

KOTELOPALKKISILLAN VÄÄNTÖ JA POIKKILEIKKAUKSEN VINOUTUMINEN

Klaus Söderlund

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 9
No. 3. 1976 s. 1...30.

YHTEENVETO: Artikkelissa käsitellään yleisen vääntöä aiheuttavan kuormituksen rasittaman kotelopalkin normaalijännitystilaa. Teorian perustana on tietyin oletuksin yksinkertaistettu kimmoteoria, jonka sovellutuksina on tarkasteltu palkkeja, joiden geometria vastaa käytännön rakenteita. Tällöin on pystytty yleisessä muodossaan varsin hankalat yhtälöt sieventämään melko yksinkertaisiksi eräissä erikoistapauksissa. Teoriaa on edelleen käytetty jännitetyn betonisen sillan analysointiin ja määritetty yksikkökuormien aiheuttamia antimetrisia jännitystiloja eräälle poikkileikkaukselle.

Teoria ei sovellu teräsbetonisiltoihin, koska palkin materiaaalilta edellytetään kimmoteorian oletusten mukaista jatkuvuutta, joka taasen halkeaman muodostuessa häviää teräsbetonipoikkileikkauksesta.

JOHDANTO

Tarkastellaan kuvan 1.1 mukaista mielivaltaisen kuormituksen $p(x)$ rasittamaa kotelopalkkia. Jaetaan kuormitus kuvan mukaisesti osiin A ja B. Kuormitusta A vastaa teknisen taivutusteorian mukainen pitkittäinen jännitysjakautuma. Momenteista aiheutuu kehäteorian mukainen poikkittäinen jännitysjakautuma. Kuormitus B aiheuttaa palkkiin ns. puhtaan väännön. Vastaavat sisäiset voimat saadaan tasapainoehtojen mukaan kuvan 1.1 D ja E tapausten summana. Näiden alapuolella on esitetty vastaavat siirtymätilat. Seuraavassa tarkastellaan kuvan 1.1 D kohdan mukaista vapaata ja yleistä vääntöä sekä kohdan E mukaista kotelon poikkileikkauksen vinoutumista.

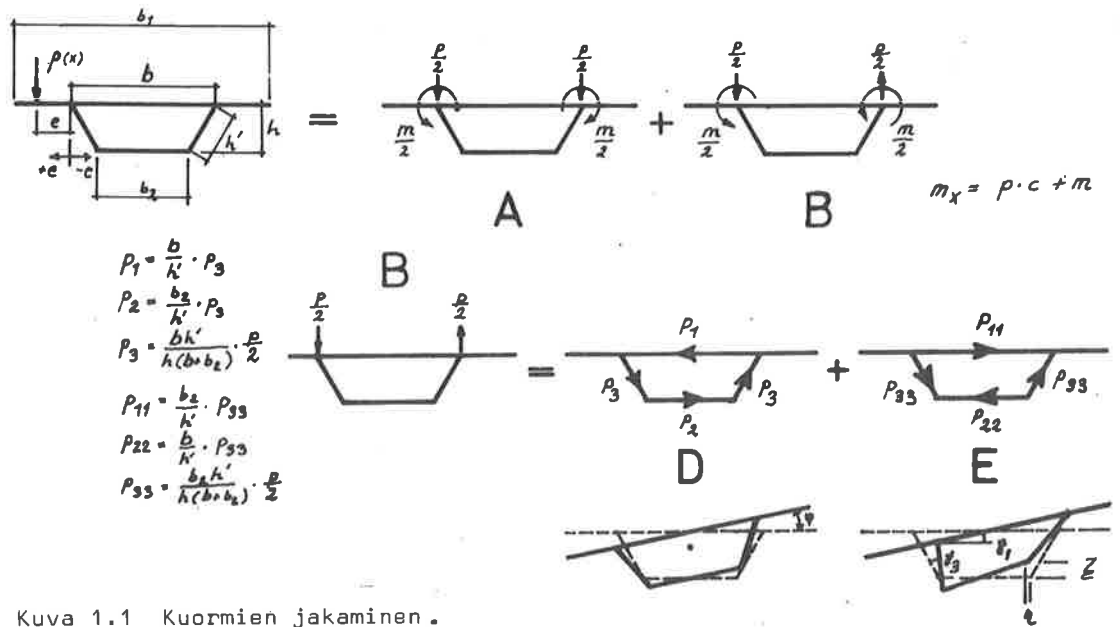
VAPAA VÄÄNTÖ

Tarkastellaan kuvan 2.1 mukaista poikkileikkausta. Oletetaan, että poikkileikkauksen muoto ei vinoudu. Jännitysfunktiolle ϕ otetaan reunaehdot täyttävä muoto

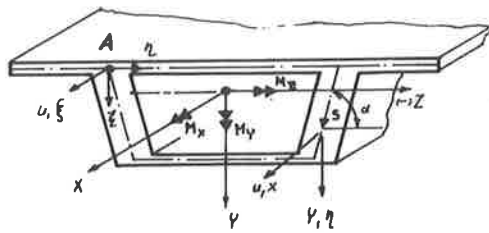
$$\phi = \phi_0 \left(1 - \frac{4e^2}{t^2}\right) + \frac{H}{2} \left(1 - \frac{2e}{t}\right).$$

Leikkausjännitykset ovat ϕ :n derivaattoja

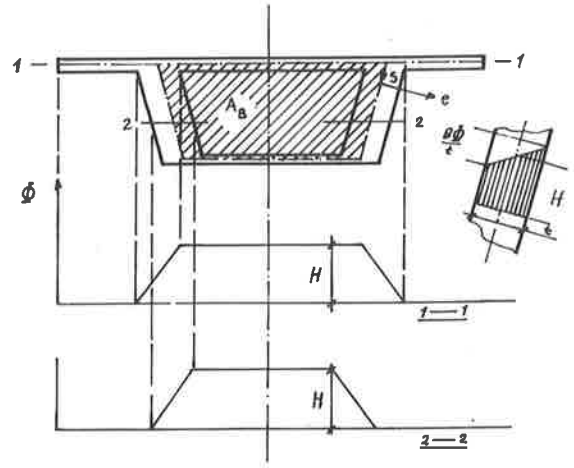
$$\tau_{xs} = \frac{\partial \phi}{\partial e} = -\phi_0 \frac{8e}{t^2} - \frac{H}{t}.$$



Kuva 1.1 Kuormien jakaminen.



Kuva 2.1 Pää- ja apukoordinaatitot.
 {x, y, z} : pääkoordinaatisto
 {u, n, xi} : pisteen A siirtymät
 pääkoordinaatiston
 suunnissa



Kuva 2.2 Jännitysfunktio ϕ .

Voidaan osoittaa, että

$$\phi_0 = G\theta \frac{t^2}{4}$$

ja

$$H = \frac{2A_B G\theta}{\phi \frac{ds}{t}}, \quad \theta = \frac{d\phi}{dx},$$

Nyt saadaan vapaan väännön differentiaaliyhtälö muotoon

$$GI_T \phi'' + m = 0. \quad (2.1)$$

jossa

$$I_T = \frac{4A_B^2}{\phi \frac{ds}{t}} + \frac{1}{3} \phi t^3 ds.$$

Bredtin St.Venantin
teorian teorian
osuus osuus

St.Venantin teorian osuus vääntöjäyhydestä on yleensä vain muutamia prosentteja, joten ei tehdä suurta virhettä, jos se jätetään huomioon ottamatta.

Poikkipinnan käyrityksen selvittämiseksi lasketaan siirtymä x-suunnassa

$$u = \int_0^s u_s' ds + u_0 = \int_0^s \frac{\tau x s}{G} ds - \theta \int_0^s h ds + u_0.$$

Seinämän keskiviivaa pitkin laskettua integraalia merkitään

$$\omega_s = \int_0^s \left(-\frac{2A_B}{t \phi \frac{ds}{t}} + h \right) ds = \int_0^s -\left(\frac{\psi}{t} + h \right) ds.$$

Nyt saadaan keskiviivan siirtymän lausekkeeksi

$$u(s) = -\theta \omega_s(s) + u_0(s) \quad (2.2)$$

Suure ω_s kuvaa poikkipinnan käyritystä seinämän keskiviivalla. Sitä nimitetään yleistetyksi sektoriaaliseksi koordinaatiksi. ω_s :n edellinen osa on

$$2A_B \frac{\int_0^s \frac{ds}{t}}{\phi \frac{ds}{t}} \quad (2.3)$$

Jälkimmäinen osa lasketaan samalla tavalla kuin avoimella profiililla. Poikkipinta käyristyy jonkin verran myös seinämän paksuuden suunnassa, mutta tämä osa käyrityksestä on yleensä hyvin pieni edellisen osan rinnalla eikä sitä tässä käsitellä.

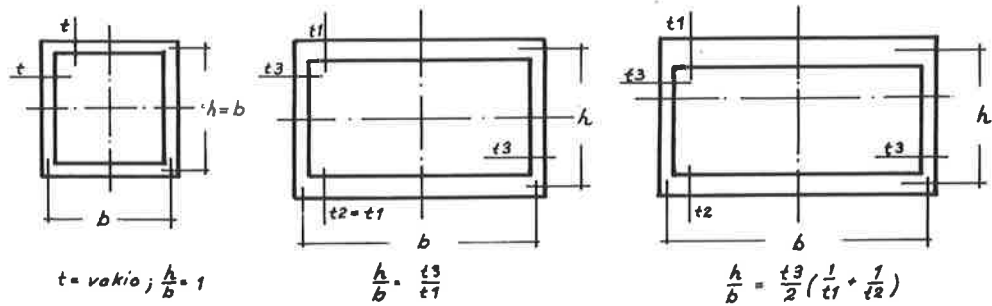
Jos

$$\omega_s = 0 \quad \text{eli} \quad ht + \frac{2A_B}{\phi \frac{ds}{t}} = 0$$

tai

$$\omega_s = \int_0^s h ds = -2A_B \int_0^s \frac{ds}{t} / \left(\phi \frac{ds}{t} \right) = 0,$$

niin poikkipinta ei käyristy. Tällaisia kotelopoikkileikkauksia on esitetty kuvassa 2.3.



Kuva 2.3. Poikkipinnaltaan käyristymättömiä poikkileikkauksia.

Jos käyristyminen saa vapaasti tapahtua, niin rakenteeseen ei synny pitkittäisiä lisäjännityksiä. Käytännössä käyristyminen on kuitenkin aina enemmän tai vähemmän estetty.

YLEINEN VÄÄNTÖ

Kotelosta oletetaan edelleen, ettei sen muoto vinoudu ja että poikkipinnan käyristyminen on samanmuotoinen kuin vapaassa väännössä. Poikkipinnan pisteen A siirtymä on silloin

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_A \\ \xi_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(z-z_A) \\ (y-y_A) \end{pmatrix} \phi \quad (3.1)$$

$$\begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Siirtymä x-akselin suunnassa on

$$u(s) = \xi - \eta'_A y - \xi'_A z - \nu\omega /$$

eli

$$\int_0^s \left(\frac{\tau_{xs}}{G} \right) ds - \phi' \omega / = \nu\omega /.$$

Suure $\nu = \nu(x)$ ilmaisee siis poikkipinnan käyristymisen määrän.

Palkin tasapainoehdot voidaan johtaa virtuaalisten siirtymien periaatteen mukaan. Virtuaalinen muodonmuutostyö \bar{U} on

$$\bar{U} = - \oint (\sigma_x \bar{e}_x + \tau_{ys} \bar{\gamma}_{xs}) t ds$$

jossa $\bar{\gamma}_{xs}$ on seinän leikkausmuodonmuutos. Kuormien virtuaalinen työ \bar{W}_e on

$$\bar{W}_e = \oint (p_x \bar{u} + p_y \bar{v} + p_z \bar{w}) ds + \oint \left((\sigma_x t \bar{u})' + (\tau_{xs} t \bar{v})' \right) ds$$

Sijoittamalla 3.1 \bar{U} :n ja \bar{W}_e :n lausekkeisiin ja ottamalla huomioon ehto $U' + W'_e = 0$ saadaan virtuaalisen työn tasapainoyhtälö.

Määritellään jännitysresultantit

$$\begin{aligned} N &= \oint \sigma_x t ds & M_z &= \oint \sigma_{xy} t ds \\ Q_y &= \oint \tau_{xs} \sin \alpha t ds & M_x &= \oint \tau_{xs} h_A t ds \\ Q_z &= -\oint \tau_{xs} \cos \alpha t ds & B_y &= \oint \sigma_x w_y t ds \\ M_y &= \oint \sigma_x z t ds & M_y &= \oint \tau_{xs} \left(h_A + \frac{\psi}{t} \right) ds \end{aligned}$$

Valitaan pääkoordinaatisto, jonka origo on poikkipinnan painopisteessä sekä vääntökeskiö A^0 , jolloin

$$\begin{aligned} S_y &= \int w_y dA = 0 \\ S_{y/y} &= \int w_y y dA = 0 \\ S_{y/z} &= \int w_y z dA = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Koska

$$w_{/A} = w_{/B} + \int_0^s \frac{\psi_{/}}{t} ds \quad (3.4)$$

on

$$w_{/A} = w_{/B} + (z_A - z_B)(y - y_s) - (y_A - y_B)(z - z_s) \quad (3.5)$$

pisteessä (y_s, z_s) on $s = 0$. Kuvassa 3.1 on hahmoteltu $w_{/}$:n ja muiden sektoriaalisten suureiden laskemista. Vääntökeskiön A^0 koodinaateiksi saadaan

$$A^0(y, z) = \left(z_B - \frac{S_{/y}}{I_y}, y_B + \frac{S_{/z}}{I_z} \right) \quad (3.6)$$

Jos poikkileikkausta väännetään jonkin toisen pisteen ympäri, kuvaa tämän pisteen suhteen laskettu w_1 vastaavaa jännitysjakautumaa.

Virtuaaliset tasapainoyhtälöt sisältävät tuntemattomat siirtymät ξ, η_A, ξ_A, ϕ ja ψ . Vääntöön liittyvät siirtymät ϕ ja ψ . Eliminoimalla yhtälöistä ψ saadaan ϕ :n funktiona yleisen väännön differentiaaliyhtälö.

$$\phi^{IV} - \lambda_{/}^2 \phi'' = \frac{\kappa}{EI_{/}} \left(m - \frac{m''}{\lambda_{/}^2 L^2} + (\oint p_x w_{/} ds)' \right) \quad (3.7)$$

Yhtälössä on merkitty

$$\kappa = 1 - \frac{I_T}{I_P}$$

ja

$$\lambda_{/} = \sqrt{\kappa \frac{GI_T}{EI_{/}}}$$

sekä

$$\begin{aligned} I_p &= \int h^2 t ds \\ I_y &= \int \omega_y^2 dA \end{aligned} \quad (3.7)$$

Yhtälön vasen puoli ja siten homogeeninen ratkaisu on samanmuotoinen kuin avoimilla profiileilla. Kun poikkipinnan käyristymistä ei tapahdu,

$$h + \psi_y = h + \frac{2A_B}{\rho T} \equiv 0$$

jokaisessa poikkipinnan pisteessä ja myös $\omega_y \equiv 0$ ja edelleen $I_p - I_T = 0$ sekä $I_y = 0$.

Yhtälöstä tulee tällöin tavanomainen vapaan väännön yhtälö (2.1).

$$GI_T \phi'' + m = 0.$$

Kun ϕ on ratkaistu yhtälöstä (3.7) saadaan poikkipinnan käyristymäfunktio ψ yhtälöstä

$$\psi = \frac{1}{\kappa \lambda_y^2 L^2} \phi''' + \phi' + \frac{1}{\kappa GI_T} (m' / (\lambda_y^2 L^2 - \rho_x \omega_y ds)) \quad (3.8)$$

Yleisen väännön bimomentille B_y ja vääntömomenteille M_y ja M_x saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned} B_y &= -\frac{1}{\kappa} EI_y \phi'' - \frac{1}{\lambda_y^2 L^2} m, \\ M_x &= GI_T \phi' - \frac{1}{\kappa} EI_y \phi''' - \frac{m'}{\lambda_y^2 L^2} + \rho_x \omega_y ds, \\ M_y &= -\frac{1}{\kappa} EI_y \phi''' - \frac{m'}{\lambda_y^2 L^2} + \rho_x \omega_y ds \end{aligned} \quad (3.9)$$

M_x on kokonaisvääntömomentti, joka on vapaan väännön ja estetyin väännön vääntömomenttien summa

$$M_x = M_t + M_y$$

Aksiaalinen jännitys

$$\sigma_y = E \epsilon_x = E(-\psi' \omega) \text{ eli } \sigma_y = \frac{B_1}{I_y} \omega_y(s) \quad (3.10)$$

Yhtälön (3.7) yleinen ratkaisu on muotoa

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \bar{\phi}(x),$$

jossa ϕ_0 on homogeenisen yhtälön ratkaisu ja yksityisratkaisu. Homogeenisen yhtälön ratkaisu on

$$\phi_0 = C_1 + C_2 x + C_3 \sinh(\lambda_y x) + C_4 \cosh(\lambda_y x) \quad (3.11)$$

Homogeenisen osan ratkaisusta saadaan edelleen

$$B_y = GI_T \left(C_3 \sinh(\lambda_y x) + C_4 \cosh(\lambda_y x) + \frac{1}{\lambda_y^2} \bar{\phi}'' \right) - \frac{m}{\lambda_y^2 L^2}$$

ja

$$\begin{aligned}
B'_/ &= M'_/ = GI_T (C_3 \cosh \lambda_/'x + C_4 \sinh \lambda_/'x + \frac{1}{\lambda_}' \bar{\phi}''') - \frac{m'}{\lambda_}' L^2 + \phi p_x \omega_/' ds \\
M_T &= GI_T \lambda_/' (\frac{1}{\lambda_}' C_2 + C_3 \cosh \lambda_/'x + C_4 \lambda_/'x + \frac{1}{\lambda_}' \bar{\phi}) \quad (3.12) \\
M_x &= M_T + M'_/ = GI_T (C_2 + \bar{\phi}' - \frac{1}{\lambda_}' \bar{\phi}''') - \frac{m'}{\lambda_}' L^2 + \phi p_x \omega_/' ds
\end{aligned}$$

Näissä yhtälöissä on vielä tuntemattomana yksityisratkaisu $\bar{\phi}$. Yksityisratkaisun on toteutettava yhtälön (3.5) oikea ja vasen puoli. y-akselin suhteen symmetrisellä poikkileikkauksella $\omega_/'$ on antisymmetrinen, joten p_x :n ollessa symmetrinen $\phi p_x \omega_/' ds$ häviää. Joitakin yksityisratkaisuja on esitetty taulukossa 3.1. Näissä ratkaisuissa on oletettu, että $\phi p_x \omega_/' ds = 0$.

Yhtälön lopullinen ratkaisu saadaan, kun vielä otetaan huomioon reunaehdot. Reunaehdoissa huomioidaan kiertymä vääntöakselin ympäri ja käyristymisen estyneisyys palkin päissä. Myös mahdolliset palkin päissä vaikuttavat rasitukset tulee ottaa huomioon. Tutkitaan tarkemmin yksiaukkoista palkkia, kun vääntökuorma on tasainen. Reunaehtoina oletetaan palkin päissä jäykkä kiinnitys kiertymän suhteen. Käyristyminen on täysin vapaa.

Ottamalla huomioon reunaehdot $\phi = 0$ ja $B_/' = 0$ ja käyttämällä yksityisratkaisua

$$\phi_0 = \frac{m x^2}{2GI_T}$$

saadaan

$$C_3 = C_4 = 0, \quad C_2 = -\frac{\kappa}{\lambda_}' m \frac{1 - \cosh \lambda_/'L}{\sinh \lambda_/'L}, \quad C_1 = -\frac{\kappa}{\lambda_}' m$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}
B_/' &= \frac{\kappa}{\lambda_}' m \left(1 - \cosh \lambda_/'x - \frac{1 - \cosh \lambda_/'L}{\sinh \lambda_/'L} \sinh \lambda_/'x \right) \quad (3.13) \\
M_/' = B_/' &= -\frac{\kappa}{\lambda_}' m \left(\sinh \lambda_/'x + \frac{1 - \cosh \lambda_/'L}{\sinh \lambda_/'L} \cosh \lambda_/'x \right)
\end{aligned}$$

Kun $\lambda_/'L$ on riittävän suuri eli $\lambda_/'L \geq 4$, voidaan yhtälöt kirjoittaa muotoon

$$\frac{1 - \cosh \lambda_/'L}{\sinh \lambda_/'L} \approx -1 \quad (= 0,98 \text{ kun } \lambda_/'L = 4), \quad \cosh \lambda_/'x - \sinh \lambda_/'x = e^{-\lambda_/'x}$$

Silloin yhtälöt (3.13) yksinkertaistuvat muotoon

$$B_/' = \frac{\kappa m}{\lambda_}' (1 - e^{-\lambda_/'x}),$$

$$B_/' = -\frac{\kappa}{\lambda_}' (m e^{-\lambda_/'x}).$$

Samalla tavalla on johdettu muut taulukossa 3.2 esitetyt tulokset.

Taulukko 3.1 Vääntökuorma eräissä kuormitustapauksissa.

<p>Tasan jakautunut vääntökuorma</p> $m = m_0$ $\bar{\phi} = -\frac{m_0}{2GI_T} x^2$	<p>Lineaarisesti jakautunut vääntökuorma</p> $m = m_0 \frac{x}{L}$ $\bar{\phi} = -\frac{m_0}{6GI_T L} x^3$
<p>Pistemäinen vääntökuorma</p> $m = M_0 \delta(x-a)$ $\bar{\phi} = 0 \quad \text{kun } x < a$ $\bar{\phi} = \frac{M_0}{GI_T} \left[\frac{1}{\lambda_l} \sinh(\lambda_l(x-a)) - \frac{1}{L}(x-a) \right]$ <p>kun $x > a$</p>	<p>Pistemäinen bimomentti</p> $B_l(x) = B_{10} \delta(x-a)$ $\bar{\phi} = 0 \quad \text{kun } x < a$ $\bar{\phi} = \frac{B_{10}}{GI_T} \left[\cosh(\lambda_l(x-a)) - 1 \right]$ <p>kun $x > a$</p>

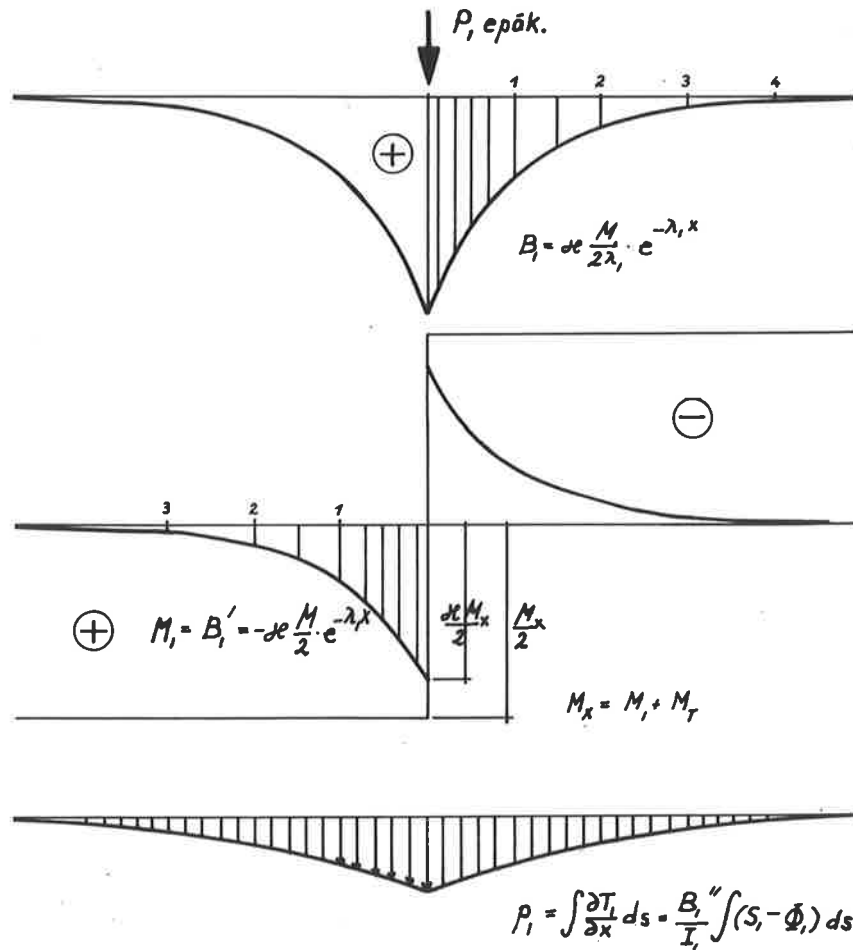
Taulukko 3.2 Bimomentin lausekkeet eräissä kuormitustapauksissa.

<p>1. Pistemäinen vääntökuorma</p> $B_l(x) = \frac{\kappa}{2\lambda_l} M e^{-\lambda_l x} \quad \text{r.e:t } \phi = 0$ $B_l'(x) = -\frac{\kappa}{2} M e^{-\lambda_l x}$ <p>$\kappa < 1$</p>	<p>3. Tasan jakautunut vääntökuorma</p> $B_l(x) = \frac{\kappa}{\lambda_l^2} m(1 - e^{-\lambda_l x}) \quad \text{r.e:t } \phi = 0$ $B_l'(x) = \frac{\kappa}{\lambda_l} m e^{-\lambda_l x}$
<p>2. Pistemäinen vääntökuorma</p> $B_l(x) = \frac{\kappa}{2\lambda_l} M e^{-\lambda_l x}$ $B_l'(x) = -\frac{\kappa}{2} M e^{-\lambda_l x}$ <p>tuella $\phi = 0$ $\phi' = 0$</p> <p>kentässä kuten edellisessä kohdassa</p>	<p>4. Tasan jakautunut vääntökuorma</p> $B_l = \frac{\kappa}{\lambda_l^2} m e^{-\lambda_l x} \quad \text{r.e:t } \phi = 0$ $B_l' = -\frac{\kappa}{\lambda_l} m e^{-\lambda_l x} \quad \phi' = 0$

Näillä kaavoilla voidaan riittävällä tarkkuudella laskea käytännössä esiintyvät tapaukset, joissa bimomentin aiheuttamat rasitukset ovat hyvin paikallisia. Taulukon yhtälöistä nähdään myös useamman peräkkäisen pistekuorman vaikutukset palkin tietyssä kohdassa,

Vertaillaan pistemäisen vääntökuorman $M = Pb/2 = 1$ eri poikkileikkauksissa aiheuttamia rasituksia pitkän palkin keskellä. Tuloksista saadaan helposti muut taulukon 3.2 tapaukset taulukossa esitettyjen kaavojen avulla. Aluksi tarkastellaan poikkileikkauksivakioiden λ_l ja κ riippuvuutta kotelon mitoista.

Kuvassa 3.3 on esitetty λ_l poikkileikkauksen mittojen funktiona. Kuvasta nähdään, että $\lambda_l L$ on käytännössä aina ≥ 4 . Tällöin pidetään kri-



Kuva 3.2 Momentin M kuormittaman pitkän kotelopalkin bimomentti B_1 , sisäisen vääntömomentin jakautuminen ja muotoa vääristävä kuormitus p_1 .

teerinä sitä, että $L \approx 25h$ ja että kentässä voi sijaita enintään kolme väliseinää ts. $\lambda/L_{\min} = 25h/3$. Differentiaaliyhtälön 3.7 ratkaisussa voidaan siis hyvin käyttää pitkän palkin ratkaisua.

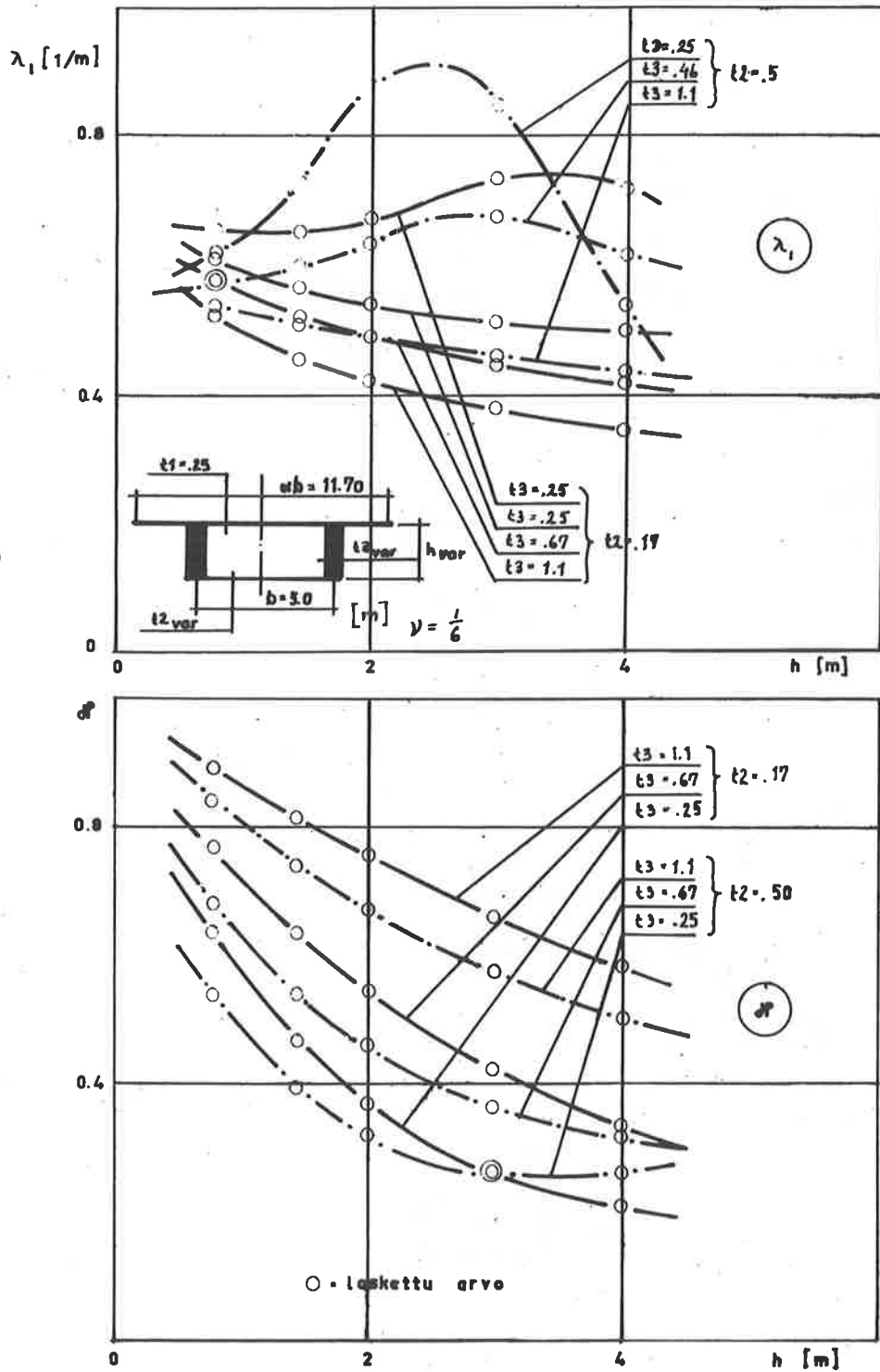
Kuvassa 3.4 on esitetty κ :n riippuvuus poikkileikkauksen mitoista. Muuttujan κ arvo näyttää mm. kuinka suuri osa väännöstä on estettyä piste-mäisen vääntökuorman vaikutuskohdassa.

Kuvissa 3.5 ja 3.6 on piirretty yksikkömomentista syntyvät normaalijännitykset σ_1 .

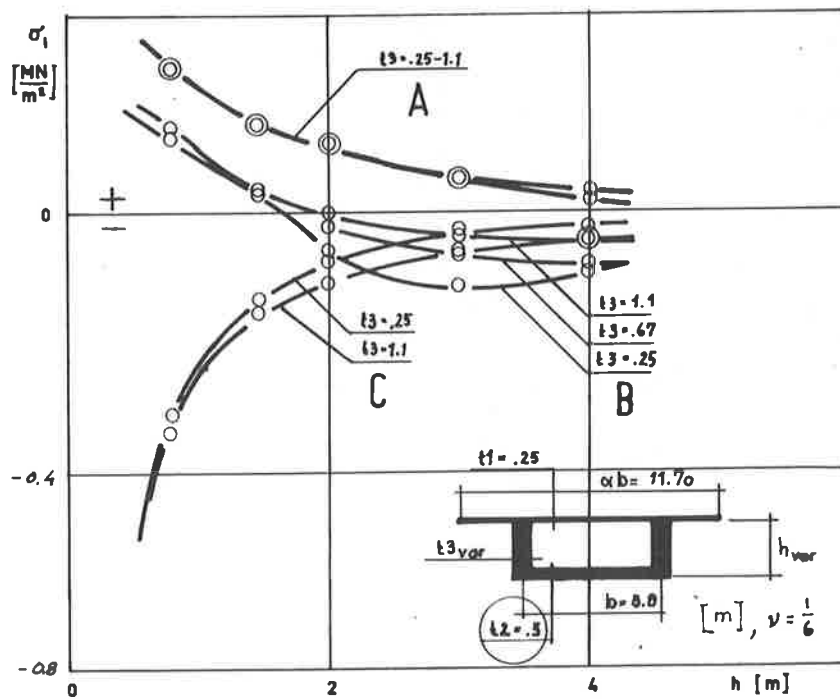
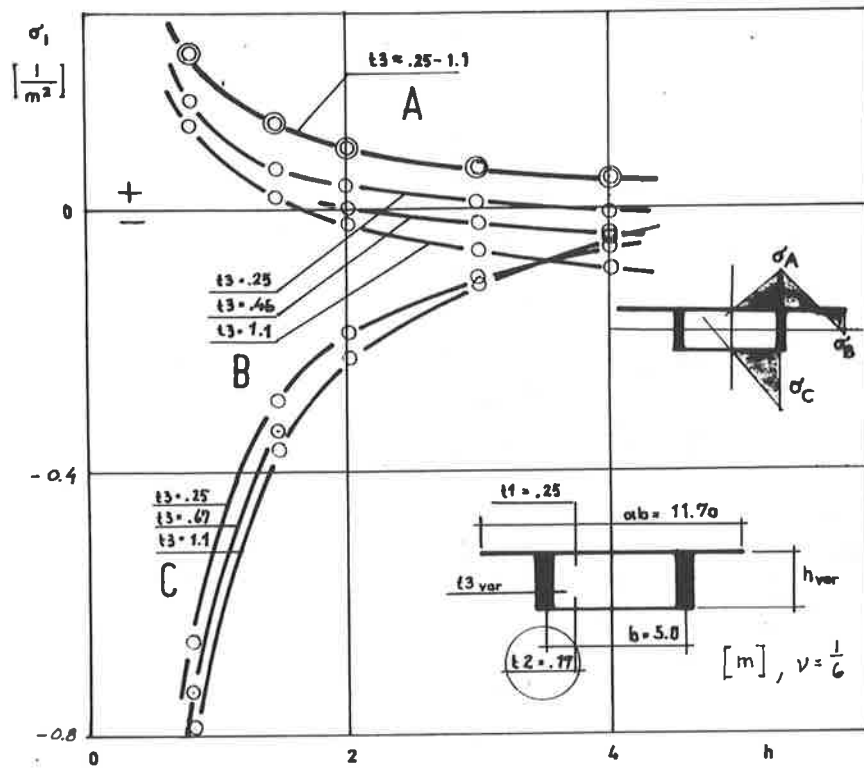
$$\sigma_1 = \frac{B_1}{I_1} \omega_1, \quad \text{kun } B_1 = -\frac{\kappa}{2} M e^0 = -\frac{\kappa}{2}$$

saadaan

$$\sigma_1 = \frac{\kappa}{2I_1} \omega_1(s), \quad \sigma_1(P) = p \sigma_1$$

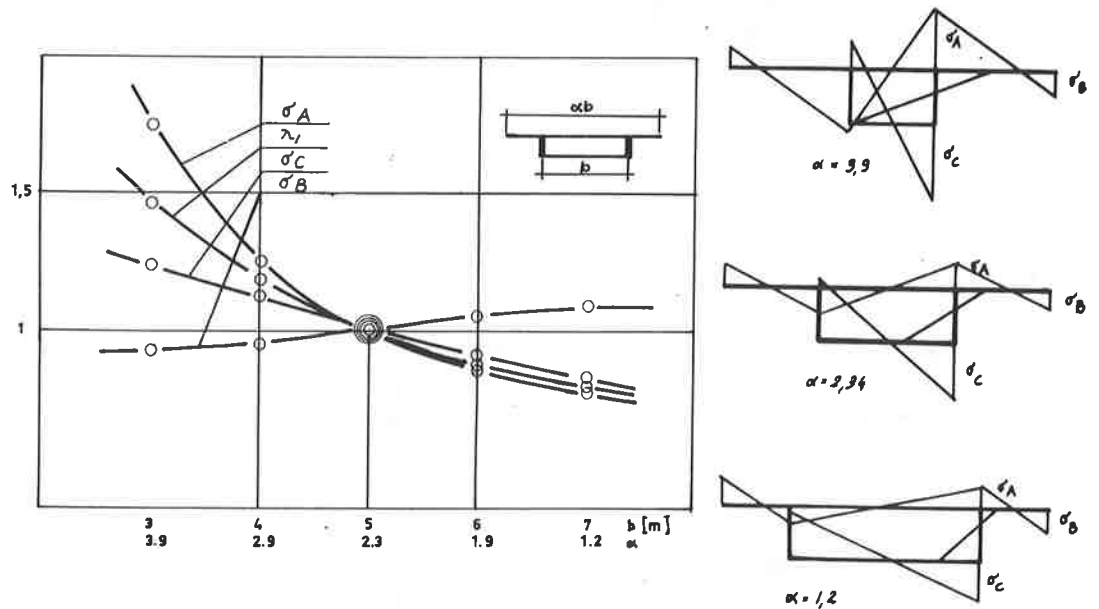


Kuvat 3.3 ja 3.4 λ_1 ja κ poikkileikkauksen mittojen funktiona.



Kuvat 3.5 ja 3.6 Poikittaiset σ_1 -jännitykset kun kuormana on yksikkövääntömomentti $m_x=1$ ja pitkä kotelopalkki.

Alalaatan paksuus $t_2 = 0,17$ m kuvassa 3.5 ja $0,5$ m kuvassa 3.6. Kuvassa 3.7 on esitetty eräiden muuttujien arvoja kotelon leveys b muuttujana. $b:n$ arvoa = 5 m vastaavat muuttujien arvot on valittu = 1 . Kapea kotelo lisää selvästi $B_y:n$ osuutta väännöstä, kun A_B pienenee.



Kuva 3.7 Eräiden arvojen riippuvuus koko sillan ja sen kotelon leveyden suhteesta.

4. KOTELON MUODON VINOUTUMINEN

Edellä käsitellyssä tapauksessa oletettiin, että kotelon muoto ei vinoudu väännön aikana. Todellisuudessa kuormitus ja sen aiheuttama bimomentti B_y vinouttavat kotelon muotoa. Tarkastellaan ensin tapausta, jossa $B_y = 0$.

Oletetaan, että kotelopalkkia rasittavat kuvan 1.1E mukaiset kuormat, jotka pyrkivät vinouttamaan kotelon muotoa yz -tasossa. Kotelo otaksutaan taiterakenteeksi (kuva 4.1.0). Sektoriaaliset suureet voidaan laskea samalla periaatteella kuin kuvassa 3.1. Kohdan 0 mukaisesta siirtymätilasta saa siis vain alalaatta jännityksiä. Voidaan todeta, että

$$\frac{\psi_{//}}{t} + k_1 \frac{\psi_{/}}{l} = 0$$

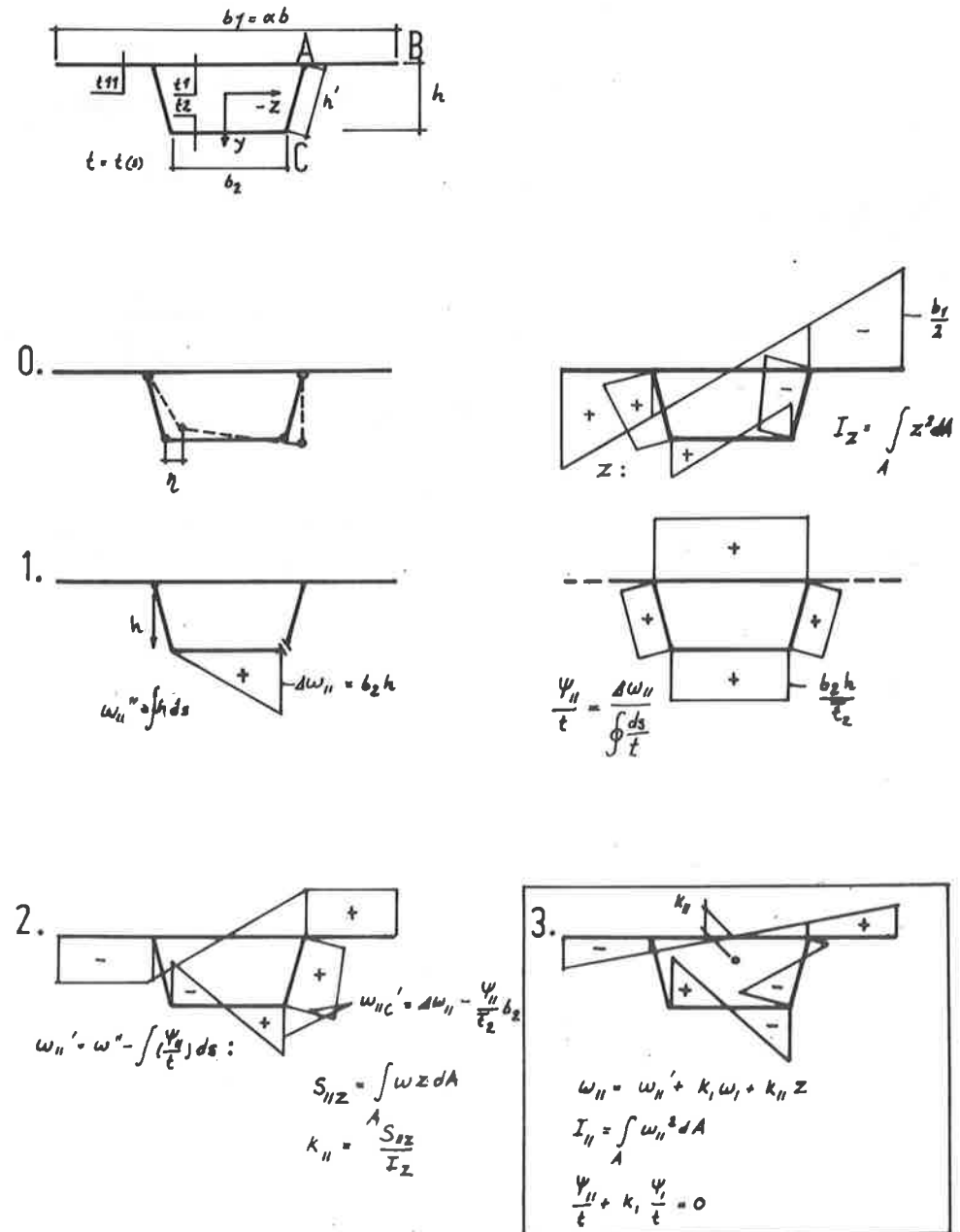
joka johtaa ylälaatan suoraviivaiseen jännitysjakautumaan kohdan 3 mukaan. Näin pitää taitekuoriteorian oletusten mukaan ollakin. Valitaan taas kohdan

3.3 tapaan pääkoordinaatisto, jolloin

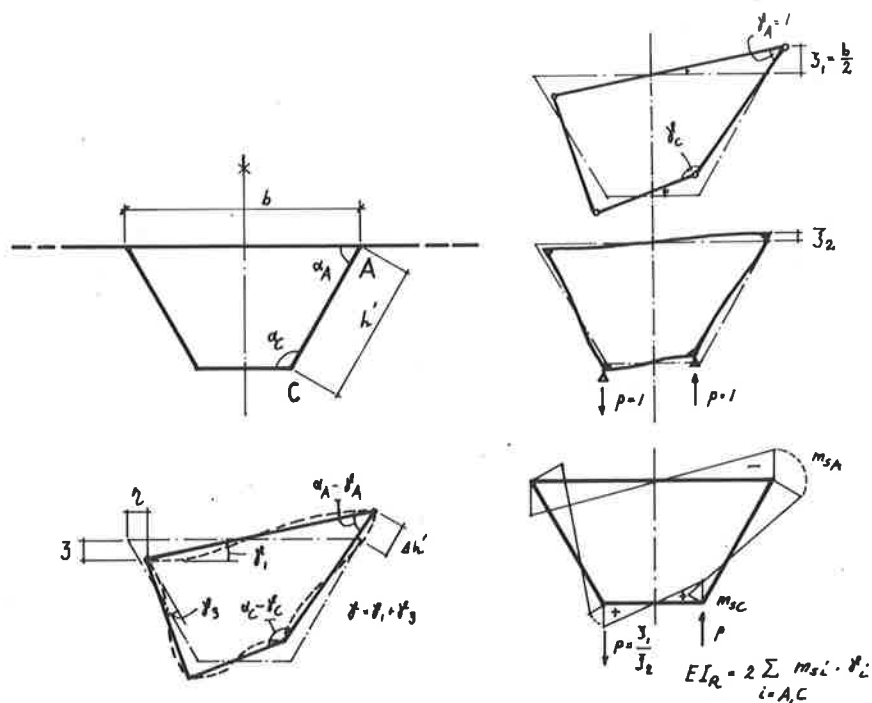
$$S_{//} = \int \omega_{//} dA = 0$$

$$S_{//y} = \int \omega_{//} y dA = 0$$

$$S_{//z} = \int \omega_{//} z dA = 0$$



Kuva 4.1a Muodon vinoutumisen sektorიაalisten suureiden laskeminen. Vertaa kuva 3.1.



Kuva 4.1b Muodonvinoutumisen poikittaiset suureet.

Kuvassa 4.1b on hahmoteltu kotelon poikittaisten suureiden laskemista trapetsipoikkileikkauksen tapauksessa. Kotelokaistan nurkan A momentti kuvan mukaisista siirtymistä voidaan laskea kehäteorian mukaan

$$m_{SA} = f(\gamma, EI_R) = k \frac{P}{EI_R} \quad (4.1a)$$

jossa EI_R = kotelokaistan poikittainen jäykkyys

Nurkan C momenttia merkitään vastaavasti

$$m_{SC} = -\eta_m m_{SA} \quad (4.1b)$$

A. Steinle on tutkinut suorakulmaista koteloa [6]. Muodonvinoutumisen karakteristiseksi suureeksi otetaan γ . Se on kulmasumma, joka syntyy, kun poikkileikkauksen muoto vinoutuu kuvan 1.1E ja 4.1b mukaan. Kuvan mukaan

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_3 = 2\xi/b + (\eta_A + \eta_C)/h$$

$$\gamma'' = 2\xi''/b + (\eta_A'' + \eta_C'')/h$$

Palkkiteorian perusyhtälön mukaan

$$(\xi, \eta)'' = -\frac{M(x)}{EI}$$

Merkitään vastaavia taitekuoren jännityksiä

$$\sigma_{//} = \frac{B_{//}}{I_{//}} \omega_{//} \quad (4.2)$$

jossa $B_{//}$ koteloa vinouttava bimomentti, $I_{//}$ kotelon vinoutumisjäyhyys ja $\omega_{//}$ muodonvinoutumisen sektorიაალური კოორდინატი. Voidaan määrittellä kun $\omega_{//}$ lasketaan kuvan 4.1.3 mukaan

$$\gamma'' = - \frac{B_{//}}{EI_{//}} \quad (4.3)$$

Vinoutuma γ muodostuu kahdesta osasta nimittäin työntövoiman $T_{//}$ muutoksesta matkalla dx sekä samalla matkalla vaikuttavasta ulkoisesta kuormasta $P_{33} = \frac{p(x)}{4} b$.

$$\gamma = \gamma_{//} + \gamma_p = \left(\int \frac{\partial T_{//}}{\partial x} ds b + \frac{p}{4} b \right) \frac{1}{EI_R}$$

Määrittellään nyt $I_{//}$ siten, että

$$\gamma_{//} = \frac{B_{//}}{EI_R}$$

eli

$$I_{//} = - b \int (S_{//} - \Phi_{//}) ds = \int \omega_{//}^2 dA$$

jossa

$$S_{//} = \int \omega_{//} dA \quad \text{ja} \quad \Phi_{//} = \frac{\int S_{//} h dA}{\oint h ds} \quad (\text{kuva 4.1})$$

Saadaan

$$\gamma = \gamma_{//} + \gamma_p = \left(B_{//} + \frac{p}{4} b \right) \frac{1}{EI_R}$$

Yhtälöstä 4.3 saadaan nyt muodonvinoutumisen perusyhtälö vinoutuman γ funktiona.

$$\gamma^{IV} + 2\lambda_{//}^4 \gamma = \frac{p}{4} \frac{b}{EI_R} \quad (4.4a)$$

jossa

$$\lambda_{//} = \sqrt{\frac{EI_R}{4EI_{//}}}$$

D. Tung on /5/:ssä johtanut analogisen yhtälön trapetsipoikkileikkauksen tapauksessa siirtymän $\Delta h'$ funktiona

$$(\Delta h')^{IV} + 4\lambda_{//}^4 (\Delta h') = 4\lambda_{//}^4 p_{33} \quad (4.4b)$$

Yhtälön 4.4 yleinen ratkaisu on muotoa

$$\gamma(x) = \gamma_0(x) + \bar{\gamma}(x)$$

samaan tapaan kuin edellisessä kohdassa. Homogeenisen osan ratkaisu on

$$\gamma_0(x) = A_1 \cosh \xi \cos \xi + A_2 \cosh \xi \sin \xi + A_3 \sinh \xi \cos \xi + A_4 \sinh \xi \sin \xi \quad (4.5)$$

jossa

$$\xi = \lambda_{//} x$$

Kun

$$Y'' = - \frac{B_{//}}{EI_{//}} \cdot$$

saadaan vielä

$$B_{//} = EI_{//} \lambda_{//}^2 Y'' \quad (4.6)$$

Differentiaaliyhtälö on analoginen Winklerin alustalla olevan palkin yhtälön kanssa. Winklerin yhtälön ratkaisuja voidaan käyttää hiukan muunnettuna yhtälön (4.4) ratkaisuihin.

Tarkastellaan L:n pituista palkkia, joka on päistään joko vapaa, vapaasti tuettu tai täysin kiinnitetty. Teoksen /12/ mukaan saadaan hiukan muunnettuna reunaehdot ja yksityisratkaisut huomioiden taulukossa 4.1 esitetyt yhtälöt. Yhtälöissä esiintyvien funktioiden F1- F6 ja G1- G6 graafiset kuvaajat on esitetty kuvassa 4.2.

Tarkastellaan vielä piste- ja tasaisen kuorman rasittamaa palkkia, kun $x = \lambda_{//}L$ on suuri. Tämä merkitsee, että $\lambda_{//}L \geq 4$ (kuva 4.2). Nyt voidaan soveltaa äärettömän pitkän palkin teoriaa ja saadaan pistekuorman tapauksessa

$$Y = \frac{Pb}{8EI_R} e^{-\lambda_{//}x} (\cos \lambda_{//}x + \sin \lambda_{//}x) \quad (4.7)$$

$$B_{//} = \frac{Pb}{16\lambda_{//}} e^{-\lambda_{//}x} (\cos \lambda_{//}x - \sin \lambda_{//}x)$$

Kun $x = 0$ saadaan taulukon (4.1) mukaiset tulokset 1 ja 2, kun $\lambda_{//}L \rightarrow \infty$. Kun kuorma on tasainen ja 2a:n pituinen, saadaan kuorman keskellä

$$Y = \frac{Pb}{4EI_R} 1 - e^{-\lambda_{//}a} \cos \lambda_{//}a$$

$$B_{//} = \frac{Pb}{16\lambda_{//}^2} e^{-\lambda_{//}a} \sin \lambda_{//}a \quad (4.8)$$

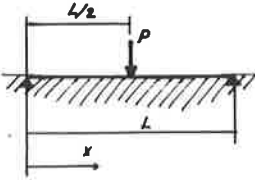
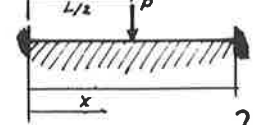
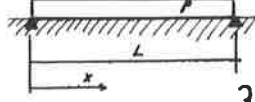
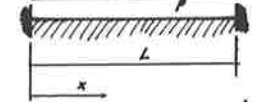
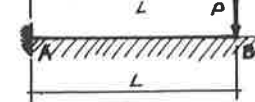
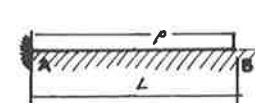
$$B_{//\max} \text{ kun } \cos \lambda_{//}a = 0 \text{ eli } a = \frac{\pi}{\lambda_{//}}$$



Ylläolevista yhtälöistä saadaan helposti myös useamman pistekuorman vaikutus kohdassa $x = x_0$.

Kun myös bimomentin $B_{/}$ aiheuttama koteloa vinouttava kuormitus $p_{/}$ (kuva 3.2) otetaan huomioon saadaan differentiaaliyhtälö

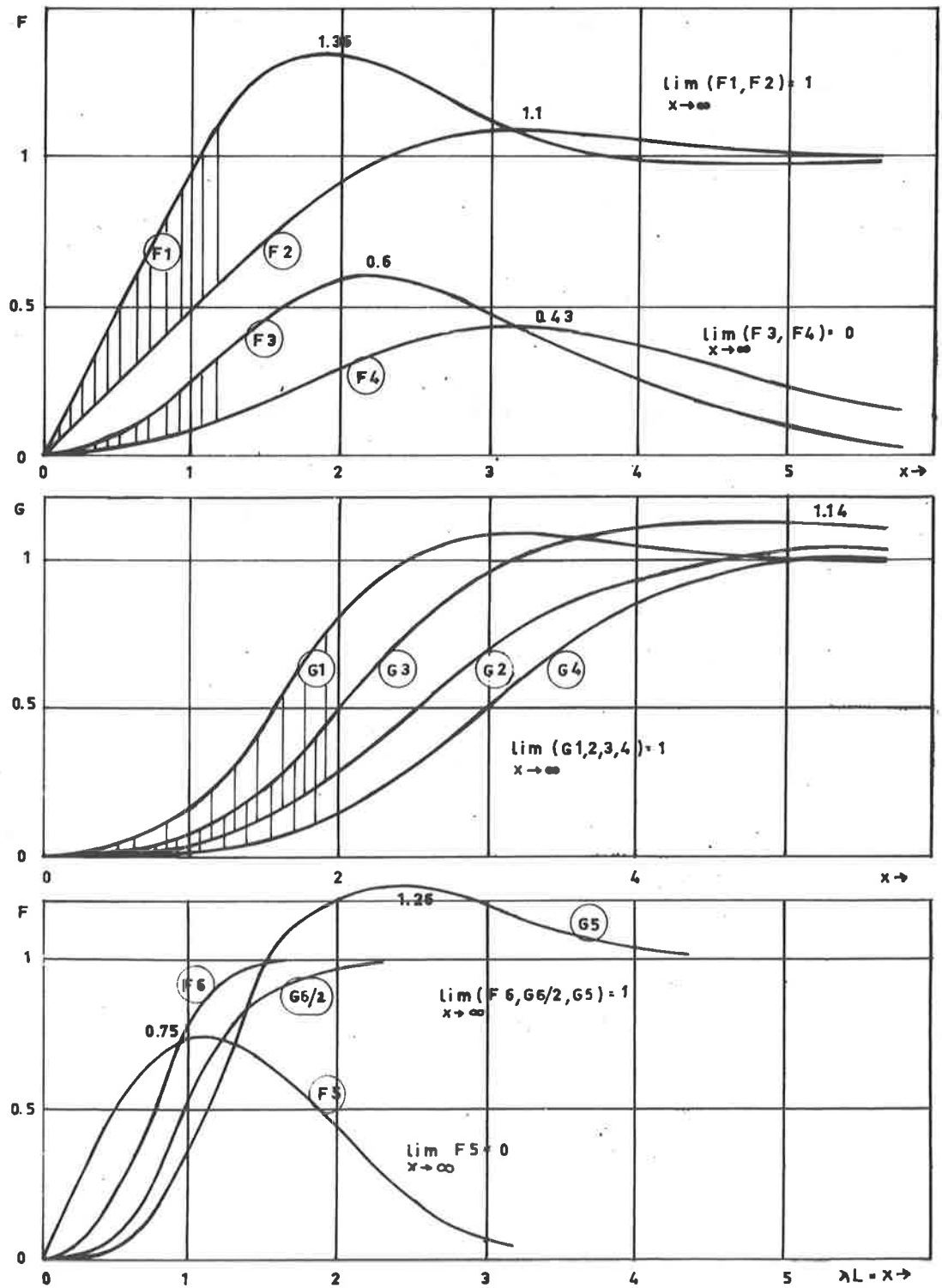
$$Y^{IV} - 4k\lambda_{//}^4 Y'' + 4\lambda_{//}^4 Y = \frac{1}{EI_{//}} \left((p_{/}b + \frac{pb}{4}) - k(p_{/}b + \frac{pb}{4}) \right) \quad (4.9)$$

jossa

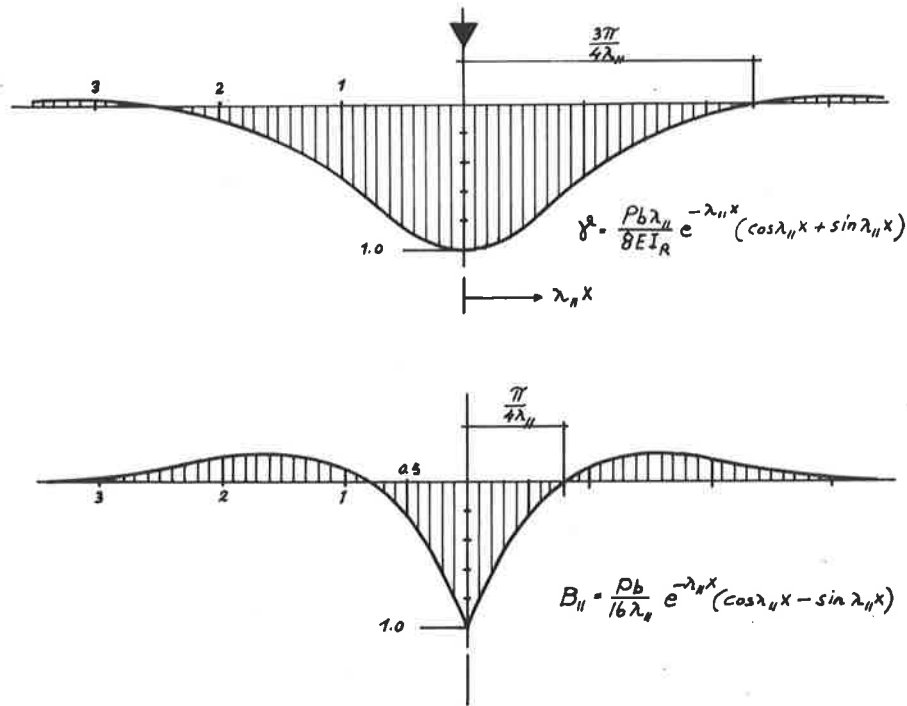
	$B_A(x) = \frac{P \cdot b}{16\lambda} \cdot \frac{1}{C\lambda L + c\lambda L} \cdot (C\lambda x \cdot S\lambda(L-x) - S\lambda x \cdot c\lambda(L-x) + c\lambda x \cdot S\lambda(L-x) - S\lambda x \cdot C\lambda(L-x))$ <p style="text-align: center;">kun $x = \frac{L}{2}$</p> $B_A = \frac{P \cdot b}{16\lambda} \cdot F1 ; \quad F1 = \frac{Sinh\lambda L + sin\lambda L}{Cosh\lambda L + cos\lambda L}$ $y = \frac{P \cdot b \cdot \lambda}{8EI_R} \cdot G1 ; \quad G1 = \frac{Sinh\lambda L - sin\lambda L}{Cosh\lambda L + cos\lambda L}$
	$B_A = \frac{P \cdot b}{16\lambda} \cdot F2 ; \quad F2 = \frac{Cosh\lambda L - cos\lambda L}{Sinh\lambda L + sin\lambda L}$ $y = \frac{P \cdot b \cdot \lambda}{8EI_R} \cdot G2 ; \quad G2 = \frac{Cosh\lambda L + cos\lambda L - 2}{Sinh\lambda L + sin\lambda L}$
	$B_A = \frac{P \cdot b}{8\lambda^2} \cdot F3 ; \quad F3 = \frac{2 \cdot Sinh\frac{\lambda L}{2} \sin\frac{\lambda L}{2}}{Cosh\lambda L + cos\lambda L}$ $y = \frac{P \cdot b}{4EI_R} \cdot G3 ; \quad G3 = 1 - \frac{2 \cdot Cosh\frac{\lambda L}{2} \cos\frac{\lambda L}{2}}{Cosh\lambda L + cos\lambda L}$
	$B_A = \frac{P \cdot b}{8\lambda^2} \cdot F4 ; \quad F4 = \frac{Cosh\frac{\lambda L}{2} \sin\frac{\lambda L}{2} - Sinh\frac{\lambda L}{2} \cos\frac{\lambda L}{2}}{Sinh\lambda L + sin\lambda L}$ $y = \frac{P \cdot b}{8EI_R} \cdot G4 ; \quad G4 = 1 - \frac{2 \cdot (Sinh\frac{\lambda L}{2} \cos\frac{\lambda L}{2} + Cosh\frac{\lambda L}{2} \sin\frac{\lambda L}{2})}{Sinh\lambda L + sin\lambda L}$
	$B_A = \frac{P \cdot b}{4\lambda} \cdot F5 ; \quad F5 = \frac{Sinh\lambda L \cos\lambda L + Cosh\lambda L \sin\lambda L}{Cosh^2\lambda L + sin^2\lambda L}$ $y_B = \frac{P \cdot b \cdot \lambda}{4EI_R} \cdot G5 ; \quad G5 = \frac{Sinh\lambda L - sin\lambda L}{Cosh^2\lambda L + cos^2\lambda L}$
	$B_A = \frac{P \cdot b}{8\lambda^2} \cdot F6 ; \quad F6 = \frac{Cosh^2\lambda L - cos^2\lambda L}{Cosh^2\lambda L + cos^2\lambda L}$ $y_B = \frac{P \cdot b}{4EI_R} \cdot G6 ; \quad G6 = 1 - \frac{2 \cdot Cosh\lambda L \cos\lambda L}{Cosh^2\lambda L + cos^2\lambda L}$

* $C = \cosh$, $c = \cos$ jne., $\lambda \in \lambda_{II}$, $L \in L_S$
 väliseinä jonka $GI_T = 0$ $EI \rightarrow \infty$
 väliseinä jonka GI_T ja $EI \rightarrow \infty$

Taulukko 4.1 Differentiaaliyhtälön 4.4 ratkaisu eräissä tapauksissa. Jos ei toisin ole mainittu, tarkoittavat kaavat suureiden arvoja palkin keskellä.



Kuva 4.2 Funktioiden F1- F4, G1- G4, F5, F6 sekä G5/2 ja G6 kuvaajat.



Kuva 4.3 Pistekuorman kuormittaman pitkän kotelopalkin vinoutuma γ ja bimomentti B_{II} .

$$K = \frac{h^2}{12} (1 + \beta) \left(\frac{3 + 2(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2}{G + \alpha_1 + \alpha_2} \right) \left(1 + \frac{b}{2h} \left(\frac{t_3}{\alpha t_1} + \frac{t_3}{t_2} \right) \right)$$

/10/:ssä on tarkasteltu yhtälöiden (4.4) ja (4.9) mukaisten ratkaisujen eroavuutta, piste- ja viivakuormien tapauksissa. Tässä työssä käsitellyissä poikkileikkauksissa ero on yleensä selvästi alle 10 % ja korkeintaan n. 15%. Tämä pitää paikkansa, kun $\lambda_{II}L \leq 3$, vieläpä siten että B_{II} :n tarkkuus paranee, kun $\lambda_{II}L$ pienenee (< 3). γ :n suhteen ero sen sijaan alkaa kasvaa, kun $\lambda_{II}L$ pienenee. γ :n kokonaisarvo pienenee tällöin kuitenkin ratkaisevasti verrattuna ratkaisuun kun $\lambda_{II}L = 3$.

Kun B_{II} :n aiheuttama muodonvinoutumisen osuus jätetään huomioonottamatta, saadaan kotelopalkin pitkittäiset jännitykset eri tapauksien summana

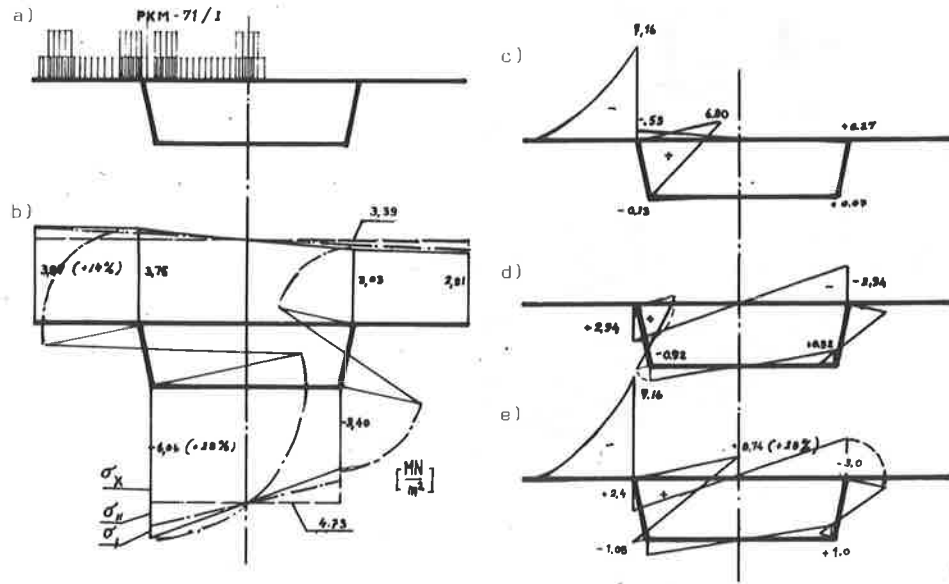
$$\sigma_x(s) = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} w_y + \frac{M_y}{I_y} w_z + \frac{B_1}{I_1} w_1(s) + \frac{B_{II}}{I_{II}} w_{II}(s) = \sigma_x + \sigma_I + \sigma_{II}$$

Poikittaisille jännityksille pätee

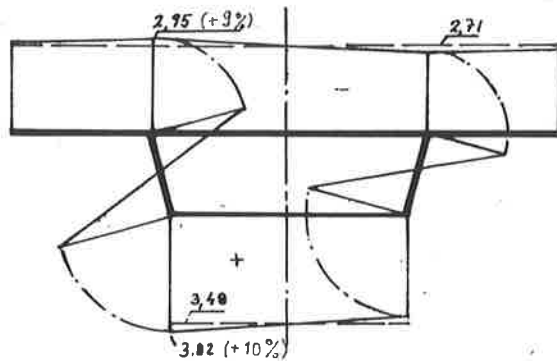
$$\sigma_s(s) = \frac{m_s(s)}{W(s)}$$

Kuvassa 4.9 on esitetty tämän mitoituksen kannalta ratkaisevan jännilyssumman jakautuma erään sillan keskijänteen keskellä. Vastaava jakautuma tuella koostuu vain σ_x :stä ja σ_I :stä. σ_{II} :n osuus tuella on hyvin pieni, kun

jännitys on suurimmillaan. Kun kuormat taas ovat tuen läheisyydessä on kokonaisjännitys tuella pieni, eikä sillä mitoituksen kannalta ole merkitystä.



Kuva 4.9 Pitkittäinen jännitysjakautuma erään sillan keskijänteen keskellä. a) Kuormitus b) Pitkittäinen jännitysjakautuma keskijänteen keskellä c) Ulokkeen ja vastaavat kotelon poikittaiset momentit kun kotelon muoto ei vinoudu d) Lisämomentit kun kotelon muoto vinoutuu e) Edellisten momenttien summa. Poikittainen momenttijakautuma yo kuormasta muualla paitsi tukien lähellä.



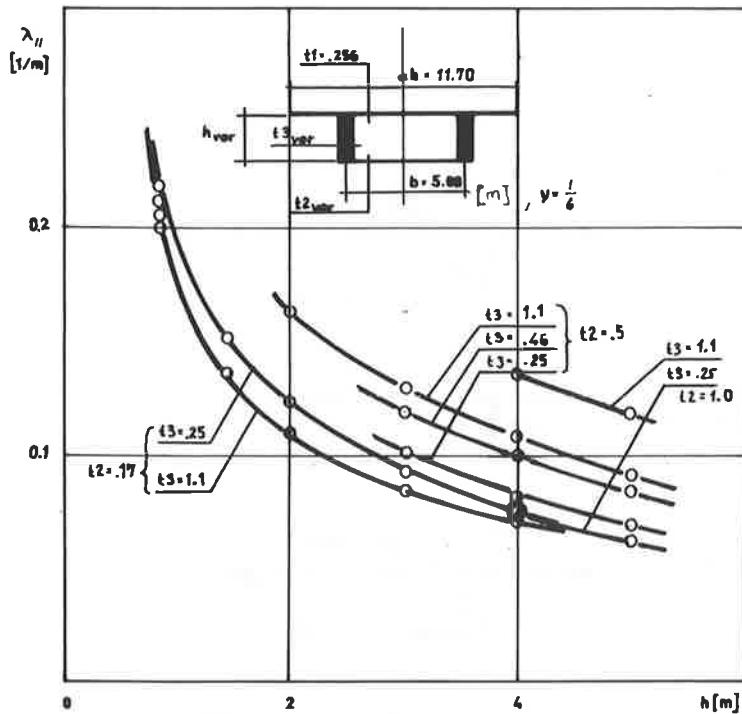
Kuva 4.10 Jännityksen jakautuma tuella.

jakautuvat siis noin viisi kertaa pitemmälle alueella kuin esitetyn väännön aiheuttamat rasitukset.

Kuvassa 4.5 on esitetty toisen palkin päällä sijaitsevan pistemäisen yksikkökuorman $P = 1$ aiheuttaman muodonvinoutumisen pitkittäiset lisäjännitykset. Yhtälön (4.3) mukaan, kun $x = 0$ ja

Edellä johdettua teoriaa käyttäen lasketaan seuraavaksi yksikkökuormien aiheuttamat rasitukset, joiden numeeriset arvot on esitetty kuvissa 4.1-4. Tulokset ovat voimassa pitkän palkin keskialueella, ei kuitenkaan yhtä lähellä tukia kuin kohdan 3. bimomentin B_1 rasitukset.

Kuvassa 4.4 on piirretty $\lambda_{//}$:n kuvaaja poikkileikkausmittojen funktiona. Nähdään, että $\lambda_{/}$ on noin viisi kertaa suurempi kuin $\lambda_{//}$. Muodonvinoutumisen rasitukset



Kuva 4.4 $\lambda_{//}$ poikkileikkauksen mittojen funktiona.

$$B_{//} = P b / 16 \lambda_{//} = b / 16 \lambda_{//}$$

on

$$\sigma_{//A} = b \omega_{//A} / (16 I_{//} \lambda_{//}).$$

$\sigma_{//B}$ ja $\sigma_{//C}$ saadaan vastaavasti kaavojen (4.7) mukaan, kun $x = 0$ ja

$$\gamma = P b / (8 E I_R) = b / (8 E I_R)$$

on

$$m_{sA} = b / (16 (1 + \eta_m))$$

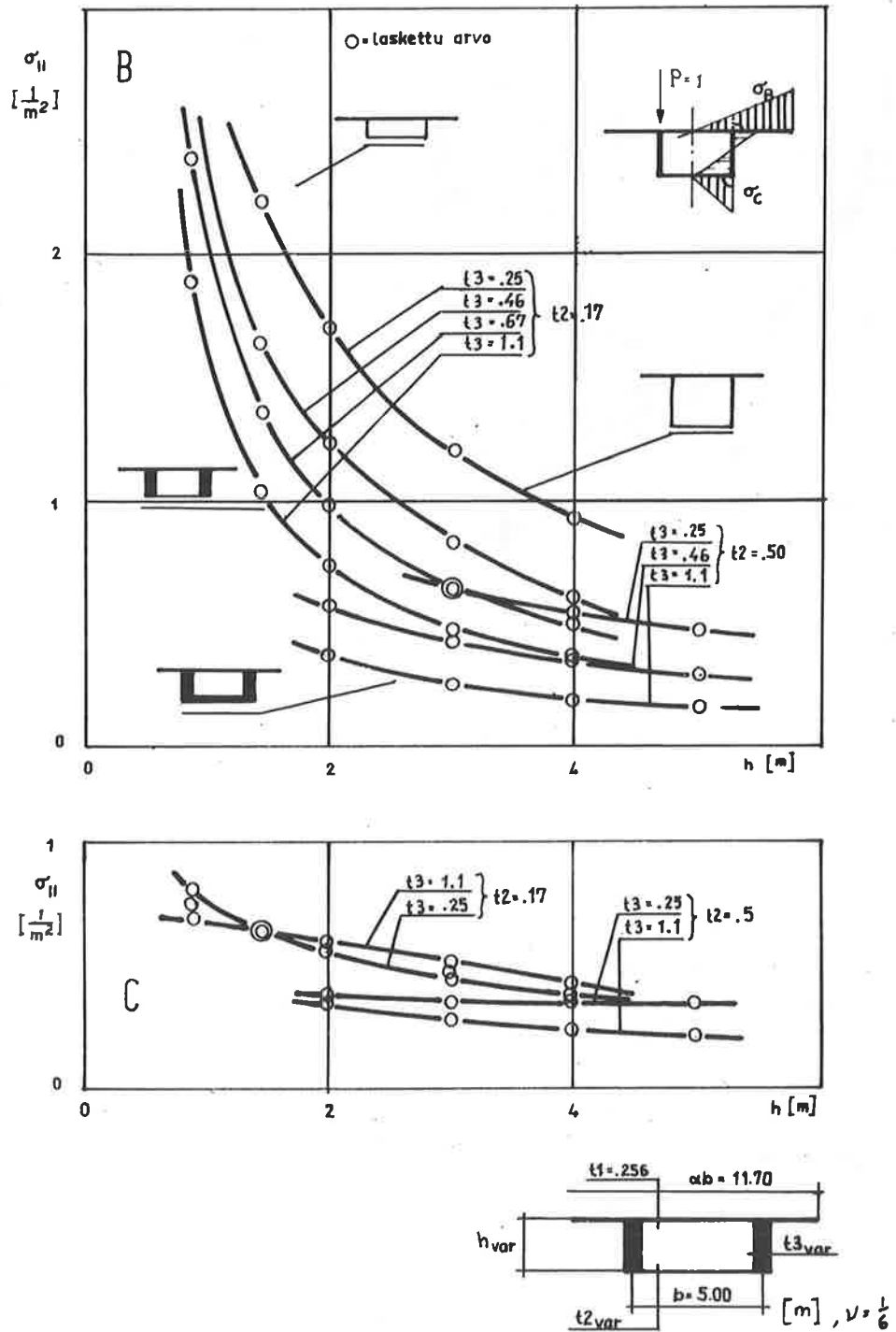
ja

$$m_{sB} = \eta_m m_{sA}$$

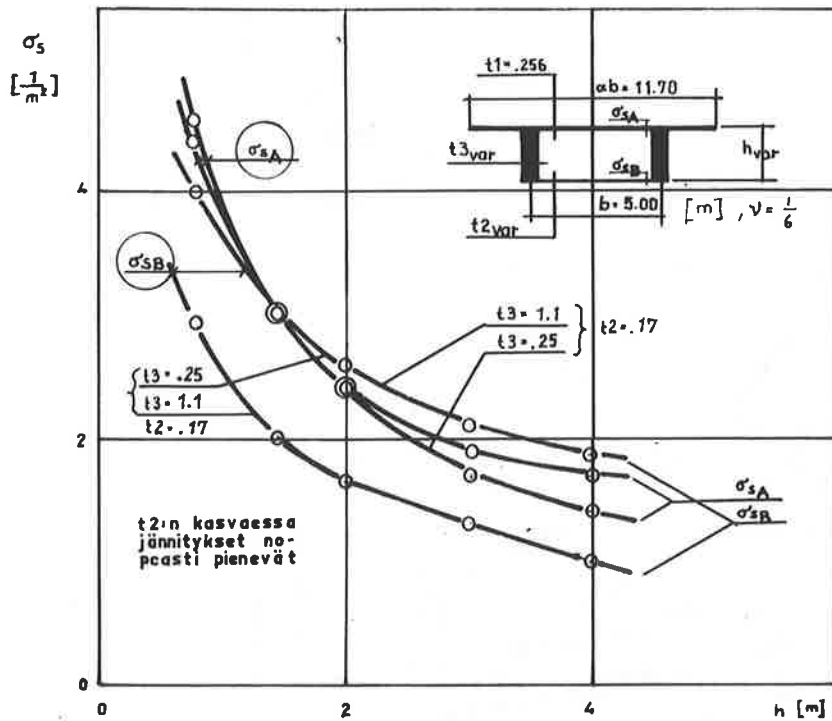
jossa

$$\eta_m = \frac{3 + \frac{b}{h} \frac{I_3}{I_1}}{3 + \frac{b}{h} \frac{I_3}{I_2}}$$

Kuvan 4.6 mukaiset nurkkamomenteista tulevat poikittaiset jännitykset on laskettu kaavalla



Kuva 4.5 σ_{xx} -jännitykset kun kuormana on toisen palkin päällä sijaitseva yksikkökuorma $P = 1$.



Kuva 4.6 Poikittaiset σ_s -jännitykset kun kuormana on kuvan 4.5 mukainen pistekuorma.

$$\sigma_s = \frac{m_s}{w_i}$$

jossa

$$w_i = t_i^2 / 6 .$$

Kuvissa 4.7-4.8 on laskettu vastaavat viivakuorman aiheuttamat rasitukset. Kuvan 4.7 jännitykset saadaan kuten edellisessä kohdassa muotoon

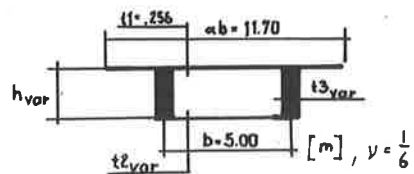
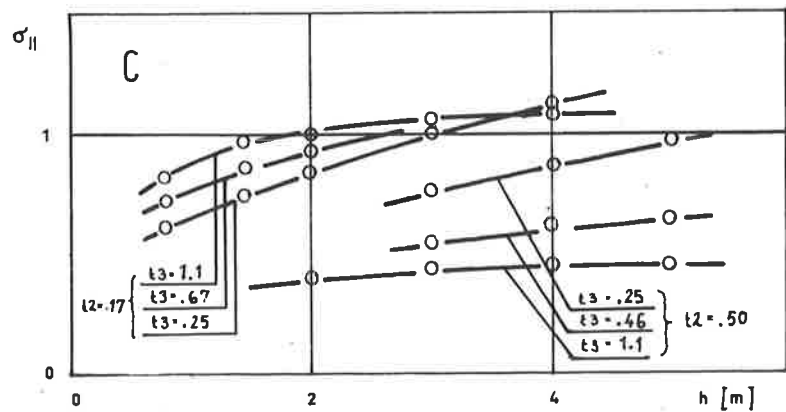
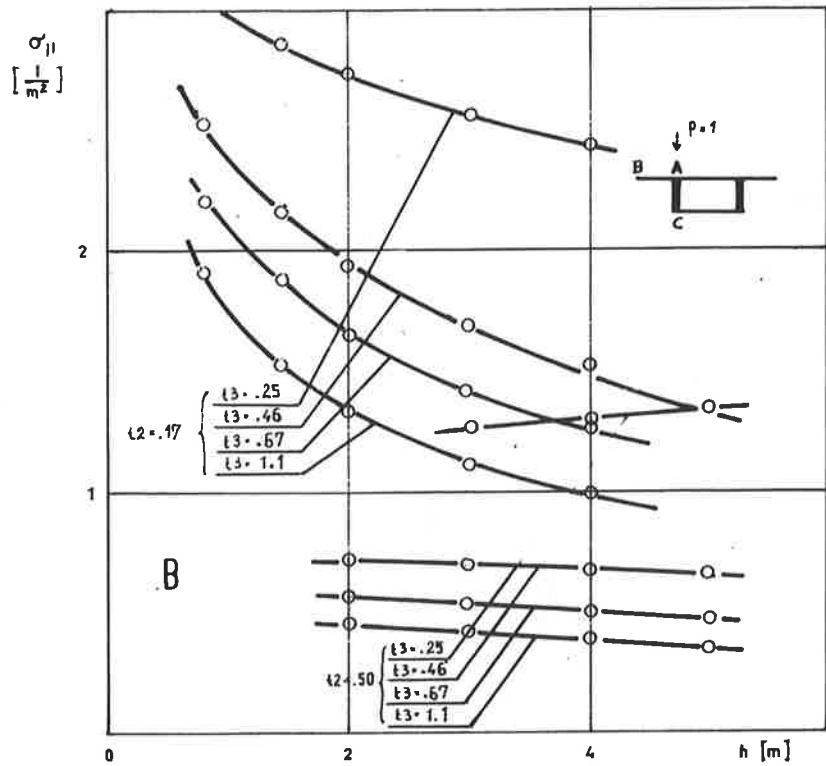
$$\sigma = \frac{b}{(16\lambda_{//}^2 I_{//})} .$$

Kaavan (4.2a) mukaan

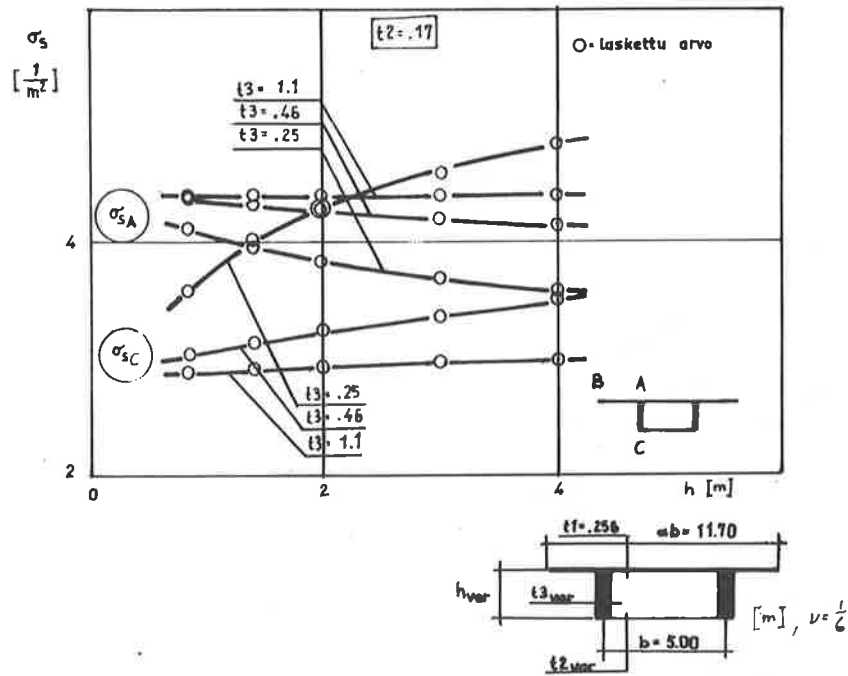
$$m_{sA} = b / (8(1 + \eta_m)) ; m_{sB} = \eta_m m_{sA}$$

Kuvan 4.8 poikittaiset jännitykset on laskettu kuten kuvassa 4.6.

Lopuksi voidaan todeta, ettei kotelon leveyden muuttuminen juuri vaikuta ylläoleviin suureisiin /10/.



Kuva 4.7 $\sigma_{||}$ -jännitykset kun kuormana on toisen palkin päällä sijaitseva viivakuorma $p = 1$.



Kuva 4.8 Poikittaiset σ_s -jännitykset kun kuormana on kuvan 4.7 mukainen viivakuorma.

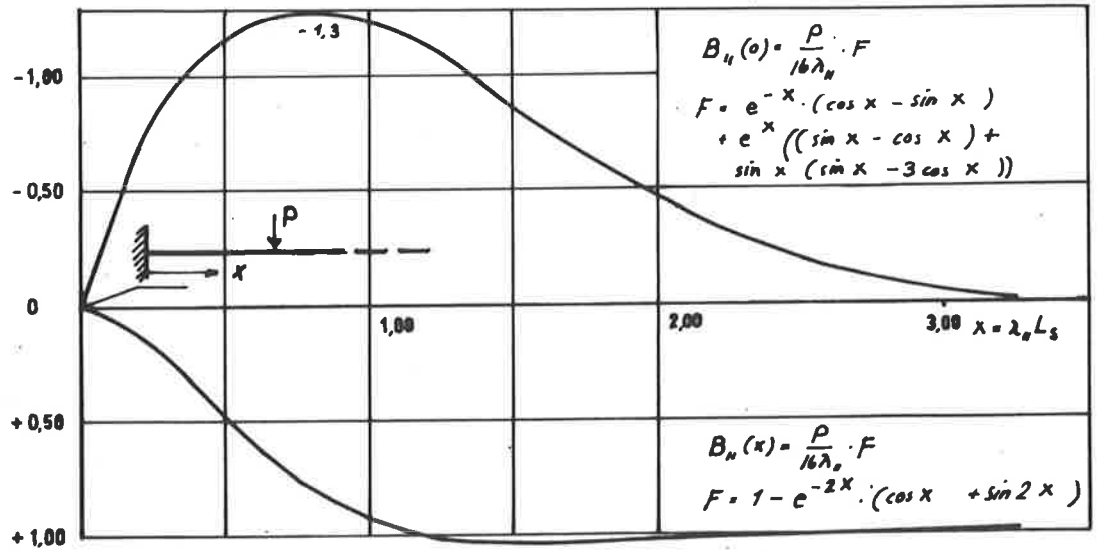
TULOSTEN TARKASTELUA

Tässä esitetyn teorian pohjana ovat differentiaaliyhtälöt, jotka Vlassov v. 1959 esitti /2/ :ssa. Näitä kimmo-opillisesti tarkkoja yhtälöitä ei alkeisfunktioiden avulla ole pystytty täydellisesti ratkaisemaan. Tekemällä tiettyjä tarkkuuden kannalta toisarvoisia yksinkertaistavia oletuksia päädyttiin artikkelissa esitettyyn teoriaan.

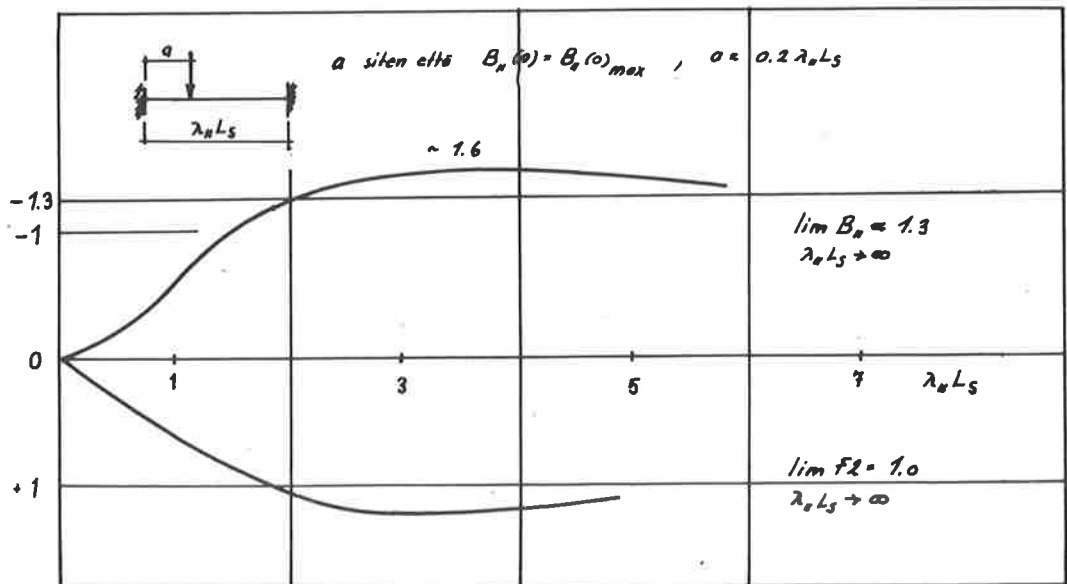
Kotelopalkin mitoituksessa ei tavallisesti ole mitoitettu kotelon seinämiä t_2 ja t_3 . Koteloon on myös pantu väliseiniä osoittamatta sen tarkemmin, miten ne vaikuttavat rakenteen toimintaan.

Kotelossa sijaitsevan väliseinän kohdalla on $m_s = 0$, mutta $B_{//}$ suurempi kuin $B_{//}$ kentässä. Käyttämällä kentässä 1-3 väliseiniä ($\lambda_{//} L_s \approx 1$) saadaan m_s pienemään n. 80 % verrattuna väliseinättömään tapaukseen (kuva 4.2). Jotta pitkittäiset lisäjännitykset pienenisivät saman verran on oltava $\lambda_{//} L_s \approx 0,3$. Tämä arvo edellyttää keskikokoisessa ja muotoisessa sillassa n. 20 väliseiniä. Jos kentässä käytetään 1-3 väliseiniä voivat lisäjännitykset seinien välissä nousta n. 35 % ($\lambda_{//} L_s \approx 2$, $GI_t = 0$). Eriytyisen epäedullinen on rakenne, jossa kentän keskellä maksimimomentin kohdalla käytetään väliseiniä. Seinän kohdalla voi tällöin $\sigma_{//}$ kasvaa 30-60 % verrattuna väliseinättömän rakenteen $\sigma_{//}$:een (kuva 5.1 ja 2). Tällainen tapaus on käytännössä täysin mahdollinen.

Esitetty teoria antaa mahdollisuuden kotelon seinämien mitoitukseen. Ku-



Kuva 5.1 B_{II} :n maksimiarvo tuen kohdalla $\lambda_n L_S$:n funktiona.



Kuva 5.2 Puoliäärettömän palkin B_{II} tuen kohdalla.

vien 4.6 ja 4.8 avulla voidaan todeta, että käytännössä betoniset koteloseinämät usein valitaan varsin paksuiksi, jolloin poikittaiset jännitykset ovat pieniä. Tämä koskee erityisesti palkkeja. Näin ollen ei ole mitään syytä pienentää poikittaisia momenteja kenttään sijoitetuilla väliseinillä. Usein voidaan päinvastoin väliseinät jättää pois ja samanaikaisesti hoikentaa rakenteen palkkeja ja alalautoja.

Edellä esitetyn mukaan väliseinien käyttö ei ole perusteltua. Väliseinien aiheuttamista haitoista voidaan vielä mainita seuraavat:

- väliseinä lisää omaa painoa
- väliseinät ovat työteknisesti hankalia
- väliseinän kohdalla syntyy aina häiriötila, jonka vaikutus rakenteen toimintaa on vaikeasti selvitettävissä.

Lopuksi voidaan todeta, että artikkelissa esitetyn teorian avulla on mahdollista mitoittaa hoikkia väliseinättömiä kotelopalkkeja. Laskettaessa kotelopalkkeja, joissa on väliseinät vain tukien kohdilla, voidaan yleensä hyvin käyttää pitkän palkin teoriaa sekä $B_{//}$:n että etenkin $B_{/}$:n määrittämiin.

KÄYTETTYJÄ MERKINTÖJÄ

A	pinta-ala yleensä
A_B	kotelon seinämän keskiviivan rajoittama pinta-ala
$B_{/}$	yleisen väännön bimomentti
$B_{//}$	muodonvinoutumisen bimomentti
E	kimmomoduli
$I_{x,y,z}$	hitausmomentti x, y ja z akselien ympäri
$I_{/}$	poikki-pinnan käyrästymisjäyhyys
$I_{//}$	muodonvinoutumisjäyhyys
I_p	polaarinen hitausmomentti
I_R	katso kuva 4.1b
I_T	vääntöjäyhyys
$M_{x,y,z}$	momentti x, y ja z akselien ympäri
$M_{/}=B'_{/}$	esitetyn väännön osuus kokonaisvääntömomentista
M_t	vapaan väännön osuus kokonaisvääntömomentista $M_x = M_{/} + M_t$
L	palkin pituus
L_s	väliseinien välinen matka
P	pistekuorma
$T_{/}$	yleisen väännön aiheuttama leikkausvoima
e	apukoordinaatti, Neperin luku
h	korkeus, esim poolipisteen ja s-käyrän tangentin välinen lyhin etäisyys
$k_{/}$	kuvaa vääntökeskiön paikkaa
$k_{//}$	kuvaa vastaavan muodonvinoutumiskeskion paikkaa

m	vääntökuorma
m_s	vääntömomentti poikkisuunnassa
p	viivakuorma
t_i	kotelon i-seinämän paksuus
γ	muodonvinoutumisen parametri
$\varphi(x)$	poikkipinnan käyristymäfunktio
κ	$1 - \frac{I_T}{I_p}$
λ_1	$\sqrt{\kappa \frac{GI_T}{EI_1}}$
λ_{II}	$\sqrt{\frac{I_R}{EI_{II}}}$
$\sigma_{s,x}$	jännitys s ja x koordinaatin suunnissa
ϕ	vääntökulma
ω_1	poikkipinnan käyristymä yleisessä väännössä
ω_{II}	poikkipinnan käyristymä muodonvinoutuessa
ν	Poissonin luku
ψ_1	$\frac{2A_B}{\phi \frac{ds}{t}}$
ψ_{II}	katso kuva 4.1
ϕ	jännitusfunktio
θ	$\frac{d}{dx}$

KIRJALLISUUTTA

- [1] Mikkola, M., Rakenteiden mekaniikan lisensiaattikurssi. Helsingin teknillinen korkeakoulu, 1973.
- [2] Wlassov, Džutseinäinen kimmainen palkki. Moskova 1959.
- [3] Dabrowski, R., Der Schubverformungseinfluss auf die Wölbkrafttorsion der Kastenträger mit verformbarem biegesteifem Profil. Der Bauingenieur 11/1965.
- [4] Kupfer, H., Kastenträger mit elastisch ausgestriftem Querschnitt unter Linien- und Einzellasten. Festschrift Rüschi 1969.
- [5] Tung, D., Torsional analysis of single thin-walled trapezoidal concrete box-girder bridges. Concrete bridge design. ACI SP-23.
- [6] Steinle, A., Torsion und Profilverformung beim einzelligen Kastenträger. Beton- und Stahlbetonbau 9, 10/1970.
- [7] Janssen, J., Veldpaus, F., Einfluss von Querschotten auf das Verhalten von Kastenträgern mit Rechteckquerschnitt. International Vereinigung für Brückenbau und Hochbau 33-I, 1973, Abhandlungen.
- [8] Pulmano, A.V., Analysis of a Continuous Box Girder without interior Diaphragms. International Vereinigung für Brückenbau und Hochbau 33-II, 1974, Abhandlungen.
- [9] Sedlacek, G., Die Anwendung der erweiterten Biege- und verdrehteorie

auf die Berechnung von Kastenhägern mit verformbaren Querschnitt.
Strana Brücke Tunnel 9/71, 12/71.

- [10] Söderlund, K., Jännitetyn betonisen kotelopalkkisillan rakennevertailua. Diplomityö. Helsingin teknillisen korkeakoulu. 1974.
- [11] Orlov, G., Saxenhofer, H., Balken auf elastischer Unterlage. Verlag Leerman Zürich 1963.
- [12] Kollbrunner, Hajdn, Dünnwandige Stäbe I, II. Springer-Verlag, 1972, 1975.

Söderlund, Klaus, dipl.ins., A-betoni Oy, Helsinki.