

TERÄSBETONISEN ARINAN MYÖTÖKUORMAN MÄÄRITTÄMINEN MYÖTÖVIIVAMENETELMÄLLÄ

Pekka Kanerva ja Seppo Salonen

Rakenteiden Mekaniikka Vol.10
No 1 1977 s. 1...10

YHTEENVETO: Artikkelissa käsitellään teräsbetonisen arinan myötökuorman määrittämistä. Myötömekanismien löytämiseksi sovelletaan laattojen myötöviivateoriaa. Vääntymän vaikutusta palkin myötötaivutusmomenttiin on käsitelty lyhyesti. Sovellutusesimerkkinä on laskettu teräsbetonisen ripalaatan myötökuormitus sekä koko rakenteen myötöön että rakenteen osan myötöön nähdessä. Toisena sovellutusesimerkkinä on määritetty aukollisen ripalaatan myötökuorma.

RAJAKUORMAMENETELMÄN PERUSLAUSEET

Staattisesti hyväksyttäväksi voimatilaksi nimitetään sellaista jännitysten jakaumaa, jossa jännitykset ovat tasapainossa keskenään ja ulkoisten voimien kanssa eivätkä riko myötöehtoa. Staattisesti määräämättömissä rakenteissa, kuten arinoissa, tällaisia voimatiloja on useita. Staattisen lauseen mukaan staattisesti hyväksyttävää voimatilaa vastaava kuorma on enintään yhtä suuri kuin rajakuorma. Tähän lauseeseen perustuvalla menetelmällä saadaan siis rajakuormalle alaraja-arvio.

Kinemaattisesti hyväksyttäväksi siirtymätilaksi nimitetään yhteensopivuusehdot ja kinemaattiset reunaehdot täyttävää siirtymätilaa. Tällaisessa siirtymässä ulkoisten voimien suorittama työ on yhtä suuri kuin plastisessa myötöössä tapahtuva (positiivinen) dissipaatio. Kinemaattisen lauseen (ylärajalauseen) mukaan kinemaattisesti hyväksyttävää mekanismia vastaava kuorma on vähintään yhtä suuri kuin rajakuorma. Tähän lauseeseen perustuvalla menetelmällä saadaan siis rajakuormalle yläraja-arvio.

Jos hyväksyttävä voimatila ja hyväksyttävä siirtymätila liittyvät toisiinsa (myötösäännön mukaisesti), niin vastaava kuorma on tarkka rajakuorma. Tätä "täydellistä ratkaisua" ei yleensä löydy, vaan joudutaan tyytymään jompiaan kumpaan raja-arviioon.

MYÖTÖVIIVATEORIA

Teräsbetonilaattojen myötöviivateoria perustuu tunnetusti ylärajalauseen käyttöön. Laatta oletetaan myötöviivoja pitkin jakautuneeksi osiin, jotka

kiertyvät toistensa suhteen näiden viivojen ympäri jäykkinä kappaleina. Myötöviivalla vaikuttavista jännitysten resultanteista, "yleistetyistä jännityksistä", tarkastellaan tällöin yleensä vain taivutus- ja vääntömomentteja.

Arinaan samaa ajatustapaa voi soveltaa siten, että arina jaetaan osiin viivoilla, joiden ympäri arinan osat kiertyvät jäykkinä kappaleina toistensa suhteen. "Myötöviivojen" ja arinan ripojen leikkauskohdissa vaikuttavat voimaresultantit ovat taivutus- ja vääntömomentti sekä leikkaus- ja normaali-voima. Kun kaikkien näiden osuus kokonaisdissipaatioon on samanmerkkinen, saadaan varmemmalla puolella oleva tulos, kun jätetään ottamatta huomioon muiden voimaresultanttien kuin taivutusmomentin osuus dissipaatioon. Dissipaatiotyön lausekkeeksi tulee tällöin yhden rivan osalta

$$D = M_U \kappa, \quad (1)$$

jossa M_U on rivan täysplastinen taivutusmomentti ja κ käyristymä. Täysplastisen momentin arvo M_U riippuu kuitenkin tietyssä määrin muiden voimasuureiden arvoista. Leikkausvoiman vaikutus voidaan jättää huomioonottamatta, varsinkin kun sen arvo suurten taivutusmomenttien kohdalla on vähäinen. Vetävän keskisen normaalivoiman N vaikutus otetaan huomioon tunnetulla tavalla:

$$M_U = f_c b d^2 \omega(N) \left(1 - \frac{\omega(N)}{2}\right) + \frac{N d}{2}, \quad (2)$$

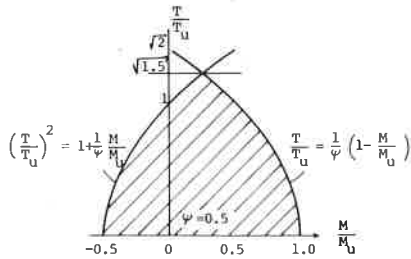
jossa f_c on betonin puristusjännitys yläreunassa, b rivan leveys, d sen tehollinen korkeus ja $\omega(N)d$ on 0-viivan etäisyys rivan yläreunasta:

$$\omega(N) = \frac{A_s f_{yd} - N}{f_c d b}, \quad (3)$$

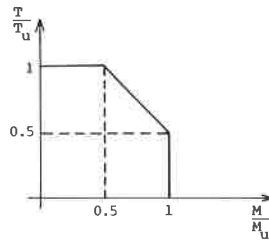
jossa A_s on vedettyjen terästen poikkileikkausala ja f_{yd} niiden myötöjännitys.

Kuvassa 1a on esitetty analyytisesti johdettu vääntömomentin vaikutus täysplastiseen taivutusmomenttiin [1] (M on taivutusmomentti, T on vääntömomentti ja T_U vääntökapasiteetti). Vastaava yhteys rajatilaohjeen [2] mukaisesti linearisoituna on kuvassa 1b. Vääntömomentilla on siten vain vähäinen vaikutus taivutuskapasiteettiin, kun $T/T_U < 0,5$.

Koska kyseessä on staattisesti määräämätön rakenne, ei vääntömomenttien suuruutta saada tasapainoehdojen perusteella, vaan ne määräytyvät osittain ripojen jäykkyysuhteiden perusteella. Jos rakenteeseen syntyy vääntöhalkeamia, niin sen vääntöjäykkyys alenee raudoituksen määrästä riippuen alle kymmeneen prosenttiin halkeamattoman poikkileikkauksen vastaavasta arvosta. Tällöin vääntömomentit rakenteessa jakautuvat uudelleen eikä niiden häviä-



Kuva 1a

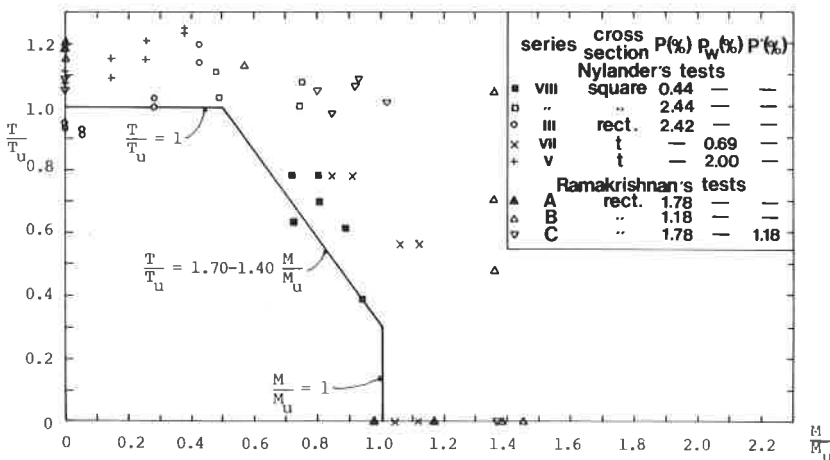


Kuva 1b

Kuva 1 a) Analyttisesti määritetty vääntömomentin vaikutus palkin taivutus-
kapasiteettiin. b) Vääntömomentin vaikutus palkin taivutuskapasiteeti-
tiin lähteen [2] mukaan.

minenkään murtorajatilassa ole tuhoisaa, jos tasapainoehdot voidaan toteut-
taa taivutusmomenttien avulla.

Vääntöraudoittamattoman palkin taivutuskapasiteettia kokeellisesti määri-
tettynä esittää kuva 2 [3]. Tulokset osoittavat, että vähäisellä vääntö-
momentilla ei ole sanottavaa vaikutusta palkin taivutuskapasiteettiin.
Samoin Peterssonin tutkimuksessa [4] näyttää siltä, että haoittamattoman pal-
kin vääntymällä ei olisi taivutuskapasiteettia pienentävää vaikutusta.
Tosin Peterssonin suorittamat kokeet eivät aivan vastaa tässä tarkasteltavaa
rakennetta, koska palkin vääntymä ei Peterssonin kokeissa enää kasvanut laa-
tan ja palkin välisen vääntö jäykän kiinnityksen haljettua.



Kuva 2 Vääntömomentin vaikutus palkin taivutuskapasiteettiin vääntöraudoitta-
malla palkilla lähteen [3] mukaan.

Kun ideaaliplastiseen materiaalimalliin perustuva myötöviivateoria edel-
lyttää kuitenkin rakenteelta muodonmuutoskykyä, on varmintä pyrkiä välttämään
suurta vääntymää edellyttäviä mekanismeja, jos halutaan selvittää ilman vääntö-
raudoitusta

Leikkausraudoituksen määrittämiseksi olisi tunnettava voimien jakauma rakenteessa. Tämä ei ole tässä menetelmässä mahdollista, sillä kriittisissä mekanismeissa ovat myötöviivojen väliinkin jäävät rakenteen osat staattisesti määräämättömiä. Tasapainoehdojen perusteella voidaan kuitenkin arvioida leikkausvoimien ylärajoja.

ESIMERKKEJÄ

Seuraavissa esimerkeissä on tarkasteltu kahta nurkistaan vapaasti tuettua ripalaattaa. Ensimmäisessä esimerkissä ripoihin liittyvä ylälaatta on yhtenäinen, toisessa aukollinen. Laatan kuormitukseksi on otaksuttu oman painon ($2,53 \text{ kN/m}^2$) lisäksi

1) oleskelukuormat $1,5 \text{ kN/m}^2$ + pistekuorma $1,5 \text{ kN}$,

2) oleskelukuorma + väliseinistä tuleva kuorma, yhteensä $2,5 \text{ kN/m}^2$.

Kun rajatilaohjeen [2] mukaiset varmuuskertoimet otetaan huomioon, saadaan vaihtoehtoisiksi kuormituksiksi:

1) $5,81 \text{ kN/m}^2$ + pistekuorma $10,4 \text{ kN}$,

2) $7,55 \text{ kN/m}^2$.

Lisäksi esimerkissä 2 tulee jompaan kumpaan aukon päähän porrassyöksen tukireaktio $2,27 \text{ kN}$. Reunaripojen normaalivoimat on laskettu tuulikuormien perusteella. Ripojen taivutuskapasiteetti on laskettu kuten suorakaidepalkille (yhtälö (2)). Laatan osuutta kapasiteettiin ei siten ole otettu huomioon ripojen väliseltä osalta.

Jos betonin puristuma teräksen venymän ϵ_s saavuttaessa alkavaa myötöä vastaavan arvon $\epsilon_s = 1,9 \text{ ‰}$ on pienempi kuin 2 ‰ , niin betonin jännitys kasvaa muodonmuutoksen kasvaessa. Kun teräkselle samalla käytetään ideaaliplastista materiaalimallia, niin sisäinen momenttivarsi kasvaa. Teräsvenymän kasvua $1,9 \text{ ‰}$:sta 10 ‰ :een vastaa esim. rivassa no 1 (ensimmäisessä esimerkissä) n. 4 %:n kasvu M_u :n arvossa. Rakenne ei siten käyttäydy tarkoin ideaaliplastisesti. Betonin puristusjännitys f_c ja vastaava M_u :n arvo on laskettu käyttämällä teräsvenymälle arvoa $\epsilon_s = 10 \text{ ‰}$ (rajatilaohje [2]). Jos mekanismi on sellainen, että se vierekkäisissä rivoissa edellyttää yhtä suurta käyristymää (esim. kuva 3b), niin erilaisesta w :n arvosta johtuen ϵ_s tulee eri suureksi ja sen arvo joissakin rivoissa nousee yli 10 ‰ :n. Virhe on kuitenkin vähäinen, kun rivat ovat yhtä korkeat ja niiden raudoitus on samaa suuruusluokkaa.

Mekanismit voidaan jakaa kahteen päätyyppiin: globaaleihin ja paikallisiin. Globaaleissa mekanismeissa ainakin yksi myötöviiva leikkaa rakenteen kahta eri reunaa (kuvan 3 tapaukset a...d). Paikallisissa mekanismeissa taas yksikään myötöviiva ei leikkaa rakenteen kahta eri reunaa (kuvan 3 tapaukset e...h). Jos rakenteen tuenta olisi epäsymmetrinen, olisi syytä tarkastella myös epäsymmetrisiä globaaleja mekanismeja.

Seuraavassa ei ole tarkasteltu mm. leikkauskapasiteettia eikä laatanosan taivutus- ja stanssautumiskestävyyttä vierekkäisten ripojen rajaamassa kentässä. Betonin laskentalujuus on kaikissa tapauksissa 20 N/mm^2 ja teräksen laskentalujuus 364 N/mm^2 .

Esimerkki 1

Esimerkkilaatan 1 ripojen geometria ja taivutuskapasiteetti on esitetty taulukossa 1. Tarkastellut mekanismit on esitetty kuvassa 3.

Kuvan 3a mukaiselle mekanismille saadaan: (yksiköt: kN, m)

$$D = 3 \cdot 9,0 \cdot 2 / 1,8 + 4 \cdot 24,9 / x = 30 + 99,6 / x \quad (4)$$

$$W_1 = n \cdot \{ [(5-2x) \cdot 3,6 \cdot 0,5 + 2 \cdot 3,6x / 3] \cdot 5,81 + 10,4 \} = n \cdot (62,7 - 6,97x) \quad (5)$$

$$W_2 = n \cdot \{ [(5-2x) \cdot 3,6 \cdot 0,5 + 2 \cdot 3,6x / 3] \cdot 7,55 \} = n \cdot (68,0 - 9,06x). \quad (6)$$

Näissä yhtälöissä n on ylimääräinen varmuuskerroin, jolla rajatilaohjeen [2] varmuuskertoimet on vielä kerrottu, D on dissipaatio sekä W_1 ja W_2 ovat kuormituksia 1 ja 2 vastaavat ulkoisten voimien työn arvot.

Virtuaalisen työn yhtälöistä $D = W_1$ ja $D = W_2$ saadaan 2. asteen yhtälö $x:n$ ratkaisemiseksi. Tämän yhtälön diskriminantin perusteella selviää, millä ehdolla myötöviivojen leikkauskohta eliminoiduu väliltä $0 < x < 2,5 \text{ m}$, jolloin kyseinen mekanismi ei ole mahdollinen. Periaatteessa sama tarkastelu pätee muille kuvan 3 tapauksille, mutta lasku on vielä yksinkertaisempi, koska x -parametria ei tule.

Dissipaation D ja ulkoisten voimien työn arvot W_1 ja W_2 on esitetty taulukossa 2.

Esimerkki 2

Esimerkkilaatan 2 ripojen geometria ja taivutuskapasiteetti on esitetty taulukossa 3. Tarkastellut mekanismit on esitetty kuvassa 4. Lisäksi on otettava huomioon kuvien 3e...3h mukaiset tapaukset, joita ei ole tässä kirjoitettu näkyviin. Virtuaalisen työn yhtälöillä saadut $W:n$ ja $D:n$ arvot on esitetty taulukossa 4. Erityisesti kuvien 4a ja 4b tapauksissa n ja x saadaan esimerkissä 1 esitettyllä tavalla tai myös ehdoista

$$n \cdot W - D = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (nW - D) = 0. \quad (8)$$

Yhtälö (7) pätee myös muissa tapauksissa, joten varmuus osittaisvarmuuskerroimilla kerrottujen kuormien aiheuttamaan myötämiseen nähden saadaan suoraan jakamalla dissipaatio D kuormien tekemällä työllä W . Tästä esimerkistä

voidaan todeta, että rakenteen aukkojen ottaminen huomioon käy helposti eikä muuta laskentaperiaatetta. Yleensä kaikki toisistaan poikkeavat aukkojen koot ja sijoitukset muuttavat rakenteen toiseksi, jolloin myötökuormatarkastelu on suoritettava uudestaan ja rakenteen raudoitusta on mahdollisesti muutettava.

Taulukko 1

| Rivan numero | Teräskset | b [mm] | d [mm] | A_s [mm ²] | N [kN] | ω | f_c [N/mm ²] | M_u [kNm] |
|--------------|----------------------|--------|--------|--------------------------|--------|----------|----------------------------|-------------|
| 1 | 2 Φ 16 | 145 | 242 | 402 | 24,2 | 0,174 | 20 | 29,9 |
| 2 | Φ 16+ Φ 12 | 120 | 242 | 314 | 0 | 0,197 | 20 | 24,9 |
| 3 | Φ 16+ Φ 12 | 145 | 242 | 314 | 28,3 | 0,123 | 19,8 | 22,9 |
| 4 | Φ 12 | 120 | 229 | 113 | 0 | 0,088 | 17,1 | 9,0 |

Taulukko 2

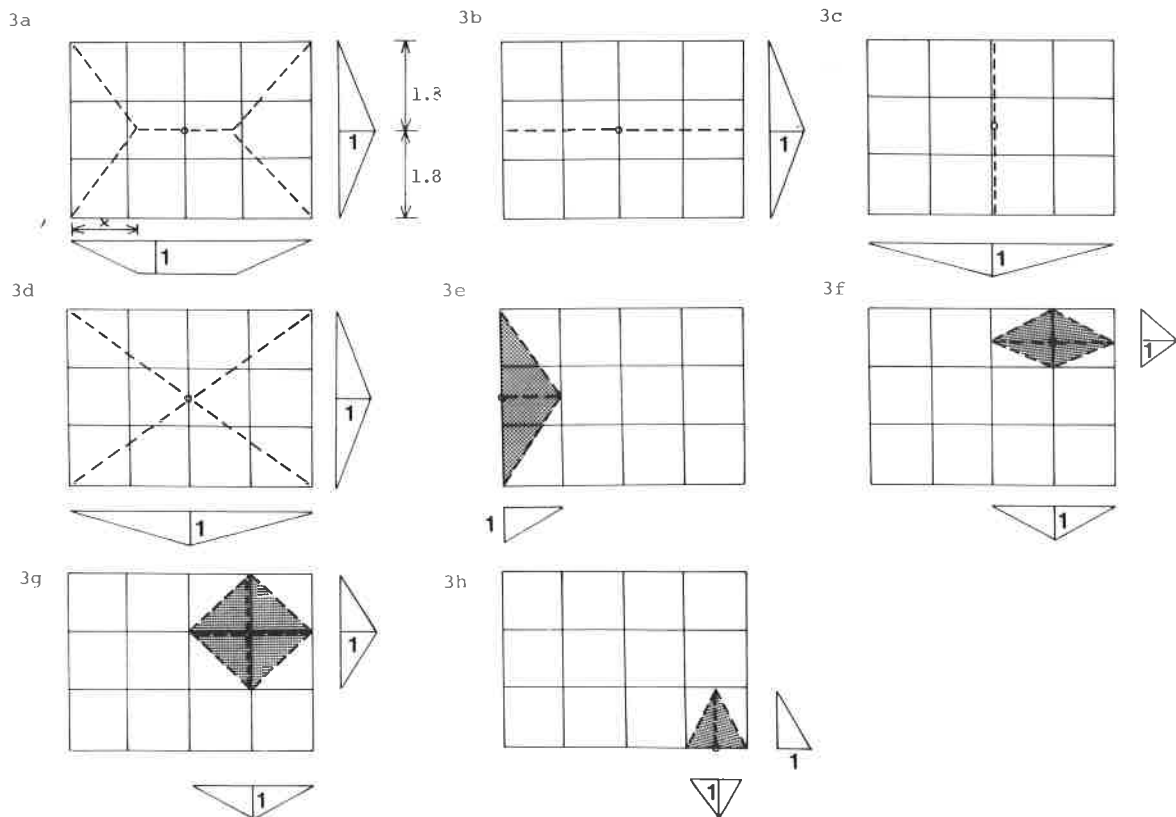
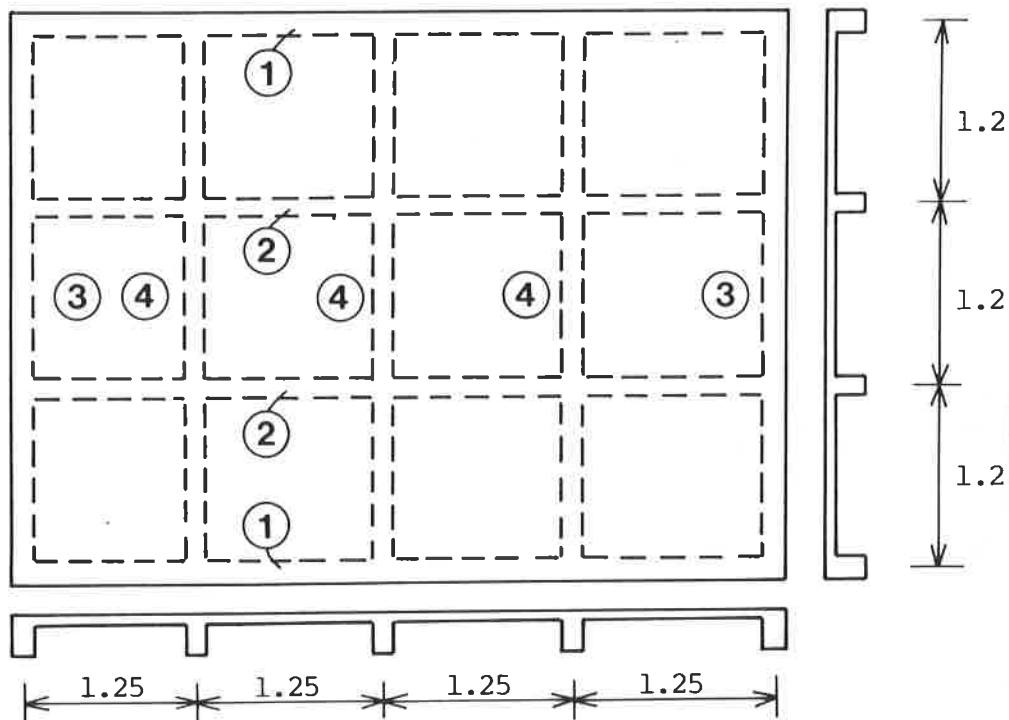
| Mekanismi | D [kNm] | W_1 [kNm] | W_2 [kNm] |
|-----------|---------|-------------|-------------|
| kuva 3a | yht.(4) | yht.(5) | yht.(6) |
| " 3b | 80,9 | n·62,7 | n·68,0 |
| " 3c | 87,7 | n·62,7 | n·68,0 |
| " 3d | 69,7 | n·45,3 | n·45,3 |
| " 3e | 25,9 | n·14,8 | n·5,7 |
| " 3f | 21,3 | n·13,3 | n·4,2 |
| " 3g | 46,5 | n·16,2 | n·7,6 |
| " 3h | 33,1 | n·13,3 | n·3,8 |

Taulukko 3

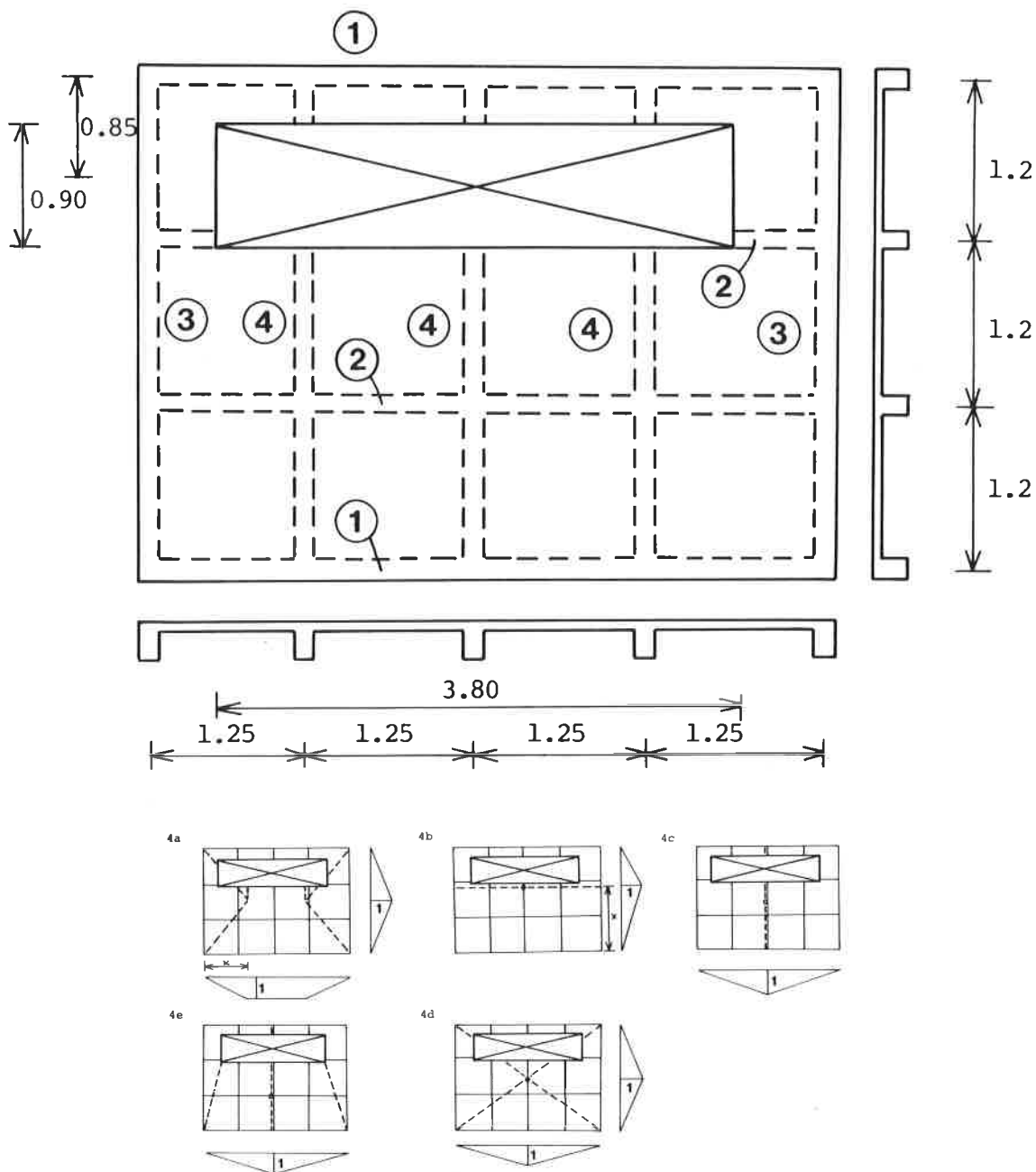
| Rivan numero | Teräskset | b [mm] | d [mm] | A_s [mm ²] | N [kN] | ω | f_c [N/mm ²] | M_u [kNm] |
|--------------|----------------------|--------|--------|--------------------------|--------|----------|----------------------------|-------------|
| 1 | 2 Φ 16 | 145 | 242 | 402 | 24,2 | 0,174 | 20 | 29,9 |
| 2 | Φ 16+ Φ 12 | 120 | 242 | 314 | 0 | 0,197 | 20 | 24,9 |
| 3 | 2 Φ 16 | 145 | 241 | 402 | 24,2 | 0,175 | 20 | 29,8 |
| 4 | Φ 16 | 120 | 225 | 201 | 0 | 0,136 | 20 | 15,4 |

Taulukko 4

| Mekanismi | D [kNm] | W_1 [kNm] | W_2 [kNm] |
|-----------|-------------|-------------|-------------|
| kuva 4a | 17,1+49,8/x | 54,4-6,97x | 56,8-9,06x |
| " 4b | 66,5 | n·54,9 | n·57,5 |
| " 4c | 67,8 | n·50,9 | n·52,5 |
| " 4d | 45,5 | n·36,4 | n·36,5 |
| " 4e | 43,8 | n·41,1 | n·39,9 |



Kuva 3 Esimerkissä 1 tarkasteltu rakenne ja myötökuvat



Kuva 4 Esimerkissä 2 tarkasteltu rakenne ja myötökuvat

LOPPUPÄÄTELMÄT

Arinan rajakuorman määrittäminen tutkimalla ulkoisen voiman sekä rakenteen siirtymien ja voimien välistä yhteyttä edellyttää fysikaalisen epälineaarisuuden (plastisoitumisen) huomioonottamista. Koska voimien jakautuminen

tällöin muuttuu kimmoisen tilan mukaisesta ratkaisusta, ei lineaarisuuteen perustuvia ohjelmia voida käyttää hyväksi. Ohjelmat, joissa epälineaarisuus voidaan ottaa huomioon, ovat mutkikkaampia, koska lopputilaan pääsemiseksi on koko kuorma-siirtymä-jännitystarkastelu käytävä läpi. Tästä syystä tällainen analyysi on lineaarista analyysiä kalliimpi, sen hinta ja tietyssä määrin tuloksetkin riippuvat ohjelman käyttäjästä. Lisäksi pienikin muutos rakenteeseen edellyttää uuden kuorma-siirtymä-jännitystarkastelun. Tässä artikkelissa käytetyllä menetelmällä voidaan käsinlaskulla selvittää rakenteen varmuus myöden suhteen. Muuttamalla ripojen raudoitusta voidaan muuttaa rakenteen varmuutta eri mekanismien esiintymisen suhteen. Tällä tavoin voidaan vähäisellä työmäärällä optimoida teräsmenekkiä. Varmuudet eri mekanismien esiintymisen suhteen voidaan myös saada sellaiseen järjestykseen, että vääntöraudoittamattomissa rivoissa vääntymää edellyttävät mekanismit tulevat eliminoiduiksi.

KÄYTETYT MERKINNÄT

| | |
|--------------|--|
| A_s | rivan alapinnan terästen poikkipinta-ala |
| A_{sy} | rivan yläpinnan terästen poikkipinta-ala |
| b | rivan leveys |
| d | rivan tehollinen korkeus |
| D | dissipaatiotyö |
| f_c | betonin puristusjännitys puristetussa reunassa |
| f_{yd} | teräksen myötölujuus |
| M | rivan taivutusmomentti |
| M_u | rivan taivutuskapasiteetti |
| n | vaadittujen varmuuskertoimien lisäksi tuleva varmuuskerroin, joka osoittaa ko. mekanismin "ylimääräistä" varmuutta |
| N | rivassa vaikuttava vetävä normaalivoima |
| T | rivan vääntömomentti |
| T_u | rivan vääntökapasiteetti |
| W | ulkoisten voimien työ |
| x | myötöviivojen (kuvat 3 ja 4) asemaa osoittava mitta |
| ϵ_s | vedettyjen terästen venymä |
| κ | käyristymä |
| ψ | $= A_{sy}/A_s$ |
| ω | rivan puristetun pinnan korkeuden suhde rivan teholliseen korkeuteen |

KIRJALLISUUTTA

- [1] Elfgren, L., Reinforced Concrete Beams Loaded in Combined Torsion, Bending and Shear, Chalmers University of Technology, Division of Concrete Structures, Publication 71:3, Göteborg 1972.
- [2] Sisäasiainministeriön ohjeet betoni- ja teräsbetonirakenteiden suunnittelusta rajatilatarkastelujen perusteella, Helsinki 1975.
- [3] Hsu, Thomas T.C., Torsion of Structural Concrete - Interaction Surface for Combined Torsion, Shear, and Bending in Beams Without Stirrups. Journal of the American Concrete Institute, Jan. 1968, p. 51-60.
- [4] Petersson, Tage, Inverkan av tvångsvridning på ribb-balkar utan byglar. Bygghforskningen, Sammanfattningar 58:1975.

Pekka Kanerva, apul.prof., Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi

Seppo Salonen, dipl.ins., Valtion teknillistieteellisen toimikunnan tutkimus-assistentti, Otaniemi