

Juhani Koski

YHTEENVETO: Kirjoituksessa käsitellään tasokehän painon minimointia rajakuormateorian ja lineaarisen ohjelmoinnin avulla. Optimoititehtävän muuttujina ovat palkkien plastiset momentit kehän ollessa muuten annettu. Kuormitustapausten lukumäärä on yksi. Esitys pohjautuu plastisuusteoriaan, erityisesti sen kinemaattiseen menetelmään. Normaali- tai leikkausvoiman vaikutusta myötöhdossa ei oteta huomioon. Minimoititehtävän kohdefunktiona oleva kehän paino linearisoidaan ja rajoitusepäyhtälöt saadaan sortumismekanismien työyhtälöistä. Näin muodostuu ongelmasta lineaarisen ohjelmoinnin tehtävä. Sovellutusesimerkinä tarkastellaan suorakulmaista kolmesta palkista tehtyä tasokehää. Tämä kolmen muuttujan minimoititehtävä ratkaistaan yksityiskohtaisesti simplex-algoritmiin perustuvan yksinkertaisen ATK-ohjelman avulla.

YLEISTÄ

Johdanto

ATK-välineiden kehittyessä on matemaattinen optimointiteoria tullut tärkeäksi työkaluksi liiketaloudellisissa ja teknisissä suunnittelutehtävissä. Erittäin hyvät sovellusmahdollisuudet sillä on lujuusopin alueella. Tällöin on tavoitteena yleensä rakenteen painon minimointi.

Plastisuusteoriaan pohjautuva rajakuormamenetelmä tarjoaa käytännön rakennesuunnittelijalle yksinkertaisen ja selväpiirteisen mahdollisuuden kehärakenteiden painon minimoimiseen.

Tämän kirjoituksen tavoite on pukea kyseinen minimointiongelma lineaarisen ohjelmoinnin tehtäväksi ja esittää eräs tapa sen ratkaisemiseksi.

Perusoletukset ja kinemaattinen teoreema

Esityksessä tarkastellaan staattisesti kuormitettuja ideaaliplastisesta aineesta valmistettuja tasokehiä, joiden kuormitus on annettu. Sitkeästä rakenneteräksestä valssatut muototeräspalkit ovat tavallisimmat sovellutuksissa esiintyvät rakenne-elementit, jotka täyttävät kohtuullisen hyvin kyseisen aineoletuksen.

Normaalivoiman vaikutus myötöön jätetään ottamatta huomioon. Tällöin pel-

kistyy myötöehto yksinkertaiseen asuun

$$M = M_p, \quad (1)$$

missä

M on poikkileikkauksen taivutusmomentti ja

M_p on poikkileikkauksen plastinen momentti.

Rakenne saattaa myös menettää stabiilisuutensa ennen rajakuormaa vastaavan sortumismekanismien syntymistä. Tätä erityisongelmaa ei ole tässä yhteydessä tarkasteltu.

Edelleen oletetaan optimointitehtävän muuttujien, palkkien plastisten momenttien M_p^i , olevan jatkuvia. Näinhän ei asia käytännön suunnittelutyössä ole, vaan käytettävissä on tavallisesti muototerästen sarja.

Sortumismekanismien työyhtälöksi sanotaan sitä virtuaalisten siirtymien periaatetta soveltamalla saatavaa yhtälöä, joka syntyy, kun kuormitusten tekemä työ ja plastisissa nivelissä tehty dissipaatiotyö asetetaan yhtä suuriksi. Tarkastelun kohteena olevassa tasokehän painon minimointitehtävässä työyhtälöllä on keskeinen merkitys. Rajakuormateoriassa käytetään kahta eri ratkaisumenetelyä: staattista ja kinemaattista menetelmää. Tämä esitys käyttää jälkimmäistä nojaten sen perustana olevaan kinemaattiseen teoreemaan [8, s. 68]:

Olkoon rakenteen kuormitusmuoto \bar{p} annettu. Rajakuorma $k\bar{p}$ ($k \in \mathbb{R}$) on pienin kuorma, joka työyhtälöstä saadaan, kun rakenteesta muodostetaan nivelmekanismeja sijoittamalla siihen sopiva määrä plastisia niveliä.

PAINON MINIMOINTI

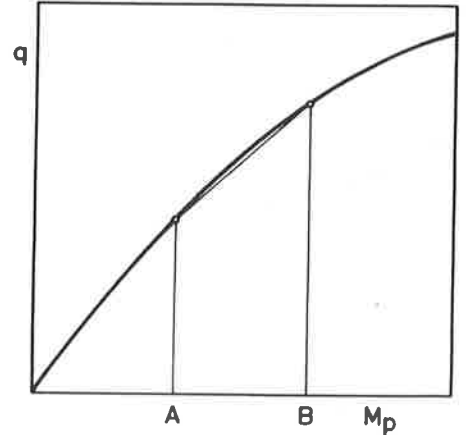
Kohdefunktio

Palkkirakenteita konstruoitaessa käytetään rakenneosina useimmiten valssattuja muototeräksiä, joille painon pituustiheys q esitettynä plastisen momentin M_p funktiona on likimain kuvan 1 mukainen.

Sillä pienellä alueella AB, jolla suunnittelija tavallisesti liikkuu, voidaan usein käyttää lineaarista approksimaatiota

$$q = a + b M_p \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Tässä kirjoituksessa palkin painolla tarkoitetaan sen massaa.



Kuva 1. Palkin painon pituustiheys q poikkileikkauksen plastisen momentin M_p funktiona. Välillä AB käyrä lineaarisoidaan optimointia varten.

Tällöin saadaan koko rakenteen painoksi

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i L_i = \sum_{i=1}^n (a + b M_P^i) L_i =$$

$$a \sum_{i=1}^n L_i + b \sum_{i=1}^n M_P^i L_i, \quad (3)$$

missä

n on rakenteen palkkien lukumäärä ja L_i on palkin i pituus.

Termi $a \sum_{i=1}^n L_i$ ei riipu palkkien valinnasta, joten kokonaispainon Q sijaan voidaan minimoida funktiota

$$z = \sum_{i=1}^n M_P^i L_i. \quad (4)$$

Kun palkkia kuormitetaan niin paljon, että sen eräessä poikkileikkauksessa taivutusmomentti kasvaa plastisen momentin M_P suuruiseksi, on kyseisen poikkileikkauksen normaalijännitysjakautuma lähellä kuvan 2. esittämää suorakaidekuviota. Määritellään poikkipinnan plastinen taivutusvastus Z yhtälöllä [8, s.22]

$$M_P = R_{eL} Z, \quad (5)$$

missä

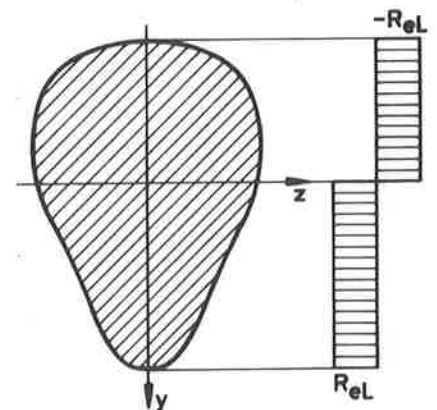
R_{eL} on materiaalin alempi vetomyötöraja.

Plastisen taivutusvastuksen laskukaavaksi tulee tällöin

$$Z = \iint_A |y| dA, \quad (6)$$

missä

y on poikkipinnan plastisesta pintakeskiöstä mitattu koordinaatti.



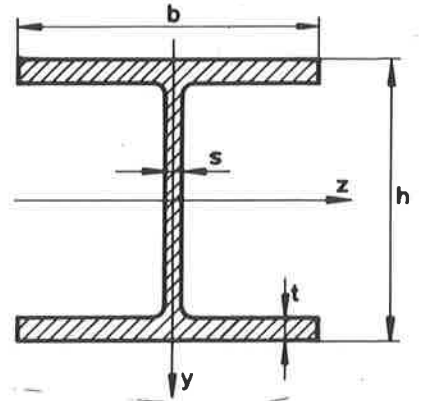
Kuva 2. Palkin poikkileikkauksen jännitysjakautuma rajatilassa $M = M_P$.

Tehtävän muodostamisen kannalta keskeinen lineaarisuusoletus on useissa lähteissä sivuutettu pelkällä maininnalla. Oletuksen hyvyttä on tässä pyrit-

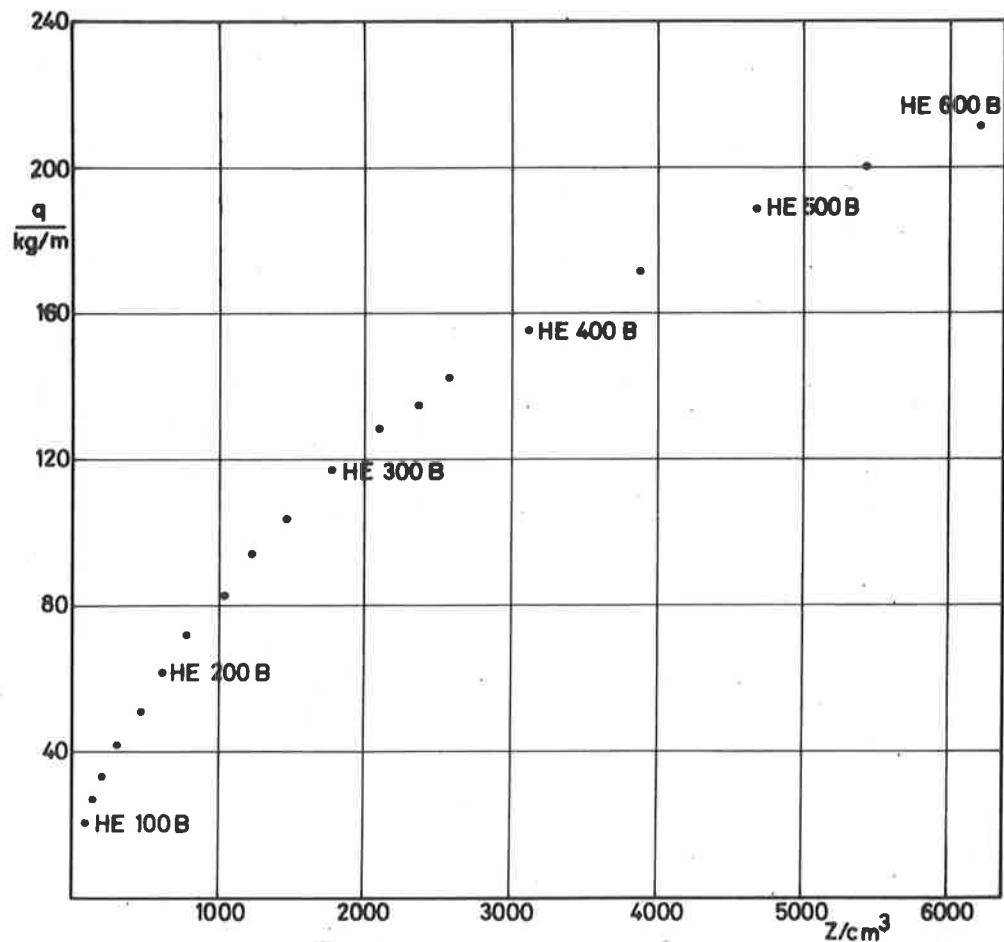
ty karkeasti hahmottamaan eräässä erityistapauksessa, nimittäin kuumavalssattujen leveiden I-tankojen HE ... B SFS 2031 osalta. Tätä varten on laskettu profiilien HE 100...600 B plastinen taivutusvastus käyttäen lauseketta

$$Z = bt(h-t) + s\left(\frac{h}{2}-t\right)^2, \quad (7)$$

johon liittyvät merkinnät on esitetty kuvassa 3. Palkkien nurkkapyöristyksiä ei tässä ole otettu huomioon. Kuvaan 4 on piirretty laskelmien tuloksena saatu $q(Z)$ -pistejoukko.



Kuva 3. Kuumavalssattu leveä I-tanko HE ... B SFS 2031, merkinnät.



Kuva 4. Kuumavalssattujen leveiden I-tankojen HE 100...600 B SFS 2031 painon pitiuustiheys q poikkileikkauspinnan plastisen moduulin Z funktiona.

Optimointitehtävän muodostaminen

Rakenne voi sortua usealla eri mekanismilla riippuen vaikuttavasta kuormituksesta ja palkkien plastisista momenteista M_p^i . Optimointitehtävässä pyritään löytämään se plastisten momenttien vektori

$$\bar{x} = [M_p^1 \ M_p^2 \ \dots \ M_p^n]^T, \quad (8)$$

joka minimoi tarkasteltavan kehärakenteen painon. Rajoitusepäyhtälöt kyseisessä minimointitehtävässä saadaan sortumismekanismien työyhtälöistä. Tällöin on otettava huomioon kaikki kysymykseen tulevat mekanismit. Näin saadaan lineaarinen epäyhtälöryhmä

$$A\bar{x} \geq \bar{b}, \quad (9)$$

joka muuttujien M_p^i täytyy toteuttaa. Lisäksi on ehdon

$$M_p^i \geq 0 \quad \forall i \quad (10)$$

oltava voimassa.

Ottamalla käyttöön merkintä

$$\bar{c} = [L_1 \ L_2 \ \dots \ L_n]^T \quad (11)$$

saadaan kaavan 4 kohdefunktiolle esitysmuoto

$$z = \bar{c}^T \bar{x}. \quad (12)$$

Kokoamalla edellä esitetty voidaan optimointiongelma muotoilla seuraavasti:

$$\min z = \bar{c}^T \bar{x}$$

$$A\bar{x} \geq \bar{b}$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i.$$

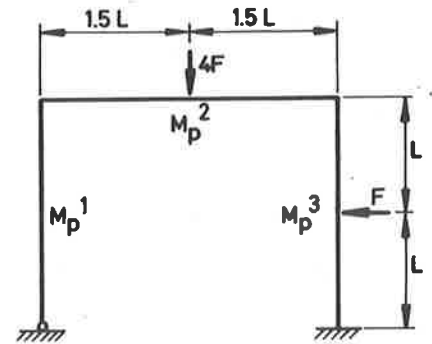
(13)

Tämä on lineaarisen ohjelmoinnin tehtävä, joka voidaan ratkaista esimerkiksi simplex-tekniikalla tai jollakin sen kehittyneemmällä muunnoksella. Ratkaisuvektorin \bar{x}^0 ei tarvitse välttämättä olla yksikäsitteinen, vaan minimipai-

no voidaan eräissä tapauksissa saavuttaa useammalla eri valinnalla. Käytännön suunnittelutyössä, jossa muuttujat x_i eivät ole jatkuvia, saattaa olla tarpeen lopuksi tutkia useita optimikohdan ympärillä tehtyjä valintoja ja vertailla erikseen niiden keskinäistä paremmuutta.

SOVELLUTUSESIMERKKI

Tarkastellaan sovellutusesimerkkinä kuvan 5 mukaista jäykästi ja nivelisesti alustaan tuettua tasokehää. Tehtävänä on minimoida rakenteen paino siten, että se kestää annetun kuormituksen (F ja $4F$) sortumatta. Plastiset momentit pystypalkeilla ovat M_p^1 ja M_p^3 sekä vaakapalkilla M_p^2 .



Kuva 5. Esimerkkikehä kuormituksineen.

Plastisten nivelten mahdollisia syntymiskohtia ovat palkkien päät sekä pistevoimien vaikutuskohdat. Esimerkkikehässä näitä kriittisiä poikkileikkauksia on seitsemän, sillä tukinivelen kohta ei tule kysymykseen.

Rakenteen mahdollisten sortumismekanismien lukumäärä on tässä tapauksessa 21. Nämä on esitetty kuvassa 6. Mikä niistä kulloinkin toteutuu, riippuu plastisten momenttien M_p^i arvoista. Lisäksi on kunkin mekanismin alapuolelle kirjoitettu sitä vastaava työyhtälö. Kohdefunktioksi tulee

$$z = \sum_{i=1}^n M_p^i L_i = M_p^1 \cdot 2L + M_p^2 \cdot 3L + M_p^3 \cdot 2L \quad (14)$$

Esimerkkinä olevan kehrarakenteen painon minimointitehtävä voidaan tällöin esittää seuraavassa asussa:

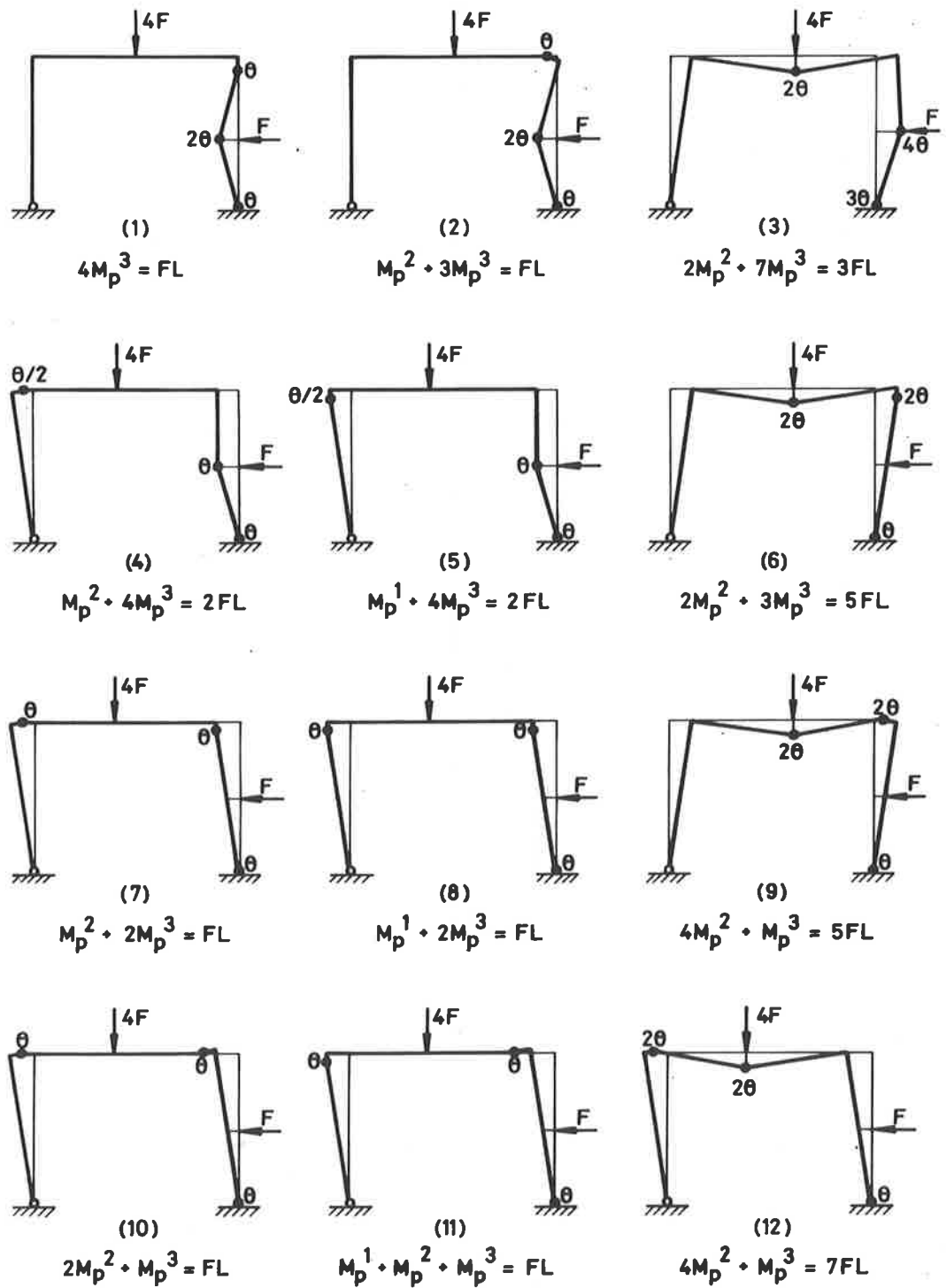
$$\min z = \begin{bmatrix} 2L & 3L & 2L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_p^1 \\ M_p^2 \\ M_p^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_P^1 \\ M_P^2 \\ M_P^3 \end{bmatrix} \quad IV \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \\ 7 \\ 7 \\ 6 \\ 6 \\ 12 \\ 12 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad FL$$

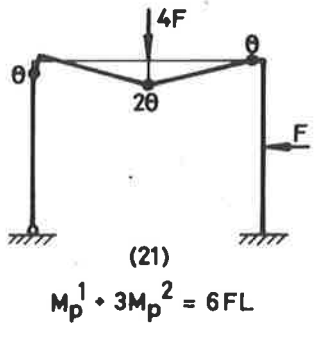
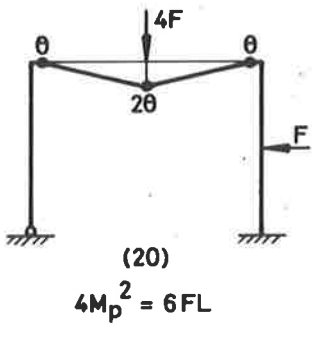
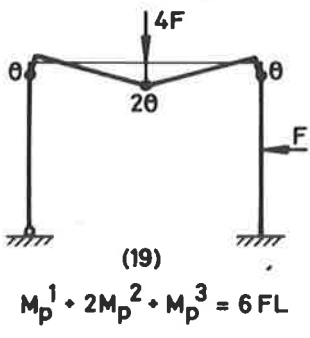
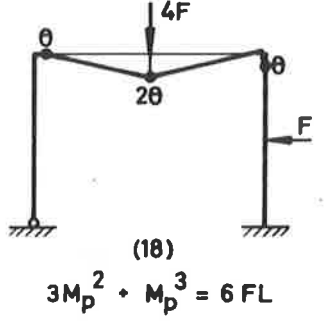
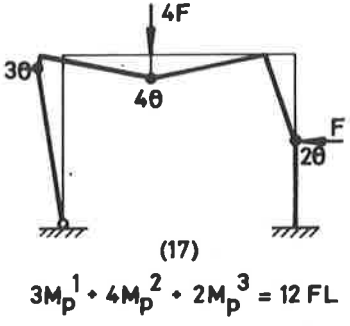
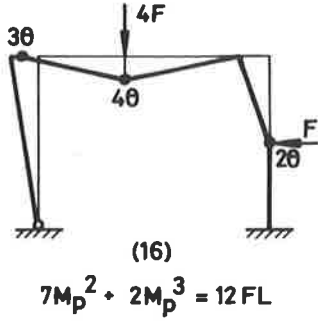
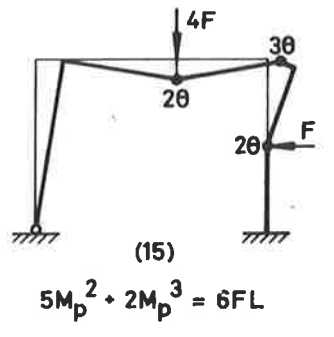
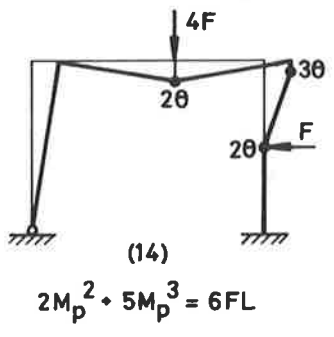
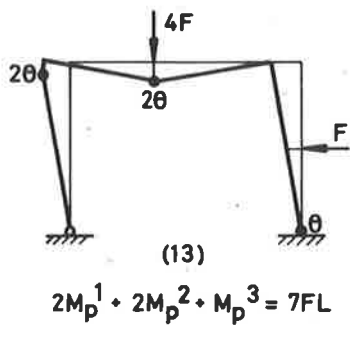
(15)

$$M_P^1, M_P^2, M_P^3 \geq 0$$

Sen numeerinen ratkaisu on suoritettu lähteessä [7] esitetyllä simplex-algoritmiin perustuvalla yksinkertaisella ohjelmalla kalkulaattorin Hewlett Packard 9830 A avulla. Rajoitusepäyhtälöiden lukumäärä on suuri verrattuna muuttujien lukumäärään. Näin ollen on edullista siirtyä käsittelemään duaalitehtävää, joka nyt on standardimuotoinen lineaarisen ohjelmoinnin ongelma. Käyttämällä pelivaramuuttujia $y_{22} \dots y_{24}$ saadaan tehtävä täydennettyä kanoniseen muotoon



Kuva 6. Esimerkkikehän kaikki käyttöön tulevat sortumismekanismit ja niitä vastaavat työyhtälöt.



Kuva 6. Esimerkkiköhen kaikki käyttöön tulevat sortumismekanismit ja niitä vastaavat työyhtälöt.

$$\max p = FL [1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 2 \ 5 \ 1 \ 1 \ 5 \ 1 \ 1 \ 7 \ 7 \ 6 \ 6 \ 12 \ 12 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 2 & 5 & 7 & 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \end{array} \right. \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad L \ (16)$$

Ohjelma vaatii lähtötietona myös jonkin kantaratkaisun, mikä tässä tapauksessa on kanonisesta muodosta helposti nähtävissä. Primaalitehtävän 15 ratkaisuvektorin \bar{x}^0 komponentit ovat duaalitehtävän 16 optimaalisen simplex-taulun pelivaramuuttujien simplex-kertoimet. Optimin antava ratkaisuvektori ja tätä vastaava kohdefunktion arvo ovat

$$\bar{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.375 \\ 0.25 \end{bmatrix} FL, \quad \min z = 9.625 FL^2 \quad (17)$$

Optimikohdassa ovat rajoitusyhtälöt (1), (5), (13), (14) ja (19) aktiivisia. Lähteessä [1, s. 151...153] annettu vastaus yhtyy saatuun tulokseen.

LOPPUPÄÄTELMÄT

Tässä esitetty kinemaattiseen lähestymistapaan pohjautuva tasokehän painon minimointi tarjoaa verraten helppokäyttöisen menetelmän pienten ja keskisuurten rakenteiden käsittelyyn. Menetelmä on karkea ja sillä on heikkouksia, joista tärkeimmät on lueteltu kappaleessa 1.2. Tehtävän formulointi lineaarisen ohjelmoinnin ongelmaksi mahdollistaa valmiiden optimointiohjelmien käyttämisen ratkaisussa. Kehän tai jatkuvan palkin, johon menetelmä luonnollisesti myös soveltuu, palkkien lukumäärän ollessa pieni voidaan tehtävä useimmiten ratkaista ohjelmitavaa kalkulaattoria apuna käyttäen. Suurten probleemojen käsittelyyn on kehitetty omat erityistekniikkansa [5], joihin tässä ei puututa. Kinemaattisen lähestymistavan lisäksi voidaan tehtävä ratkaista myös staattisen menetelmän avulla. Tällöin joudutaan kuitenkin tinkimään havainnol-

lisuudesta. Lineaarisesti riippumattomien kantamekanismien käyttöä kinemaattisen menetelmän yhteydessä on esitelty lähteessä [9].

Tämä esitys pohjautuu ensisijaisesti lähteisiin [8] ja [6], joista edellinen tarjoaa plastisuusteorian ja jälkimmäinen optimoinnin perustiedot. Sovellustusesimerkki on valittu lähteestä [1].

KIRJALLISUUTTA

- [1] Cohn, M.Z., Analysis and Design of Inelastic Structures, Volume 2: Problems, University of Waterloo Press, 1972, 521 s.
- [2] Dorn, W.S. and Greenberg, H.J., Linear Programming and Plastic Limit Analysis of Structures, Quart. Appl. Math., 15, 155 (1957).
- [3] Gallagher, R.H. and Zienkiewicz, O.C., Optimum Structural Design, Theory and Applications, London, John Wiley & Sons, 1973, 358 s.
- [4] Heyman, J., Plastic Design of Plane Frames for Minimum Weight, The Structural Engineer, 31, 125 (1953).
- [5] Kuzmanovic, O. and Willems, N., Optimum Plastic Design of Steel Frames, J. Struct. Div., ASCE, 98, No. ST 8, August (1972).
- [6] Luenberger, D.G., Introduction to Linear and Nonlinear Programming, London, Addison - Wesley Publishing Company, 1973, 356 s.
- [7] Manninen, J., Lineaarisen optimoinnin matematiikkaa, Helsinki, Oy Gaudeamus Ab, 1975, 95 s.
- [8] Massonnet, C.E. and Save, M.A., Plastic Analysis and Design, Volume one, Beams and Frames, New York, Blaisdell Publishing Company, 1965, 379 s.
- [9] Pennala, E., Optimointi rakenteiden suunnittelutehtävän osana, Helsinki 1975, Teknillinen korkeakoulu, Lisensiaattityö.
- [10] Prager, W., Minimum - Weight Design of a Portal Frame, J. Eng. Mech. Div., ASCE, 82, No. EM 4, October (1956).
- [11] Thierauf, von G., Traglastberechnung und -bemessung von Stockwerkrahmen mit Hilfe der Linearen Programmierung, Der Stahlbau, 44, 19 (1975).
- [12] Toakley, A.R., Some Computational Aspects of Optimum Rigid - Plastic Design, Int. J. Mech. Sci., 10, 531 (1968).

Juhani Koski, dipl.ins., Tampereen teknillinen korkeakoulu, Tampere