

SULJETTUJEN YMPYRÄRENKAIKEN VOIMASUUREPINTOJA ERI KUORMITUSTAPAUKSISSA

Stefan Heise

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 9
No. 2 1976 s. 27-35

YHTEENVETO: Helpottaakseen suunnittelutoimistoissa työskentelevien insinöörin työtä tekijä on ratkaissut eri tavoin kuormitettujen suljettujen ympyräreнкaiden voimasuureiden lausekkeet. Artikkelissä sisältyy myös kirjallisuudessa aikaisemmin esittämättömiä kuormitustapauksia. Ratkaisemiseen on käytetty voimamenetelmää. Rakennetta on käsitelty kolme kertaa staattisesti määräämättömänä. Ratkaisun suorittamista on yksinkertaistettu käyttämällä hyväksi ns. elastista painopistettä.

1. YLEISTÄ LASKELMISTA

Artikkeli sisältää kuormitustapausten mukaan taulukoituna voimasuureiden (M, N, T) lausekkeet sekä piirroksat niiden jakautumista. Kolmessa ensimmäisessä tapauksessa renkaita kuormittaa pistekuormat ja kahdessa jälkimmäisessä jatkuvat kuormat. Tässä työssä on johdettu yhteensä kahdeksankymmentäyksi taivutusmomentin, leikkauvoiman ja normaalivoiman yhtälöä. Voimasuureiden arvoja on laskettu lisäksi renkaan erikoispisteiden $\phi = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ ja $\phi = \pi$ kohdalla.

Aluksi on laskettu elastisen poolin kohdalla vaikuttavien tuntemattomien voimien X_1 , X_2 ja X_3 aiheuttamat siirtymät. Sen jälkeen on ratkaistu ulkoisten kuormitusten aiheuttamat voimasuureet tavanomaisen voimamenetelmän mukaisesti. Yksittäisten kuormien aiheuttamien voimasuureiden yhtälöt riippuvat neljästä muuttujasta:

- voiman vaikutuspisteen sijainnista ympyrän kehällä ilmaistuna kulman α avulla,
- tarkasteltavan leikkauksen sijainnista ympyrän kehällä ilmaistuna vaihekulman ϕ avulla,
- voiman suuruudesta,
- ympyrän säteestä.

Lisäksi voiman suunta voi vaihdella renkaan tasossa. Tässä on tarkasteltu seuraavia tapauksia:

- voima on kohtisuorasti rengasta vastaan
- voima vaikuttaa renkaan tangentin suunnassa
- voima on pystysuorassa, jolloin se on yhdensuuntainen renkaan keskipisteen ja tukipisteen kautta kulkevan suoran kanssa.

Tasan jakaantuneiden säteen ja tangentin suuntaisten kuormitusten aiheuttamat voimasuureet on laskettu käyttäen voimasuureiden vaikutusviivoja.

Kaikki kuormitustapaukset ovat symmetrisiä keskipisteen ja tukipisteen kautta kulkevaan tasoon nähden. Tämä symmetria on eräs rakenteen tasapainon edellytys.

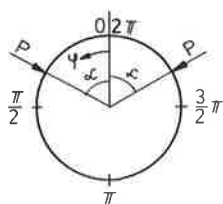
2. YHTÄLÖIDEN SOVELTAMISMAHDOLLISUUDET KÄYTÄNNÖSSÄ

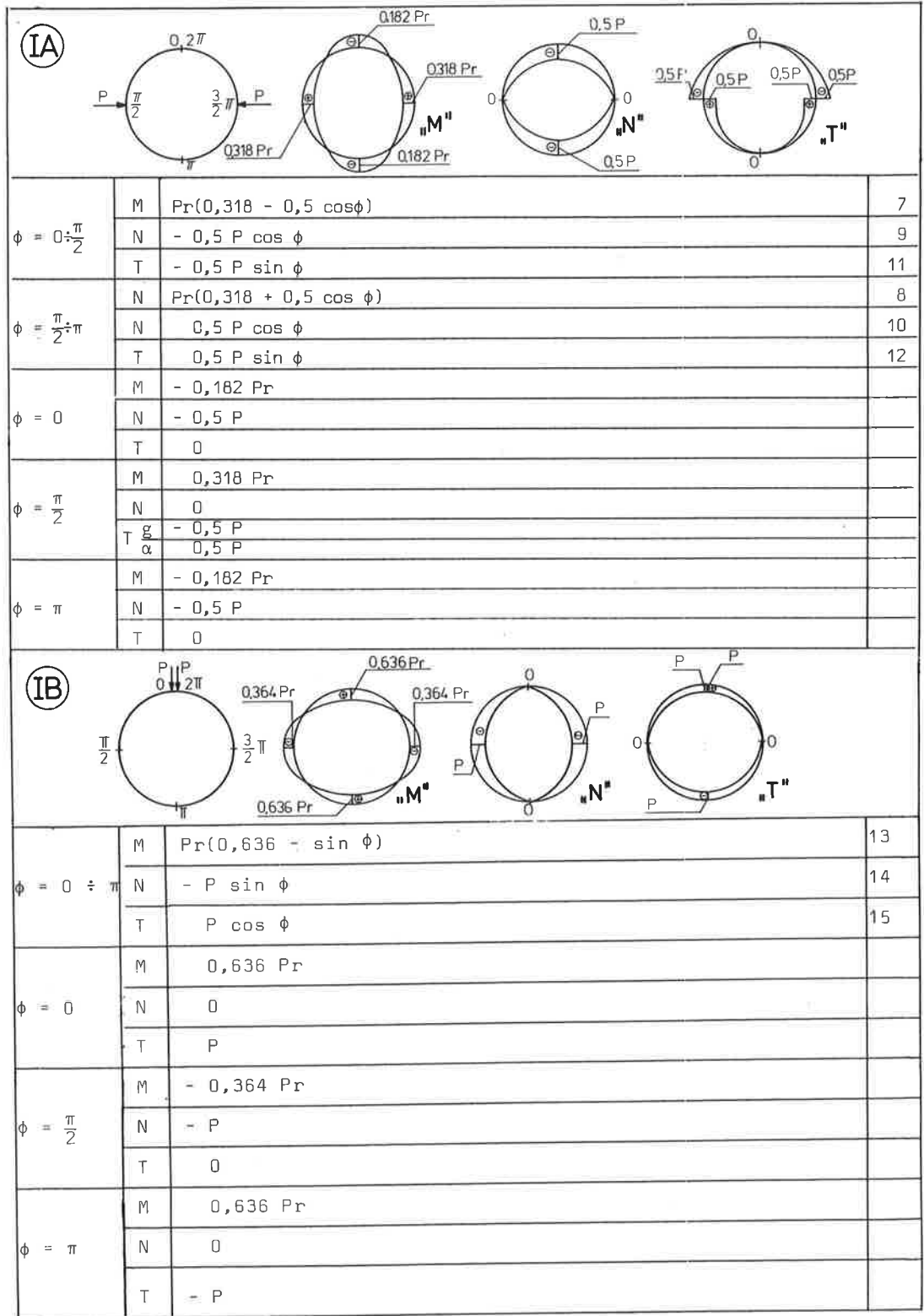
Esitettyjä yhtälöitä voidaan käyttää tiettyjen rakenteiden analysoinnissa. Kuormituskaaviot soveltuvat muun muassa moniosastoisten maanpäällisten ja maanalaisten säiliöiden sekä upporakenteiden ja muiden samanlaisten systeemien laskemiseen, kun osastoja ei täytetä samanaikaisesti tai ne täytetään eri korkeudelle. Yhtälöt pätevät sellaisille säiliöille, joiden ulkoseinien jäykkyys on huomattavan suuri sisäseinien jäykkyyteen verrattuna, sisäseinien jakaessa säiliön pienempiin osastoihin. Näissä tapauksissa on luvallista tehdä yksinkertaistavia oletuksia, jotka mahdollistavat sisäseinien käsittelyn käytännössä riittäväällä tarkkuudella itsenäisinä rakenteina, jotka vain välittävät kuorman ulkoseinän muodostamalle jäykälle renkaalle itse tukematta sitä.

Ulkoseinän liittyessä rengasmaiseen rakenteeseen voi esiintyä myös jatkuvia kuormituksia, joissa on paikallisia katkoksia.

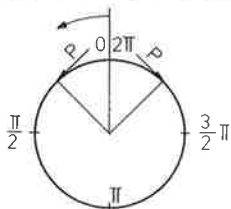
Työssä esitettyjä kuormitustapauksia voi esiintyä myös erilaisten ja eri tavoin kuormitettujen putkien yhteydessä. Yhtälöjoukkoa voitaisiin laajentaa myös kolmiomaisesti tai käyräviivaisesti jakautuvien kuormien tapuksiin.

Eri tavoin (I-V) kuormitettujen ympyrärenkaiden momentin (M), normaalivoiman (N) ja leikkausvoiman (T) lausekkeet sekä pinnat erikoispisteissä.

			
Segmentti	M N T	Kaava	No.
$\phi = 0 \div \alpha$	M	$Pr\left[\frac{1}{\pi}(1 + \cos\alpha) + \sin\alpha \cos\phi \left(\frac{\alpha}{\pi} - 1\right)\right]$	1
	N	$P\left(\frac{\alpha}{\pi} - 1\right)\sin\alpha \cos\phi$	3
	T	$P\left(\frac{\alpha}{\pi} - 1\right)\sin\alpha \sin\phi$	5
$\phi = \alpha \div \pi$	M	$Pr\left[\frac{\alpha}{\pi} \sin\alpha \cos\phi - \cos\alpha \sin\phi + \frac{1}{\pi}(1 + \cos\alpha)\right]$	2
	N	$P\left(\frac{\alpha}{\pi} \sin\alpha \cos\phi - \cos\alpha \sin\phi\right)$	4
	T	$P\left(\frac{\alpha}{\pi} \sin\alpha \sin\phi + \cos\alpha \cos\phi\right)$	6

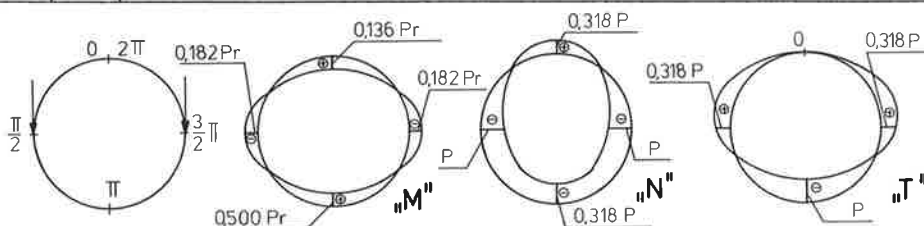


II



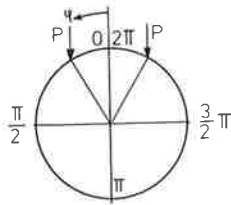
Segmentti	M N T	Kaava	No.
$\phi = 0 \div \alpha$	M	$Pr[\frac{\alpha}{\pi} - 1 + \frac{1}{\pi} \sin \alpha + (\frac{1}{\pi} \sin \alpha + \cos \alpha - \frac{\alpha}{\pi} \cos \alpha) \cos \phi]$	16
	N	$\frac{P}{\pi} [\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha] \cos \phi$	18
	T	$\frac{P}{\pi} [\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha] \sin \phi$	20
$\phi = \alpha \div \pi$	M	$Pr[\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sin \alpha - \sin \alpha \sin \phi + (\frac{1}{\pi} \sin \alpha - \frac{\alpha}{\pi} \cos \alpha) \cos \phi]$	17
	N	$P[(\frac{1}{\pi} \sin \alpha - \frac{\alpha}{\pi} \cos \alpha) \cos \phi - \sin \alpha \sin \phi]$	19
	T	$P[(\frac{1}{\pi} \sin \alpha - \frac{\alpha}{\pi} \cos \alpha) \sin \phi + \sin \alpha \cos \phi]$	21

IIA

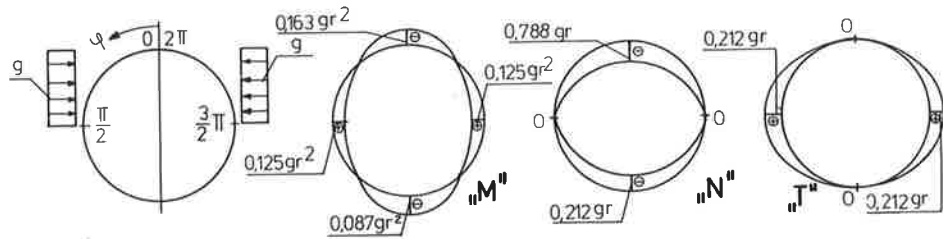


$\phi = 0 \div \frac{\pi}{2}$	M	$Pr(0,318 \cos \phi - 0,182)$	22
	N	$0,318 P \cos \phi$	24
	T	$0,318 P \sin \phi$	26
$\phi = \frac{\pi}{2} \div \pi$	M	$Pr(0,818 + 0,318 \cos \phi - \sin \phi)$	23
	N	$P(0,318 \cos \phi - \sin \phi)$	25
	T	$P(0,318 \sin \phi + \cos \phi)$	27
$\phi = 0$	M	$0,136 Pr$	
	N	$0,318 P$	
	T	0	
$\phi = \frac{\pi}{2}$	M	$- 0,182 Pr$	
	N	$\frac{g}{d} \begin{matrix} 0 & \text{(ylhäällä)} \\ - P & \text{(alhaalla)} \end{matrix}$	
	T	$0,318 P$	
$\phi = \pi$	M	$0,5 Pr$	
	N	$- 0,318 P$	
	T	$- P$	

III

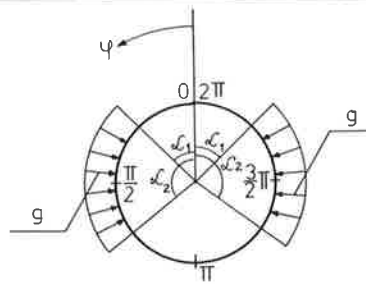


Segmentti	M N T	Kaava	No.
$\phi = 0 \div \alpha$	M	$Pr[(\frac{\alpha}{\pi} - 1)\sin \alpha + \frac{1}{\pi}(1 + \cos \alpha) + \frac{1}{\pi} \sin^2 \alpha \cos \phi]$	28
	N	$\frac{P}{\pi} \sin^2 \alpha \cos \phi$	30
	T	$\frac{P}{\pi} \sin^2 \alpha \sin \phi$	32
$\phi = \alpha \div \pi$	M	$Pr[\frac{\alpha}{\pi} \sin \alpha + \frac{1}{\pi} (1 + \cos \alpha) - \sin \phi + \frac{1}{\pi} \sin^2 \alpha \cos \phi]$	29
	N	$P(\frac{1}{\pi} \sin^2 \alpha \cos \phi - \sin \phi)$	31
	T	$P(\frac{1}{\pi} \sin^2 \alpha \sin \phi + \cos \phi)$	33



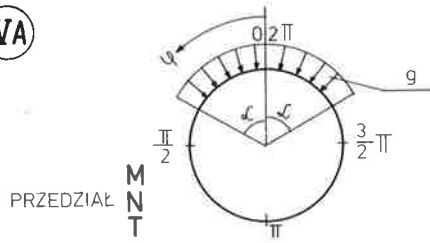
$\phi = 0 \div \frac{\pi}{2}$	M	$gr^2(0,125 - 0,5\cos^2 \phi + 0,212 \cos \phi)$	55
	N	$gr \cos \phi (0,212 - \cos \phi)$	57
	T	$gr(0,212 - \cos \phi)\sin \phi$	59
$\phi = \frac{\pi}{2} \div \pi$	M	$gr^2(0,125 + 0,212 \cos \phi)$	56
	N	$0,212 gr \cos \phi$	58
	T	$0,212 gr \sin \phi$	
$\phi = 0$	M	$- 0,163 gr^2$	
	N	$- 0,788 gr$	
	T	0	
$\phi = \frac{\pi}{2}$	M	$0,125 gr^2$	
	N	0	
	T	$0,212 gr$	
$\phi = \pi$	M	$- 0,087 gr^2$	
	N	$- 0,212 gr$	
	T	0	

IV



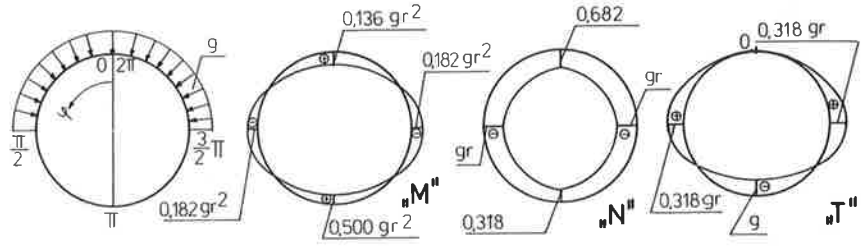
Segmentti		Kaava	No.
$\phi = 0 \div \alpha_1$	M	$\frac{gr^2}{\pi} [\alpha_2 - \alpha_1 + \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 + \cos \phi (-\alpha_2 \cos \alpha_2 + \alpha_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 + \pi \cos \alpha_2 - \pi \cos \alpha_1)]$	34
	N	$\frac{gr}{\pi} \cos \phi [(\pi - \alpha_2) \cos \alpha_2 + (\alpha_1 - \pi) \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1]$	37
	T	$\frac{gr}{\pi} [(\pi - \alpha_2) \cos \alpha_2 + (\alpha_1 - \pi) \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1] \sin \phi$	40
$\phi = \alpha_1 \div \alpha_2$	M	$\frac{gr^2}{\pi} [\alpha_2 + \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 - \alpha_1 - \pi + \pi \sin \alpha_1 \sin \phi + \cos \phi (-\alpha_2 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 + \pi \cos \alpha_2 + \alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1)]$	35
	N	$\frac{gr}{\pi} [(-\alpha_2 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 + \alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 + \pi \cos \alpha_2) \cos \phi + \pi \sin \alpha_1 \sin \phi - \pi]$	
	T	$\frac{gr}{\pi} [(-\alpha_2 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 + \pi \cos \alpha_2 + \alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1) \sin \phi + \pi \sin \alpha_1 \cos \phi]$	41
$\phi = \alpha_2 = \pi$	M	$\frac{gr^2}{\pi} [\alpha_2 - \alpha_1 + \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 - \pi \sin \phi (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) + \cos \phi (-\alpha_2 \cos \alpha_2 + \alpha_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)]$	36
	N	$\frac{gr}{\pi} [(-\alpha_2 \cos \alpha_2 + \alpha_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \cos \phi + \pi \sin \phi (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)]$	39
	T	$\frac{gr}{\pi} [\sin \phi (-\alpha_2 \cos \alpha_2 + \alpha_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) + \pi \cos \phi (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)]$	42

IVA



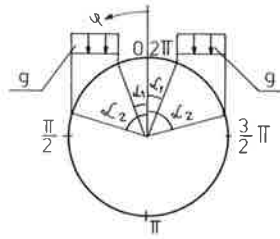
Segmentti	M N T	Kaava	No.
$\phi = 0 \div \alpha$	M	$\frac{gr^2}{\pi} [\alpha + \sin \alpha - \pi + \cos \phi (-\alpha \cos \alpha + \sin \alpha + \pi \cos \alpha)]$	43
	N	$\frac{gr^2}{\pi} [(-\alpha \cos \alpha + \sin \alpha + \pi \cos \alpha) \cos \phi - \pi]$	45
	T	$\frac{gr^2}{\pi} [(-\alpha \cos \alpha + \sin \alpha + \pi \cos \alpha) \sin \phi]$	47
$\phi = \alpha \div \pi$	M	$\frac{gr^2}{\pi} [\alpha + \sin \alpha - \pi \sin \alpha \sin \phi + \cos \phi (-\alpha \cos \alpha + \sin \alpha)]$	44
	N	$\frac{gr^2}{\pi} [(-\alpha \cos \alpha + \sin \alpha) \cos \phi - \pi \sin \alpha \sin \phi]$	46
	T	$\frac{gr^2}{\pi} [(-\alpha \cos \alpha + \sin \alpha) \sin \phi + \pi \sin \alpha \cos \alpha]$	48

IVB

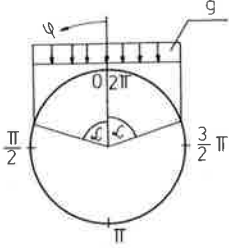
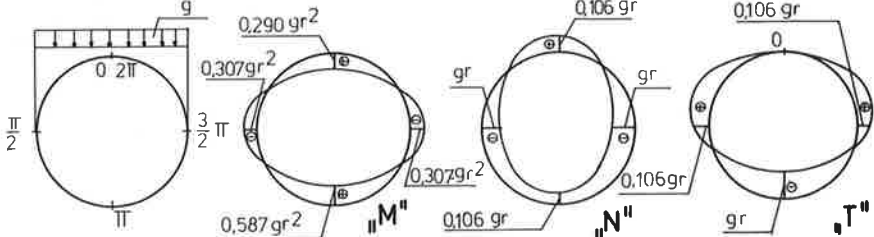


$\phi = 0 \div \frac{\pi}{2}$	M	$gr^2 (-0,182 + 0,318 \cos \phi)$	49
	N	$gr (0,318 \cos \phi - 1)$	51
	T	$0,318 gr \sin \phi$	53
$\phi = \frac{\pi}{2} \div \pi$	M	$gr^2 (0,818 - \sin \phi + 0,318 \cos \phi)$	50
	N	$gr (0,318 \cos \phi - \sin \phi)$	52
	T	$gr (0,318 \sin \phi + \cos \phi)$	54
$\phi = 0$	M	$0,136 gr^2$	
	N	$-0,682 gr$	
	T	0	
$\phi = \frac{\pi}{2}$	M	$-0,182 gr^2$	
	N	$-gr$	
	T	$0,318 gr$	
$\phi = \pi$	M	$0,5 gr^2$	
	N	$-0,318 gr$	
	T	$-gr$	

V



Segmentti	M N I	Kaava	No.
$\phi = 0 \div \alpha_1$	M	$\frac{gr^2}{\pi} \left[\frac{1}{4}(\pi - \alpha_2)\cos 2\alpha_2 + \frac{1}{4}(\alpha_1 - \pi)\cos 2\alpha_1 + \frac{3}{8}(\sin 2\alpha_2 + \right.$ $\left. - \sin 2\alpha_1) + \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 + \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) + \right.$ $\left. + \frac{1}{3} \cos \phi (\sin^3 \alpha_2 - \sin^3 \alpha_1) \right]$	61
	N	$\frac{gr}{3\pi} \cos \phi (\sin^3 \alpha_2 - \sin^3 \alpha_1)$	64
	T	$\frac{gr}{3\pi} \sin \phi (\sin^3 \alpha_2 - \sin^3 \alpha_1)$	67
$\phi = \alpha_1 \div \alpha_2$	M	$\frac{gr^2}{\pi} \left[\frac{1}{4}(\pi - \alpha_2)\cos 2\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_1\cos 2\alpha_1 + \frac{3}{8}(\sin 2\alpha_2 + \right.$ $\left. - \sin 2\alpha_1) - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \sin^2 \phi + \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 + \right.$ $\left. + \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) + \pi \sin \alpha_1 \sin \phi + \frac{1}{3} \cos \phi (\sin^3 \alpha_2 - \sin^3 \alpha_1) \right]$	62
	N	$\frac{gr}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos \phi (\sin^3 \alpha_2 - \sin^3 \alpha_1) - \pi \sin^2 \phi + \pi \sin \alpha_1 \sin \phi \right]$	65
	T	$\frac{gr}{\pi} \left[\frac{1}{3} \sin \phi (\sin^3 \alpha_2 - \sin^3 \alpha_1) + \frac{\pi}{2} \sin 2\phi - \pi \sin \alpha_1 \cos \phi \right]$	68
$\phi = \alpha_2 \div \pi$	M	$\frac{gr^2}{\pi} \left[\frac{1}{4}(\alpha_1 \cos 2\alpha_1 - \alpha_2 \cos 2\alpha_2) + \frac{3}{8}(\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) + \right.$ $\left. + \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) + (\pi \sin \phi - 1)(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) + \right.$ $\left. + \frac{1}{3} \cos \phi (\sin^3 \alpha_2 - \sin^3 \alpha_1) \right]$	63
	N	$\frac{gr}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos \phi (\sin^3 \alpha_2 - \sin^3 \alpha_1) + \pi \sin \phi (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \right]$	66
	T	$\frac{gr}{\pi} \left[\frac{1}{3} \sin \phi (\sin^3 \alpha_2 - \sin^3 \alpha_1) + \pi \cos \phi (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \right]$	69

Segmentti		M	N	T	Kaava	No.
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 5px; margin-right: 10px;">VA</div>  </div>						
$\phi = 0 \div \alpha$	M	$\frac{gr^2}{\pi}$	$[\frac{1}{4}(\pi - \alpha)\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\sin 2\alpha - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\sin^2 \phi + \sin \alpha + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\sin^3 \alpha \cos \phi]$			70
	N	$\frac{gr}{\pi}$	$(\frac{1}{3}\sin^3 \alpha \cos \phi - \pi \sin^2 \phi)$			72
	T	$\frac{gr}{\pi}$	$(\frac{1}{3}\sin^3 \alpha \sin \phi + \frac{\pi}{2}\sin 2\phi)$			74
$\phi = \alpha \div \pi$	M	$\frac{gr^2}{\pi}$	$(-\frac{1}{4}\alpha \cos 2\alpha + \frac{3}{8}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha - \pi \sin \alpha \sin \phi + \sin \alpha + \frac{1}{3}\sin^3 \alpha \cos \phi)$			71
	N	$\frac{gr}{\pi}$	$(\frac{1}{3}\sin^3 \alpha \cos \phi - \pi \sin \alpha \sin \phi)$			73
	T	$\frac{gr}{\pi}$	$(\frac{1}{3}\sin \phi \sin^2 \alpha + \pi \cos \phi) \sin \alpha$			75
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 5px; margin-right: 10px;">VB</div>  </div>						
$\phi = 0 \div \frac{\pi}{2}$	M	gr^2	$(0,193 + 0,106 \cos \phi - 0,5 \sin^2 \phi)$			
	N	gr	$(0,106 \cos \phi - \sin^2 \phi)$			
	T	gr	$(0,106 \sin \phi + 0,5 \sin 2\phi)$			
$\phi = \frac{\pi}{2} \div \pi$	M	gr^2	$(0,693 + 0,106 \cos \phi - \sin \phi)$			
	N	gr	$(0,106 \cos \phi - \sin \phi)$			
	T	gr	$(0,106 \sin \phi + \cos \phi)$			
$\phi = 0$	M		$0,299 gr^2$			
	N		$0,106 gr$			
	T		0			
$\phi = \frac{\pi}{2}$	M		$- 0,307 gr^2$			
	N		$- gr$			
	T		$0,106 gr$			
$\phi = \pi$	M		$0,587 gr^2$			
	N		$- 0,106 gr$			
	T		$- gr$			

Stefan Heise, dipl.ins., Puola