

RUUVIVIIVAN MUOTOINEN AVARUUSSAUVA

Pekka Kanerva ja Olli-Pekka Nordlund

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 10
No. 1 1977 s. 21...37.

YHTEENVETO: Artikkelissa käsitellään ruuviviivan muotoista avaruussauvaa. Ruuviviivan geometrian esittelyn jälkeen johdetaan ruuviviivan muotoisen sauva-alkion tasapainoyhtälöt, joiden erikoistapauksina on esitetty ympyräkaaren ja ympyrä rengassauvan tasapainoyhtälöt. Sovellutusesimerkkeinä on käsitelty ruuviviivan muotoisen kierreportaan kannatinpalkin laskemista, sylinterikierrejousta ja suljetun ympyrä rengassauvan vääntöä.

JOHDANTO

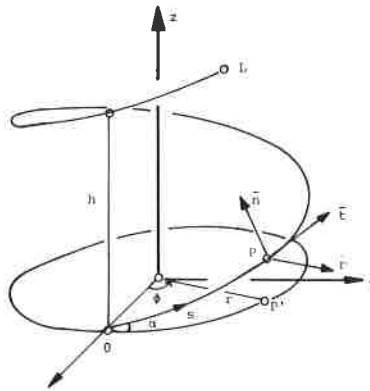
Rakennesuunnittelija joutuu tavallisesti tekemisiin vain suorien sauvojen ja niistä koostuvien rakenteiden kanssa. Kaarevien avaruussauvojen käsittelyyn siirryttäessä joudutaan ottamaan huomioon useampia voimasuureita ja niiden välisiä riippuvuuksia sekä eri suunnille tapahtuvia siirtymiä, joten avaruussauvojen käsittely on olennaisesti vaikeampaa. Erikoisesti on vältettävä suorien sauvojen yhtälöiden yleistämistä kaarevia sauvoja koskiviksi. Esimerkkinä tällaisesta kaarevasta avaruussauvasta on tässä artikkelissa käsitelty ruuviviivan muotoista poikki pinnaltaan käyritysmätöntä avaruussauvaa, jonka käyttösovellutuksia ovat mm. kierrejousi, kierreportaan kannatinpalkki ja jonka erikoistapauksena saadaan ympyränkaaren muotoinen tasosauva, jota esiintyy kaarevissa silloissa.

Kaarevia avaruussauvoja voitaisiin analysoida korvaamalla jatkuvasti kaareva sauva lyhyistä suorista osista koostuvalla murtoviivalla ja käyttämällä kehärakenteiden valmiita ATK-ohjelmia. Tässä on kuitenkin havainnollisuuden vuoksi haluttu johtaa kaarevan sauvan yhtälöt mahdollisimman pitkälle suljetussa muodossa, jotta yhtälöiden perusteella voitaisiin tehdä johtopäätöksiä kaarevien avaruussauvojen ominaisuuksista.

RUUVIVIIVAN MUOTOINEN SAUVA

Ruuviviivan geometria

Kuvan 1 mukaisen ruuviviivan yhtälö on



Kuva 1 Ruuviviivan muotoinen sauva

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned} \quad (1)$$

$$z = \frac{h}{2\pi} \phi$$

jossa h on ruuviviivan nousu kierrosta kohti, r säde ja ϕ kulmakoordinaatti.

Asetetaan pisteeseen $P(\phi)$ paikallinen koordinaatisto, jonka koordinaattiakselien suunnat valitaan kuvan 1 mukaisesti

\bar{t} ruuviviivan tangentin suuntaan

\bar{r} ruuviviivan säteen suuntaan

$$\bar{n} = \bar{r} \times \bar{t}$$

Oletetaan $P(\phi)$:n määräämässä poikkileikkauksessa pääjäyhyssuunnat \bar{r} :n ja \bar{n} :n suuntaisiksi.

Ruuviviivan nousukulma on

$$\alpha = \arctan \frac{h}{2\pi r} \quad (2)$$

ja pituus välillä (0,P)

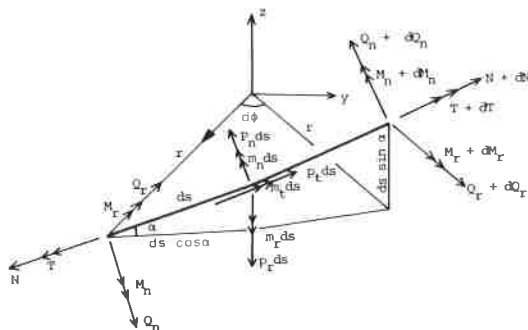
$$s(\phi) = \phi \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} = \frac{\phi}{\phi_l} s_l \quad (3)$$

jossa ϕ_l on pään L kulmakoordinaatti ja ruuviviivan koko pituus

$$s_l = \frac{r}{\cos \alpha} \phi_l$$

Sauva-alkion tasapainoyhtälöt

Tasapainoyhtälöt johdetaan kuvan 2 avulla. Tarkastellaan ds :n pituisen sauva-alkion tasapainotilaa. Ottamalla huomioon, että pienen kulman trigonometriset funktiot



$$\cos d\phi \approx 1$$

$$\sin d\phi \approx d\phi$$

ja kuvan 2 perusteella

$$ds = \frac{r}{\cos \alpha} d\phi$$

saadaan sauva-alkion tasapainoyhtälöiksi

Kuva 2 ds :n pituiseen sauva-alkioon vaikuttavat voimat

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{ds} + Q_r \frac{\cos^2 \alpha}{r} + p_t &= 0 \\
-N \frac{\cos^2 \alpha}{r} + \frac{dQ_r}{ds} + Q_n \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} + p_r &= 0 \\
-Q_r \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} + \frac{dQ_n}{ds} + p_n &= 0 \\
\frac{dT}{ds} + M_r \frac{\cos^2 \alpha}{r} + m_t &= 0 \\
-Q_n - T \frac{\cos^2 \alpha}{r} + \frac{dM_r}{ds} + M_n \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} + m_r &= 0 \\
-Q_r - M_r \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} + \frac{dM_n}{ds} + m_n &= 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Tasapainoyhtälöt ovat matriisimuodossa:

$$\begin{bmatrix}
\frac{d}{ds} - \frac{\cos^2 \alpha}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\cos^2 \alpha}{r} \frac{d}{ds} & \sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} \frac{d}{ds} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{d}{ds} - \frac{\cos^2 \alpha}{r} & 0 \\
0 & 0 & -1 & -\frac{\cos^2 \alpha}{r} \frac{d}{ds} & \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} \\
0 & -1 & 0 & 0 & \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} \frac{d}{ds}
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
N \\
Q_r \\
Q_n \\
T \\
M_r \\
M_n
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
p_t \\
p_r \\
p_n \\
m_t \\
m_r \\
m_n
\end{bmatrix}
= 0 \tag{5}$$

Diagonaalilla olevat derivaattaoperaattorit voidaan ottaa erilleen, jolloin saadaan 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä

$$\frac{1}{r} [A] \{F\} + \frac{d}{ds} \{F\} + \{B\} = 0 \tag{6}$$

jossa

$$A = \begin{bmatrix}
0 & -\frac{\cos^2 \alpha}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\cos^2 \alpha & 0 & \sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \alpha & 0 \\
0 & 0 & -r & -\cos^2 \alpha & 0 & \sin \alpha \cos \alpha \\
0 & -r & 0 & 0 & -\sin \alpha \cos \alpha & 0
\end{bmatrix}
F = \begin{bmatrix}
N \\
Q_r \\
Q_n \\
T \\
M_r \\
M_n
\end{bmatrix}
B = \begin{bmatrix}
p_t \\
p_r \\
p_n \\
m_t \\
m_r \\
m_n
\end{bmatrix}$$

Erikoistapauksina saadaan raja-arvotarkasteluilla ympyräkaaren, ympyrärenkaan sekä suoran palkin tasapainoyhtälöt.

Ympyräkaaren kuormitus otaksutaan xy-tason suuntaiseksi. Suorittamalla

raja-arvotarkastelut

$$\alpha = 0$$

$$M_r = 0$$

$$Q_n = 0$$

$$T = 0$$

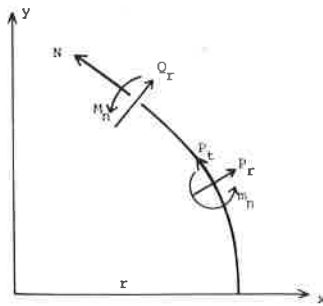
saadaan tasapainoyhtälöt

$$dN/ds + Q_r + p_t = 0$$

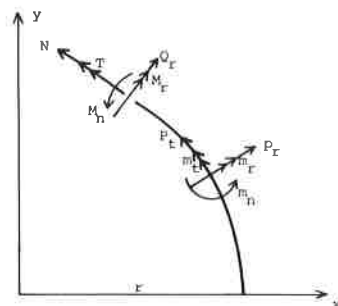
$$-N/r + dQ_r/ds + p_r = 0$$

$$-Q_r + dM_n/ds + m_n = 0$$

(7)



Kuva 3 Ympyräkaareessa vaikuttavien voimasuureiden positiiviset suunnat



Kuva 4 Ympyrärengassauvassa vaikuttavien voimasuureiden positiiviset suunnat

Asettamalla $\alpha = 0$ saadaan (5):stä ympyrärengassauvan tasapainoyhtälöiksi

$$dN/ds + Q_r/r + p_t = 0$$

$$-N/r + dQ_r/ds + p_r = 0$$

$$dQ_n/ds + p_n = 0$$

$$dT/ds + M_r/r + m_t = 0$$

$$-Q_n - T/r + dM_r/ds + m_r = 0$$

$$-Q_r + dM_n/ds + m_n = 0$$

(8)

Lopuksi voidaan todeta, että suoran sauvan tasapainoyhtälöt saadaan edellisestä sijoittamalla $r = \infty$, jolloin seuraa

$$dN/ds + p_t = 0$$

$$dQ_r/ds + p_r = 0$$

$$dQ_n/ds + p_n = 0$$

$$dT/ds + m_t = 0$$

$$-Q_n + dM_r/ds + m_r = 0$$

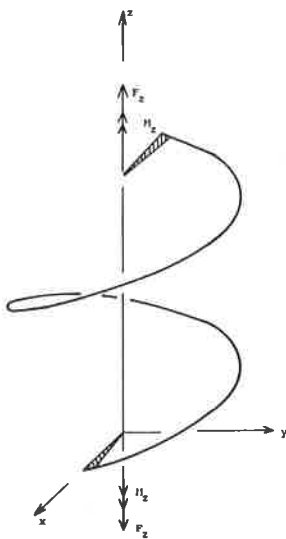
$$-Q_r + dM_n/ds + m_n = 0$$

(9)

Edellä saadut yhtälöt ovat samat kuin kirjallisuudessa yleisesti esitetyt /2/, /3/.

Eräitä keskisesti kuormitetun kierrejousen kuormitustapauksia

Kun kuormana on kuvassa 5 esitetty z-askelilla vaikuttava voima F , saadaan tasapainoyhtälöt



$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x &= 0 ; -Q_r = 0 \\
 \Sigma F_y &= 0 ; -N \cos \alpha + Q_n \sin \alpha = 0 \\
 \Sigma F_z &= 0 ; -N \sin \alpha - Q_n \cos \alpha + F = 0 \\
 \Sigma M_x &= 0 ; -M_r = 0 \\
 \Sigma M_y &= 0 ; -T \cos \alpha + M_n \sin \alpha + F r = 0 \\
 \Sigma M_z &= 0 ; -T \sin \alpha - M_n \cos \alpha = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

joista seuraa

$$\begin{aligned}
 N &= F \sin \alpha & T &= F r \cos \alpha \\
 Q_r &= 0 & M_r &= 0 \\
 Q_n &= F \cos \alpha & M_n &= -F r \sin \alpha
 \end{aligned}$$

Saatu tulos on sama kuin viitteessä /1/ luvussa 190. Sylinterikierrejousoi, s. 657 esitetty.

Toisena tapauksena tarkastellaan edelleen kuvassa 5 esitettyä z-akselin ympäri kiertävän

Kuva 5 Keskisen normaali-voiman ja momentin kuormittama kierrejousoi

momentin M_z aiheuttamia voimasuureita.

Tasapainoyhtälöt ovat

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x &= 0 ; -Q_r = 0 \\
 \Sigma F_y &= 0 ; -N \cos \alpha + Q_n \sin \alpha = 0 \\
 \Sigma F_z &= 0 ; -N \sin \alpha - Q_n \cos \alpha = 0 \\
 \Sigma M_x &= 0 ; -M_r = 0 \\
 \Sigma M_y &= 0 ; -T \cos \alpha + M_n \sin \alpha = 0 \\
 \Sigma M_z &= 0 ; -T \sin \alpha - M_n \cos \alpha + M_z = 0
 \end{aligned}$$

joista seuraa

$$\begin{aligned}
 N &= 0 & T &= M_z \sin \alpha \\
 Q_r &= 0 & M_r &= 0 \\
 Q_n &= 0 & M_n &= M_z \cos \alpha
 \end{aligned} \tag{11}$$

Tulos eroaa viitteessä /1/ (s.660) esitetystä normaali- ja leikkausvoiman osalta.

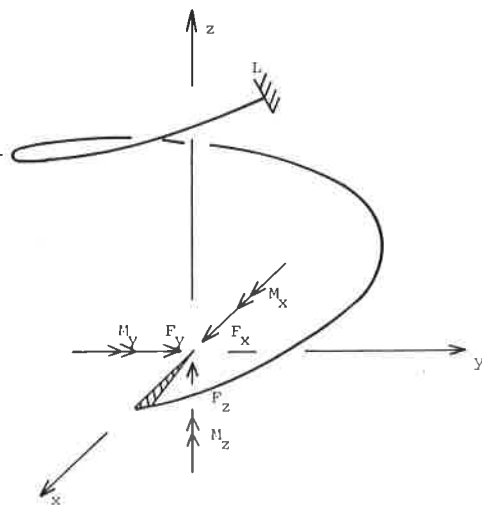
KIERREPORTAAN KANNATINPALKKI

Tarkastellaan molemmista päistään jäykästi kiinnitetyn kierreportaan kannatinpalkkia. Staattisesti määrättyksi perusmuodoksi valitaan kuvan 6 mukainen yläpäätästä jäykästi kiinnitetty ja alapäätästä vapaa sauva, jolloin tuntemattomia ovat vapautuksessa päässä vaikuttavat voimasuureet F_i . Alapään siirtymän yhtälöksi saadaan

$$[K]\{F\} + \{S\} = 0$$

jossa

$$K = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{16} \\ & \delta_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \text{sym} & & & \delta_{66} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_n \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \\ \delta_{40} \\ \delta_{50} \\ \delta_{60} \end{bmatrix}$$



Kuva 6 Molemmista päistään jäykästi kiinnitetyn kierreportaan kannatinpalkin staattisesti määrätty perusmuoto (12)

δ_{ij} on yksikkövoimasuureesta F_i aiheutunut siirtymä voimasuureen F_i suuntaan. Bettin säännön mukaan $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Sauvan jäykkyys otaksutaan vakioksi sauvan koko pituudelta. Pääjäyhyysakselien otaksutaan yhtyvän jokaisessa poikkileikkauksessa ruuviviivan paikalliskoordinaatistoon.

Tuntemattomasta tukivoimasta F_i syntyvät momentit voidaan esittää pääkoordinaatistossa muodossa

$$\bar{M} = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k}$$

Kun käytetään merkintöjä

$$k = \frac{h}{2\pi}$$

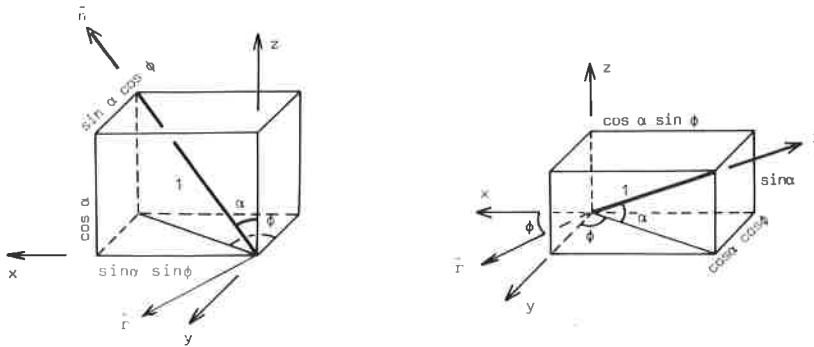
ϕ_0 alapään kulmaoordinaatti (yleensä = 0)

ϕ_l yläpään kulmaoordinaatti

voidaan tukivoimista syntyvät momentit ruuviviivan pisteessä $P(\phi)$ esittää muodossa

$$\begin{aligned} F_1 = F_x ; \quad & M_{x,p} = 0 \\ & M_{y,p} = -k\phi F_x \\ & M_{z,p} = r \sin \phi F_x \\ F_2 = F_y ; \quad & M_{x,p} = k\phi F_y \\ & M_{y,p} = 0 \\ & M_{z,p} = -r \cos \phi F_y \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 F_3 = F_z ; \quad & M_{x,p} = -r \sin \phi F_z \\
 & M_{y,p} = r \cos \phi F_z \\
 & M_{z,p} = 0 \\
 F_4 = M_x ; \quad & M_{x,p} = M_x \\
 F_5 = M_y ; \quad & M_{y,p} = M_y \\
 F_6 = M_z ; \quad & M_{z,p} = M_z
 \end{aligned}
 \tag{13}$$



Kuva 7 Kuviot suuntakosinien määrittämiseksi

Pääkoordinaatistossa lausutut momentit summataan komponenteittain paikallisessa koordinaatistossa. Tarvittavat suuntakosinit saadaan kuvasta 7.

$$\begin{aligned}
 M_{x,p} ; \quad & T = -M_x \cos \alpha \sin \phi \\
 & M_r = M_x \cos \phi \\
 & M_n = M_x \sin \alpha \sin \phi \\
 M_{y,p} ; \quad & T = M_y \cos \alpha \cos \phi \\
 & M_r = M_y \sin \phi \\
 & M_n = -M_y \sin \alpha \cos \phi \\
 M_{z,p} ; \quad & T = M_z \sin \alpha \\
 & M_r = 0 \\
 & M_n = M_x \cos \alpha
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Tuntemattomista voimasuureista aiheutuvat voimasuureet ovat paikalliskoordinaatistossa seuraavat

$$\begin{aligned}
 F_x ; \quad & T = F_x (-k \cos \alpha \phi \cos \phi + r \sin \alpha \sin \phi) \\
 & M_r = F_x (-k \phi \sin \phi) \\
 & M_n = F_x (k \sin \alpha \phi \cos \phi + r \cos \alpha \sin \phi) \\
 F_y ; \quad & T = F_y (-k \cos \alpha \phi \sin \phi - r \sin \alpha \cos \phi) \\
 & M_r = F_y k \phi \cos \phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_n = F_y (k \sin \alpha \phi \sin \phi - r \cos \alpha \cos \phi) \\
F_z : & T = F_z r \cos \alpha \\
& M_r = 0 \\
& M_n = F_z (-r \sin \alpha) \\
M_x : & T = M_x (-\cos \alpha \sin \phi) \\
& M_r = M_x \cos \phi \\
& M_n = M_x \sin \alpha \sin \phi \\
M_y : & T = M_y \cos \alpha \cos \phi \\
& M_r = M_y \sin \phi \\
& M_n = M_y (-\sin \alpha \cos \phi) \\
M_z : & T = M_z \sin \alpha \\
& M_r = 0 \\
& M_n = M_z \cos \alpha
\end{aligned} \tag{15}$$

Siirtymä suuntaan i voimasta $F_j = 1$ saadaan seuraavasta kaavasta, kun asetetaan $F_i = 1$

$$\delta_{ij} = \int_0^{s_\ell} \left(\frac{T_i T_j}{GI_t} + \frac{M_{r,i} M_{r,j}}{EI_r} + \frac{M_{n,i} M_{n,j}}{EI_n} \right) ds \tag{16}$$

Suorittamalla muuttujanvaihdos $ds = \frac{r}{\cos \alpha} d\phi$ voidaan termit δ_{ij} laskea. Integraaleja merkitään seuraavasti

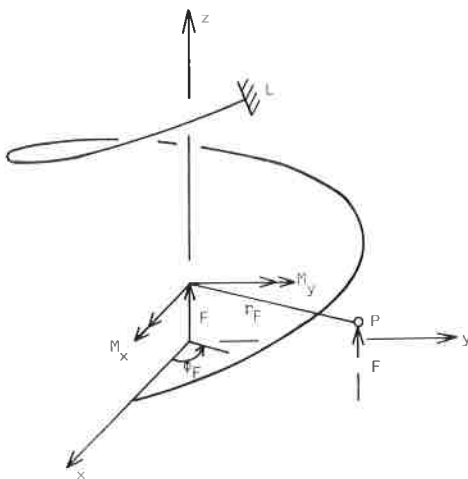
$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} (\phi_\ell - \phi_0) \\
k_2 &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} \sin \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} (-\cos \phi) \\
k_3 &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} \cos \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} \sin \phi \\
k_4 &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} \sin^2 \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} \left(\frac{1}{2} \phi - \frac{1}{4} \sin 2\phi \right) \\
k_5 &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} \cos^2 \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} \left(\frac{1}{2} \phi + \frac{1}{4} \sin 2\phi \right) \\
k_6 &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} \phi \sin \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} (\sin \phi - \phi \cos \phi) \\
k_7 &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} \phi \cos \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} (\cos \phi + \phi \sin \phi) \\
k_8 &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} \phi \sin^2 \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_\ell} \left(\frac{1}{4} \phi^2 - \frac{1}{4} \phi \sin 2\phi - \frac{1}{8} \cos 2\phi \right)
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
k_9 &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \phi \cos^2 \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \left(\frac{1}{4} \phi^2 + \frac{1}{4} \phi \sin 2\phi + \frac{1}{8} \cos 2\phi \right) \\
k_{10} &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \phi^2 \sin^2 \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \left(\frac{1}{6} \phi^3 - \frac{1}{4} \phi^2 \sin 2\phi + \frac{1}{8} \sin 2\phi - \frac{1}{4} \phi \cos 2\phi \right) \\
k_{11} &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \phi^2 \cos^2 \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \left(\frac{1}{6} \phi^3 + \frac{1}{4} \phi^2 \sin 2\phi - \frac{1}{8} \sin 2\phi + \frac{1}{4} \phi \cos 2\phi \right) \\
k_{12} &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \sin \phi \cos \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \left(-\frac{1}{4} \cos 2\phi \right) \\
k_{13} &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \phi \sin \phi \cos \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \left(\frac{1}{4} \sin 2\phi - \frac{1}{2} \phi \cos 2\phi \right) \\
k_{14} &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \phi^2 \sin \phi \cos \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \left(-\frac{1}{4} \phi^2 \cos 2\phi + \frac{1}{8} \cos 2\phi + \frac{1}{4} \phi \sin 2\phi \right) \\
k_{15} &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \phi^2 \sin \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \left(-\phi^2 \cos \phi + 2\phi \sin \phi + 2 \cos \phi \right) \\
k_{16} &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \phi^2 \cos \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \left(\phi^2 \sin \phi - 2\sin \phi + 2\phi \cos \phi \right) \\
k_{17} &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \phi d\phi = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\phi_0}^{\phi_l} \left(\frac{1}{2} \phi^2 \right)
\end{aligned} \tag{17}$$

Näitä merkintöjä käyttäen joustomatriisin K alkioiksi saadaan sijoituksen jälkeen

$$\begin{aligned}
\delta_{11} &= \frac{1}{GI_t} (k^2 \cos^2 \alpha k_{11} + r^2 \sin^2 \alpha k_4 - k r \sin 2\alpha k_{13}) + \frac{k^2 k_{10}}{EI_r} + \frac{1}{EI_n} (k^2 \sin^2 \alpha k_{11} + \\
&\quad + r^2 \cos^2 \alpha k_4 + k r \sin 2\alpha k_{13}) \\
\delta_{12} &= \frac{1}{GI_t} (k^2 \cos^2 \alpha k_{14} + 0,5 k r \sin 2\alpha (k_9 - k_8) - r \sin^2 \alpha k_{12}) - \frac{k^2 k_{14}}{EI_r} + \frac{1}{EI_n} (k^2 \sin^2 \alpha k_{14} - \\
&\quad - 0,5 k r \sin 2\alpha (k_9 - k_8) - r^2 \cos^2 \alpha k_{12}) \\
\delta_{13} &= \frac{1}{GI_t} (-k r \cos^2 \alpha k_7 + 0,5 r^2 \sin 2\alpha k_2) - \frac{1}{EI_n} (k r \sin^2 \alpha k_7 + 0,5 r^2 \sin 2\alpha k_2) \\
\delta_{14} &= \frac{1}{GI_t} (k \cos^2 \alpha k_{13} - 0,5 r \sin 2\alpha k_4) - \frac{k k_{13}}{EI_r} + \frac{1}{EI_n} (k \sin^2 \alpha k_{13} + 0,5 r \sin 2\alpha k_4) \\
\delta_{15} &= \frac{1}{GI_t} (-k \cos^2 \alpha k_9 + 0,5 r \sin 2\alpha k_{12}) - \frac{k k_9}{EI_r} - \frac{1}{EI_n} (k \sin^2 \alpha k_9 + 0,5 r \sin 2\alpha k_{12}) \\
\delta_{16} &= \frac{1}{GI_t} (-0,5 k \sin 2\alpha k_7 + r \sin^2 \alpha k_2) + \frac{1}{EI_n} (0,5 k \sin 2\alpha k_7 + r \cos^2 \alpha k_2) \\
\delta_{22} &= \frac{1}{GI_t} (k^2 \cos^2 \alpha k_{10} + r^2 \sin^2 \alpha k_5 + k r \sin 2\alpha k_{13}) + \frac{k^2 k_{11}}{EI_r} + \frac{1}{EI_n} (k^2 \sin^2 \alpha k_{10} + \\
&\quad + r^2 \cos^2 \alpha k_5 - k r \sin 2\alpha k_{13}) \\
\delta_{23} &= -\frac{1}{GI_t} (k r \cos^2 \alpha k_6 + 0,5 r^2 \sin 2\alpha k_3) + \frac{1}{EI_n} (-k r \sin^2 \alpha k_6 + 0,5 r^2 \sin 2\alpha k_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{24} &= \frac{1}{GI_t} (k \cos^2 \alpha k_8 + 0,5 r \sin 2\alpha k_{12}) + \frac{k k_9}{EI_r} + \frac{1}{EI_n} (k \sin^2 \alpha k_8 - 0,5 r \sin 2\alpha k_{12}) \\
\delta_{25} &= -\frac{1}{GI_t} (k \cos^2 \alpha k_{13} + 0,5 r \sin 2\alpha k_5) + \frac{k k_{13}}{EI_r} + \frac{1}{EI_n} (-k \sin^2 \alpha k_{13} + 0,5 r \sin 2\alpha k_5) \\
\delta_{26} &= -\frac{1}{GI_t} (0,5 k \sin 2\alpha k_6 + r \sin^2 \alpha k_3) + \frac{1}{EI_n} (0,5 k \sin 2\alpha k_6 - r \cos^2 \alpha k_3) \\
\delta_{33} &= \left(\frac{r^2 \cos^2 \alpha}{GI_t} + \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{EI_n} \right) k_1 \\
\delta_{34} &= -\left(\frac{r \cos^2 \alpha}{GI_t} + \frac{r \sin^2 \alpha}{EI_n} \right) k_2 \\
\delta_{35} &= \left(\frac{r \cos^2 \alpha}{GI_t} + \frac{r \sin^2 \alpha}{EI_n} \right) k_3 \\
\delta_{36} &= \frac{1}{2} r \sin 2\alpha \left(\frac{1}{GI_t} - \frac{1}{EI_n} \right) k_1 \\
\delta_{44} &= \frac{\cos^2 \alpha k_4}{GI_t} + \frac{k_5}{EI_r} + \frac{\sin^2 \alpha k_{11}}{EI_n} \\
\delta_{45} &= \left(-\frac{\cos^2 \alpha}{GI_t} + \frac{1}{EI_r} - \frac{\sin^2 \alpha}{EI_n} \right) k_{12} \\
\delta_{46} &= -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{1}{GI_t} - \frac{1}{EI_n} \right) k_2 \\
\delta_{55} &= \frac{\cos^2 \alpha k_5}{GI_t} + \frac{k_4}{EI_r} + \frac{\sin^2 \alpha k_5}{EI_n} \\
\delta_{56} &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{1}{GI_t} - \frac{1}{EI_n} \right) k_3 \\
\delta_{66} &= \left(\frac{\sin^2 \alpha}{GI_t} + \frac{\cos^2 \alpha}{EI_n} \right) k_1
\end{aligned} \tag{18}$$



Kuva 8 Pisteessä $P(r_F, \phi_F)$ vaikuttava pistevoima F

Seuraavaksi lasketaan kuvan 8 mukaisesta katkoviivalla piirretystä z-akselin suuntaisesta pisteessä P vaikuttavasta pistevoimasta F syntyvät vapaan pään siirtymät δ_{10} . Kierteellä vaikuttava pistevoima korvataan staattisesti samanarvoisella z-akselilla vaikuttavalla kuormituksella.

$$F = F$$

$$M_x = F r_F \sin \phi_F$$

$$M_y = -F r_F \cos \phi_F$$

r_F = voiman F etäisyys z-akselista

ϕ_F = voiman F vaikutuspisteen kulma-koordinaatti

Muunnosten (14) avulla kuormitus lausutaan paikallisessa koordinaatistossa.

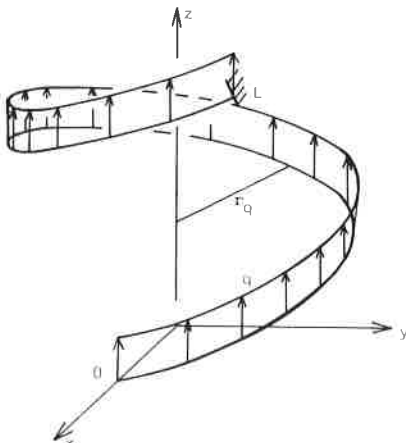
$$\begin{aligned} T &= Fr_F \cos \alpha (1 - \sin \phi_F \sin \phi - \cos \phi_F \cos \phi) \\ M_R &= Fr_F (\sin \phi_F \cos \phi - \cos \phi_F \sin \phi) \\ M_n &= -Fr_F \sin \alpha (1 - \sin \phi_F \sin \phi - \cos \phi_F \cos \phi) \end{aligned} \quad (19)$$

Pistekuormasta aiheutuvat siirtymävektorin $S = \{\delta_{10}\}$ termit ovat, kun integraaleihin (17) sijoitetaan alarajaksi $\phi_0 = \phi_F$

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{1}{GI_t} \left(Fr_F \cos \alpha (k \cos \alpha (-k_7 + \sin \phi_F k_{13} + \cos \phi_F k_9) + r \sin \alpha (k_2 - \sin \phi_F k_4 - \cos \phi_F k_{12})) \right) \\ &\quad + \frac{1}{EI_R} (Fr_F k (-\sin \phi_F k_{13} + \cos \phi_F k_{10})) \\ &\quad + \frac{1}{EI_n} \left(Fr_F \sin \alpha (k \sin \alpha (-k_7 + \sin \phi_F k_{13} + \cos \phi_F k_9) + r \cos \alpha (-k_2 + \sin \phi_F k_4 + \cos \phi_F k_{12})) \right) \\ \delta_{20} &= \frac{1}{GI_t} \left(Fr_F \cos \alpha (k \cos \alpha (-k_6 + \sin \phi_F k_8 + \cos \phi_F k_{13}) + r \sin \alpha (-k_3 + \sin \phi_F k_{12} + \cos \phi_F k_5)) \right) \\ &\quad + \frac{1}{EI_R} (Fr_F k (\sin \phi_F k_9 - \cos \phi_F k_{13})) \\ &\quad + \frac{1}{EI_n} \left(Fr_F \sin \alpha (k \sin \alpha (-k_6 + \sin \phi_F k_8 + \cos \phi_F k_{13}) + r \cos \alpha (k_3 - \sin \phi_F k_{12} - \cos \phi_F k_5)) \right) \\ \delta_{30} &= Fr_F r \left(\frac{\cos^2 \alpha}{GI_t} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI_n} \right) (k_1 - \sin \phi_F k_2 - \cos \phi_F k_3) \\ \delta_{40} &= Fr \left(\frac{\cos^2 \alpha}{GI_t} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI_n} \right) (-k_2 + \sin \phi_F k_4 + \cos \phi_F k_{12}) + \frac{1}{EI_R} (Fr_F (\sin \phi_F k_5 - \cos \phi_F k_{12})) \\ \delta_{50} &= Fr_F \left(\frac{\cos^2 \alpha}{GI_t} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI_n} \right) (k_3 - \sin \phi_F k_{12} - \cos \phi_F k_5) + \frac{1}{EI_R} (Fr_F (\sin \phi_F k_{12} - \cos \phi_F k_4)) \\ \delta_{60} &= \frac{1}{2} Fr_F \sin 2\alpha \left(\frac{1}{GI_t} - \frac{1}{EI_n} \right) (k_1 - \sin \phi_F k_2 - \cos \phi_F k_3) \end{aligned} \quad (20)$$

Lisäksi lasketaan koko rakenteen pituudella vaikuttavasta z-akselin suuntaisesta tasaisesta jatkuvasta kuormasta (kuva 9) aiheutuvat siirtymät δ_{10} .

Korvataan kuormitus z-akselilla vaikuttavalla staattisesti samanarvoisella kuormituksella.



$$\begin{aligned} M_x &= \int_{\phi_0}^{\phi} r_q \sin \xi q \frac{r}{\cos \alpha} d\xi = \frac{qr_q r}{\cos \alpha} (\cos \phi_0 - \cos \phi) \\ M_y &= \int_{\phi_0}^{\phi} r_q \cos \xi q \frac{r}{\cos \alpha} d\xi = \frac{qr_q r}{\cos \alpha} (\sin \phi_0 - \sin \phi) \\ F &= \int_{\phi_0}^{\phi} q \frac{r}{\cos \alpha} d\xi = \frac{qr}{\cos \alpha} (\phi - \phi_0) \end{aligned} \quad (21)$$

jossa r_q on kuormituksen etäisyys z-akselista.

Kuva 9 Etäisyydellä r_q vaikuttava tasainen jatkuva kuorma

Muunnoksilla (12) kuormitus lausutaan paikallisessa koordinaatistossa

$$\begin{aligned}
 T &= q r_q r (\sin \phi_0 \cos \phi - \cos \phi_0 \sin \phi) + q r (\phi - \phi_0) \\
 M_r &= \frac{q r_q r}{\cos \alpha} (\cos \phi_0 \cos \phi + \sin \phi_0 \sin \phi - 1) \\
 M_n &= q r_q r \tan \alpha (\cos \phi_0 \sin \phi - \sin \phi_0 \cos \phi) + q r^2 \tan (\phi_0 - \phi)
 \end{aligned} \tag{22}$$

Kun siirtymätermit lasketaan; saadaan siirtymävektoriin $S = \{\delta_{i0}\}$ seuraavat termit

$$\begin{aligned}
 \delta_{10} &= \frac{1}{G I_t} \left[q r_q r (k \cos \alpha (\cos \phi_0 k_{13} - \sin \phi_0 k_9) + r \sin \alpha (\sin \phi_0 k_{12} - \cos \phi_0 k_4)) + q r^2 (k \cos \alpha (\phi_0 k_7 - k_{16}) + r \sin \alpha (k_6 - \phi_0 k_2)) \right] + \frac{1}{E I_r} \left[\frac{q r_q r k}{\cos \alpha} (k_6 - \sin \phi_0 k_8 - \cos \phi_0 k_{13}) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{E I_n} \left[q r_q r \tan \alpha (k \sin \alpha (\cos \phi_0 k_{13} - \sin \phi_0 k_9) + r \cos \alpha (\cos \phi_0 k_4 - \sin \phi_0 k_{12})) + q r^2 \tan \alpha (k \sin \alpha (\phi_0 k_7 - k_{16}) + r \cos \alpha (\phi_0 k_2 - k_6)) \right] \right] \\
 \delta_{20} &= \frac{1}{G I_t} \left[q r_q r (k \cos \alpha (\cos \phi_0 k_8 - \sin \phi_0 k_{13}) + r \sin \alpha (\cos \phi_0 k_{12} - \sin \phi_0 k_5)) + q r^2 (k \cos \alpha (\phi_0 k_6 - k_{15}) + r \sin \alpha (\phi_0 k_3 - k_7)) \right] + \frac{1}{E I_r} \left[\frac{q r_q r k}{\cos \alpha} (\cos \phi_0 k_9 + \sin \phi_0 k_{13} - k_7) \right] + \\
 &+ \frac{1}{E I_n} \left[q r_q r \tan \alpha (k \sin \alpha (\cos \phi_0 k_8 - \sin \phi_0 k_{13}) + r \cos \alpha (\sin \phi_0 k_5 - \cos \phi_0 k_{12})) + q r^2 \tan \alpha (k \sin \alpha (\phi_0 k_6 - k_{15}) + r \cos \alpha (k_7 - \phi_0 k_3)) \right]
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\delta_{30} = \left(\frac{\cos \alpha}{G I_t} + \frac{\sin \alpha \tan \alpha}{E I_n} \right) (q r_q r^2 (\sin \phi_0 k_3 - \cos \phi_0 k^2) + q r^3 (k_{17} - \phi_0 k_1))$$

$$\delta_{40} = \left(\frac{\cos \alpha}{G I_t} + \frac{\sin \alpha \tan \alpha}{E I_n} \right) (q r_q r (\cos \phi_0 k_4 - \sin \phi_0 k_{12}) + q r^2 (\phi_0 k_6 - k_6)) + \frac{1}{E I_r} \left[\frac{q r_q r}{\cos \alpha} (\cos \phi_0 k_5 + \sin \phi_0 k_{12} - k_3) \right]$$

$$\delta_{50} = \left(\frac{\cos \alpha}{G I_t} + \frac{\sin \alpha \tan \alpha}{E I_n} \right) (q r_q r (\sin \phi_0 k_5 - \cos \phi_0 k_{12}) + q r^2 (k_7 - \phi_0 k_3)) + \frac{1}{E I_r} \left[\frac{q r_q r}{\cos \alpha} (\cos \phi_0 k_{12} + \sin \phi_0 k_4 - k_2) \right]$$

$$\delta_{60} = \left(\frac{1}{G I_t} - \frac{1}{E I_n} \right) (q r_q r \sin \alpha (\sin \phi_0 k_3 - \cos \phi_0 k_3) + q r^2 \sin \alpha (k_{17} - \phi_0 k_1))$$

Kun rakenteeseen vaikuttavia kuormia on useita, siirtymätermit saadaan superpositioperiaatteen mukaan yhdistämällä.

Yhtälöstä (12) saadaan

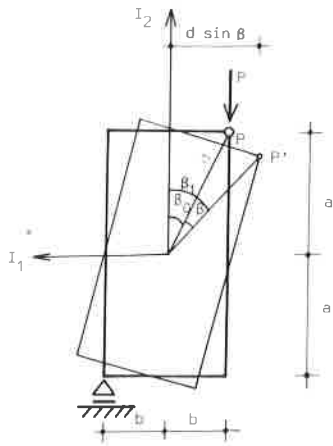
$$\{F\} = -[K]^{-1} \{S\} \tag{24}$$

Yhtälöstä (24) voidaan ratkaista tuntemattomat tukivoimat. Mielivaltaisessa poikkileikkauksessa vaikuttavat voimasuureet voidaan nyt laskea yhdistämällä

kaavojen (15), (19) sekä (21) avulla.

YMPYRÄRENGASSAUVAN VÄÄNTÖ

Tarkastellaan viivamaisesti tuettua ympyrärengaspalkkia, jonka keskivii-
van säde on r . Kuormitus on renkaan tasoa vastaan kohtisuora viivakuorma.
Rakennetta kuormittaa täten jatkuva vääntö (kuva 10).



Kuva 10 Viivakuorman kuormittaman ympyrärengaspalkin poikkileikkaus

$$m_t = -pe$$

jossa p on viivakuorma ja e viivakuorman vaikutussuoran etäisyys tuelta. Renkaan vääntyessä poikkileikkaustasot pysyvät tasoina, jolloin vääntymä on nolla ja vääntökulma on vakio koko renkaan ympäri. Sisäänpäin siirtyvän pisteen kohdalla syntyy aksiaalinen puristus ja ulospäin siirtyvän kohdalle aksiaalinen veto. Renkaan muodonmuutos-tila on tunnettu vääntökulman funktiona, kun oletetaan, että poikkileikkauksen muoto pysyy samana ja ettei poikkileikkauksen painopiste siirry. Koska poikkileikkauksen pintatasot pysyvät tasoina, niin renkaan leikkausvoimat, vääntömomentti ja momenttien derivaatat ovat nollet. Yhtälöstä (6) seu-

raa

$$M_r/r + m_t = 0$$

(25)

$$\rightarrow M_r = -m_t r$$

Näinollen vääntävästä kuormasta aiheutuu vain radiaalinen taivutus, kuten muodonmuutostarkastelu osoitti. Lasketaan poikkileikkaukseltaan suorakaiteen muotoisen rengaspalkin vääntökulma $\beta = \beta_1 - \beta_0$

$$m_t = -pe = -2pds\sin\beta_1 \quad d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$M_r = 2 pdr \cdot \sin\beta$$

Jaetaan radiaalinen taivutusmomentti komponentteihin pääjähyyiskoordinaatistoon akselisuunnille.

$$M_1 = M_r \cos\beta = 2pr(as\sin\beta_1 \cos\beta_1 + b\sin^2\beta_1)$$

$$M_2 = -M_r \sin\beta = -2pr(as\sin^2\beta_1 - b\sin\beta_1 \cos\beta_1)$$

$$\beta = \beta_1 - \beta_0$$

$$\cos\beta_0 = \frac{a}{d}$$

$$\sin\beta_0 = \frac{b}{d}$$

Suhteellinen muodonmuutos pisteessä P on

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2,$$

jossa

$$\epsilon_1 = -\frac{M_1 h}{EI_1} \quad ; \quad \epsilon_2 = -\frac{M_2 b}{EI_2}$$

Kun toisaalta

$$\epsilon = -\frac{d \sin \beta_1 - b}{r - b}$$

saadaan β_1 :n määrittämiseksi yhtälö:

$$k_1 \sin^2 \beta_1 + k_2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 - \sin \beta_1 + k_3 = 0 \quad (26)$$

jossa

$$k_1 = \frac{2prab(r-b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{1}{EI_1} - \frac{1}{EI_2} \right)$$

$$k_2 = \frac{2pr(r-b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{a^2}{EI_1} + \frac{b^2}{EI_2} \right)$$

$$k_3 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Yhtälö (26) voidaan ratkaista iteroimalla esim. Newtonin menetelmällä.

Esim.

Lasketaan ympyrärengaspalkin vääntökulma, kun poikkileikkaus on suorakaidekotelo, korkeus 0,20 m, leveys 0,10 m ja seinämän paksuus on 5 mm.

$$p = 17 \text{ kN/m}$$

$$E = 1,1 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$r = 1,50 \text{ m}$$

$$I_1 = 1522 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$a = 0,10 \text{ m}$$

$$I_2 = 512 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$b = 0,05 \text{ m}$$

$$\beta_0 = 26,565^\circ$$

$$k_1 = -3,897 \cdot 10^{-2}$$

$$k_2 = 6,887 \cdot 10^{-2}$$

$$k_3 = 4,472 \cdot 10^{-1}$$

Newtonin iteraatiolla β_1 :n arvoksi saadaan neljän iteraatiokierroksen jälkeen

$$\beta_1 = 27,849$$

$$\beta = \beta_1 - \beta_0 = 1,284^\circ$$

LOPPUPÄÄTELMÄT

Voidaan todeta, että kaarevien avaruusauvojen laskennallinen käsittely on olennaisesti suuritöisempää kuin suorien sauvojen analysointi. Esitetyt ratkaisut soveltuvat mainiosti tietokonekäsittelyyn. Vain erikoistapauksissa, kuten esitetyssä ympyrärengaspalkin väännössä, päädytään suhteellisen yksinkertaisiin ratkaisuihin. Valittu ympyrärengastehtävä on esimerkki siitä, kuinka avaruussauvojen ominaisuudet poikkeavat suorista tasosauvoista, koska kuormituksena oleva pelkkä vääntö aiheuttaa palkkiin pelkän taivutuksen. Jos renkaan tuenta olisi aiheuttanut poikkipinnan painopisteen kohdalla pituudenmuutoksen, olisi syntynyt myös normaalivoima.

KÄYTETYT MERKINNÄT

α	= ruuviviivan nousukulma
$\beta = \beta_1 - \beta_0$	= ympyrärengaspalkin vääntökulma
ϕ	= kulmamuuttuja
ξ	= kulmamuuttuja
ϕ_0	= kierteen alapään kulmakoordinaatti
ϕ_ℓ	= kierteen yläpään kulmakoordinaatti
ϕ_F	= voima F vaikutuspisteen kulmakoordinaatti
2a	= suorakaidekotelopalkin korkeus
2b	= suorakaidekotelopalkin leveys
d	= lävistäjän puolikas
e	= momenttivarsi
h	= ruuviviivan nousu kierrosta kohti
$k = \frac{h}{2\pi}$	= lyhennysmerkintä
m_t	= tangentin ympäri kuormittava jatkuva momentti
m_r	= säteen ympäri kuormittava jatkuva momentti
m_n	= sivunormaalin ympäri kuormittava jatkuva momentti
p_t	= tangentin suuntaan kuormittava viivakuorma
p_r	= säteen suuntaan kuormittava viivakuorma
p_n	= sivunormaalin suuntaan kuormittava viivakuorma
q	= tasainen kuorma ruuviviivan pituusyksikköä kohti
r	= ruuviviivan pohjaympyrän säde
r_q	= viivakuorman etäisyys z-akselilta
r_F	= pistekuorman etäisyys z-akselilta
s_ℓ	= ruuviviivan pituus
A	= tasapainoyhtälöiden kerroinmatriisi
B	= kuormavektori
F	= pistevoima tai voimavektori
F_i	= tukivoima
K	= joustomatriisi

N	= normaalivoima
Q_r	= leikkausvoima säteen suuntaan
Q_n	= leikkausvoima sivunormaalien suuntaan
T	= vääntömomentti tangenttiaalikoordinaatistossa
M_r	= radiaalinen taivutusmomentti tangenttiaalikoordinaatistossa
M_n	= taivutusmomentti sivunormaalien ympäri tangenttiaalikoordinaatistissa
M_x	= momentti x-akselin ympäri
M_y	= momentti y-akselin ympäri
M_z	= momentti z-akselin ympäri
$M_{x,p}$	= momentti x-akselin ympäri pisteessä P
S	= siirtymävektori

KIRJALLISUUTTA

- [1] Arvo Ylinen, Kimmo- ja lujuusoppi, 2.painos. WSOY, Porvoo 1970
- [2] Rakennustekniikan käsikirja, osa I, nide 2, 1. painos. Tammi, Helsinki 1970
- [3] C. Benedetti und K. Messerli, Torsionzustände des gekrümmten Balkens. Schweizerische Bauzeitung, Heft 16, April 1967

Pekka Kanerva, apul.prof., Teknillinen Korkeakoulu, Otaniemi
Olli-Pekka Nordlund, tekn.yo., Otaniemi