

KOTELOPALKIN JÄNNITYSANALYYSI

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 10
No. 1 1977 s. 37...58.

Juha Paavola ja Martti Mikkola

YHTEENVETO: Artikkelissa esitetään menetelmä ohutseinäisen poikkileikkaukseltaan avoimen tai umpinaisen sauvan jännitystilän määrittämiseksi. Ratkaisu johdetaan käyttäen virtuaalisten siirtymien periaatetta. Menetelmä pohjautuu Vlasovin kehittämään teoriaan. Palkin poikittaisen siirtymätilan muoto valitaan ennalta. Aksiaalisessa suunnassa palkki jaetaan elementteihin. Siirtymä-funktiota approksimoidaan niissä kolmannen asteen polynomeilla elementtimenetelmän tapaan. Tuntemattomina ovat siirtymäfunktioiden arvot elementtien solmupisteissä. Suoralle yksikoteloiselle ulokkeelliselle siltapalkille laaditulle tietokoneohjelmalla laskettuja tuloksia verrataan yksinkertaisella palkkiteorialla, kotelosauvan yleisellä vääntö- ja levykuoriteorialla laskettuihin tuloksiin.

JOHDANTO

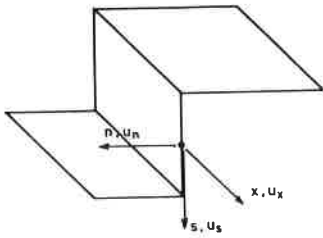
Vääntökuormituksen alaisen ohutseinäisen sauvarakenteen jännitystilän määrittäminen on käsin laskien varsin vaikea ja työläs tehtävä. Sen vuoksi on tarpeen kehittää tehtävän ratkaisemiseksi menetelmä, jota olisi helppo soveltaa ja joka olisi käyttökustannuksiltaan edullinen.

Esitettävä teoria pohjautuu V.S. Vlasovin /1/ johtamaan teoriaan poikkileikkaukseltaan umpinaisten ja deformatuvien sauvojen ratkaisemiseksi. Lisäksi otetaan huomioon poikkileikkausprofiilin normaalin suuntainen siirtymäkomponentti ja sovelletaan yleistä laattateoriaa siirtymiin seinämän paksuuden suunnassa.

Teorian perusteella on laadittu tietokoneohjelma ulokkeellisen yksikoteloisen siltapalkin jännitystarkastelun suorittamiseksi. Ohjelmaa voidaan pienin muutoksin soveltaa mielivaltaiseen poikkileikkaukseltaan avonaiseen tai umpinaiseen sauvaan, kun sauvan akseli on suora ja tukilinjat ovat kohtisuorassa akselia vastaan. Pistekuormien ja pistemäisten tukien kohdalla menetelmä aiheuttaa tiettyjä paikallisia epätarkkuuksia lähinnä leikkausjännityksiin.

PERUSYHTÄLÖIDEN JOHTAMINEN VIRTUAALISTEN SIIRTYMIEN PERIAATTEELLA

Tarkastellaan rakennetta, joka on muodostettu I:stä levystä, jotka on liitetty toisiinsa nurkkapisteissä monoliittisesti. Nurkkapisteessä voi liittyä yhteen kaksi tai useampia levyjä. Kullekin levyille määritellään lokaalinen eli



Kuva 1. Levyn paikallinen koordinaatisto.

paikallinen suorakulmainen $\{x, s, n\}$ -koordinaatisto, jonka x - ja s -akselit yhtyvät levyn keskitasoon (kuva 1). Tällöin poikkileikkausprofiilin keskipinnan jokaisen pisteen siirtymä on jaettavissa kolmeen siirtymäkomponenttiin u_x , u_s ja u_n edellä määritellyn koordinaatiston akselien suuntiin siten, että siirtymä

- u_x on sauvan akselin suuntainen
- u_s on levyn keskipinnan tangentin suuntainen
- u_n on levyn keskipinnan normaalin suuntainen.

Vlasovin /1/ mukaan edellä määritellyt siirtymäkomponentit voidaan esittää summana N :stä toisistaan lineaarisesti riippumattomasta osatulosta

$$u = \sum_{i=1}^N F_1^{(i)}(s) \cdot F_2^{(i)}(x), \quad (1)$$

jossa toinen funktioista F_1 ja F_2 oletetaan tunnetuksi (etukäteen valituksi) ja toinen on tuntematon eli ratkaisun määrittävä. Funktiot F_1 valitaan toisistaan lineaarisesti riippumattomiksi. On tarkoituksenmukaista valita ne siten, että niistä mahdollisimman tarkoin voidaan koota poikkileikkauspinnan jokainen siirtymätila. Lisäksi on edullista kuvata kullakin funktiolla poikkipinnan liikettä johonkin tiettyyn suuntaan. Tällöin on helppo ottaa huomioon reunaehdoissa ne siirtymät, jotka ovat estettyjä tuentatavasta johtuen. Jos rakennetta kuormitetaan vain antisymmetrisesti, voidaan symmetrisiä siirtymätilaa kuvaavat funktiot jättää kokonaan pois. Funktioiden valinnalla on näin mahdollista saada tarkemmin kuvatuksi antisymmetrinen siirtymätila.

Siirtymäkomponentit määritellään seuraavalla tavalla /2/

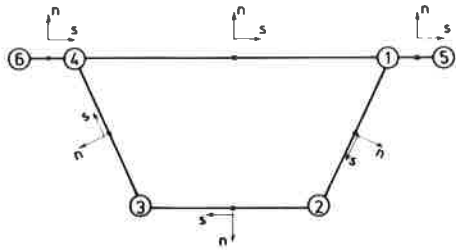
$$u_s(x, s) = \sum_{i=1}^M V_i(x) \cdot v_v^{(i)}(s) = [V_1(x), V_2(x), \dots, V_M(x)] \cdot \begin{bmatrix} v_v^{(1)}(s) \\ v_v^{(2)}(s) \\ \vdots \\ v_v^{(M)}(s) \end{bmatrix} = \underline{V} \cdot \underline{v}_v \quad (2)$$

$$u_x(x, s) = \sum_{j=1}^M W_j(x) \cdot u_w^{(j)}(s) = \underline{W} \cdot \underline{u}_w$$

$$u_n(x, s) = \sum_{i=1}^M V_i(x) \cdot u_v^{(i)}(s) + \sum_{k=1}^M U_k(x) \cdot u_u^{(k)}(s) = \underline{V} \cdot \underline{u}_v + \underline{U} \cdot \underline{u}_u$$

Komponentti u_n on jaettu kahteen osaan, joista edellinen on rinnastettu yhtäaikaan tapahtuvaksi siirtymien u_s kanssa ja jälkimmäinen muodostuu yksinomaan levyjen poikkipinnan tasossa tapahtuvasta taipumisesta.

Menetelmää voidaan soveltaa täysin mielivaltaiselle poikkileikkaukselle. Seuraavassa määritetään mahdolliset poikittaiset siirtymäfunktiot yksikote-loiselle ulokkeelliselle palkille. Kunkin levyn lokaalinen koordinaaristo valitaan kuvan 2 mukaan ja määrätään s -koordinaatin kiertosuunta.



Kuva 2. Levyjen paikalliset 1. lokaalit koordinaatistot.

Poikkileikkausprofiilin keskipinnan tangentin ja normaalin suuntaisia poikittaissiirtymiä määritettäessä otetaan huomioon, että muodonmuutokset tangentin suuntaan häviävät

$$\epsilon_s = 0 \quad (3)$$

Tällöin siirtymät $v_v^{(i)}(s)$ ovat vakiosuuruisia kunkin levyosan matkalla ja niiden toisistaan lineaarisesti riippumattomien komponenttien eli poikkileikkauksen vapausasteiden lukumäärä saadaan kaavasta

$$M = 2 \cdot K - I = 2 \cdot 4 - 4 = 4$$

missä K on poikkileikkauksen nurkkapisteiden lukumäärä ja I on levyosien lukumäärä.

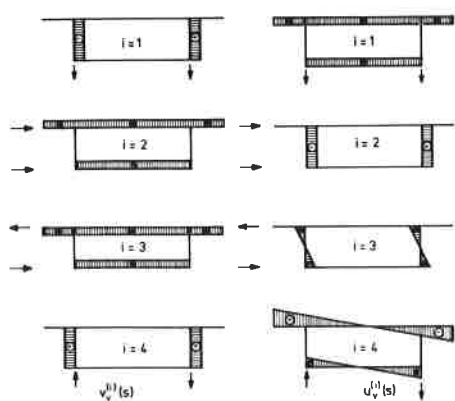
Yhtälöstä (3) johtuen kotelon ylälaatta ulokkeineen toimii yhtenä elementtinä.

Kuvassa 3 funktiot $v_v^{(i)}(s)$ on valittu vastaamaan poikkileikkauksen yksikkösiirtymistä aiheutuvia profiilin keskipinnan tangentin suuntaisia siirtymiä ja funktiot $u_v^{(i)}(s)$ poikkileikkauksen samoista liikkeistä aiheutuvia keskipinnan normaalin suuntaisia siirtymiä.

Aksiaalisia siirtymiä määritettäessä oletetaan funktiot $u_w^{(j)}(s)$ lineaarisiksi eri levyosilla. Poikkeuksena määritetään ulokkeille kolmannen asteen funktiot, jotta siirtymäfunktioiden derivaatta olisi ulokkeen tyvessä jatkuva. Lineaarisesti riippumattomien funktioiden määrä on sama kuin poikkileikkauksen nurkkapisteiden lukumäärä, siis kuusi. Ulokkeiden päät laske-taan erillisiksi nurkkapisteiksi.

Kuvassa 4 on esitetty neljällä ensimmäisellä funktiolla kotelon nurkkapisteiden positiivisista ja negatiivisista "ykkösen" suuruisista siirtymistä koottavat lineaarikombinaatiot sekä kahdella jälkimmäisellä ulokkeiden päiden aksiaaliset yksikkösiirtymät.

Kuvassa 5 esitetyt siirtymäfunktiot $u_u^{(j)}(s)$ kuvaavat poikkileikkauksen tasossa tapahtuvaa levyjen taipumista. Niiden lukumäärä on sama, kuin nurkkapisteiden määrä. Neljä ensimmäistä koostuu poikkileikkauksen nurkkapisteiden yksikkökiertymistä ja kaksi jälkimmäistä ulokkeiden profiilin keskipinnan normaalin suuntaisista yksikkösiirtymistä.



Yleisen laattateorian mukaan poikkileikkauksen mielivaltaisen pisteen siirtymäkomponentit ovat

$$\begin{aligned} u_n(x, s, n) &= u_n(x, s) \\ u_s(x, s, n) &= u_s(x, s) - n \cdot \frac{\partial}{\partial s} u_n(x, s) \\ u_x(x, s, n) &= u_x(x, s) - n \cdot \frac{\partial}{\partial x} u_n(x, s) \end{aligned} \quad (4)$$

jotka voidaan esittää muodossa

$$u_n(x, s, n) = \sum_{i=1}^M V_i(x) \cdot u_v^{(i)}(s) + \sum_{k=1}^M U_k(x) \cdot u_u^{(k)}(s) \quad (5)$$

Kuva 3. Poikkileikkauksen tangentin ja normaalin suuntaiset yksikkösiirtymät.

$$u_s(x, s, n) = \sum_{i=1}^M V_i(x) \cdot [v_v^{(i)}(s) - n \cdot \frac{\partial}{\partial s} u_v^{(i)}(s)] - \sum_{k=1}^M U_k(x) \cdot n \cdot \frac{\partial}{\partial s} u_u^{(k)}(s)$$

$$u_x(x, s, n) = \sum_{j=1}^M W_j(x) \cdot u_w^{(j)}(s) - \sum_{i=1}^M n \cdot \frac{\partial}{\partial x} V_i(x) \cdot u_v^{(i)}(s) - \sum_{k=1}^M n \cdot \frac{\partial}{\partial x} U_k(x) \cdot u_u^{(k)}(s)$$

Siirtymistä (5) saadaan mielivaltaisessa poikkileikkauksen pisteessä muodonmuutoskomponenteiksi

$$\begin{aligned} \epsilon_x(x, s, n) &= \frac{\partial}{\partial x} u_x(x, s, n) = \sum_{j=1}^M \frac{\partial}{\partial x} W_j(x) \cdot u_w^{(j)}(s) - \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_i(x) \cdot u_v^{(i)}(s) \cdot n - \\ &- \sum_{k=1}^M \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k(x) \cdot u_u^{(k)}(s) \cdot n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xs}(x, s, n) &= \frac{\partial}{\partial x} u_s(x, s, n) + \frac{\partial}{\partial s} u_x(x, s, n) = \sum_{i=1}^M \frac{\partial}{\partial x} V_i(x) \cdot [v_v^{(i)}(s) - 2 \cdot \frac{\partial}{\partial s} u_v^{(i)}(s) \cdot n] + \\ &+ \sum_{j=1}^M W_j(x) \cdot \frac{\partial}{\partial s} u_w^{(j)}(s) - 2 \cdot \sum_{k=1}^M \frac{\partial}{\partial x} U_k(x) \cdot \frac{\partial}{\partial s} u_u^{(k)}(s) \cdot n \end{aligned} \quad (6)$$

$$\epsilon_s(x, s, n) = \frac{\partial}{\partial s} u_s(x, s, n) = \sum_{i=1}^M V_i(x) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial s} v_v^{(i)}(s) - \frac{\partial^2}{\partial s^2} u_v^{(i)}(s) \cdot n \right] - \sum_{k=1}^M U_k(x) \cdot \frac{\partial^2}{\partial s^2} u_u^{(k)}(s) \cdot n$$

$$\epsilon_n(x, s, n) = \gamma_{sn}(x, s, n) = \gamma_{nx}(x, s, n) = 0$$

Siirtymällä matriisimerkintöihin [vrt. (2)] ja käyttämällä osittaisderivoita merkintöjä

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x) = V_{,x}(x) = V_{,x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x) = V_{,xx}(x) = V_{,xx} \text{ jne.}$$

voidaan lausekkeista (5) ja (6) varioimalla lasketut virtuaaliset siirtymät ja niihin liittyvät virtuaaliset muodonmuutokset esittää muodossa

$$\delta u_n = \delta \underline{v} \cdot \underline{u}_v + \delta \underline{u} \cdot \underline{u}_u$$

$$\delta u_s = \delta \underline{v} \cdot (\underline{v}_v - n \cdot \underline{u}_{v,s}) = n \cdot \delta \underline{u} \cdot \underline{u}_{u,s} \quad (7)$$

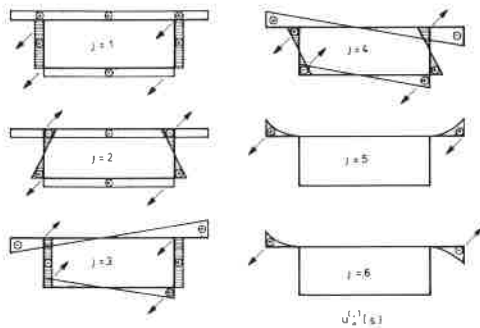
$$\delta u_x = \delta \underline{w} \cdot \underline{u}_w - n \cdot \delta \underline{v} \cdot \underline{v}_{v,x} \cdot \underline{u}_v - n \cdot \delta \underline{u} \cdot \underline{u}_{u,x}$$

$$\delta \epsilon_x = \delta \underline{w} \cdot \underline{u}_{w,x} = n \cdot \delta \underline{v} \cdot \underline{v}_{v,xx} \cdot \underline{u}_v - n \cdot \delta \underline{u} \cdot \underline{u}_{u,xx}$$

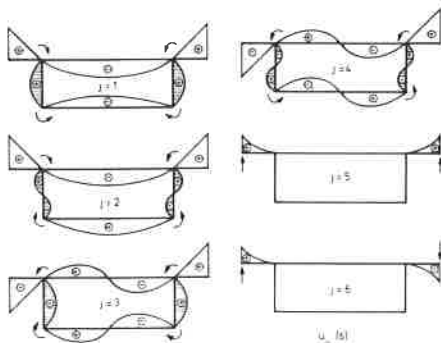
$$\delta \gamma_{xs} = \delta \underline{v} \cdot (\underline{v}_{v,x} - 2n \cdot \underline{u}_{v,s}) + \delta \underline{w} \cdot \underline{u}_{w,s} - 2n \cdot \delta \underline{u} \cdot \underline{u}_{u,x} \cdot \underline{u}_{u,s} \quad (8)$$

$$\delta \epsilon_s = \delta \underline{v} \cdot (\underline{v}_{v,s} - n \cdot \underline{u}_{v,ss}) = n \cdot \delta \underline{u} \cdot \underline{u}_{u,ss}$$

Aksiaalisesta koordinaatista x riippuvat osat erotetaan omaksi kerroinmatriisiksi



Kuva 4. Aksiaaliset siirtymäfunktiot.



Kuva 5. Levyosien taipumafunktiot.

$$\underline{X} = \left(\underline{W} \quad \underline{W}_{,x} \quad \underline{V} \quad \underline{V}_{,x} \quad \underline{V}_{,xx} \quad \underline{U} \quad \underline{U}_{,x} \quad \underline{U}_{,xx} \right)^T \quad (9)$$

(yläindeksi T tarkoittaa matriisin transpoosi-operaattoria)

Sen variaatio on

$$\delta \underline{X} = (\delta \underline{W} \quad \delta \underline{W}_{,x} \quad \delta \underline{V} \quad \delta \underline{V}_{,x} \quad \delta \underline{V}_{,xx} \quad \delta \underline{U} \quad \delta \underline{U}_{,x} \quad \delta \underline{U}_{,xx})^T \quad (10)$$

Virtuaaliset muodonmuutokset voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_x &= \delta \underline{X}^T \cdot \underline{u}_{\epsilon_x} \\ \delta \gamma_{xs} &= \delta \underline{X}^T \cdot \underline{u}_{\gamma_{xs}} \\ \delta \epsilon_s &= \delta \underline{X}^T \cdot \underline{u}_{\epsilon_s} \end{aligned} \quad (11)$$

missä

$$\begin{aligned} \underline{u}_{\epsilon_x} &= \begin{bmatrix} \underline{0}^T & \underline{u}_w^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & -n \cdot \underline{u}_v^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & -n \cdot \underline{u}_u^T \end{bmatrix}^T \\ \underline{u}_{\gamma_{xs}} &= \begin{bmatrix} \underline{u}_{w,s}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & (v_{,v} - 2n u_{,v,s})^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & -2n \cdot \underline{u}_{u,s}^T & \underline{0}^T \end{bmatrix}^T \\ \underline{u}_{\epsilon_s} &= \begin{bmatrix} \underline{0}^T & \underline{0}^T & (v_{,v,s} - n u_{,v,ss})^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & -n \cdot \underline{u}_{u,ss}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (12)$$

($\underline{0}$ on nollavektori)

Jännitysten lausekkeet muodostetaan samoin. Aineen otaksutaan noudattavan Hooken lakia. Lisäksi käytetään hyväksi transponointi operaation kommutatiivisuutta eli vaihdannaisuutta

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_s) = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\underline{u}_{\epsilon_x} + \nu \cdot \underline{u}_{\epsilon_s})^T \cdot \underline{X} \\ \tau_{xs} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{xs} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \underline{u}_{\gamma_{xs}}^T \cdot \underline{X} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\sigma_s = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\epsilon_s + \nu \cdot \epsilon_x) = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\underline{u}_{\epsilon_s} + \nu \cdot \underline{u}_{\epsilon_x})^T \cdot \underline{X}$$

Sijoittamalla nyt lasketut virtuaaliset muodonmuutokset (11) ja jännitykset (13) sisäisen muodonmuutosenergian lausekkeeseen (14)

$$\delta U_s = \int_V (\delta \epsilon_x \cdot \sigma_x + \delta \epsilon_s \cdot \sigma_s + \delta \gamma_{xs} \cdot \tau_{xs}) dv \quad (14)$$

saadaan

$$\delta U_s = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \int_V \delta \underline{X}^T \cdot \left[\underline{u}_{\epsilon_x} \cdot (\underline{u}_{\epsilon_x} + \nu \cdot \underline{u}_{\epsilon_s})^T + \underline{u}_{\epsilon_s} \cdot (\underline{u}_{\epsilon_s} + \nu \cdot \underline{u}_{\epsilon_x})^T + \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \underline{u}_{\gamma_{xs}} \cdot \underline{u}_{\gamma_{xs}}^T \right] \cdot \underline{X} dv \quad (15)$$

Suorittamalla integrointi erikseen poikkileikkausalan yli seuraa

$$\begin{aligned} \delta U_s &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \int_0^1 \delta \underline{X}^T \cdot \left[\int_A \left(\underline{u}_{\epsilon_x} \cdot \underline{u}_{\epsilon_x}^T + \underline{u}_{\epsilon_s} \cdot \underline{u}_{\epsilon_s}^T + \nu \cdot (\underline{u}_{\epsilon_x} \cdot \underline{u}_{\epsilon_s}^T + \underline{u}_{\epsilon_s} \cdot \underline{u}_{\epsilon_x}^T) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1-\nu}{2} \cdot \underline{u}_{\gamma_{xs}} \cdot \underline{u}_{\gamma_{xs}}^T \right) da \right] \cdot \underline{X} dx \end{aligned} \quad (16)$$

Merkitään

$$\delta U_s = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \int_0^l (\delta \underline{X}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{X}) ds \quad (17)$$

Kerroinmatriisi \underline{K} on esitetty kaavassa 18.

$$\underline{K} = \int_A \begin{bmatrix} \frac{(1+\nu)}{2} u_{v,s} u_{v,s}^T & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} u_{v,s} (v_{v,-2nu_{v,s}})^T & 0 & 0 & -(1-\nu) nu_{v,s} u_{v,s}^T & 0 \\ 0 & u_w u_w^T & -\nu u_w (v_{v,-n} u_{v,ss})^T & 0 & -nu_w u_w^T & -\nu nu_w u_{v,ss}^T & 0 & -nu_w u_w^T \\ (v_{v,s} - nu_{v,ss}) (v_{v,s} - nu_{v,ss})^T & 0 & -\nu n (v_{v,s} - nu_{v,ss}) u_w^T & n (v_{v,s} - nu_{v,ss}) u_{v,ss}^T & 0 & 0 & \nu n (v_{v,s} - nu_{v,ss}) u_w^T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} (v_{v,-2nu_{v,s}}) (v_{v,-2nu_{v,s}})^T & 0 & 0 & 0 & (1-\nu) n (v_{v,-2nu_{v,s}}) u_{v,ss}^T & 0 \\ 0 & n^2 u_w u_w^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n^2 u_w u_w^T \\ 0 & -\nu n^2 u_w u_{v,ss}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu n^2 u_w u_{v,ss}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) u_{v,ss} u_{v,ss}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n^2 u_w u_w^T \end{bmatrix} da \quad (18)$$

symmetrinen

Rakenteeseen vaikuttavat ulkoiset rasitukset jaetaan seuraavasti

Tilavuusvoimat:	F_x, F_s, F_n	$l_1 \leq x \leq l_2$	$s_1 \leq s \leq s_2$
Pintavoimat:			
Aluekuormat:	q_x, q_s, q_n	$l_1 \leq x \leq l_2$	$s_1 \leq s \leq s_2$
Viivakuormat:	p_{xx}, p_{xs}, p_{xn}	$l_1 \leq x \leq l_2$	$s = s_1$
Viivakuormat:	p_{sx}, p_{ss}, p_{sn}	$x = l_1$	$s_1 \leq s \leq s_2$
Pistekuormat:	P_x, P_s, P_n	$x = l_1$	$s = s_1$

Kaikkien ulkoisten rasitusten oletetaan kuormittavan sauvaa poikkileikkausprofiiliin keskipintaa pitkin tai sen tasossa.

Ulkoisten voimien tekemä työ on

$$\delta W = \int_V (F_x \cdot \delta u_x + F_s \cdot \delta u_s + F_n \cdot \delta u_n) dv + \int_{\Omega} (T_x \cdot \delta u_x + T_s \cdot \delta u_s + T_n \cdot \delta u_n) da \quad (19)$$

(Ω on ulkoisen kuorman vaikutusala)

Virtuaaliset siirtymäkomponentit esitetään käyttäen määritelmää (10) seuraavasti

$$\begin{aligned}\delta u_n &= \underline{u}_n^T \cdot \delta \underline{X} \\ \delta u_s &= \underline{u}_s^T \cdot \delta \underline{X} \\ \delta u_x &= \underline{u}_x^T \cdot \delta \underline{X}\end{aligned}\tag{20}$$

missä

$$\begin{aligned}\underline{u}_n &= \begin{pmatrix} \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{u}_v^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{u}_u^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T \end{pmatrix}^T \\ \underline{u}_s &= \begin{pmatrix} \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{v}_v^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T \end{pmatrix}^T \\ \underline{u}_x &= \begin{pmatrix} \underline{u}_w^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T \end{pmatrix}^T\end{aligned}\tag{21}$$

Analogisesti muodonmuutosenergian kanssa johdetaan ulkoisen virtuaalisen työn lauseke määritelmästä (18)

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_V (F_x \cdot \underline{u}_{u_x} + F_s \cdot \underline{u}_{u_s} + F_n \cdot \underline{u}_{u_n})^T \cdot \delta \underline{X} \, dv + \int_{l_1}^{l_2} \int_{s_1}^{s_2} (q_x \cdot \underline{u}_{u_x} + q_s \cdot \underline{u}_{u_s} + q_n \cdot \underline{u}_{u_n})^T \cdot \delta \underline{X} \, ds + \\ &+ p_{xx} \cdot \underline{u}_{u_x}(s_1) + p_{xs} \cdot \underline{u}_{u_s}(s_1) + p_{xn} \cdot \underline{u}_{u_n}(s_1) \Big)^T \cdot \delta \underline{X} \, dx + \left(\int_{s_1}^{s_2} (p_{sx} \cdot \underline{u}_{u_x} + p_{ss} \cdot \underline{u}_{u_s} + p_{sn} \cdot \underline{u}_{u_n}) \right. \\ &+ p_{sn} \cdot \underline{u}_{u_n}(s_1) + p_x \cdot \underline{u}_{u_x}(s_1) + p_s \cdot \underline{u}_{u_s}(s_1) + p_n \cdot \underline{u}_{u_n}(s_1) \Big)^T \cdot \delta \underline{X}(l_1)\end{aligned}\tag{22}$$

Hajoittamalla tilavuusintegraali osiin ja ottamalla käyttöön merkinnät

$$\begin{aligned}\underline{K}_2 &= \left(\int_{s_1}^{s_2} (p_{sx} \cdot \underline{u}_{u_x} + p_{ss} \cdot \underline{u}_{u_s} + p_{sn} \cdot \underline{u}_{u_n}) ds + p_x \cdot \underline{u}_{u_x}(s_1) + p_s \cdot \underline{u}_{u_s}(s_1) + p_n \cdot \underline{u}_{u_n}(s_1) \right)^T \\ \underline{K}_1 &= \left(\int_{\Omega} (F_x \cdot \underline{u}_{u_x} + F_s \cdot \underline{u}_{u_s} + F_n \cdot \underline{u}_{u_n}) da + \int_{s_1}^{s_2} (q_x \cdot \underline{u}_{u_x} + q_s \cdot \underline{u}_{u_s} + q_n \cdot \underline{u}_{u_n}) ds + p_{xx} \cdot \underline{u}_{u_x}(s_1) + p_{xs} \cdot \underline{u}_{u_s}(s_1) + p_{xn} \cdot \underline{u}_{u_n}(s_1) \right)^T\end{aligned}\tag{23}$$

voidaan koko ulkoisen virtuaalisen työn lauseke esittää muodossa

$$\delta W = \int_{l_1}^{l_2} \underline{K}_1 \cdot \delta \underline{X} \, dx + \underline{K}_2 \cdot \delta \underline{X}(l_1)\tag{24}$$

Kirjoittamalla nyt virtuaalisten siirtymien periaatteen mukainen yhtälö

$$\delta U_s = \delta W\tag{25}$$

muodonmuutosenergian ja ulkoisen työn välille, saadaan yhtälö ohutseinäisen levykuoren ratkaisemiseksi siirtymäkomponentteja (2) käyttäen. Yhtälöryhmä sisältää tuntemattomat siirtymäfunktiot matriiseissa \underline{X} ja $\delta \underline{X}$. Matriisit \underline{K} , \underline{K}_1 ja \underline{K}_2 ovat laskettavissa valittujen poikittaisten siirtymäfunktioiden perusteella. Tehtäväksi tulee approksimoida tuntemattomia siirtymäfunktioita siten, että käsiteltävänä olevalle tehtävälle saadaan mahdollisimman tarkka ratkaisu.

ELEMENTTIMENETELMÄN YHTÄLÖIDEN JOHTAMINEN

Siirtymäfunktioiden approksimoiminen

Sauva jaetaan akselin suunnassa elementteihin ja approksimoidaan niissä tuntemattomia funktioita (vrt. (2)) $F_2^{(i)}(x)$ kolmannen asteen polynomeilla. Funktioiden arvot elementtien välisissä solmupisteissä ovat tehtävän tuntemattomia siirtymäparametreja, jotka on määritettävä /3/. On edullisempaa tarkentaa ratkaisua lyhentämällä elementtien pituutta kuin valita korkeamman asteen polynomi approksimaatiofunktioiksi, koska tällöin päästään ratkaisussa likimain samaan tarkkuuteen huomattavasti pienempää tietokoneen muistikapasiteettia käyttäen.

Rajoitutaan tarkastelemaan väliä $(0 \leq \xi \leq 1)$, jolle jokainen elementti voidaan kuvata lineaarikuvausta (31) käyttäen. Muodostetaan neljä kolmannen asteen Hermiten interpolaatiopolynomia, jotka täyttävät reunaehdot (kuva 6)

$$\begin{aligned} H_1(0) &= 1, H_1'(0) = H_1(1) = H_1'(1) = 0 \\ H_2(0) &= 0, H_2(1) = 0, H_2(0) = H_2(1) = H_2'(0) = H_2'(1) = 0 \\ H_3(0) &= 0, H_3(1) = 1, H_3(0) = H_3(1) = H_3'(0) = H_3'(1) = 0 \\ H_4(0) &= 0, H_4(1) = 0, H_4(0) = H_4(1) = H_4'(0) = H_4'(1) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$H'(\xi) = \frac{d}{d\xi} H(\xi)$$

Ne ovat muotoa

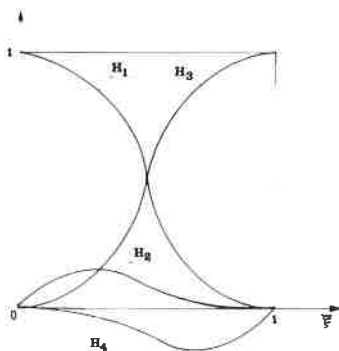
$$H(\xi) = \underline{B} \cdot \underline{f} \quad (27)$$

jossa

$$\underline{f} = [1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3]^T$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\underline{H} = [H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4]^T$$



Kuva 6. Kolmannen asteen Hermiten polynomit

Mielivaltaiset reunaehdot toteuttava polynomi on

$$H(\xi) = \underline{v}^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{f} \quad (29)$$

jossa

$$\underline{v} = [v(0) \quad v'(0) \quad v(1) \quad v'(1)]^T = [\underline{\tilde{v}}(0) \quad \underline{\tilde{v}}(1)]^T \quad (30)$$

Lineaarikuvauksella (31) voidaan k:s elementti välillä $(x_{k-1} \leq x \leq x_k)$ kuvata välille $(0 \leq \xi \leq 1)$ (Kuva 7).

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} l_i + l_k \cdot \xi = x_{k-1} + l_k \cdot \xi \quad (31)$$

Koska siirtymäparametrit ovat globaalissa koordinaatistossa, on suoritettava muuttujanvaihdos, jolla siirrytään lokaaliseen koordinaatistoon. Riippuvuudesta (31) seuraa

$$\frac{d}{d\xi} = l_k \cdot \frac{d}{dx} \quad (32)$$

Yhtälö (29) voidaan esittää yleistetyssä muodossa elementille k

$$H(\xi) = \underline{v}_k^T \cdot \underline{D}_k \cdot \underline{B} \cdot \underline{f} \quad (33)$$

jossa

$$\underline{v}_k = [\underline{\tilde{v}}_k(x_{k-1}), \underline{\tilde{v}}_k(x_k)]^T \quad (34)$$

$$\underline{D}_k = \begin{bmatrix} 1 & l_k & 1 & l_k \end{bmatrix} \quad ([] \text{ on diagonaali- eli lävistäjämatriisi})$$

Jos halutaan approksimoida samalla tavalla M kappaletta toisistaan riippumattonta funktiota, yhtälö (33) voidaan laajentaa seuraavasti

$$H^M(\xi) = \underline{v}_k^M \cdot \underline{D}_k^M \cdot \underline{B}^M \cdot \underline{f}^M \quad (35)$$

missä

$$\underline{v}_k^M = [\underline{v}_k^1, \underline{v}_k^2, \dots, \underline{v}_k^i, \dots, \underline{v}_k^M]^T$$

$$\underline{D}_k^M = [\underline{D}_k^1, \underline{D}_k^2, \dots, \underline{D}_k^i, \dots, \underline{D}_k^M] \quad (36)$$

$$\underline{B}^M = [\underline{B}^1, \underline{B}^2, \dots, \underline{B}^i, \dots, \underline{B}^M]$$

$$\underline{f}^M = [\underline{f}^1, \underline{f}^2, \dots, \underline{f}^i, \dots, \underline{f}^M]$$

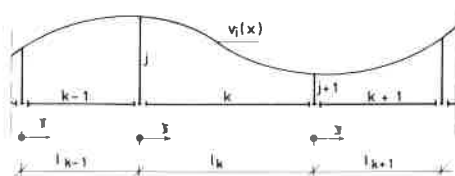
Edellä esitettyä menettelyä sovelletaan matriiseihin \underline{X} ja $\delta \underline{X}$, jotka on määritelty yhtälöissä (9) ja (10). Nämä sisältävät kahdeksan toisistaan riippumattonta rinnakkaista funktiota, joista eräät on saatu muista derivoimalla, mutta niiden matemaattinen käsittely suoritetaan erillisenä.

Muodonmuutosenergian lauseke k:n:lle elementille voidaan kaavan (17) mukaan esittää muodossa

$$\delta U_s = \frac{E l_k}{1 - \nu^2} \cdot \delta \underline{v}_k^M \cdot \underline{D}_k^M \cdot \underline{B}^M \cdot \left(\int_0^1 (\underline{f}^M \cdot K_k(m, n) \cdot \underline{f}^M)^T d\xi \right) \underline{B}^M \cdot \underline{D}_k^M \cdot \underline{v}_k^M \quad (37)$$

$$(m, n = 1, \dots, M)$$

Vastaavasti ulkoisen työn lauseke on kaavan (24) mukaan



$$\delta W = \delta \underline{v}_k^M \cdot \underline{D}_k^M \cdot \underline{B}^M \cdot l_k \cdot (K_{1k}(m) \cdot \int_{\xi_1}^{\xi_2} \underline{f}^M d\xi + K_{2k}(m) \cdot \frac{1}{l_k} \cdot \underline{f}^M(\xi_1)) \quad (38)$$

$$(m = 1, \dots, M)$$

Kuva 7. Sauvan jako elementteihin.

missä

$$\xi_1 = \frac{1}{l_k} \cdot l_1$$

$$\xi_2 = \frac{1}{l_k} \cdot l_2$$

Integraalilausekkeiden laskeminen ylläolevissa yhtälöissä (37) ja (38) palautuu määritelmän (28) mukaan eri asteisten polynomifunktioiden integrointiin.

Yhtälöryhmän kokoaminen ja ratkaiseminen

Kahden peräkkäisen elementin yhteensopivuutta kuvaavat geometriset jatkuvuusehdot solmupisteessä ovat kuvan 7 merkinnöin

$$\begin{aligned} v_k(x_k) &= v_{k+1}(x_k) \\ v'_k(x_k) &= v'_{k+1}(x_k) \end{aligned} \quad (39)$$

Jotta näitä yhteensopivuusehtoja voitaisiin suoraan soveltaa, jäykkyysmatriisin termit ryhmitellään siten, että elementin kummankin pään siirtymäkomponentit tulevat eri lohkoihin. Tällöin tuntemattomien solmupisteparametrien kertoimet ovat suoraan laskettavissa yhteen elementtien välisessä solmupisteessä.

Koko rakenteen ratkaisemiseksi kootaan yhtälöryhmä, jonka kerroinmatriisi on symmetrinen ja nauhamainen, mikä pienentää ratkaisemiseen tarvittavaa tietokoneen muistikapasiteettia.

Lämpötilan ja kutistumisen aiheuttama kuormitus

Otaksutaan rakenteen lämpötilanmuutoksen olevan $t(x,s)$. Jos kaikkien siirtymien tapahtuminen on estetty, rakenteessa vallitsee jännitystila

$$\sigma_x(t) = -E\alpha_t \cdot t(x,s) \quad (40)$$

missä α_t on materiaalin pituuden lämpötilakerroin.

Jännitysten aiheuttamat rakenteen energiatilan muutokset saadaan sijoittamalla lauseke (40) ja virtuaalisen muodonmuutoksen lauseke

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} \delta u_x = \underline{u}_{u_x}^T \cdot \frac{\partial}{\partial x} \delta \underline{X} \quad (41)$$

muodonmuutosenergian lausekkeeseen (14), jolloin saadaan

$$\delta U_s(t) = \int_V \delta \epsilon_x \cdot \sigma_x^T dv = - \int_V E\alpha_t \cdot t(x,s) \underline{u}_{u_x}^T \cdot \frac{\partial}{\partial x} \delta \underline{X} dv \quad (42)$$

Saatu integraali jaetaan osiin

$$\delta U_s(t) = -E\alpha_t \cdot \int_{l_1}^{l_2} \left(\int_A t(x,s) \cdot \underline{u}_{u_x}^T da \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \delta \underline{X} dx \quad (43)$$

ja merkitään

$$\underline{K}^{(t)} = \int_A t(x,s) \cdot \underline{u}_{u_x}^T da \quad (44)$$

Tällöin saadaan

$$\delta U_s^{(t)} = - E \alpha_t \cdot \int_{l_1}^{l_2} K(t) \cdot \frac{\partial \delta X}{\partial x} dx \quad (45)$$

joka voidaan edelleen esittää muodossa

$$\delta U_s^{(t)} = - E \alpha_t \cdot \delta v_k^M \cdot D_k^M \cdot \Theta^M \cdot \left(\int_{\xi_1}^{\xi_2} K(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} f^M \cdot d\xi \right) \quad (46)$$

Täten on muodostettu keinotekoinen kuormitusvektori, jota vastaava ratkaisu saadaan virtuaalisten siirtymien periaatteen mukaisesta yhtälöstä

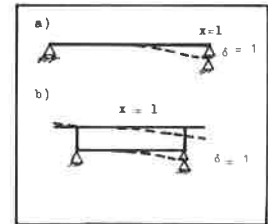
$$\delta U_s + \delta U_s^{(t)} = 0 \quad (47)$$

Jos kuormituksena on rakennusaineen kutistuminen kuormitusvektorin kokoaamisessa menetellään aivan kuin edellä. Yhtälö (40) korvataan tällöin jännityksellä

$$\sigma_x^{(\epsilon)} = E \cdot \epsilon_s \quad (48)$$

missä ϵ_s on suhteellinen kutistuma.

Ulkoisten reunaehtojen tapaan voidaan ottaa huomioon tukien yksikköpainumat lisäämällä kuormitusvektoriin yhtä suuri luku sen termin kohdalle, jolle halutaan yksikön suuruinen arvo. Mahdollisiksi kuormitustapauksiksi on valittu kuvan 8 esittämät tapaukset.



Kuva 8 Painumakuormat

Reunaehtojen määrittäminen

Yhtälön (1) siirtymäfunktiot $F_1^{(i)}(s)$ on määritelty siten, että ne kuvaavat poikkileikkauksen erilaisia liikkeitä. Reunaehtojen antaminen on yksinkertaista, jos poikkileikkauksen liike johonkin tiettyyn suuntaan on estetty tai rajoitettu. Ohjelmoinnissa eliminoidaan tällainen suure lisäämällä kyseisen termin kohdalle jäykkymatriisiin lävistäjälle suuri luku (esim. 10^{30}) ja "nollaamalla" muuten vastaava pysty- ja vaakarivi. Lisäksi

voidaan ottaa huomioon eri funktioita $F_1^{(i)}(s)$ yhdistelemällä saatavien siirtymätilojen reunaehtoja. Kuvassa 9 on esitetty eri reunaehtotyypit sekä niitä selventävät symbolit.

Yhdistettyjen reunaehtojen tapauksessa suoritetaan muuttujan vaihdos jäykkymatriisin rivejä ja sarakkeita vakiolla kertomalla ja laskemalla yhteen siten, että reunaehto voidaan suoraan soveltaa edellä mainitulla tavalla.

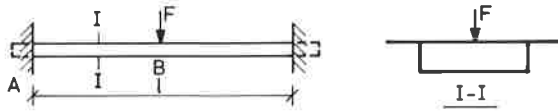
SYMBOLI		SYMBOLI	
1		5	KUIN 5 $\sigma_x = 0$
2		6	VAPAA PÄÄ $\delta_x = 0$
3		7	POIKKITAIS- JÄYKKISTE (x)
4		8	SYMMETRIA- TASO $\tau_{xs} = 0$

(x kotelon sallitaan kiertyä muotoaan muuttamatta)

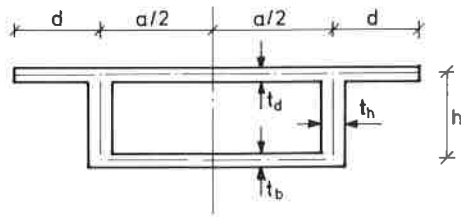
Kuva 9 Eri reunaehtotapaukset

ESIMERKKI 1

Esimerkkinä tarkastellaan päistään jäykästi kiinnitettyä kotelopalkkia. Kuormana on kansilaatan keskellä vaikuttava pistekuorma (Kuva 10). Poikkileikkauksen mitat ovat kuvan 11 mukaiset.



Kuva 10.
Esimerkkirakenne.



Kuva 11.
Palkin poikkileikkaus.

$$F = 1.0 \text{ MN}$$

$$l = 36.0 \text{ m}$$

$$E = 10\,000 \text{ MN/m}^2 \approx 10\,000 \text{ MPa}$$

$$\text{Poissonin vakio}$$

$$\nu = 0.167$$

Poikkileikkaussuureet Poikkileikkausmitat

$$\text{Pinta-ala } A = 4.410 \text{ m}^2$$

Jäyhyysmomentit

$$I_z = 2.753 \text{ m}^4$$

$$I_y = 25.693 \text{ m}^4$$

$$a = 5.40 \text{ m}$$

$$d = 1.80 \text{ ''}$$

$$h = 1.80 \text{ ''}$$

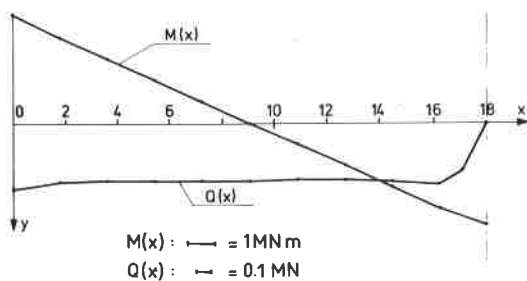
$$t_d = 0.25 \text{ ''}$$

$$t_h = 0.30 \text{ ''}$$

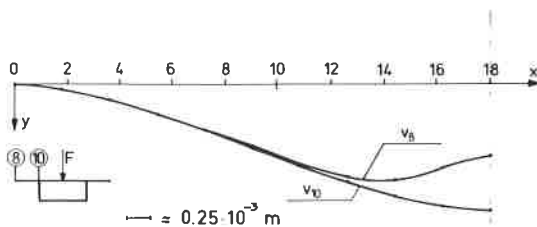
$$t_b = 0.20 \text{ ''}$$

Esimerkkilaskussa palkki jaetaan 20:een elementtiin ($l = 1.8 \text{ m}$).

Kuvassa 12 on esitetty palkin taivutusmomentti- ja leikkausvoimapinnat ja kuvassa 13 ulokkeen pään (8) ja kotelon nurkkapisteen (10) taipumaviivat.



Kuva 12.
Palkin taivutusmomentti ja leikkausvoimapinnat.



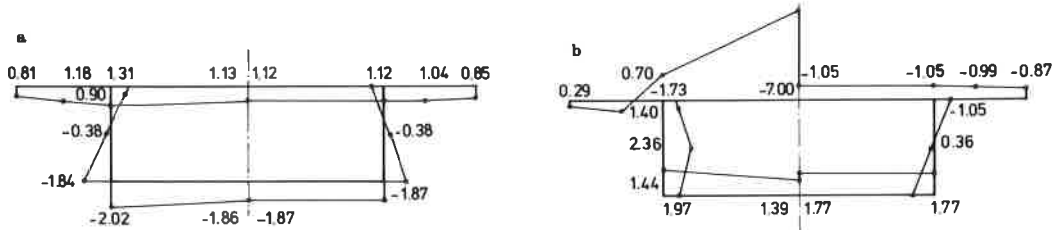
Kuva 13.
Taipumaviivat.

Palkin keskipisteen taipuma lasketaan palkkiteorian mukaan ottaen huomioon leikkausmuodonmuutosten osuus taipumiin. Oheisen poikkileikkauksen siirtymäkerroin ζ on noin 3.40. Keskipisteen taipumaksi tulee

$$V_B = \frac{F1^3}{192EJ} + \zeta \cdot \frac{F1}{4GA} = (0.882 + 0.170) \cdot 10^{-3} = 1.052 \cdot 10^{-3} \text{ (m)},$$

joka on sama kuin tietokone-laskelmilla saatu.

Kuvissa 14 a) ja b) on esitetty aksiaalinen jännitysjakautuma tuella ($x = 0 \text{ m}$) ja palkin keskellä ($x = 18 \text{ m}$). Kuvissa on keskiviivan vasemmalla puolella esitetty profiilin ulkopinnan ja oikealla puolella profiilin keskipinnan jännitykset. Laatu on MN/m^2 .



Kuva 14 a) ja b) Normaalijännitys σ_x tuella ja palkin keskellä

Tulosten vertaamiseksi lasketaan yksinkertaisen palkkiteorian mukaiset aksiaalisten jännitysten arvot profiilin keskipinnalla.

Painopisteen etäisyys palkin yläreunasta e_y määritetään yhtälöstä

$$e_y = \frac{at_b h + h^2 t_h}{at_b + 2ht_h + (a+2d) \cdot t_d} = 0.661 \text{ m}$$

Taivutusmomenteille saadaan pisteissä A ja B arvot

$$M_A = -M_B = -\frac{F1}{8} = -4.5 \text{ MNm}$$

ja jännityksille

$$\sigma_{yp} = \pm \frac{4.5}{2.753} \cdot 0.661 = \pm 1.08 \text{ MN/m}^2 \quad (\text{yp} = \text{yläpinta})$$

$$\sigma_{ap} = \mp \frac{4.5}{2.753} \cdot 1.139 = \mp 1.86 \text{ MN/m}^2 \quad (\text{ap} = \text{alapinta})$$

Ylemmät merkit kuuluvat leikkauksen $x=0 \text{ m}$ ja alemmat $x=18 \text{ m}$ jännityksiin.

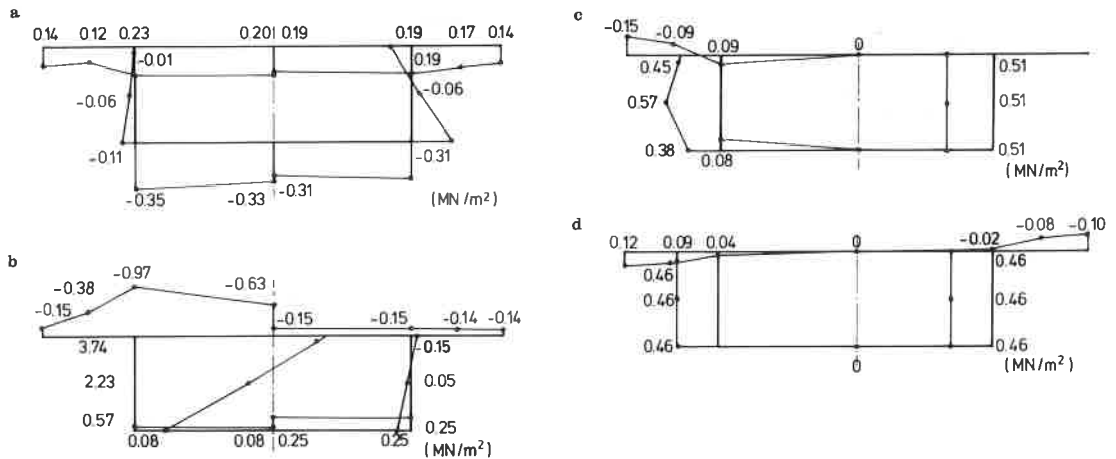
Saadut tulokset vastaavat hyvin tietokoneohjelmalla laskettuja.

Kuvissa 15 a) ja b) on esitetty normaalijännitys σ_s tuella ja leikkauksessa $x=16.2 \text{ m}$; kuvissa 15 c) ja d) leikkausjännitys τ_{sx} tuella ja palkin neljännespisteissä.

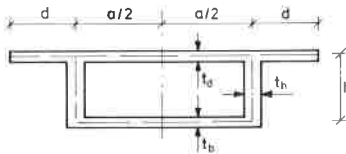
ESIMERKKI 2

Tarkastellaan kolmiaukkoista jatkuvaa betonista kotelopalkkisiltaa, jonka jännevälit ovat $40 + 50 + 40 \text{ m}$ ja hyödyllinen leveys 13.0 m . Sillan poikkileikkaus on kuvan 16 mukainen.

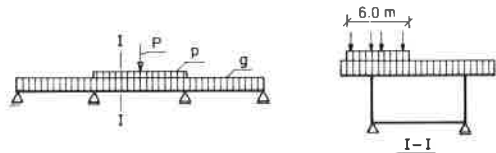
Hyötykuorma vaikuttaa esimerkissä ainoastaan keskikentässä, sivusuunnassa mahdollisimman epäkeskeisesti sijoitettuna. Kuorma on PKM 71 (Pohjoismaiset kuormitusmääräykset 1971) kuormakaavio 1:n mukainen.



Kuva 15 a) ja b) Normaalijännitys σ_s tuella ja leikkauksessa $x = 16,2$ m
 c) ja d) Leikkauksjännitys τ_{sx} tuella ja leikkauksessa $x = 9,0$ m



Kuva 16 Sillan poikkileikkaus



Kuva 17 Kuormituskaavio

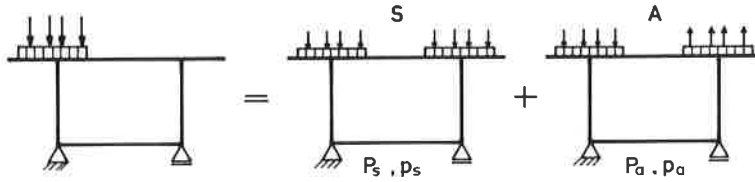
Poikkileikkaus-suureet	Poikkileikkaus-mitat	Kuormitusten intensiteetit	Materiaalin Poissonin kimmokerroin vakio
pinta-ala: $A = 10.580 \text{ m}^2$	$a = 7.20 \text{ m}$ $d = 3.30 \text{ ''}$ $h = 2.50 \text{ ''}$	$p = 4 \cdot 0.265 \text{ MN}$ $= 1.06 \text{ MN}$	$E = 36\,000 \text{ MPa}$ $\nu = 0,15$
Jäyhyysmomentit: $I_z = 10.282 \text{ m}^4$ $I_y = 137.139 \text{ m}^4$	$t_d = 0.30 \text{ ''}$ $t_h = 1.00 \text{ ''}$ $t_b = 0.20 \text{ ''}$	$p = 0.03 \text{ MN/m}^2$ $g = 0.0234 \text{ ''}$ $(\gamma_{\text{betoni}} = 0.025 \text{ MN/m}^3)$	$\approx 36\,000 \text{ MN/m}^2$

Hyötykuorma jaetaan kuvan 18 mukaan symmetriseen ja antisymmetriseen osaan. Kummatkin kuormitustapaukset lasketaan ja tulostetaan erikseen.

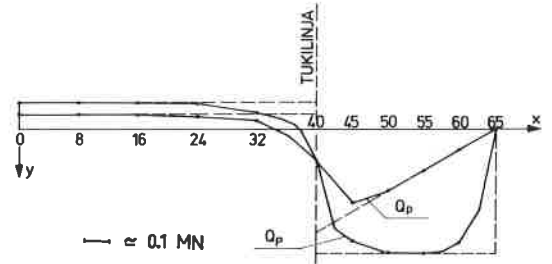
Esimerkkilaskussa siltapalkki jaetaan 20:een elementtiin, keskiaukko kymmeneen ($l=5,0$ m) ja reuna-aukot viiteen ($l=8,0$ m). Tehtävä ratkaistaan kahdella tavalla, jättämällä poikkipinnan vinoutuminen huomioonottamatta (ts. jokaisen elementin päähän oletetaan asetetuksi täysin jäykkä poikittaisjäykiste) ja ottamalla vinoutuminen huomioon.

Kuvissa 19 ja 20 on esitetty taivutusmomentti- ja leikkausvoimapinnat eri kuormituksille. Leikkausvoiman kuvaajissa on havaittavissa epäjatkuvuuskohdissa paikallista epätarkkuutta, jonka osuus pienenee elementtijakoa tihentäessä. Leikkausvoiman kuvaajien oikea muoto on merkitty kuviin katkoviivalla.

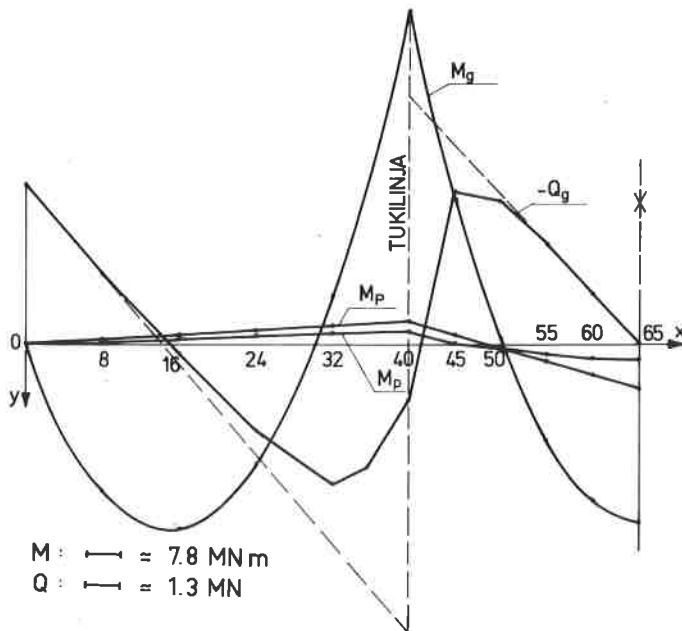
Kuvissa 21 ja 22 on esitetty symmetrisistä kuormituksista aiheutuvien aksiaalisten jännitysten kuvaajat keskiaukon keskellä ($x = 65$ m) ja välituella



Kuva 18. Hyötykuorman jakaminen.



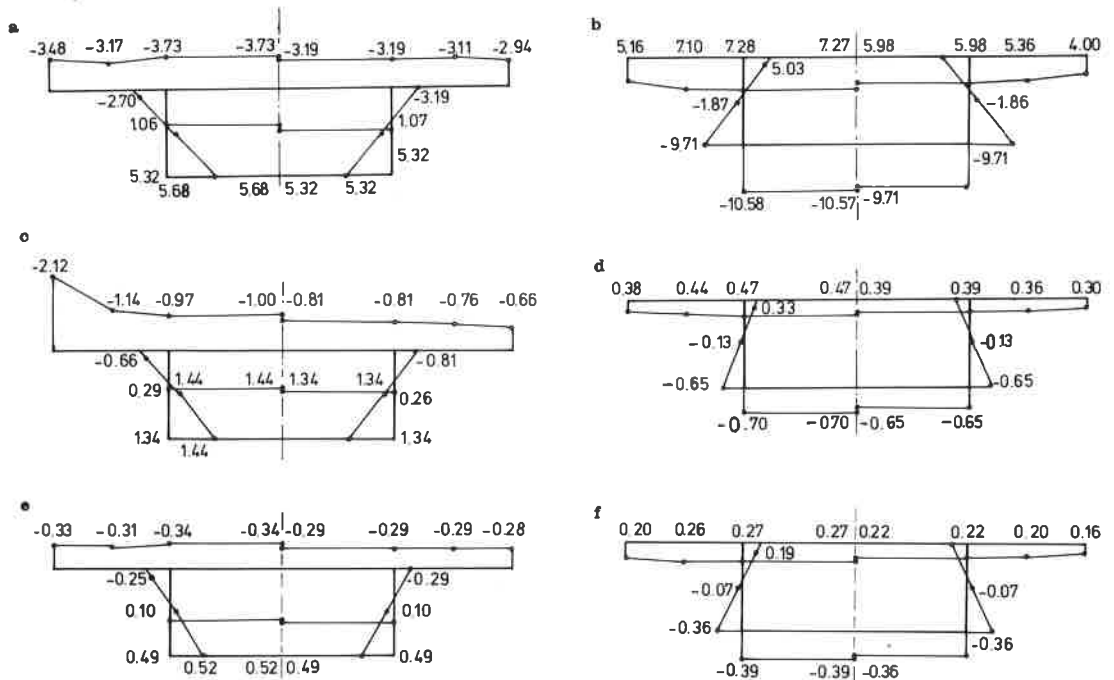
Kuva 20. Palkin leikkausvoimapinnat.



Kuva 19. Palkin taivutusmomenttipinnat.

($x = 40$ m). Poikkileikkauksen keskiviivan vasemmalla puolella on esitetty lelyn ulkoreunan ja oikealla keskipinnan jännitykset. Laatuna on MN/m^2 .

Symmetristen kuormitustapausten aiheuttamiin jännitystiloihin poikittaisjäykisteet eivät aiheuta muutoksia. Antimetristen kuormien aiheuttamat jännitykset on esitetty kuvassa 22.



Kuva 21 a) ja b) Kuormana omapaino g leikkaus $x = 65$ m ja $x = 40$ m
 c) ja d) Kuormana akselikuorma P_s leikkaus $x = 65$ m ja $x = 40$ m
 e) ja f) Kuormana liikennekuorma P_s leikkaus $x = 65$ m ja $x = 40$ m

Tulosten vertailemiseksi lasketaan suurimmat aksiaaliset jännitykset yksinkertaisen palkkiteorian mukaan. Painopisteen etäisyydeksi poikki suunnan yläreunasta saadaan

$$e_y = 1.104 \text{ m}$$

Tukimomentit ovat:

$$M_g = -64.55 \text{ MNm}$$

$$M_p = -2.40 \text{ "}$$

$$M_{ps} = -4.26 \text{ "}$$

ja eri kuormitustapausten aiheuttamat jännitykset

- omapaino

$$\sigma_{yp} = \frac{64.55}{10.282} \cdot 1.104 = 6.93 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{ap} = -\frac{64.55}{10.282} \cdot 1.646 = -10.33 \text{ MN/m}^2$$

- liikennekuorma

$$\sigma_{yp} = 0.26 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{ap} = -0.38 \text{ MN/m}^2$$

- akselikuorma

$$\sigma_{yp} = 0.46 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{ap} = -0.68 \text{ MN/m}^2$$

Kenttämomentit ovat:

$$M_g = 34.99 \text{ MNm}$$

$$M_p = 3.20 \text{ "}$$

$$M_p = 8.85 \text{ "}$$

ja vastaavat jännitykset

- omapaino

$$\sigma_{yp} = -3.76 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{ap} = 5.60 \text{ MN/m}^2$$

- liikennekuorma

$$\sigma_{yp} = -0.34 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{ap} = 0.51 \text{ MN/m}^2$$

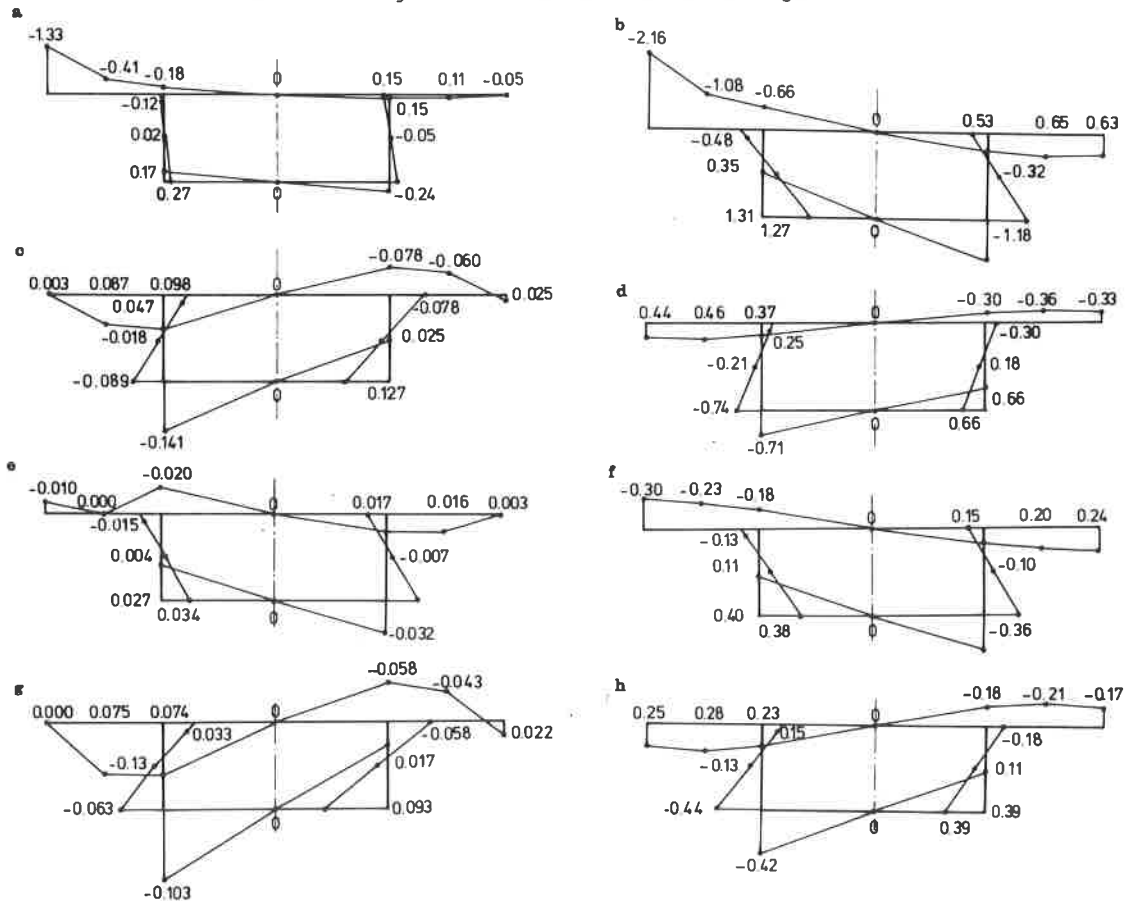
- akselikuorma

$$\sigma_{yp} = -0.95 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{ap} = 1.42 \text{ MN/m}^2$$

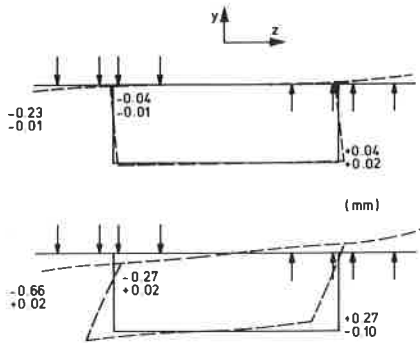
(yp = yläpinta, ap = alapinta)

Saadut tulokset vastaavat hyvin tietokoneella laskettuja.



Kuva 22. a) ja b) Kuormana akselikuorma P_a leikkaus $x = 65 \text{ m}$
 c) ja d) Kuormana akselikuorma P_a leikkaus $x = 40 \text{ m}$
 e) ja f) Kuormana liikennekuorma p_a leikkaus $x = 65 \text{ m}$
 g) ja h) Kuormana liikennekuorma p_a leikkaus $x = 40 \text{ m}$
 (Kuvassa vasemmalla puolella jäykän poikkileikkauksen ja oikealla vinoutuvan jännitykset).

Kuvassa 23 havainnollistetaan poikkileikkauksen vinoutumisen vaikutusta kotelon siirtymätilaan. Mittakaava vaakasuunnassa on kymmenkertainen pystysuoraan nähden.



Kuva 23. Poikkileikkauksen siirtymätilat.

Insinöörijärjestöjen koulutuskeskuksen (INSKO) järjestämällä Sillanrakennuspäivillä /6/ laskettiin sama esimerkki käyttäen kotelosauvan yleistä vääntöteoriaa sekä ns. levykuoriteoriaa, jossa koteloraakenteen nurkkapisteissä levyt oletetaan liitetyksi toisiinsa nivelellisesti.

Taulukossa 1 on laskuesimerkkien tulokset. Puhtaan taivutuksen ja väännön osuus on esitetty erikseen. Lisäksi on laskettu kokonaiskuormien jännitykset sekä väännön prosentuaalinen osuus. Taulukossa 2 ovat vastaavat tulokset INSKO:n kurssilla em. menetelmillä lasketuista esimerkeistä.

Tuloksista voi havaita varsin selvästi jännitysten intensiteeteissä seuraavanlaisen järjestyksen suuremmasta pienempään.

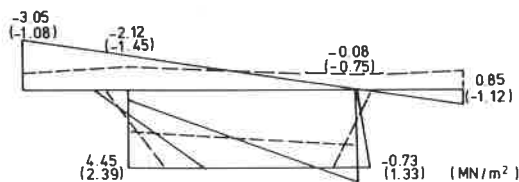
- Tietokonelaskut (jäykkä poikkileikkaus)
- Kotelosauvan yleinen vääntöteoria
- Tietokonelaskut (vinoutuva poikkileikkaus)
- Levykuoriteoria

		T		A	
		[Diagram]		[Diagram]	
		[Diagram]		[Diagram]	
TAIVUTUS	σ	7.283	-10.576	-3.725	5.684
	ρ	0.268	-0.392	-0.339	0.520
	τ	0.470	-0.696	-0.970	1.445
	κ	8.021	-11.664	-5.034	7.649
VÄÄNTÖ (JÄYKKÄ POIKKILEIKKAUS)	σ	-	-	-	-
	ρ	0.074	-0.103	-0.020	0.034
	τ	0.098	-0.141	-0.183	0.270
	κ	0.172	-0.244	-0.203	0.304
YHTEENSÄ	σ	7.283	-10.576	-3.725	5.684
	ρ	0.342	-0.495	-0.359	0.554
	τ	0.568	-0.837	-1.153	1.715
	κ	8.193	-11.908	-5.237	7.953
VÄÄNTÖ (VINOUTUVA POIKKILEIKKAUS)	σ	-	-	-	-
	ρ	0.226	-0.422	-0.181	0.378
	τ	0.367	-0.709	-0.656	1.267
	κ	0.593	-1.131	-0.837	1.645
YHTEENSÄ	σ	7.283	-10.576	-3.725	5.684
	ρ	0.494	-0.814	-0.520	0.898
	τ	0.837	-1.405	-1.626	2.712
	κ	8.614	-12.795	-5.871	9.294
VÄÄNNÖN ANTAMA LISA		2.10%	2.05%	3.88%	3.82%
		0.63%	8.34%	14.26%	17.70%

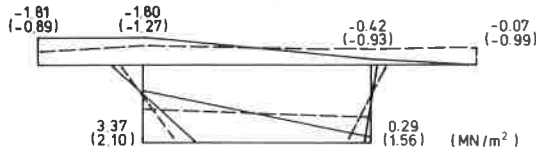
Taulukko 1. Esimerkkien aksiaali-jännitykset (Laatu MN/m²)

		T		A	
		[Diagram]		[Diagram]	
		[Diagram]		[Diagram]	
TAIVUTUS	σ	6.99	-10.79	-3.64	5.62
	ρ	0.26	-0.40	-0.34	0.52
	τ	0.46	-0.70	-0.94	1.45
	κ	7.71	-11.89	-4.92	7.59
VÄÄNTÖ (KOTELOSAUVAN YLEINEN VÄÄNTÖTEORIA)	σ	-	-	-	-
	ρ	0.11	-0.15	-0.04	0.05
	τ	0.14	-0.19	-0.38	0.52
	κ	0.25	-0.34	-0.42	0.57
YHTEENSÄ	σ	6.99	-10.79	-3.64	5.62
	ρ	0.37	-0.55	-0.38	0.57
	τ	0.60	-0.89	-1.32	1.97
	κ	7.96	-12.23	-5.34	8.16
VÄÄNTÖ (LEVYKUORITEORIA)	σ	-	-	-	-
	ρ	0.27	-0.57	-0.32	0.72
	τ	0.40	-0.96	-0.72	1.90
	κ	0.67	-1.53	-1.04	2.62
YHTEENSÄ	σ	6.99	-10.79	-3.64	5.62
	ρ	0.53	-0.97	-0.68	1.24
	τ	0.86	-1.66	-1.66	3.35
	κ	8.38	-13.42	-5.98	10.21
VÄÄNNÖN ANTAMA LISA		3.1%	2.8%	7.9%	7.0%
		8.0%	11.4%	17.4%	25.7%

Taulukko 2. Eri teorioilla lasketut aksiaali-jännitykset.



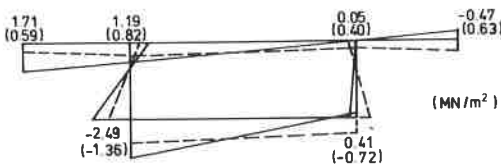
Kuva 24. Eri teorioilla välituella lasketut jännitykset.



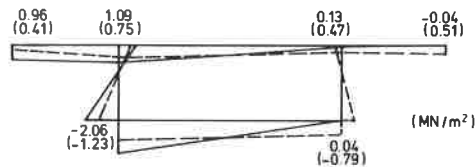
Kuva 25. Tietokonelaskelmien aksiaali-jännitykset välituella.

Kuvissa 24, ..., 27 verrataan edelleen samojen teorioiden tuloksia siten, että kuvassa 24 on esitetty hyötykuormasta tuelle aiheutuvat aksiaaliset jännitykset. Yhtenäisellä viivalla ja ilman sulkuja olevilla lukuarvoilla on esitetty levykuoriteorian avulla lasketut keskipinnan jännitykset. Katkoviiva ja suluissa olevat arvot ovat vastaavat kotelosauvan yleisen vääntöteorian tulokset.

Kuvassa 25 on samat jännitykset. Siinä yhtenäinen viiva ja ilman sulkuja olevat lukuarvot kuvaavat esimerkissä laskettuja vinoutuvan poikkileikkauksen jännityksiä ja katkoviiva ja suluissa olevat lukuarvot jäykän poikkileikkauksen aksiaali-jännityksiä. Kuvissa 26 ja 27 on vastaavat jännitykset keskiaukon keskellä.



Kuva 26. Eri teorioilla keskikentässä lasketut jännitykset.



Kuva 27. Tietokonelaskelmien aksiaali-jännitykset keskikentässä.

LOPPUPÄÄTELMÄT

Tulosten vertailulla voidaan todeta, että klassillinen taivutusteoria, jossa poikkipinnan oletetaan säilyttävän muotonsa ja pysyvän tasona, kuvaa riittävän tarkasti symmetrisesti kuormitetun palkin jännitystilaa. Sen sijaan vääntökuormitetun rakenteen suurimmat todelliset normaalijännitykset ovat jäykistetyllä palkilla korkeintaan 6 % ja jäykistämättömällä jopa 20 % suurempia. Kotelosauvan yleisellä vääntöteorialla lasketut jännitykset ovat taas noin 5 % suurempia kuin jäykistetyn ja korkeintaan 10 % pienempiä kuin jäykistämättömän palkin todelliset jännitykset. Teoria ei ota huomioon poikkipinnan vinoutumista ja sen soveltaminen on työlästä ja hankalaa. Levykuoriteoria ei sellaisenaan sovellu käytännön laskutyöhön. Jännitykset olivat jopa 12 % suuremmat kuin jäykistämättömällä palkilla lasketut.

Artikkelissa esitetty menetelmä todettiin varsin käyttö- ja kehittämiskelpoiseksi. Teoriaa kehitettäessä olisi tarkoituksenmukaista tutkia erilaisten

poikkitaisten siirtymäfunktioiden osuutta ratkaisuun ja näin pyrkiä minimoimaan tarvittavien funktioiden määrä. Kehittämismahdollisuuksia olisivat edelleen sovellutukset eri poikkileikkaustyypeille sekä teorian laajentaminen kaarevaan ja vinotukiseen palkkiin.

KÄYTETYT MERKINNÄT

e_y	painopisteen etäisyys poikkileikkauksen yläreunasta
\underline{f}	muuttujavektori
i, j, k, m, n	indeksejä
l	elementin aksiaalinen pituus
l_1, l_2, s_1, s_2	ulkoisen kuorman vaikutusalueen reunakoordinaatteja
n, s	levyjen lokaalit koordinaatit
P_{sn}, P_{ss}, P_{sx}	kuormakomponentteja
P_{xn}, P_{xs}, P_{xx}	
q_n, q_s, q_x	
$t(x, s)$	lämpötilajakautuma
u, u_n, u_s, u_x	siirtymäkomponentteja
u_u, u_v, u_w, v_v	siirtymäfunktioita
$\underline{u}_{u_n}, \underline{u}_{u_s}, \underline{u}_{u_x}$	siirtymä- ja muodonmuutosfunktioita
$\underline{u}_{\epsilon_s}, \underline{u}_{\epsilon_x}, \underline{u}_{\gamma_{xs}}$	
$\underline{v}, \underline{\tilde{v}}$	parametrimatriiseja
x	sauvan akselin suuntainen koordinaatti
A	poikkileikkauspinta-ala
\underline{B}	kerroinmatriisi
\underline{D}	muuttujanvaihdosmatriisi
E	kimmokerroin
F_1, F_2	funktioita
F_n, F_s, F_x	kuormakomponentteja
P_n, P_s, P_x	
T_n, T_s, T_x	
G	liukukerroin
\underline{H}	interpolaatiopolynomimatriisi
$H(\xi)$	interpolaatiopolynomi
I	poikkileikkauksen levyjen lukumäärä
I_y, I_z	poikkileikkauksen jäyhyysmomentit
K	poikkileikkauksen nurkkapisteiden lukumäärä
$\underline{K}, \underline{K}_1, \underline{K}_2, \underline{K}^{(t)}$	kerroinmatriiseja
U, V, W	siirtymäfunktioita
$\delta U_s, \delta U_s^{(t)}$	sisäisen energian ja työn merkintöjä
V	elementin tilavuus
δW	ulkoinen työ

α_t	pituuden lämpökerroin
δ	variaatio-merkintä
$\epsilon_n, \epsilon_s, \epsilon_x$	muodonmuutoskomponentit
$\gamma_{nx}, \gamma_{sn}, \gamma_{xs}$	liukumakomponentit
ξ	suhteellinen muuttuja
ξ_1, ξ_2	ulkoisen kuorman vaikutusalueen reunakoordinaatteja
ν	suppeumaluku l. Poissonin vakio
σ_s, σ_x	normaalijännityksiä
τ_{xs}	leikkausjännitys
ζ	poikkileikkauksen siirtymäkerroin
Ω	ulkoisen kuorman vaikutusala

LÄHDEKIRJALLISUUS

- [1] Vlasov, V.S., Dünnewandige elastische Stäbe Bd 1 und Bd 2. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964/1965.
- [2] Kollbrunner, C.F., Hajdin, N., Dünnewandige Stäbe Bd 1, Bd 2 Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1972/1975.
- [3] Böge, G., Roik, K., Finites Verfahren zur Berechnung prismatischer Flächentragwerke unter Berücksichtigung von Schubverformungen und Änderung der Querschnittsgestalt Die Bautechnik (1973) Heft 7.
- [4] Schmackpfeffer: Ermittlung der mitwirkende Breite unter Berücksichtigung von Längskräften, der Querträgerweichheit und in Längsrichtung veränderlicher Querschnitte. Dissertation Berlin 1972.
- [5] Sedlacek, G., Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorgangs für prismatische Stäbe mit dünnwandigen Querschnitt unter Berücksichtigung der Profilverformung Fortschr. - Ver VDI-Z Reihe 4 Nr 8 1968.
- [6] Seire, H., Jutila, A., Laattapalkki- ja kotelorakenteet Sovellutusesimerkit INSKO:n sillanrakennuskurssi 1977.
- [7] Paavola, J., Kotelopalkin jännitysanalyysi. Diplomityö HTKK 1977.

Juha Paavola, dipl.ins., Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi
martti Mikkola, prof., Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi