

KIMMOISELLA ALUSTALLA OLEVAN PALKIN VAPAAVÄRÄHTELYT

Antti Pramila

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 10
No. 1 1977 s. 11...20

YHTEENVETO: Artikkelissa tarkastellaan kimmoisella alustalla olevan palkin vapaita värähtelyjä. Alustamallina on ns. Winklerin alusta, joka pätee mm. kun alustana on neste. Alustan staattinen vaikutus ominaistajuuksiin osoittautuu muutamien prosenttien suuruusluokkaa olevaksi. Alustan dynaaminen vaikutus, jota käsitellään ns. lisätyn massan avulla, osoittautuu paljon merkittävämmäksi tekijäksi. Dynaamisen vaikutuksen huomiotta jättäminen saattaa joissakin tapauksissa aiheuttaa ominaistajuuteen n. 50 %:n suuruusluokkaa olevan virheen siten, että saatu ominaistajuus on liian korkea.

JOHDANTO

Tyypillisiä rakenteita, joita voidaan tarkastella kimmoisella alustalla olevina palkkeina, ovat mm. laiva, proomu ja erilaiset ponttoonit. Näiden suunnittelussa joudutaan kiinnittämään huomiota myös värähtelyilmiöihin, koska niihin vaikuttaa jaksollisia kuormituksia. Tällaisia ovat esim. aallokun aiheuttamat kuormitukset.

Kimmoisella alustalla olevaa palkkia on analysoitu useissa tutkimuksissa. Aihetta käsittelevistä suomenkielisistä julkaisuista mainittakoon lähteet [1] ja [2], joissa on tarkasteltu kimmoisella alustalla olevan palkin taivutusta ja stabiliteettia. Kimmoisella alustalla olevan palkin värähtelyjä sensijaan on käsitelty hyvin vähän. Timoshenkon klassillisessa oppikirjassa [3] on tarkasteltu vapaasti päistään tuettua palkkia ja laskettu sen ominaistajuuksille likiarvoja trigonometristä yritettä käyttäen.

Laivapalkin vertikaalisten värähtelyiden ominaistajuuksia määritettäessä ei kimmoisen alustan mahdollista vaikutusta ole otettu huomioon (ks. lähteet [4] ja [5]) eikä tätä toimenpidettä ole myöskään perusteltu.

Tässä artikkelissa käsitellään kimmoisella alustalla olevan palkin vertikaalisten ominaistajuuksien määrittämistä tavallisimmista tuentatapauksissa, kun sekä palkin poikkileikkaus että alustakerroin pysyvät vakioina palkin pituussuunnassa. Alustan kimmoisuuden vaikutus osoittautuu suoraan verrannolliseksi palkin kokoon.

Suuria tankkilaivoja voidaan tarkastella likimääräisesti vakioleikkileikkauksina kimmoisella alustalla - alustana vesi - olevina palkkeina. Alustan kimmoisuuden huomioonottaminen kohottaa niiden taivutusvärähtelyjen omi-

naistaajuuksia korkeintaan muutamia prosentteja.

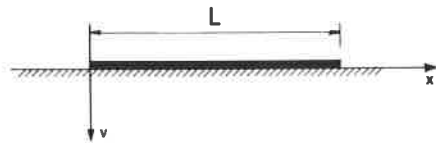
Artikkelin lopussa tarkastellaan palkin mukana värähtelevän alustan huomioinnista, kun alusta on nestettä. Alusta otetaan tällöin huomioon ns. lisätyn massan avulla. Tämä alustan dynaaminen vaikutus osoittautuu olevan aivan eri suuruusluokkaa kuin alustan staattinen vaikutus.

LÄHTÖTAKSUMAT

Otaksutaan, että teknillinen taivutusteoria pätee. Palkin oletetaan pysyvän aina kiinni alustassaan ja alustan painuman oletetaan olevan sama kuin palkin akselin taipuma. Alustan otaksutaan toimivan ns. Winklerin mallin mukaisesti: alustan aiheuttama tukireaktio on suoraan verrannollinen alustan painumaan. Leikkausvoiman aiheuttamaa taipumaa ei oteta huomioon.

Värähdysamplitudit oletetaan pieniksi ja värähtely harmoniseksi. Palkin poikkileikkausten rotaatiosta aiheutuvat hitausvoimat jätetään tarkastelun ulkopuolelle samoin kuin palkin mukana värähtelevän alustan massa. Palkin mukana värähtelevän alustan vaikutusta tarkastellaan omana kohtanaan artikkelin loppuosassa.

Korvaamalla kimmoisella alustalla olevan palkin differentiaaliyhtälössä (ks. esim. [1] s. 306) kuormitustermi hitausvoimatermillä, saadaan liikeyhtälö, missä v on palkin taipuma,



Kuva 1 Kimmoisella alustalla oleva palkki, merkintöjä

E on kimmomoduli, I on jäyhyysmomentti, m on palkin massa pituusyksikköä kohti ja k on alustakerroin.

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + kv + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

Käytetty Winklerin alustamalli pitää paikkansa esim. silloin, kun alustana on neste. Tällöin

$$k = \rho g B, \quad (2)$$

missä ρ on nesteen tiheys, g on maan vetovoiman kiihtyvyys ja B on palkin leveys.

OMINAISTAAJUUDET JA -MUODOT

Värähtelyn oletetaan olevan harmonista, joten $v(x,t)$ voidaan lausua muodossa

$$v(x,t) = \hat{v}(x) \sin(\omega t + \varphi). \quad (3)$$

Kun tämä sijoitetaan liikeyhtälöön (1) saadaan

$$EI \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^4} + (k - m\omega^2) \hat{v} = 0, \quad (4)$$

Tarkastellaan erikseen tapaukset $\omega^2 > k/m$, $\omega^2 = k/m$ ja $\omega^2 < k/m$.
Kun $\omega^2 > k/m$ voidaan (4) kirjoittaa muotoon

$$\frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^4} - \alpha^4 \hat{v} = 0, \quad (5)$$

missä

$$\alpha^4 = \frac{m\omega^2 - k}{EI}. \quad (6)$$

Hakemalla differentiaaliyhtälön (5) ratkaisua muodossa $\hat{v} = e^{rx}$ saadaan karakteristiseksi yhtälöksi

$$r^4 - \alpha^4 = 0, \quad (7)$$

jonka juuret ovat

$$r_{1,2} = \pm\alpha; \quad r_{3,4} = \pm\alpha i; \quad i = \sqrt{-1}. \quad (8)$$

Yhtälön (5) ratkaisu on siten

$$\hat{v} = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x} + A_3 e^{i\alpha x} + A_4 e^{-i\alpha x}, \quad (9)$$

joka voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\hat{v} = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \sinh \alpha x + C_4 \cosh \alpha x. \quad (10)$$

Tarkastellaan ensiksi palkkia (pituus L), jonka päät ovat vapaasti tuetut. Reunaehdot ovat

$$\hat{v} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} = 0, \quad \text{kun } x = 0 \quad \text{ja} \quad x = L. \quad (11)$$

Kertoimien C määrittämiseksi saadaan yo. reunaehdoista yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \sin \alpha L & \cos \alpha L & \sinh \alpha L & \cosh \alpha L \\ -\sin \alpha L & -\cos \alpha L & \sinh \alpha L & \cosh \alpha L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \{0\}. \quad (12)$$

Yhtälöryhmällä (12) voi olla triviaaliratkaisusta poikkeava ratkaisu ainoastaan, jos kerroinmatriisin determinantti häviää. Muodostamalla yhtälöryhmän (12) kerroinmatriisin determinantti ja asettamalla se nolllaksi saadaan ns. taajuuksiyhtälö

$$\sin\alpha L \sinh\alpha L = 0, \quad (13)$$

jonka ratkaisu on

$$\alpha L = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

Ratkaisemalla (6) ω :n suhteen saadaan

$$\omega = \sqrt{\frac{EI(\alpha L)^4 + kL^4}{mL^4}}. \quad (15)$$

Sijoittamalla tähän edellä johdettu tulos (14) saadaan ominaiskulmataajuudet ko. tuentatapaukselle.

Taulukko I

| Päiden kiinnitys | αL | | | | |
|--|------------|-------|--------|--------|-----|
| | 1. | 2. | 3. | 4. | ... |
| Päät vapaat | 4.730 | 7.853 | 10.966 | 14.137 | ... |
| Päät vapaasti tuetut | 3.142 | 6.283 | 9.425 | 12.566 | ... |
| Päät jäykästi kiinnitetyt | 4.730 | 7.853 | 10.966 | 14.137 | ... |
| Jäykästi kiinnitetty - vapaa | 1.875 | 4.694 | 7.855 | 10.966 | ... |
| Jäykästi kiinnitetty - vapaasti tuettu | 3.927 | 7.069 | 10.210 | 13.352 | ... |
| Vapaasti tuettu - vapaa | 3.927 | 7.069 | 10.210 | 13.352 | ... |

Taulukossa I on esitetty eri tavalla tuettujen palkkien ominaiskulmataajuuksien määrittämisessä tarvittavia reunaehdoista riippuvia kertoimia αL . Kuttakin ominaistajuutta vastaavat ominaismuodot saadaan sijoittamalla ko. tuentatapaukseen ja ominaistajuuteen liittyvä αL :n arvo reunaehdoista saatuun yhtälöryhmään, josta saadaan ratkaistuksi kertoimien C suhteet. Ominaismuodot saadaan tämän jälkeen lausekkeesta (10).

Tapauksessa $\omega^2 = k/m$ saadaan ominaiskulmataajuus suoraan

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (16)$$

Vastaavat ominaismuodot saadaan differentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^4} = 0 \quad (17)$$

yleisestä ratkaisusta

$$\hat{v} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 \quad (18)$$

määrittämällä kertoimet C reunaehdoista. Triviaaliratkaisusta poikkeava ratkaisu saadaan ainoastaan, jos palkin molemmat päät ovat vapaat tai toinen on vapaa ja toinen vapaasti tuettu. Näinollen tulos (16) on ainoastaan näihin

kahteen tapaukseen liittyvä ominaiskulmataajuus, ns. jäykän kappaleen ominaiskulmataajuus, joka saataisiin suoraan kirjoittamalla jäykäksi ajatellulle palkille liikeyhtälö ja ratkaisemalla se.

Tarkastellaan seuraavaksi mitä saadaan kolmannesta mahdollisuudesta $\omega^2 < k/m$. Merkitään

$$\beta^4 = \frac{k - m\omega^2}{4EI}, \quad (19)$$

jolloin yhtälö (4) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^4} + 4\beta^4 \hat{v} = 0. \quad (20)$$

Ratkaisua haetaan jälleen yritteellä $v = e^{rx}$. Karakteristiseksi yhtälöksi tulee

$$r^4 + 4\beta^4 = 0, \quad (21)$$

jonka juuret ovat

$$r_{1,2} = \beta(1 \pm i) \quad \text{ja} \quad r_{3,4} = -\beta(1 \pm i). \quad (22)$$

Differentiaaliyhtälön (20) yleinen ratkaisu saadaan tulosten (22) perusteella, kun käytetään kompleksifunktioiden muunnoskaavoja, muotoon

$$\hat{v} = C_1 \cosh \beta x \cos \beta x + C_2 \cosh \beta x \sin \beta x + C_3 \sinh \beta x \cos \beta x + C_4 \sinh \beta x \sin \beta x. \quad (23)$$

Tästä edetään muodostamalla reunaehtojen avulla lineaarinen yhtälöryhmä kertoimien C määrittämiseksi samalla tavalla kuin tapauksessa $\omega^2 > k/m$. Jotta yhtälöryhmällä voisi olla muitakin kuin triviaaliratkaisu tulee kerroinmatriisin determinantin hävitä. Esimerkiksi kun palkin molemmat päät ovat vapaat saadaan täksi taajuusyhtälöksi

$$\sinh^2 \beta L + \cos^2 \beta L = 1, \quad (24)$$

jolla ei ole muita ratkaisuja kuin $\beta L = 0$. Tämä ratkaisu tuottaa tuloksena jo edellä johdetun ominaistajuuden (16). Muodostamalla taajuusyhtälö myös muissa tuentatapauksissa havaitaan, että sillä ei ole joko ratkaisua lainkaan tai sillä on ainoastaan ratkaisu $\beta L = 0$. Tämä merkitsee yksinkertaisesti sitä, että kimmoisella alustalla olevan poikkileikkauksellaan muuttumattoman palkin ominaiskulmataajuuksista pienin on jäykän kappaleen vapausasteeseen liittyvä ominaiskulmataajuus.

Yhteenvetona voidaan siis todeta, että kimmoisella alustalla olevan palkin ominaistajuudet saadaan lausekkeesta

$$\omega = \sqrt{\frac{EI(\alpha L)^4 + kL^4}{mL^4}}, \quad (25)$$

johon palkin päiden kiinnityksestä riippuva kerroin αL saadaan taulukosta I.

ALUSTAN KIMMOISUUDEN VAIKUTUS, ESIMERKKI

Ilmassa värähtelevän palkin ominaiskulmataajuuksille pätee

$$\omega_i = (\alpha L)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, \quad (26)$$

johon kertoimet αL saadaan myös taulukosta I.

Merkitsemällä

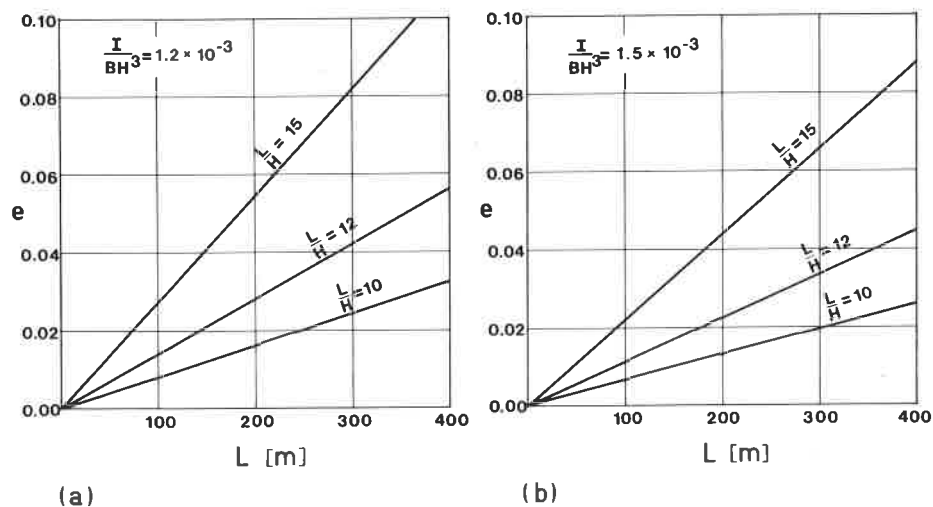
$$e = \frac{k}{EI\alpha^4} \quad (27)$$

saadaan kimmoisella alustalla olevan palkin ominaiskulmataajuudet ilmassa värähtelevän vastaavan palkin ominaiskulmataajuuksista (ω_i) yhteyden

$$\omega^2 = (1 + e)\omega_i^2 \quad (28)$$

avulla.

Kuhunkin ominaistajuuteen liittyvä dimensioton suure e karakterisoi kimmoisen alustan vaikutusta ja on sitä suurempi mitä pitempi palkki on korkeuteensa verrattuna.



Kuva 2 Vedessä vapaasti kelluvan teräspalkin ensimmäiseen ominaistajuuteen liittyviä e :n arvoja

Kuvaan 2 on piirretty vedessä kelluvan, päistään vapaan palkin ensimmäiseen ominaistajuuteen liittyviä e :n arvoja palkin pituuden funktiona L/H ja I/BH^3 parametreina. Tuloksia johdettaessa on oletettu, että palkin poikkileikkaus ei muutu pituussuunnassa.

Suuria tankkilaivoja tarkasteltaessa tällaisen idealisoinnin voidaan katsoa vastaavan todellisuutta suhteellisen hyvin. Suurten tankkilaivojen mitasuhteet ovat yleensä sellaiset, että parametrin L/H ja I/BH^3 suuruusluokat ovat

$$L/H \approx 12 \quad I/BH^3 \approx 1.5 \times 10^{-3} \quad (29)$$

Kuvasta 2 voidaan havaita, että suurimmissakin tankkilaivoissa kimmoisen alustan ominaistajuuksia korottava vaikutus on vain 2-3 prosenttia.

Muita tuentatapauksia, joita yleensä esiintyy vedessä kelluvien rakenteiden yhteydessä, on toisesta päästään vapaasti tuettu ja toisesta päästään vapaa palkki, jolle $e:n$ arvot tulevat hieman suuremmiksi kuin edellä tarkastellussa tapauksessa käytettäessä samoja $I/BH^3:n$, $L/H:n$ ja $L:n$ arvoja. Tällaiset rakenteet ovat kuitenkin yleensä niin lyhyitä, että kimmoisen alustan ominaistajuuksia korottava vaikutus jää 1-2 prosentin suuruiseksi.

PALKIN MUKANA VÄRÄHTELEVÄN ALUSTAN VAIKUTUS

Edellä esitettyssä tarkastelussa on otettu huomioon ainoastaan alustan staattinen vaikutus. Seuraavassa tarkastelussa pyritään valottamaan alustan dynaamista vaikutusta, kun palkin alustana on neste. Käsitelty ns. Winklerin alustamalli pätee tunnetusti mm. nestealustalle.

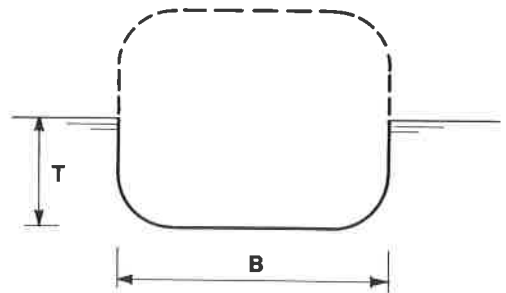
Jos nesteeseen upotettu kappale, joka on aluksi levossa, halutaan saattaa kiihtyvään liikkeeseen, tarvitaan voimaa paitsi itse kappaleen kiihdyttämiseksi myös ympärillä olevien nestepartikkeleiden kiihtyvään liikkeeseen saamiseksi. Vaikutus on sama jos kappaleen massaa ajatellaan lisätyksi sopivasti ja "unohdetaan" tämän jälkeen neste ja sen vaikutus. Hydrodynamiikassa tästä käytetään nimitystä lisätty massa. Ilmiötä on ensimmäisenä käsitellyt Lamb [6].

Kun äärettömän pitkä sylinteri ajatellaan upotetuksi kokonaan äärettömiin ulottuvaan nesteeseen ja tarkastellaan virtausta kussakin kohdassa kaksidimensioisena ideaalivirtauksena saadaan liike-energiatarkastelulla seuraava tulos; lisätty massa on sama kuin sylinterin syrjäyttämän nestetilavuuden massa eli

$$m' = \rho \pi r^2, \quad (30)$$

missä m' on lisätty massa sylinterin pituusyksikköä kohti ja r sylinterin säde.

Nesteen pinnalla värähtelevälle kappaleelle lisättyä massaa voidaan approksimoida Lewisin [7] mukaan seuraavasti. Kappaleen ympärillä tapahtuvan



Kuva 3 Kelluvan kappaleen nestepinnan alainen osa ja sen "kuva" pinnan yläpuolella

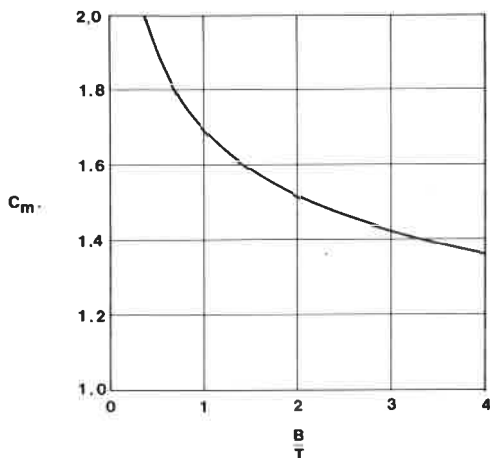
virtauksen ajatellaan olevan saman kuin kappaleen nestepinnan alapuolisen osan ja tämän nesteen pinnan yläpuolelle peilatus "kuvan" (kuva 3) muodostaman kappaleen ympärillä tapahtuva virtaus, kun tämä yhdistetty kappale upotetaan äärettömiin ulottuvaan nesteeseen. Lisätyksi massaksi otetaan puolet tämän kappaleen lisäystä massasta. Muiden kuin sylinteripoikkileikkauksisten kappaleiden lisätty massa voidaan laskea konformikuvausta käyttäen. Poikkileikkaukseltaan ellipsin muotoisen kappaleen lisätty massa pituusyksikköä kohti on

$$m' = \frac{1}{2} \pi b^2 \rho, \quad (31)$$

missä b on ellipsin liikettä vastaan kohtisuorassa olevan puoliakselin pituus. Muunmuotoisille palkeille Lewis on johtanut tulokset muodossa

$$m' = \frac{1}{2} C_m \pi b^2 \rho, \quad (32)$$

missä C_m , on poikkileikkauksen lisätyn massan kerroin ja $b = B/2$ (ks. kuva 3). Suorakaidepoikkileikkauksille on lähteestä [7] koottu tulokset kuvaan 4.



Kuva 4 Suorakaidepoikkileikkauksen lisätty massa

Koska virtaus nesteessä olevan kappaleen ympärillä on todellisuudessa kolmidimensioista, on näin saatu lisätty massa pituusyksikköä kohti liian suuri. Lewis määrittäi 2- ja 3-dimensioisten tapausten lisättyjen massojen suhteen tarkastelemalla pyörähdysellipsoidin värähtelyä akselia vastaan kohtisuorassa suunnassa. Tulokset hän esitti kertoimen J muodossa

$$J = \frac{T_3}{T_2}, \quad (33)$$

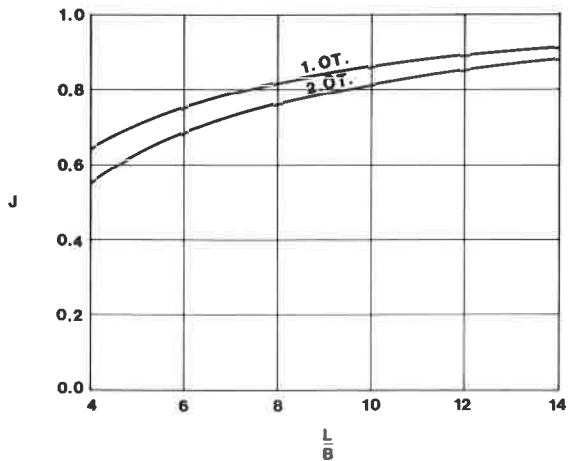
missä T_3 on kolmidimensioisen virtauksen ja T_2 kaksidimensioisen virtauksen liike-energia. Kuvaan 5 piirretty palkin 1. ja 2. ominaistuuksiin liit-

tyvät J :n arvot L/B :n funktiona lähteestä [7]. Lewisin otaksuman mukaan näitä voidaan soveltaa muillekin kuin ellipsipoikkileikkaukselle.

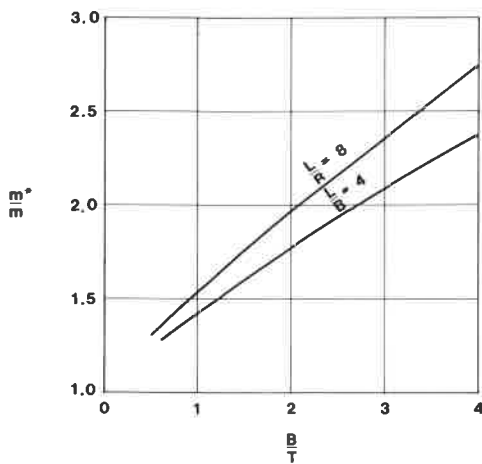
Nesteessä kelluvan palkin ominaistajuudet alustan staattinen ja dynaaminen vaikutus huomioonottaen saadaan nyt kaavasta (25) käyttämällä m :n sijasta virtuaalista massaa m^*

$$m^* = m + \frac{1}{2} J C_m \pi b^2 \rho_f \quad (34)$$

johon tarvittavat kertoimet C_m , ja J saadaan kuvista 4 ja 5.



Kuva 5 Korjauskertoimen J



Kuva 6 Virtuaalinen massa

Kuvaan 6 on piirretty suhde m^*/m suorakulmiopoikkileikkauksiselle palkille leveys-syvyys suhteen funktiona. Kuvasta voidaan havaita, että alustan dynaamisen vaikutuksen huomiotta jättäminen johtaa yli 50 %:n virheeseen kun $L/B > 8$ ja $B/T > 3$.

LOPPUSANAT

Haluan lausua parhaat kiitokseni Walter Ahlströmin säätiölle, jonka myöntämä apuraha on edesauttanut tämän artikkelin syntymistä.

LÄHDEKIRJALLISUUS

- [1] Ylinen A., Kimmo- ja lujuusoppi, I.osa. 2.painos. Porvoo, WSOY, 1976.
- [2] Mikkola M., Kimmoisella alustalla oleva palkki. HTKK Rakennusstatiikka, Julkaisu 1. Otaniemi, 1969.
- [3] Timoshenko S., Vibration problems in Engineering. 3.painos. New York, D. Van Nostrand Company Inc., 1955.
- [4] Comstock J.C. (toim.), Principles of Naval Architecture. New York, The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1967.
- [5] Todd F.H., Ship Hull Vibration. Lontoo, Edward Arnolds Ltd., 1961.
- [6] Lamb H., Hydrodynamics. Cambridge, Cambridge University Press, 1879.
- [7] Lewis G.M., The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship. Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers 37 (1929), s.1...20.

Antti Pramila, dipl.ins., Valtion teknillistieteellisen toimikunnan tutkimus-assistentti, Otaniemi