksista on tähän poimittu kirjallisuudesta.

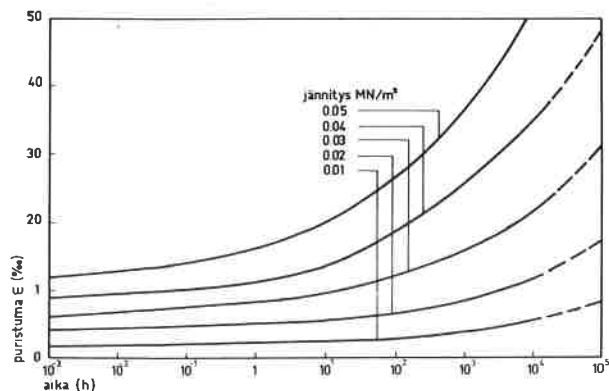


Kuva 5 Polystyreenin leikkausmurtolujuus, $T = 23^{\circ}\text{C}$ /3/.



Kuva 6 Polystyreenin σ - ϵ -kuvaajia (puristusjännitys).

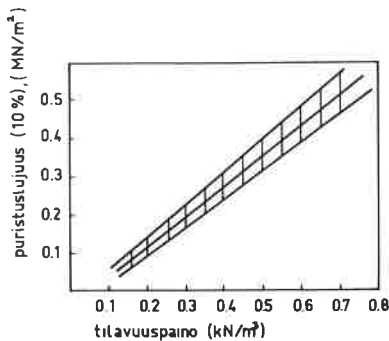
Polystyreeni kuuluu sitkeisiin jäykkiin solumuoveihin. Puristusjännityk-sen lisääntyessä sen solurakenteessa ei tapahdu äkillistä murtumista solu-seinämien rikkoituessa, vaan puristuma kasvaa entistä nopeammin jännityksen kasvaessa (kuva 6). Vetojännityksen aiheuttamat muodonmuutokset ovat vas-taavalla jännitystasolla puristumia pienempiä. Solurakenteen murtuminen ve-dossa tapahtuu myötäämisen jälkeen. Kuvan 6 mukaan saadaan tilavuuspaino-luokalle $0,2 \text{ kN/m}^3$ σ - ϵ -kuvaajan lineaarisesta osasta lyhytaikaiseksi pu-ristuskimmokertoimeksi $E = 5,2 \text{ MN/m}^2$. Vastaavaksi vetokimmokertoimeksi il-moitetaan $7,5 \text{ MN/m}^2$ /3/.



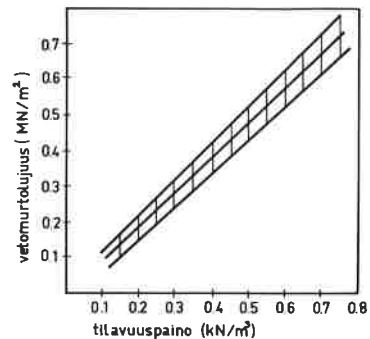
Kuva 7 Polystyreenin ($0,2 \text{ kN/m}^3$) puristumia eri jännityksillä, $T=20^{\circ}\text{C}$ /3/.

Kuva 7 esittää polystyreenin puristumaa eri jännitystasoilla ajan funktiona tilavuuspainoluokalle $0,2 \text{ kN/m}^3$. Pienillä jännitystasoilla ja lyhyillä ajanjaksoilla ($t < 10^{-2} \text{ h}$) käyttäytyminen on lineaarisen viskoelastisen aineen mukaista. Pitemmillä ajanjaksoilla ($t > 10^{-2} \text{ h}$) kuvaajat $D(t, \sigma_0) = \epsilon(t)/\sigma_0$ eri jännitystasoilla eivät enää yhdy. Polystyreeni on puristusjännityksen suhteen epälineaarinen viskoelastinen aine.

Polystyreenin lyhytaikaisiksi puristumurtolujuusarvoiksi ilmoitetaan tavallisesti jännitys-muodonmuutoskuvaajan muodosta johtuen 5 tai 10 % puristumaa vastaavat jännityksen arvot (kuva 8). Lyhytaikaisiksi vetomurtolujuudeksi sen sijaan ilmoitetaan todellinen vetomurtolujuus (kuva 9).



Kuva 8 Polystyreenin puristuslujuus, $T = 23^\circ\text{C} / 3\%$.



Kuva 9 Polystyreenin vetomurtolujuus, $T = 23^\circ\text{C} / 3\%$.

SANDWICH-RAKENNE

Kerroksellisten palkki- ja laattarakenteiden käyttäytymisestä ja kerrosten ominaisuuksista tehdään seuraavat oletukset:

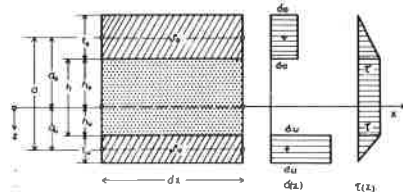
- pintakerrokset ovat lineaarisia kimmoisia
- ydinkerros on lineaarinen viskoelastinen
- taipumat ovat pieniä rakenteen paksuuteen ja jännemittaan verrattuna
- ydinkerros ei ota vastaan normaalijännityksiä
- kerrosten välisissä saumoissa ei tapahdu liukumista.

Ohutkuorisisen sandwich-palkin teoria

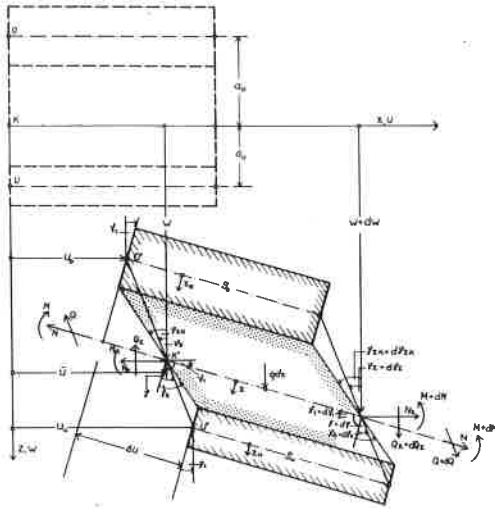
Ohutkuoriselle sandwich-palkille oletetaan kuvan 10 mukainen jännitysjakautuma. Siinä ei ole otettu huomioon pintakerrosten taivutusjäykkyyttä.

Kuvasta 11 selviävät sandwich-palkin siirtymät ja käytetyt merkinnät.

Palkin taipumasta syntyy kulmanmuutos γ_1 ja ydinkerroksen leikkausmuodonmuutoksesta kulmanmuutos γ_2



Kuva 10 Oletettu jännitysjakautuma ohutkuorisessa sandwich-palkissa



Kuva 11 Sandwich-palkin siirtymät /6/

Merkitsemällä ytimessä syntyvää kulmanmuutosta γ_K :lla saadaan

$$\gamma_1 = \frac{dw}{dx} = w' \quad (10)$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = w' + \gamma_2 = \frac{h}{a} \gamma_K = \frac{h}{a} \int_0^t D(t-t') \dot{\gamma}(t') dt' \quad (11)$$

missä $D(t)$ on ydinkerroksen virumisfunktio ja τ leikkausjännityksen aika-derivaatta, $\dot{\gamma} = d\tau/dt$. Ylemmän ja alemman pintakerroksen muodonmuutoksille on voimassa

$$\epsilon_u = \frac{d\bar{u}}{dx} + a_u \frac{d\gamma_2}{dx} \quad , \quad \epsilon_o = \frac{d\bar{u}}{dx} - a_o \frac{d\gamma_2}{dx} \quad (12)$$

Alkuoletuksen mukaan pintakerrosten jännityksille voidaan kirjoittaa lausekkeet

$$\sigma_u = E_u \epsilon_u \quad , \quad \sigma_o = E_o \epsilon_o \quad (13)$$

Käyttämällä lyhennysmerkintöjä ,

$$D_u = E_u b t_u \quad , \quad D_o = E_o b t_o \quad , \quad D = D_u + D_o \quad , \quad B_s = D_u a_u^2 + D_o a_o^2 \quad (14)$$

saadaan poikkileikkauksen jännitysresultantit muotoon

$$N = \int_A \sigma dA = b(t_u \sigma_u + t_o \sigma_o) = D\bar{u}'$$

$$M = \int_A \sigma z dA = b(t_u a_u \sigma_u + t_o a_o \sigma_o) = B_s \gamma_2' = B_s(\gamma' - w'') \quad (15)$$

$$Q = \int_A \tau dA = ba\tau = ba \frac{a}{h} \int_0^t G(t') \gamma(x, t - t') dt' \quad ,$$

missä b on palkin leveys ja $G(t)$ ydinkerroksen relaksaatiofunktio. Ottamalla jännitysresultanteista huomioon Taylorin kaavan mukaan kaksi ensimmäistä termiä ja jättämällä alempien kertalukujen tekijöitä merkityksettö-

minä pois saadaan palkkialkion (kuva 11) tasapainoehdot muotoon

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0, \quad \frac{dQ}{dx} + q + Nw'' = 0 \quad (16)$$

Kun lausekkeet (15) sijoitetaan yhtälöihin (16) saadaan γ :n ja w :n ratkaisemiseksi yhtälöt

$$A_K \int_0^t \dot{G}(t') \gamma''(x, t - t') dt' - \frac{NA_K}{B_S} \int_0^t \dot{G}(t') \gamma(x, t - t') dt' + N\gamma'' + q' = 0 \quad (17)$$

$$w''' = \gamma'' - \frac{A_K}{B_S} \int_0^t \dot{G}(t') \gamma(x, t - t') dt',$$

missä on käytetty lyhennysmerkintää $A_K = a^2 b/h$.

Erikoistapauksena käsitellään molemmista päistään nivelellisesti tuettua sandwich-palkkia, johon vaikuttavat Fourierin sinisarjaksi kehitetty kuorma q ja N ,

$$q(x, t) = H(t) \sum_{i=1}^{\infty} q_i \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad N(t) = N_0 H(t), \quad (18)$$

missä $H(t)$ on Heavisiden funktio. Päistään nivelellisesti tuetun ohutkuorisen sandwich-palkin reunaehdot ovat

$$w(x, t) = 0 \quad \text{ja} \quad \gamma'(x, t) - w''(x, t) = 0, \quad \text{kun} \quad x = 0, l. \quad (19)$$

Taipumalle ja kulmanmuutokselle voidaan muodostaa reunaehdot toteuttavat lausekkeet

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{1i}(t) \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad \gamma(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{2i}(t) \cos \frac{i\pi x}{l} \quad (20)$$

Sijoittamalla nämä yhtälöihin (17) ja vaatimalla yhtälöt toteutuviksi erikseen jokaisella i :n arvolla saadaan ϕ_{2i} :n ja ϕ_{1i} :n ratkaisemiseksi yhtälöt

$$A_K \int_0^t \dot{G}(t') \phi_{2i}(t - t') dt' + \frac{\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 B_S}{\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 B_S + N_0} N_0 \phi_{2i}(t) - \frac{\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 B_S}{\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 B_S + N_0} H(t) = 0 \quad (21)$$

$$\phi_{1i} = \frac{\frac{i\pi}{l}^2 B_S}{\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 B_S + N_0} \phi_{2i} + \frac{q_i H(t)}{\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \left[\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 B_S + N_0 \right]}$$

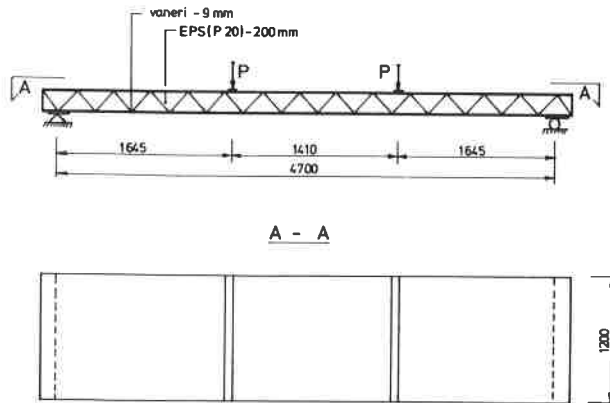
ϕ_{2i} ratkeaa analyttisesti edellisestä yhtälöstä esimerkiksi Laplace-muunnoksen avulla ja ϕ_{1i} tämän jälkeen jälkimmäisestä yhtälöstä. Tällöin relaxaatiofunktion on oltava Laplace-muunnettavissa. Yleisemmin ratkaisuja voidaan etsiä soveltamalla yhtälöryhmään numeerisia ratkaisumenetelmiä.

Jos palkkia kuormittaa ainoastaan kerrosten tasoa vastaan kohtisuora kuorma, kulmanmuutos γ saadaan ratkaistuksi suoraan lausekkeesta (11) soveltamalla siihen leikkausvoiman ja jännityksen välistä yhteyttä (15). Taipumaviiva ratkeaa kulmanmuutoksen ja momentin avulla yhtälöstä (15) integroimalla ja ottamalla huomioon reunaehdot.

$$\gamma(x,t) = \frac{1}{A_K} \int_0^t D(t-t') \dot{Q}(t') dt' \quad (22)$$

$$w''(x,t) = \gamma'(x,t) - \frac{M(x,t)}{B_S}$$

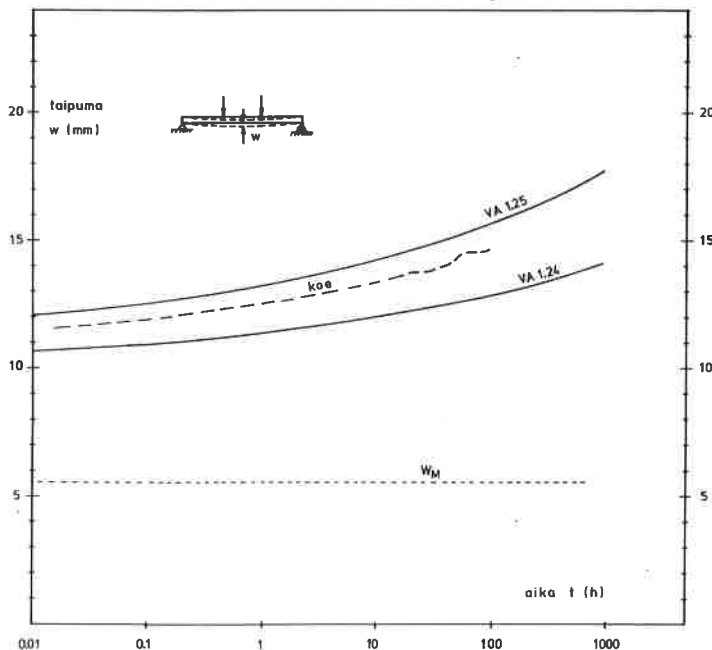
Kuvan 12 mukaisen sandwich-palkin maksimitaipumalle saadaan lauseke



Kuva 12

$$w(1/2,t) = P \cdot l_1 \left(\frac{1}{24 B_S} (3l_1^2 - 4l_1^2) + \frac{D(t)}{A_K} \right) \quad (23)$$

Kuvassa 13 on esitetty tämän lausekkeen mukaisesti taipuman ääriarvoja kuvan 4 mukaan käyttäen virumismallia (4). Pistekuorma P on 3,04 kN, ja

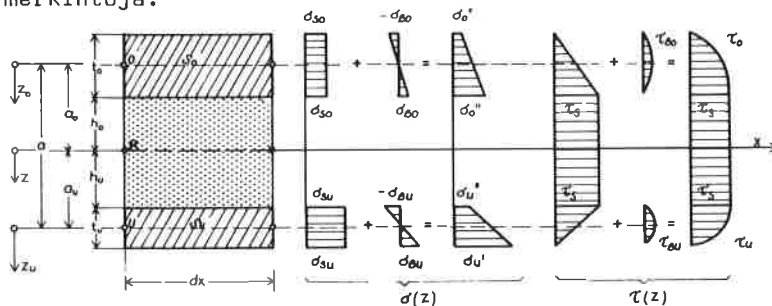


Kuva 13 Kuvan 12 mukaisen sandwich-palkin maksimitaipumia

pintakerrosten kimmokertoimille on käytetty arvoja $E_U = 9022 \text{ MN/m}^2$ ja $E_O = 8728 \text{ MN/m}^2$. Kuvassa 13 on esitetty myös tutkimuksen /11/ yhteydessä saatu kokeellinen maksimitaipuman kuvaaja kuvassa 12 esitetylle rakenteelle.

Paksukuorisen sandwich-palkin teoria

Paksukuoriselle sandwich-palkille oletettu jännitysjakautuma on esitetty kuvassa 14. Rakenteelle ja siirtymille käytetään edelleen kuvan 11 mukaisia merkintöjä.



Kuva 14 Oletettu jännitysjakautuma paksukuorisessa sandwich-palkissa /6/.

Pintakerrosten muodonmuutosten lausekkeet tulevat nyt muotoon

$$\epsilon_U = \frac{d\bar{u}}{dx} + a_U \frac{d\gamma_2}{dx} - z_U \frac{d\gamma_1}{dx}, \quad (24)$$

$$\epsilon_O = \frac{d\bar{u}}{dx} - a_O \frac{d\gamma_2}{dx} - z_O \frac{d\gamma_1}{dx}.$$

Poikkileikkauksen jännitysresultanttien lausekkeiksi saadaan yhtälöiden (15), (13), (24) ja (14) avulla

$$N = D\bar{u}' \quad (25)$$

$$M = B_S \gamma_2' - \frac{1}{12} (E_U t_U^3 + E_O t_O^3) b \gamma_1'$$

Kun otetaan käyttöön lyhennysmerkinnät

$$B_U = \frac{1}{12} E_U t_U^3 b, \quad B_O = \frac{1}{12} E_O t_O^3 b \quad \text{ja} \quad B = B_S + B_U + B_O, \quad (26)$$

sekä otetaan huomioon kulmanmuutosten lausekkeet (10) ja (11), momentin lauseke voidaan edelleen esittää muodossa

$$M = B_S \gamma_2' - B_U \gamma_1' - B_O \gamma_1' = B_S \gamma' - Bw'' \quad (27)$$

Leikkausvoima jakautuu ydin- ja pintakerroksille. Tasapainoehdon (16) ja yhtälöiden (15) sekä (27) avulla havaitaan yhteys

$$Q = A_K \int_0^t \dot{G}(t') \gamma(x, t-t') dt' = (B_U + B_O) w''' \quad (28)$$

Soveltamalla momentin (27) ja leikkausvoiman (28) lausekkeita tasapainoyhtälöihin (16) päästään γ :n ja w :n ratkaisemiseksi yhtälöihin

$$\frac{B}{B_s} A_K \int_0^t \dot{G}(t') \gamma''(x, t-t') dt' = \frac{NA_K}{B_s} \int_0^t \dot{G}(t') \gamma(x, t-t') dt' - (B_u + B_o) \gamma''' + N\gamma'' + q' = 0, \quad (29)$$

$$w''' = \gamma'' - \frac{A_K}{B_s} \int_0^t \dot{G}(t') \gamma(x, t-t') dt'.$$

Erikoistapauksena tarkastellaan molemmista päistään nivelellisesti tuetua ja ilman päätyjäykistettä olevaa paksukuorista sandwich-palkkia. Palkkia kuormittaa ainoastaan pintakuorma $q(x) H(t)$, joka saa Fourierin sinisarjaksi kehitettynä muodon (18).

Palkin reunaehdot ovat

$$w(x, t) = 0, \quad \gamma'(x, t) = 0 \quad \text{ja} \quad w''(x, t) = 0, \quad \text{kun } x = 0, 1, \quad (30)$$

Taipumalle ja kulmanmuutokselle oletetaan reunaehdot toteuttavat lausekkeet

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{1i}(t) \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad \gamma(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{2i}(t) \cos \frac{i\pi x}{l}. \quad (31)$$

Sijoittamalla lausekkeet (31) ja q :n lauseke (15) yhtälöihin (29) ja vaatimalla yhtälöt toteutuviksi erikseen kaikilla i :n arvoilla saadaan funktioiden $\phi_{1i}(t)$ ja $\phi_{2i}(t)$ ratkaisemiseksi yhtälöt

$$A_K \int_0^t \dot{G}(t') \phi_{2i}(t-t') dt' + (B_u + B_o) \frac{B_s}{B} \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \phi_{2i}(t) - \frac{B_s}{B} \frac{1}{i\pi} q_i H(t) = 0, \quad (32)$$

$$\phi_{1i}(t) = \frac{B_s}{B} \frac{1}{i\pi} \phi_{2i}(t) + \frac{1}{B} \left(\frac{1}{i\pi}\right)^4 q_i H(t).$$

Edellinen yhtälö ratkeaa $\phi_{2i}(t)$:n suhteen esimerkiksi Laplace-muunnosta käyttäen ja $\phi_{1i}(t)$ saadaan tämän jälkeen suoraan jälkimmäisestä yhtälöstä. Yhtälöitten (32) ratkaisemiseen voidaan tietenkin käyttää myös numeerisia menetelmiä, jolloin käytössä olevien relaksaatiomallien joukko on suurempi.

Laplace-muunnetun virumis- ja relaksaatiofunktion välillä on tunnetusti yhteys

$$\tilde{D}(s) \tilde{G}(s) = \frac{1}{s^2}, \quad (33)$$

missä

$$\tilde{D}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} D(t) dt.$$

Laplace-muuntamalla ensimmäinen yhtälöistä (32) ja käyttämällä hyväksi yhteyttä (33), saadaan $\tilde{\phi}_{2i}(s)$:lle lauseke

$$\tilde{\phi}_{2i}(s) = \frac{q_i \frac{1}{i\pi s}}{(B_u + B_o) \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \tilde{D}(s) + \frac{A_K B}{B_s}} \tilde{D}(s). \quad (34)$$

Käytetään virumisfunktiona $D(t)$ virumismallia (5). Kun tämän Laplace-muunnos sijoitetaan $\tilde{\phi}_{2i}(s)$:n lausekkeeseen ja suoritetaan käänteismuunnos, muo-

dostuu $\phi_{2i}(t)$:lle lauseke

$$\phi_{2i}(t) = \frac{q_i l}{i\pi N_{1i}} \left(a + \frac{A_K B}{B_s N_{2i}} b e^{n \frac{N_{1i}}{N_{2i}} t} \right) \quad (35)$$

missä on käytetty lyhennysmerkintöjä

$$N_{1i} = (B_u + B_o) a \left(\frac{i\pi}{l} \right)^2 + \frac{A_K B}{B_s} \quad \text{ja}$$

$$N_{2i} = (B_u + B_o) (a+b) \left(\frac{i\pi}{l} \right)^2 + \frac{A_K B}{B_s}$$

Edelleen jälkimmäisestä yhtälöstä (32) saadaan

$$\phi_{1i}(t) = \frac{q_i}{B} \left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 \left(\left(\frac{l}{i\pi} \right)^2 + \frac{B_s}{N_{1i}} a + \frac{A_K B}{N_{1i} N_{2i}} b e^{n \frac{N_{1i}}{N_{2i}} t} \right) \quad (36)$$

Tarkastellaan esimerkkinä kuvan 12 mukaisen sandwich-palkin maksimitaipuma ajan funktiona. Kuvassa 15 on esitetty paksukuorisen sandwich-palkin teorian mukaan laskettuja maksimitaipuman kuvaajia, sekä vertailun vuoksi samat kuvaajat ohutkuorisen palkin teorian mukaan. Virumismallin (5) parametreille on käytetty resaltoivan kuvaajan parametrien arvoja. Laskelmissa ydinkerroksen paksuutta on pidetty vakiona. Pintakerrosten paksuudet vaihtelevat välillä 9...21 mm. Pistekuorman arvo on 3,04 kN ja sen jakautumis-
leveys 0,10 m. Pintakerrosten kimmokertoimille on käytetty arvoja $E_u = 9022 \text{ MN/m}^2$ ja $E_o = 8728 \text{ MN/m}^2$.

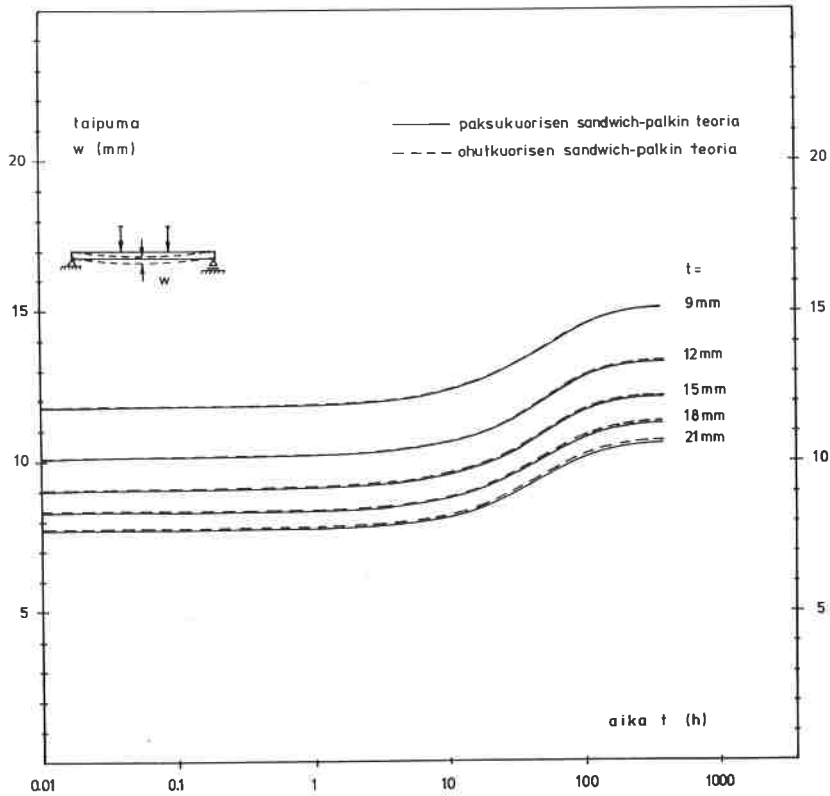
Tuloksista havaitaan paksu- ja ohutkuoristen sandwich-palkkien teorioiden antavan erittäin lähellä toisiaan olevia tuloksia tutkituilla pintakerrosten paksuuksilla. Erot kasvavat luonnollisesti pintakerrosten paksuuden ja ajan mukana. 9 mm pintakerrokselle ero on 1000 tunnin aikana lähes vakio, 0,11 %. 21 mm pintakerroksella ero kasvaa 0,64 %:sta 0,73 %:iin. Verrattaessa kuvia 13 ja 15 keskenään havaitaan virumismallien (4) ja (5) erilainen luonne. Malli (5) lähestyy vaakasuoraa asymptoottia, jota mallilla (4) ei ole.

Sandwich laatta

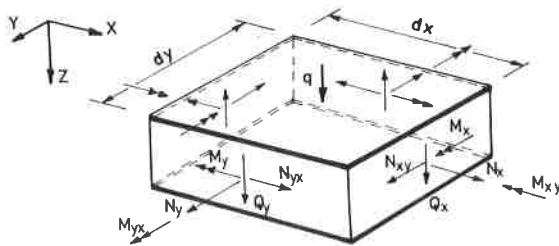
Sandwich laatan pintakerrokset oletetaan tässä ohuiksi sekä ydin- ja pintakerrokset isotrooppisiksi. Ydinkerrokseltaan viskoelastisen sandwich-laatan ratkaisuja etsitään elastis-viskoelastisen analogian avulla. Tällöin käytetään hyväksi eri kerroksiltaan kimmoisen sandwich-laatan differentiaaliyhtälöitä. Laatta-alkion siirtymät ja käytetyt merkinnät selviävät kuvista 11 ja 16.

Kun kimmoiseen sandwich-laattaan ei kohdistu aksiaalisia voimia, laatan differentiaaliyhtälöt voidaan esittää muodossa /6/, /7/,

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{B_s} - \frac{\Delta q}{A_2} \quad , \quad \Delta \Delta \gamma_{xz} = - \frac{\Delta}{A_2} \frac{\partial q}{\partial x} \quad , \quad \Delta \Delta \gamma_{yz} = - \frac{\Delta}{A_2} \frac{\partial q}{\partial y} \quad (37)$$



Kuva 15 Kuvan 12 mukaisen sandwich-palkin maksimitaipumia paksu- ja ohutkuorisen palkkiteorian mukaan.



Kuva 16 Laatta-alkion jännitysresultantit

missä γ_{xz} ja γ_{yz} ovat kulmanmuutoksia tasoissa $x-z$ ja $y-z$, Δ on Laplace operaattori $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, A_2 on lyhennysmerkintä $A_2 = G_2 a^2/h$ sekä G_2 on ydinkerroksen liukukerroin.

Taipuman w ja kulmanmuutosten γ_{xz} ja γ_{yz} sijasta käytetään usein ns. osittaista taipumia w_M ja w_Q , jolloin laatan taipuman ajatellaan koostuvan taivutusmomenttien ja leikkausvoimien aiheuttamista osista.

$$\frac{\partial w_M}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{xz}, \quad \frac{\partial w_Q}{\partial x} = \gamma_{xz} \quad (38)$$

$$\frac{\partial w_M}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz} \quad , \quad \frac{\partial w_Q}{\partial y} = \gamma_{yz} \quad , \quad w = w_M + w_Q \quad .$$

Jännitysresultanttien lausekkeet osittaistaipumien avulla lausuttuina ovat

$$M_x = -B_s \left(\frac{\partial^2 w_M}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_M}{\partial y^2} \right) \quad , \quad M_y = -B_s \left(\frac{\partial^2 w_M}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_M}{\partial x^2} \right) \quad ,$$

$$M_{xy} = - (1-\nu) B_s \frac{\partial^2 w_M}{\partial x \partial y} \quad , \quad (39)$$

$$Q_x = A_2 \frac{\partial w_Q}{\partial x} \quad , \quad Q_y = A_2 \frac{\partial w_Q}{\partial y} \quad .$$

Soveltamalla näitä laatta-alkion tasapainoehtoihin päästään osittaistaipumien avulla lausuttuihin sandwich-laatan differentiaaliyhtälöihin

$$\Delta \Delta w_M = \frac{q}{B_s} \quad , \quad \Delta w_Q = - \frac{q}{A_2} \quad . \quad (40)$$

3-akselialinen jännitystila voidaan jakaa hydrostaattisen paineen aiheuttamaan dilataatioon ja muodonvääristymisestä syntyvään deviaatioon. Jännitysten ja muodonmuutosten väliset yhteydet ovat kimmoteorian mukaan:

$$s = 3Ke \quad , \quad s_{ij} = 2Ge_{ij} \quad , \quad (41)$$

missä

$$s = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad , \quad e = \frac{1}{3} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \quad ,$$

$$s_{ij} = \tau_{ij} \quad \text{ja} \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \quad , \quad \text{kun} \quad i \neq j \quad .$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - s \quad \text{ja} \quad e_{ij} = \epsilon_{ij} - e \quad , \quad \text{kun} \quad i = j \quad , \quad \text{sekä}$$

K on puristuskerroin ja G liukukerroin.

Sandwich-rakenteen ydinkerroksessa normaalijännitykset σ_{11} , σ_{22} ja σ_{33} sekä leikkausjännitys $\tau_{xy} = \tau_{12}$ ovat pieniä ja ne voidaan jättää huomioon ottamatta. Viskoelastiselle aineelle jälkimmäinen yhtälöistä (41) esitetään muodossa

$$\sum_{k=1}^m a'_k \frac{\partial^k s_{ij}}{\partial t^k} = \sum_{k=1}^n b'_k \frac{\partial^k e_{ij}}{\partial t^k} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (42)$$

Tämän Laplace-muunnos on

$$\sum_{k=1}^m a'_k s^k \tilde{s}_{ij}(s) = \sum_{k=1}^n b'_k s^k \tilde{e}_{ij}(s) \quad , \quad \text{eli} \quad A'(s) \tilde{s}_{ij}(s) = B'(s) \tilde{e}_{ij}(s) \quad (43)$$

Elastis-viskoelastisen analogian mukaan ydinkerrokseltaan viskoelastisen sandwich-laatan ratkaisuyhtälöt voidaan kirjoittaa differentiaaliyhtälöitten (40) avulla,

$$\Delta \Delta w_M(x, y, t) = \frac{q(x, y, t)}{B_s} \quad , \quad \Delta w_Q(x, y, s) = - \frac{1}{A_K} \frac{\tilde{q}(x, y, s) A'(s)}{B'(s)} \quad , \quad (44)$$

Yhtälöille löytyy ratkaisuja kimmoteoriassa käytetyillä menetelmillä. $w_Q(x, y, t)$:n löytämiseksi jälkimmäinen yhtälö on ratkaisun jossakin vaiheessa

käänteismuunnettava.

Esimerkkinä tarkastellaan reunoiltaan vapaasti tuettua, reunajäykisteillä varustettua sandwich-laattaa. Kehitetään tasan jakautunut kuorma $q(x,y,t) = q_0 H(t)$ Fourierin sinisarjaksi

$$q_0 H(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_{jk} \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y}, \quad q_{jk} = \frac{16q_0}{\pi^2 jk}, \quad j,k = 1,3,5,\dots \quad (45)$$

Esimerkki-laatan reunaehdot ovat

$$w = 0, \quad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \text{kun } x = 0, l_x, \\ w = 0, \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \text{kun } y = 0, l_y. \quad (46)$$

Taipumille oletetaan seuraavat reunaehdot toteuttavat lausekkeet

$$w_M(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w_{Mjk} \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y}, \quad (47)$$

$$w_Q(x,y,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w_{Qjk}(t) \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y}.$$

Oletetaan viskoelastisen ydinkerroksen noudattavan kiinteän lineaarisen standardiaineen virumismallia. Yhtälö (42) saadaan silloin muotoon

$$(1 + a'_1 \frac{d}{dt}) s_{ij} = (b'_0 + b'_1 \frac{d}{dt}) e_{ij}. \quad (48)$$

Kun tämän Laplace-muunnos sijoitetaan jälkimmäiseen yhtälöön (44), otetaan huomioon Fourierin sarjakehitykset q_{jk} :lle ja vaaditaan yhtälö toteutuvaksi erikseen kaikilla jk -yhdistelmillä, w_{Qjk} :lle saadaan lauseke

$$\tilde{w}_{Qjk}(s) = \frac{16q_0}{A_k \pi^4} \frac{1}{jk \left[\left(\frac{j}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{k}{l_y} \right)^2 \right]} \frac{1 + a'_1 s}{s(b'_0 + b'_1 s)} \quad (49)$$

$$w_{Qjk}(t) \text{ ratkeaa tästä käänteismuuntamalla} \\ w_{Qjk}(t) = \frac{16q_0}{A_k \pi^4} \frac{1}{jk \left[\left(\frac{j}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{k}{l_y} \right)^2 \right]} \frac{1}{b'_0} \left(1 + \frac{a'_1 b'_0 - b'_1}{b'_1} e^{-\frac{b'_0}{b'_1} t} \right) \quad (50)$$

w_{Mjk} :lle saadaan lauseke sijoittamalla lausekkeet (45) ja (47) edelliseen yhtälöön (44),

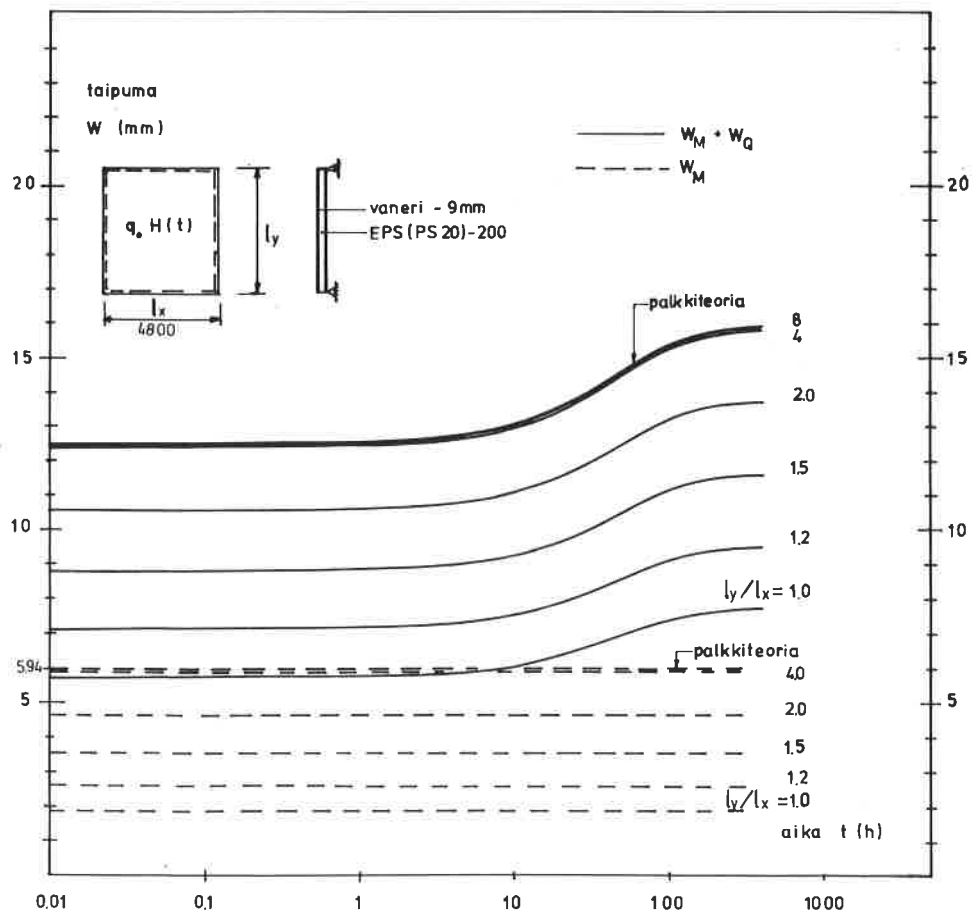
$$w_{Mjk} = \frac{16q_0}{B_s \pi^6} \frac{1}{jk \left[\left(\frac{j}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{k}{l_y} \right)^2 \right]^2} \quad (51)$$

w_{Qjk} :n ajasta riippuva osa voidaan korvata muotoa (5) olevalla virumismallilla. Kun käytetään lisäksi lyhennysmerkintää $\kappa = l_y/l_x$, kokonaistaipuman lopulliseksi lausekkeeksi tulee

$$w(x,y,t) = \frac{16q_0 l_x^2}{\pi^4} \sum \sum \frac{\kappa^2}{jk(\kappa^2 j^2 + \kappa^2)} \left(\frac{l_x^2}{B_s \pi^2} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 j^2 + \kappa^2} + \frac{1}{A_K} (a+b e^{nt}) \right) \sin \frac{j\pi x}{l_x} \sin \frac{k\pi y}{l_y} \quad (52)$$

Osittaistaipumien avulla lausutut jännitysresultantit (39) ovat ajan suhteen vakioita.

Kuvassa 17 on esitetty vaneripintaisen ja polystyreeniytimisen reunoiltaan vapaasti tuetun, reunajäykistein varustetun sandwich-laatan keskipisteen taipuman kuvaajia erilaisilla laatan sivusuhteen arvoilla. Kuvaan on piirretty myös pelkästään taivutusmomentista tuleva taipumaosuus sekä ohutkuorisen sandwich-palkin teorian mukaan lasketut arvot jännemitalle l_x . Polystyreenin virumisfunktion parametreina on käytetty resultoivan kuvaajan parametriarvoja (taulukko 1). Tasaisesti jakautuneen kuorman arvo on $1,50 \text{ kN/m}^2$. Pintakerrosten kimmokertoimille on käytetty lukuarvoja $E_U = 9022 \text{ MN/m}^2$ ja $E_O = 8728 \text{ MN/m}^2$ sekä Poissonin vakiolle arvoa $\nu = 0$.



Kuva 17 Ohutkuorisen sandwich-laatan keskipisteen ($x=l_x/2, y=l_y/2$) taipumia

LÄHDEKIRJALLISUUS

- [1] Johnson, O., Milaszewski, E., Sandwichelement med cellplastkärna. Sveriges Plastförbund, Byggplastavd. Rapport 04:1971
 - [2] Ferry, J.D., Viscoelastic properties of polymers, 2. painos. John Wiley and Sons, New York, 1970
 - [3] Shell Chemicals, Expanded polystyrene in building, design and practice, 2. painos. Styrocell Technical Manual, Section 6.4
 - [4] Mäkeläinen, P., On the modelling of long-term thermoviscoelastic behaviour of glassy polymers. TKY Otapaino, Espoo, 1976
 - [5] Leppävuori, E.K.M., Creep of fresh water ice at high homologous temperatures, Helsingfors 1976. Styrelsen för vintersjöfartarsforskning, Research Report 19 s.71...76
 - [6] Stamm, K., Witte, H., Sandwichkonstruktionen. Springer-Verlag, Wien 1974
 - [7] Allen, H.G., Analysis and design of structural sandwich panels. Pergamon Press, 1969
 - [8] Flügge, W., Viscoelasticity. Blaisdell Publishing Company, 1967
 - [9] Christensen, R.M., Theory of viscoelasticity. Academic Press, New York, 1971
 - [10] Mase, G.E., Behavior of viscoelastic plates in bending. J.Eng.Mech.Div. 86 (1960) 3 s.25...39
 - [11] Mäkinen, M., Tutkimus sandwich-rakenteista. Htkk, diplomityö 1975
 - [12] Hassinen, P., Tutkimus polystyreeniytimisen sandwich-rakenteen pitkäaikaiskäyttäytymisestä. Htkk, diplomityö 1976
- Paavo Hassinen, dipl.ins., Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi*