

PAKSUSEINÄISTEN KOTELOSAUVOJEN VÄÄNTÖ

Vesa Penttala

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 9
No. 2 1976 s. 1-16

YHTEENVETO: Artikkelissa on käsitelty paksuseinäisen, suoran, tasajäykän, homogeenisesta ja isotrooppisesta materiaalista valmistetun kotelosauvan vääntöä. Sauva oletetaan varustetun poikittaisilla jäykisteillä siten, että sen poikkileikkausmuoto ei vinoudu tasossaan. Poikittaisjäykisteet eivät estä sauvan akselinsuuntaisia siirtymiä. Kotelosauvan estetyn väännön ratkaisemiseksi on johdettu laskentamenetelmä. Teoria perustuu oletukselle, että sauvan akselin suuntaisten normaalijännitysten jakautuma poikkileikkauksessa on affiininen vapaan väännön akselinsuuntaisten siirtymien kanssa. Teoriaa on sovellettu poikkileikkaukseltaan suorakaiteen muotoisille kotelosauvoille, joiden kiertymiselle ja jännityksille on johdettu lausekkeet. Teorian tuloksia on verrattu polymetyylimetakrylaattilevyistä valmistetuilla paksuseinäisillä kotelosauvoilla suoritettujen peinoismallikokeiden tuloksiin.

1. JOHDANTO

Ohutseinäisten sauvarakenteiden vääntötehtävä on ratkaistu ja kehitetty varsin pitkälle jo vuosikymmeniä sitten. Paksuseinäisten kotelopoikkileikkausten väännöstä on sitä vastoin erittäin vähän tutkimuksia. Ohutseinäisille kotelosauvoille tarkoitettujen laskumenetelmien soveltamisessa paksuseinäisiin rakenteisiin on todettu varsin virheellisiä tuloksia. Laskumenetelmien epätarkkuus pakottaa käyttämään suunnittelussa turhan suuria varmuuskertoimia ja rakenteen toiminta ja jännitystila jäävät epäselviksi varsinkin sellaisissa rakenteen kohdissa, joissa väännön aiheuttamat akselinsuuntaiset siirtymät eivät pääse tapahtumaan vapaasti.

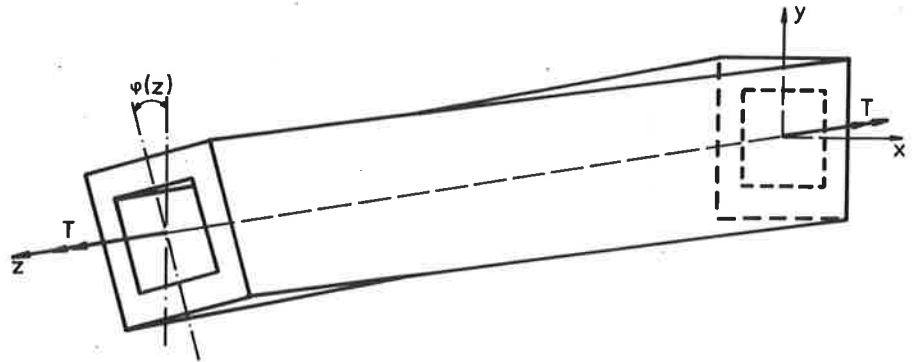
Tutkimuksessa käsitelty paksuseinäisten kotelosauvojen vääntötehtävä voidaan ratkaista myös elementti- tai differenssimenetelmillä. Kuitenkin tässä esityksessä on käytetty jatkuvien funktioiden teoriaa ja differentiaaliyhtälöitä, jolloin ratkaisumenetelmä on säilynyt havainnollisena ja erilaisten poikkileikkausmuotojen vaikutus jännitystilaan nähdään ratkaisuyhtälöistä helposti.

2. TEHTÄVÄN RAJAAMINEN

Poikkileikkaukseltaan mielivaltaisen, tasajäykän, prismanmuotoisen, lineaarisesti elastisesta, homogeenisesta ja isotrooppisesta materiaalista val-

mistetun sauvan jännitystehtävän ratkaisemisessa on sauvan jännitysten ja siirtymien toteutettava kimmoteorian yleiset yhtälöt. Jos tarkastellaan sauvan pieniä muodonmuutoksia, voidaan käyttää lineaarista teoriaa. Tasapainoyhtälöiden, kinemaattisten yhtälöiden, materiaalin konstitutiivisten yhtälöiden ja yhteensopivuusehtojen lisäksi on jännitysten ja siirtymien täytettävä reunaehdot. Ulkoisten voimien ja sauvan reunajännitysten tulee olla tasapainossa tai sauvan pintojen siirtymillä on määrätty reuna-arvot.

Ulkoisen kuormituksen komponenteista jätetään tarkastelun ulkopuolelle ne, jotka aiheuttavat sauvaan puhtaita veto-, puristus- tai taivutusrasituksia. Jäljelle jääneitä sauvan akselin normaalitasoissa sijaitsevia tai sauvan akselin suuntaisia kuormituskomponentteja kutsutaan vääntökuormaksi.



Kuva 1. Vääntösauvan sijainti koordinaatistossa.

Fig. 1. Coordinates of the torsion beam.

Vääntökuorman vaikutuksesta kääntyvät dz -pituiset sauva-alkiot toistensa suhteen, jolloin sauvaan syntyy xz - ja yz -tasojen suuntaisia leikkausjännityksiä. Myös sauvan akselin suuntaiset säikeet siirtyvät toistensa suhteen aiheuttaen yleensä sauvan poikkileikkauksen käyristymisen. Jos poikkileikkauksen vapaa käyristyminen estyy joko vääntökuorman jakautumisen tai reunaehtojen johdosta, syntyy sauvaan sen akselin suuntaisia normaalijännityksiä.

Jos vääntökuorman jakautuma poikkileikkaukseltaan mielivaltaisella sauvalle on sellainen, että sauvan jokaisessa poikkileikkauksessa vaikuttaa vakio-vääntömomentti eikä sauvan poikkileikkauksen käyristymistä ole estetty, kutsutaan vääntökuormitustapausta vapaaksi väännöksi. Jos poikkileikkauksen vapaa käyristyminen on estetty, vääntötapausta nimitetään estetyksi väännök-si ja sauvaan syntyy sen akselin suuntaisia normaalijännityksiä. Estetystä väännöstä on kirjallisuudessa käytetty myös nimityksiä sektoriaalinen vääntö ja rajoitettu vääntö. Ohutseinäisiin sauvoihin estetyssä väännössä syntyvät sauvan akselin suuntaiset normaalijännitykset oletetaan yleensä tasan jakautuneiksi seinämän paksuuden suunnassa.

Tässä artikkelissa tarkastellaan sellaista paksuseinäistä, poikkileikkaukseltaan suorakaiteen muotoista kotelosauvaa, jonka seinämän tangentin

suuntaisia leikkausjännityksiä ja sauvan akselin suuntaisia normaalijännityksiä ei voida olettaa tasan jakautuneiksi seinämän paksuuden suunnassa. σ_z -jännitysten jakautuma kotelon poikkileikkauksessa oletetaan affiiniseksi kotelon vapaan väännön akselinsuuntaisten siirtymien kanssa. Kotelo oletetaan varustetun poikittaisilla jäykisteillä siten, että sauvan poikkileikkauksuoto ei vinoudu tasossaan. Poikkijäykisteet eivät estä kotelon akselin suuntaisia siirtymiä.

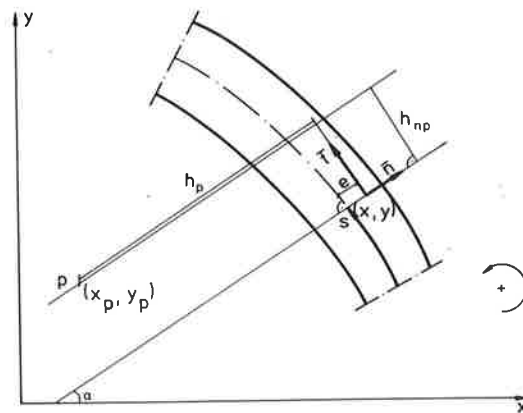
Tarkasteltavan sauvan poikkileikkauksdimensiot ovat pieniä verrattuna sauvan pituuteen, ja kun yleensä suurimmalla osalla sauvan pinnasta ei sijaitse kuormia, voidaan normaalijännitykset σ_x ja σ_y otaksua nolliksi. Oletuksen voidaan katsoa pitävän paikkansa muualla paitsi ulkoisten voimien vaikutuskohtien välittömässä läheisyydessä. Koska sauvan poikkileikkauksuoto ei vinoudu tasossaan, ovat kotelosauvan leikkausjännitykset $\tau_{xy} = 0$.

3. TEORIAN JOHTO

Paksuseinäisten kotelosauvojen estetyn väännön teoria perustuu oletukselle, että sauvan akselinsuuntaisten normaalijännitysten jakautuma poikkileikkauksessa on affiininen vapaassa väännössä tapahtuvien sauvan akselinsuuntaisten siirtymien kanssa. Tämän vuoksi johdetaan seuraavassa ensin paksuseinäisen kotelosauvan akselinsuuntaiset siirtymät vapaassa väännössä.

Vapaa vääntö

Esityksessä pyritään käyttämään teoksen /2/ merkintöjä soveltuvin osin. Tarkastellaan kuvassa 2 esitetyn sauvanosan akselinsuuntaisia siirtymiä $w = w(s, e)$, jossa s on seinämän keskiviivan koordinaatti ja e normaalin suuntainen etäisyys siitä ja piste P on vääntökeskiö.



Kuva 2. Teoriassa käytetyt sauvan poikkileikkauksen merkinnät.

Fig. 2. Notations used for the cross section of the beam.

Sauvan akselinsuuntainen siirtymä on

$$w(s, e) = \int_0^e \frac{\partial w(s, e)}{\partial e} de + \int_0^s \frac{\partial w(s, 0)}{\partial s} ds + w_0, \quad (1)$$

jossa w_0 on seinämän keskilinjalla sijaitsevan alkupisteen z-akselin suuntainen siirtymä. Tarkasteltavan kotelosauvan vapaassa väännössä on $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$, jolloin määritettävät jännityskomponentit ovat

$$\begin{cases} \frac{1}{G} \tau_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi'(y - y_P) \\ \frac{1}{G} \tau_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi'(x - x_P) \end{cases}, \quad (2)$$

jossa φ' on kiertymän derivaatta eli vääntymä.

Kuvan 2 mukaisten merkintöjen ja geometrinen riippuvuuksien perusteella saadaan sauvan akselin suuntaisten siirtymien kaava (1) muotoon

$$w(s, e) = \frac{1}{G} \left[\int_0^e \tau_{zn} de + \int_0^s \tau_{zs}(s, 0) ds \right] = \varphi' \left[\int_0^e h_{nP} de + \int_0^s h_P(s, 0) ds \right] + w_0. \quad (3)$$

Kaava soveltuu sekä avoimille poikkileikkauksille että kotelopoikkileikkauksille. Jos sauvan seinämä on ohut, on $\tau_{zn} \approx 0$. Ohutseinäisellä avoimella poikkileikkauksella on $\tau_{zs}(s, 0) = 0$ ja kaavan (3) ensimmäinen hakusulklauseke supistuu pois.

Merkitään lauseketta (3) seuraavasti

$$\begin{cases} w(s, e) = -\omega \varphi' \\ \omega = -\frac{1}{G\varphi'} \left[\int_0^e \tau_{zn} de + \int_0^s \tau_{zs}(s, 0) ds \right] + \int_0^e h_{nP} de + \int_0^s h_P(s, 0) ds = -\frac{w_0}{\varphi'}, \end{cases} \quad (4)$$

jossa ω on poikkileikkauksen sektorიაალinen koordinaatti.

Estetty vääntö

Estetyssä väännössä syntyvien sauvan akselinsuuntaisten normaalijännitysten jakautuma poikkileikkauksessa on affiinin sektorიაალisen koordinaatin ω kanssa. Estetyn väännön normaalijännitysten ja näistä aiheutuvien leikkausjännitysten jakautuma sauvan akselin suunnassa voidaan määrittää kahdella tavalla. Jännitystila voidaan ratkaista siten, että jännitykset täyttävät tasapainoehdot tarkasti kotelon teräviä nurkka-alueita lukuunottamatta ja yhteensopivuusehdot ainoastaan keskimäärin tai että jännitykset täyttävät yhteensopivuusehdot tarkasti ja tasapainoehdot ainoastaan keskimääräisesti. Paksuseinäisillä koteluilla muodustuu ensiksi mainitulla tavalla kehitettyä teoriasta selvästi monimutkaisempi ja tosin myös tarkempi laskumenetelmä kuin toiseksi mainitulla tavalla. Seuraavassa johdetaan rajoitetun väännön ratkaisuyhtälöt siten, että jännitykset täyttävät yhteensopivuusehdot kar-

kasti ja tasapainoehdot ainoastaan keskimääräisesti virtuaalisten siirtymien periaatetta soveltamalla.

Kuvan 2 merkintöjä käyttämällä saadaan sauvan siirtymiksi

$$\begin{cases} u = \varphi h_{nP} \\ v = \varphi h_P \\ w = -\omega\theta \end{cases}, \quad (5)$$

jossa u ja v ovat siirtymät seinämän normaalin \bar{n} ja tangentin \bar{t} suunnissa ja w siirtymä akselin suunnassa. Käyritymä $\theta = \theta(z)$ on tuntematon funktio, jonka arvo määritetään soveltamalla virtuaalisten siirtymien periaatetta.

Käyttämällä yhtälöitä (5) saadaan jännityksille lausekkeet

$$\begin{cases} \sigma_z = -E_1 \omega \theta' \\ \tau_{zs} = G(\varphi' h_P - \theta \frac{\partial w}{\partial s}) \\ \tau_{zn} = G(\varphi' h_{nP} - \theta \frac{\partial w}{\partial e}) \end{cases}, \quad (6)$$

jossa

$$E_1 = E/(1-\nu^2).$$

Virtuaalisten siirtymien periaatetta sovellettaessa tulee ulkoisten ja sisäisten voimien tekemien töiden summa olla nolla

$$\delta'W + \delta'U = 0. \quad (7)$$

Merkintä $\delta'W$ tarkoittaa ulkoisten voimien suorittamaa virtuaalista työtä erotukseksi variaatiosta δW .

Kotelosauvan osaan vaikuttavien ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ sauvan pituutta kohti laskettuna on

$$\delta'W = \int_A \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} \cdot \delta \bar{r} + \bar{\sigma} \cdot \frac{\partial (\delta \bar{r})}{\partial z} \right) dA + \int_S \bar{p} \cdot \delta \bar{r} ds \quad (8)$$

ja sauvanosan sisäisten jännitysten tekemä virtuaalinen työ on

$$\delta'U = - \int_A (\sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{zs} \delta \gamma_{zs} + \tau_{zn} \delta \gamma_{zn}) dA. \quad (9)$$

Virtuaalisten siirtymien koordinaattiakselien suuntaiset komponentit ovat

$$\begin{cases} \delta \xi = -(y - y_p) \cdot \delta \varphi \\ \delta \eta = (x - x_p) \cdot \delta \varphi \\ \delta w = -\omega \delta \theta \end{cases}, \quad (10)$$

ja siirtymävektori

$$\delta \vec{r} = \delta \xi \vec{i} + \delta \eta \vec{j} + \delta w \vec{k},$$

jossa \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} ovat koordinaattiakselien x , y , z suuntaiset yksikkövektorit. Kuormitusvektori on

$$\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} \quad (11)$$

ja yksikön pituiseen kotelosauvan osaan vaikuttava jännitys

$$\vec{\sigma} = (\tau_{zn} \cos \alpha - \tau_{zs} \sin \alpha) \vec{i} + (\tau_{zn} \sin \alpha + \tau_{zs} \cos \alpha) \vec{j} + \sigma_z \vec{k}. \quad (12)$$

Ulkoinen virtuaalinen työ (8) tulee tällöin muotoon

$$\begin{aligned} \delta'W = & \int_A [(\tau'_{zn} \cos \alpha - \tau'_{zs} \sin \alpha) \delta \xi + (\tau'_{zn} \sin \alpha + \tau'_{zs} \cos \alpha) \delta \eta + \sigma'_z \delta w + \\ & + (\tau_{zn} \cos \alpha - \tau_{zs} \sin \alpha) \frac{\partial(\delta \xi)}{\partial z} + (\tau_{zn} \sin \alpha + \tau_{zs} \cos \alpha) \frac{\partial(\delta \eta)}{\partial z} + \\ & + \sigma_z \frac{\partial(\delta w)}{\partial z}] dA + \int_s (p_x \delta \xi + p_y \delta \eta + p_z \delta w) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Sijoittamalla lausekkeet (9) ja (13) virtuaalisen työn yhtälöön (7) saadaan tulokseksi yhtälöryhmä

$$\begin{cases} M'_p + m_p = 0 \\ B' + M'_\omega + m_\omega = 0, \end{cases} \quad (14)$$

jossa

$$\begin{aligned} M'_p &= \int_A (\tau_{zn} h_{nP} + \tau_{zs} h_{pP}) dA \\ B &= \int_A \sigma_z w dA \\ M'_\omega &= \int_A (\tau_{zs} \frac{\partial w}{\partial s} + \tau_{zn} \frac{\partial w}{\partial e}) dA \\ m_p &= \int_s [p_y (x - x_p) - p_x (y - y_p)] ds \\ m_\omega &= \int_s p_z w ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Vääntömomenttia kuvaa merkintä M_p , B on bimomentti ja M_ω on estetyn väännön osuus vääntömomentista. Jakautunut vääntökuorma on m_p ja m_ω on bimomenttikuorma.

Normeerataan koordinaatisto siten, että

$$\begin{cases} S_{\omega} = \int_A \omega dA = 0 \\ I_{\omega x} = \int_A \omega x dA = 0 \\ I_{\omega y} = \int_A \omega y dA = 0 \end{cases}$$

Tällöin akseli P yhtyy poikkipinnan vääntökeskiöön. Sijoittamalla yhtälöiden (6) mukaiset jännitykset yhtälöihin (15) saadaan

$$\begin{cases} M_P = GI_{hh}\varphi' - GI_{h\omega}\theta \\ M_{\omega} = GI_{h\omega}\varphi' - GI_{\omega\omega}\theta \\ B = -E_1 I_{\omega\omega}\theta' \end{cases} \quad (16)$$

jossa poikkileikkauksen jäyhyysarvot ovat

$$\begin{cases} I_{hh} = \int_A (h_{nP}^2 + h_P^2) dA \\ I_{h\omega} = \int_A (h_{nP} \frac{\partial \omega}{\partial e} + h_P \frac{\partial \omega}{\partial s}) dA \\ I_{\omega\omega} = \int_A [(\frac{\partial \omega}{\partial e})^2 + (\frac{\partial \omega}{\partial s})^2] dA \\ I_{\omega\omega} = \int_A \omega^2 dA \end{cases} \quad (17)$$

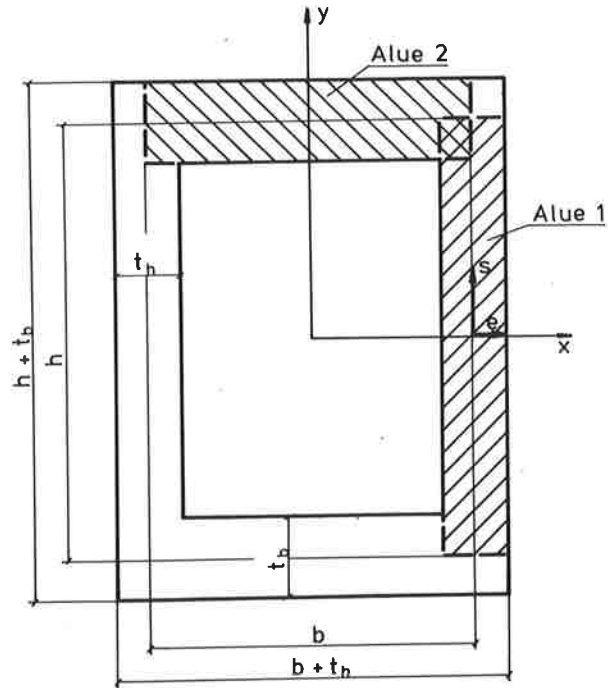
Vapaassa väännössä tulee olla $\theta = \varphi'$, mistä johtuen jäyhyyksien $I_{h\omega}$, ja $I_{\omega\omega}$, on oltava yhtä suuria.

Sijoittamalla voimasuuret (16) differentiaaliyhtälöryhmään (14) saadaan estetyn väännön yhtälöiksi

$$\begin{cases} E_1 \frac{I_{hh}}{I_{\omega\omega}} I_{\omega\omega} \varphi^{IV} - G(I_{hh} - I_{\omega\omega}) \varphi'' = m_P - \frac{E_1 I_{\omega\omega}}{GI_{\omega\omega}} m_P'' + m_{\omega}' \\ \theta = \frac{E_1 I_{hh} I_{\omega\omega}}{G(I_{\omega\omega})^2} \varphi''' + \varphi' - \frac{m_{\omega}}{GI_{\omega\omega}} + \frac{E_1 I_{\omega\omega} m_P'}{G(I_{\omega\omega})^2} \end{cases} \quad (18)$$

Suorakaidekotelosauvan ratkaisu

Seuraavassa johdetaan poikkileikkaukseltaan kuvan 3 mukaisen kotelosauvan jäyhyysarvot sekä ratkaistaan estetyn väännön differentiaaliyhtälö pienoismallien koejärjestelyä vastaavalle kuormitukselle.



Kuva 3. Kotelosauvan poikkileikkausmitat.

Fig. 3. Dimensions of the cross section.

Tutkittavan kotelon sivudimensiot ovat suuria verrattuna kotelon seinien paksuuteen, jolloin nurkkien vaikutus voidaan pienuutensa takia jättää tarkastelun ulkopuolelle. Tällöin on myös $\tau_{zn} \approx 0$. Kotelosauvan poikkileikkaus on symmetrinen kahden akselin suhteen, jolloin valitsemalla e_s -koordinaatiston alkupiste kuvan 3 mukaisesti on $w_0 = 0$. Kotelosauvan vapaan väännön leikkausjännitykset voidaan määrittää lähteen [3] mukaisesti

$$\begin{cases} \tau_{zs1} = G\varphi' \left(\frac{bh}{\frac{h}{t_h} + \frac{b}{t_b}} \cdot \frac{1}{t_h} + 2e \right) \\ \tau_{zs2} = G\varphi' \left(\frac{bh}{\frac{h}{t_h} + \frac{b}{t_b}} \cdot \frac{1}{t_b} + 2e \right) \end{cases} \quad (19)$$

Kaavasta (4) saadaan

$$\text{Alueessa 1} \quad \omega_1 = \left(-\frac{b}{2} \frac{\frac{h}{t_h} - \frac{b}{t_b}}{\frac{h}{t_h} + \frac{b}{t_b}} - e \right) s \quad (20)$$

$$\text{Alueessa 2} \quad \omega_2 = \left(\frac{h}{2} \frac{\frac{h}{t_h} - \frac{b}{t_b}}{\frac{h}{t_h} + \frac{b}{t_b}} - e \right) \left(s - \frac{h}{2} - \frac{b}{2} \right)$$

Koska $\tau_{zn} \ll \tau_{zs}$ muualla paitsi nurkka-alueilla, merkitään $\tau_{zn} = 0$, jolloin poikkileikkauksen jäyhyysarvot sievenevät muotoon

$$\begin{cases} I_{hh} = \int_A h_p^2 dA \\ I_{\omega'\omega'} = \int_A \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} \right)^2 dA \\ I_{\omega\omega} = \int_A \omega^2 dA \end{cases} \quad (21)$$

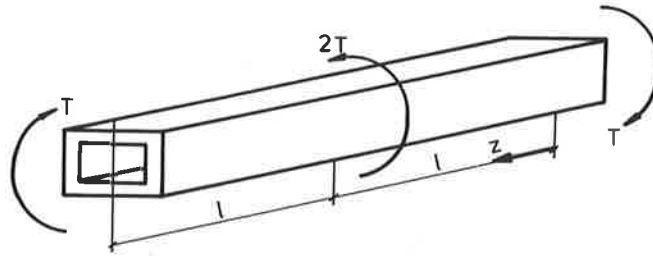
$$\begin{cases} I_{hh} = \frac{bh}{2} t_h t_b \left(\frac{h}{t_h} + \frac{b}{t_b} \right) + \frac{1}{6} (h t_h^3 + b t_b^3) \\ I_{\omega'\omega'} = \frac{bh}{2} t_h t_b \frac{\left(\frac{h}{t_h} - \frac{b}{t_b} \right)^2}{\frac{h}{t_h} + \frac{b}{t_b}} + \frac{1}{6} (h t_h^3 + b t_b^3) \\ I_{\omega\omega} = \frac{1}{24} b^2 h^2 (t_h h + t_b b) \left(\frac{\frac{h}{t_h} - \frac{b}{t_b}}{\frac{h}{t_h} + \frac{b}{t_b}} \right)^2 + \frac{1}{72} (h^3 t_h^3 + b^3 t_b^3) \end{cases} \quad (22)$$

Poikkileikkauksen jäyhyysarvojen jälkimmäiset tekijät aiheutuvat kotelo-sauvan paksuseinäisyydestä. Kotelon vääntöjäyhyysmomentiksi muodostuu

$$I_t = I_{hh} - I_{\omega'\omega'} = \frac{2b^2 h^2}{\frac{h}{t_h} + \frac{b}{t_b}}$$

Tulos on sama kuin ohutseinäisillä koteloilla. Tämä johtuu siitä, että jännitykset toteuttavat tasapainoyhtälöt ainoastaan keskimääräisesti. Jännitystuloksiin vääntöjäyhyysmomentin virhe vaikuttaa vähemmän, sillä kaavoissa (6) esitettyjen jännitysytälöiden ja vääntöjäyhyysmomentin virheet kumoavat toisiaan.

Pienoismallikokeiden kuormitusjärjestely on esitetty kuvassa 4. Kotelo-sauvan keskikohtaan vaikuttaa pistemäinen momentti $2T$.



Kuva 4. Pienoismodellikokeiden kuormitusjärjestely.

Fig. 4. Loading arrangement in the torsion tests.

Differentiaaliyhtälöiden (18) reunaehdot ovat

$$\varphi(0) = 0,$$

$$B(0) = 0,$$

$$w(l) = 0,$$

$$M(l) = T.$$

Kiertymän ratkaisu on muotoa

$$\varphi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh \frac{k}{l} z + C_4 \cosh \frac{k}{l} z,$$

jossa

$$\frac{k}{l} = \sqrt{\frac{GI_t (I_{hh} - I_t)}{E_1 I_{hh} I_{\omega\omega}}}.$$

Ratkaisuksi saadaan

$$\varphi(z) = \frac{T}{GI_t} \left(z - \frac{I_{hh} - I_t}{\left(\frac{k}{l}\right) \cdot I_{hh}} \cdot \frac{\sinh \frac{k}{l} z}{\cosh k} \right),$$

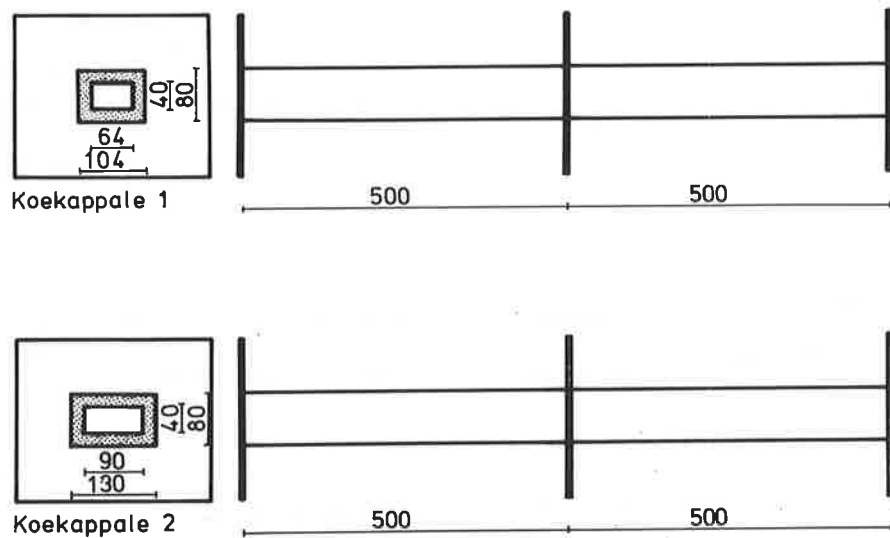
$$\theta(z) = \frac{T}{GI_t} \left(1 - \frac{\cosh \frac{k}{l} z}{\cosh k} \right),$$

$$B(z) = \frac{T}{GI_t} E_1 I_{\omega\omega} \left(\frac{k}{l}\right) \frac{\sinh \frac{k}{l} z}{\cosh k}.$$

4. SUORITETUT KOKEET

Teorian käyttökelpoisuuden ja soveltuvuusalueen selvittämiseksi suoritettiin kahdella pienoismallilla vääntökokeita. Koekappaleet valmistettiin tarkoituksella erittäin paksuseinäisiksi koteloiksi, jolloin paksuseinäisyyden vaikutukset tulevat selvästi esille. Kokeet suoritettiin Teknillisen korkeakoulun rakennusinsinööri-osaston rakennetekniikan laitoksen laboratoriossa Otaniemessä.

Koekappaleet valmistettiin 20 mm paksusta mustasta polymetyylimetakrylaattilevystä liimaamalla. Koekappaleiden dimensiot on esitetty kuvassa 5. Kuvan 4 mukainen kuormitus aikaansaatettiin punnuksilla. Kuormituksen suuruus oli valittu siten, että materiaalin toiminta oli lineaarisesti viskoelastista.

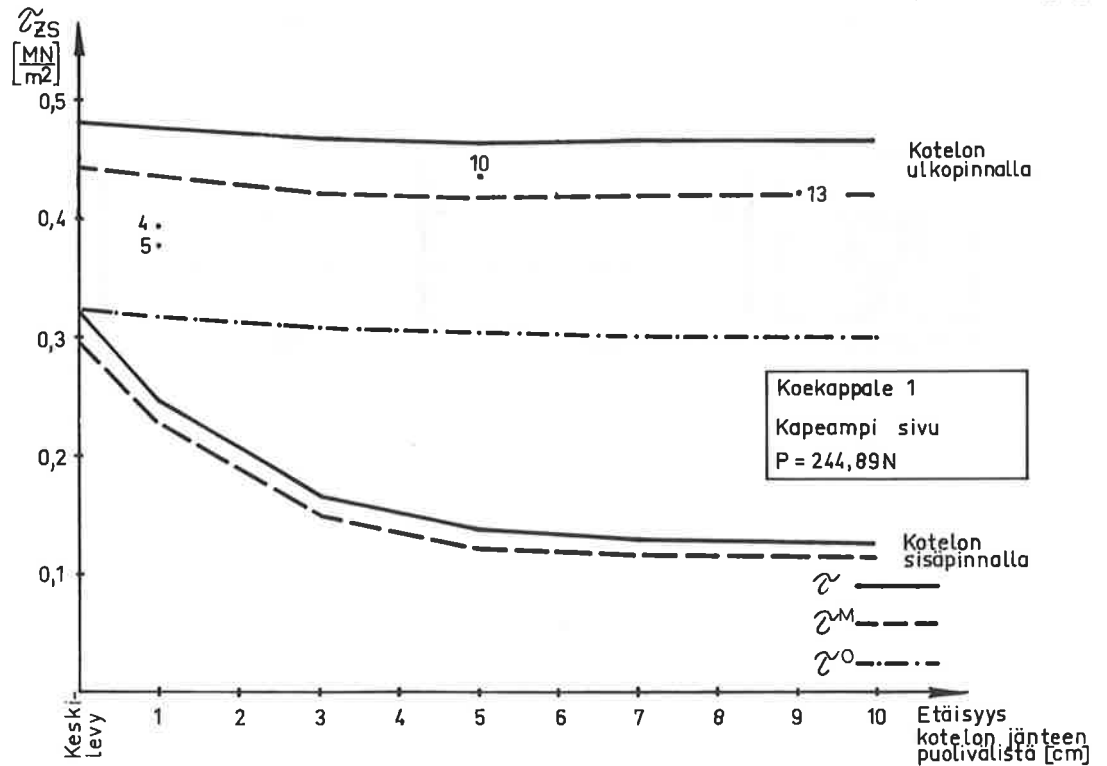
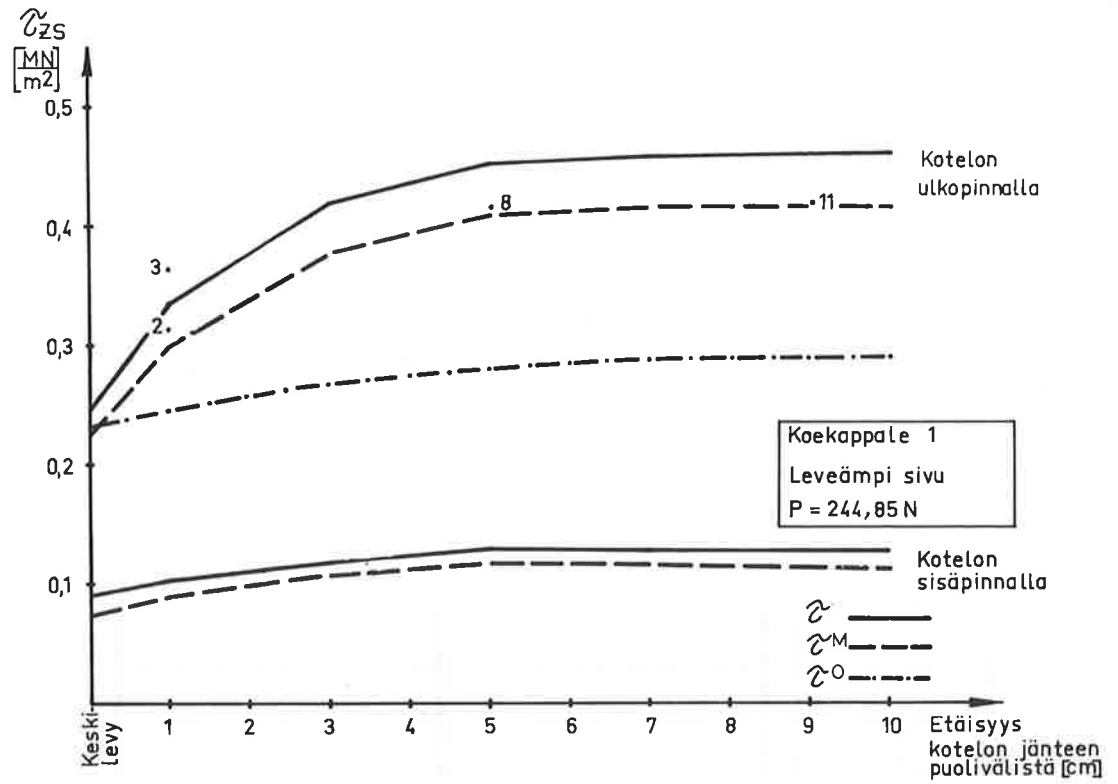


Kuva 5. Vääntökoekappaleiden mitat.

Fig. 5. Dimensions of the torsion bars.

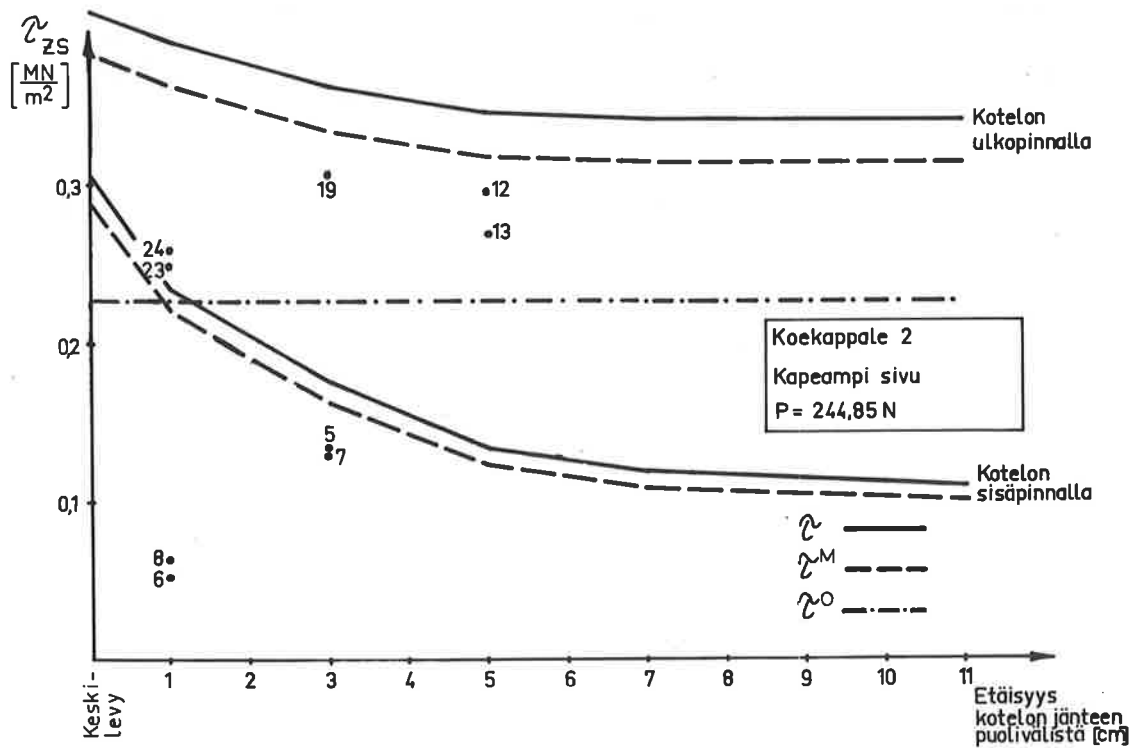
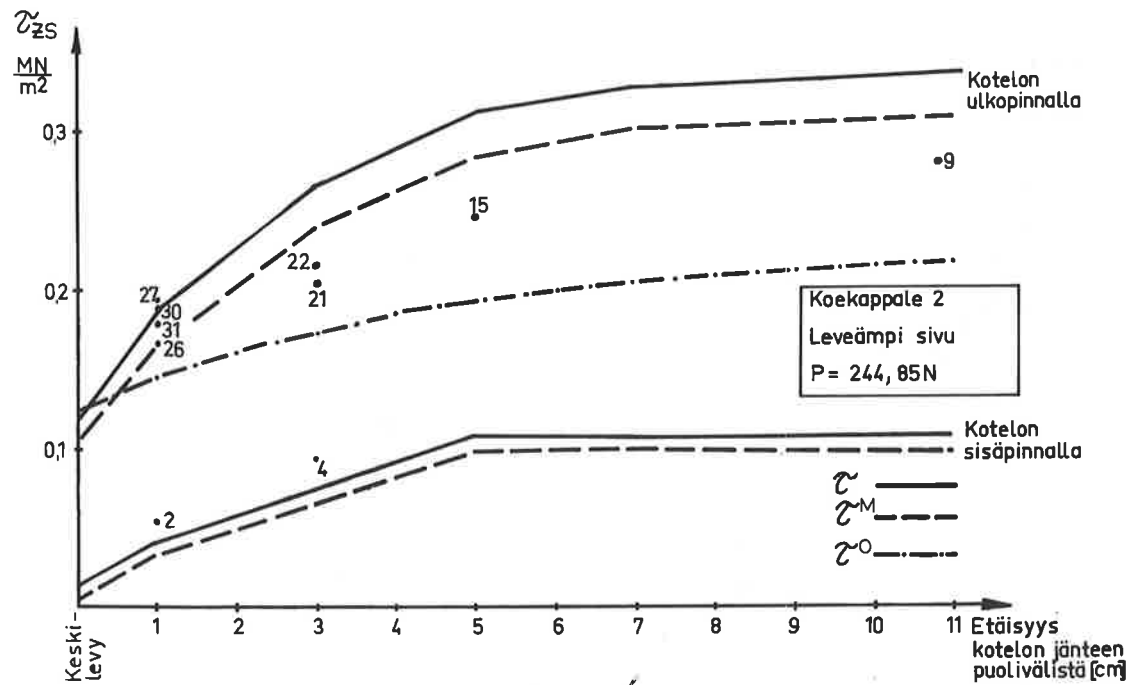
Polymetyylimetakrylaattilevyn materiaaliveikot määritettiin standardikoekappaleiden virtuskokeen tuloksista. Koteloiden ulko- ja sisäpintojen venymien mittaamiseksi oli koteloihin liimattu venymäliuskoja.

Koesauvoissa oli poikittaisia jäykisteitä ainoastaan koteloiden päissä ja keskellä jännettä, joten koteloiden poikkileikkausmuodon vinoutumisesta aiheutuvat jännitykset on otettava huomioon koetulosten tarkastelussa. Nämä jännitykset on laskettu A. Steinlen johtaman elastisella alustalla sijaitsevan palkin analogiateorian avulla [5]. Poikkileikkausmuodon vinoutumisesta aiheutuvat jännitykset ovat koesauvoilla pienempiä kuin estetystä vääntöstä aiheutuvat jännityskomponentit.



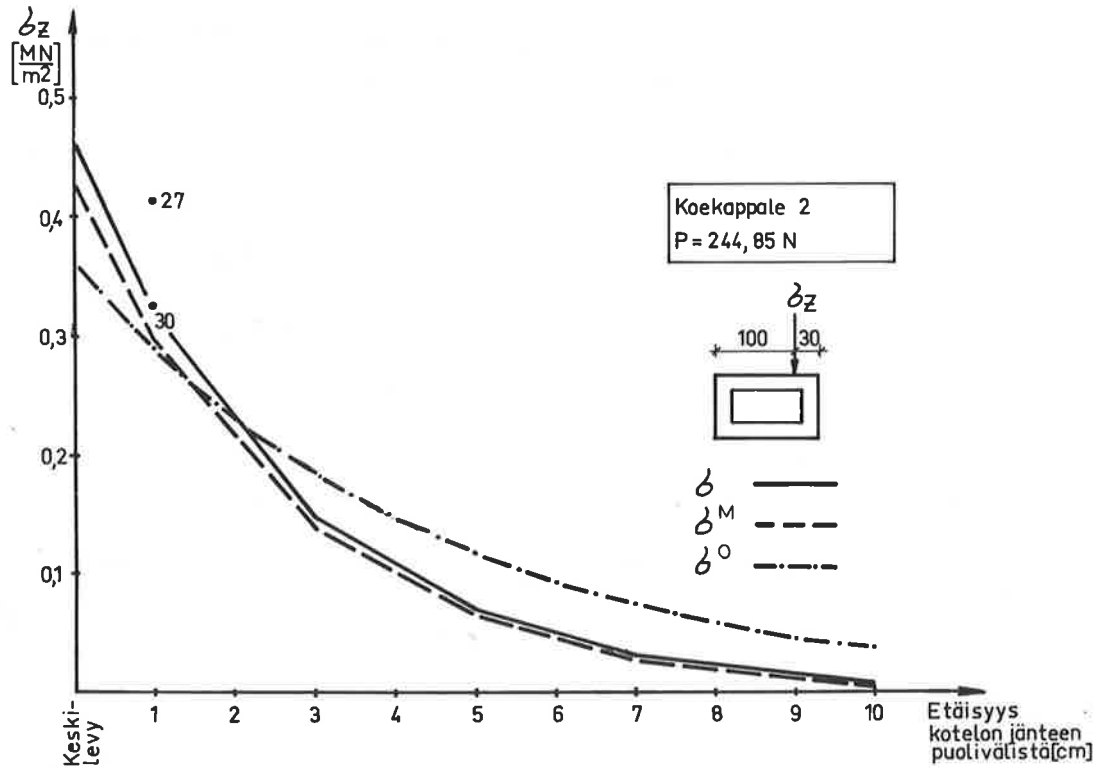
Kuva 6. Koekappale 1:n leikkausjännitysten jakautuma kotelon akselin suunnassa. τ on teorian mukainen leikkausjännitys, τ^M on tarkennetulla teorialla laskettu leikkausjännitys ja τ^0 on ohutseinäisten sauvojen teorialla laskettu leikkausjännitys.

Fig. 6. The spanwise variation of shearing stresses in the test beam 1.



Kuva 7. Koekappale 2:n leikkausjännitysten jakautuma kotelon akselin suunnassa. τ on teorian mukainen leikkausjännitys, τ^M on tarkennetulla teoriolla laskettu leikkausjännitys ja τ^O on ohutseinäisten sauvojen teoriolla laskettu leikkausjännitys.

Fig. 7. The spanwise variation of shearing stresses in the test beam 2.



Kuva 8. Koekappale 2:n normaalijännitysten jakautuma kotelon akselin suunnassa. σ on teorian mukainen normaalijännitys, σ^M on tarkennetulla teoriolla laskettu normaalijännitys ja σ^O on ohutseinäisten sauvojen teoriolla laskettu normaalijännitys.

Fig. 8. The spanwise variation of normal stresses in the test beam 2.

Kuvassa 6, 7 ja 8 on esitetty kokeiden tuloksia ja verrattu niitä teoriaan. Edellä johdetun teorian mukaiset tulokset on esitetty yhtenäisellä viivalla. Kun niitä on tarkennettu kertomalla ne ohutseinäisen kotelosauvan vääntöjäyhyyden I_t ja paksuseinäisen kotelosauvan vääntöjäyhyyden

$$I_t^M = \frac{2b^2h^2}{\frac{h}{t_h} + \frac{b}{t_b}} + \frac{2}{3} (ht_h^3 + bt_b^3) \quad (23)$$

suhteella, on tulos esitetty katkoviivalla. Kaavan (23) jälkimmäinen termi aiheutuu paksuseinäisen kotelon sivujen omasta vääntöjäyhyydestä /1/. Ohutseinäisten sauvojen estetyn väännön teorian mukaan laskettuja tuloksia on kuvattu pistekatkoviivalla. Kuvien 6...8 käyrät on piirretty laskemalla jännitysten arvot sauvan akselin suunnassa kahden cm:n välein ja yhdistämällä näin saadut pisteet suorilla. Teorian mukaiset käyrät ovat jatkuvia funktioita.

Koetulokset ovat kolmen kokeen keskiarvoja. Koekappale 1:n kaikkien mittauspisteiden tulosten variaatiokertoimien keskiarvo on 2,6 % ja koekappale 2:n vastaava keskiarvo on 2,9 %. Koekappaleiden materiaalin hystereesin, koejärjestelyn ja venymäliuskojen sijainnin toleranssien aiheuttamien virheiden yhteisvaikutuksena voidaan koetulosten variaatiokertoimeksi arvioida n. 6 %.

Vääntöjäyhyysmomentin I_t^M suhteessa tarkennettu teoria kuvaa koetuloksia tarkimmin. Varsinkin koekappale 1:n mittaustulokset poikkeavat katkoviivalla esitetyistä arvoista erittäin vähän. Koekappale 2:n mittaustulokset sijaitsevat katkoviivalla esitettyjen käyrien välittömässä läheisyydessä kaikkialla muualla paitsi kotelon kapeammalla sivulla keskilevyn vieressä. Koekappaleiden välittömästi keskilevyn vieressä sijaitseviin mittauspisteisiin on voinut vaikuttaa enemmän häiriötekijöitä ja ilmeisesti keskilevyä liimattaessa paikalleen ovat kapeamman sivun venymäliuskat vaurioituneet. Tätä olettamusta tukee myös se esitetystä väännössä syntyvän jännitystilän ominaisuus, että poikkileikkauksen vapaan käyrityksen estävät normaalijännitykset muodostavat tasapainosysteemin sauvan akselin suunnassa, jolloin syntyvät leikkausjännitykset lisäävät toisen sivun vapaan väännön leikkausjännitystä ja vähentävät viereisen sivun vapaan väännön leikkausjännitystä. Tällöin eivät molempien ulkosivujen leikkausjännitykset voi pienentyä keskilevyn läheisyydessä. Muiden mittauspisteiden koetulosten suurin poikkeama katkoviivalla esitetystä käyrästä koteloiden ulkopinnoilla on alle 14 % ja keskimäärin alle 10 %.

Jos koekappaleiden jännitystuloksia verrataan ohutseinäisten koteloiden esitetyn väännön teoriolla laskettuihin arvoihin, joita on kuvissa esitetty pistekatkoviivoilla, ovat keskimääräiset erot 25-30 % koteloiden ulkopinnoilla ja n. 90 % koteloiden sisäpinnoilla.

5. TEORIAN PÄTEVYYSALUE

Julkaisussa /1/ esitettyjen selvitysten perusteella voidaan artikkelin kohdassa 3 johdetun teorian katsoa soveltuvan kotelosauvoille, joiden lyhyemmän ulkosivun suhde seinämän paksuuteen $(b+t)/t \geq 5$. Tällöin jännitysten virheet jäävät alle 9 %:n. Muodonmuutoksia laskettaessa on kehitetyn teorian pätevyysalue $(b+t)/t > 6$. Vääntökoekappaleilla oli kyseinen suhde $(b+t)/t = 4$, jonka johdosta teoriaa oli tarkennettu vääntöjäyhyysmomentin I_t^M suhteessa.

Ohutseinäisten kotelosauvojen vääntöteoriolla, jossa jännitysten oletetaan jakautuneen tasan seinämän paksuudelle, saadaan jännitysten virheeksi n. 12 % suhteen arvolla $(b+t)/t = 20$. Pienemmällä suhteen arvoilla virhe kasvaa nopeasti.

KIRJALLISUUTTA

- [1] Penttala, V.E., Paksuseinäisten kotelosauvojen vääntö, teoreettinen ja kokeellinen tutkimus. Espoo 1976. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Rakennus- ja yhdyskuntatekniikka. Julkaisu 17.
 - [2] Kollbrunner, C.F. & Hajdin, N., Dünnwandige Stäbe. Band I. Stäbe mit undeformierbaren Querschnitten. Berlin 1972. 296 s.
 - [3] Marshall, J., Derivation of torsion formulas for multiply connected thick-walled rectangular sections. *Journal of applied mechanics* 37 (1970), s. 399...402.
 - [4] Marshall, J., Torsion of thick-walled cellular sections. Detroit 1973. American Concrete Institute. Special publication SP-35. Analysis of structural systems for torsion, s. 103...115.
 - [5] Steinle, A., Torsion und Profilverformung. Dissertation Universität Stuttgart, 1967. 130 s.
 - [6] Abramyan, B.D., Torsion and bending of prismatic rods of hollow rectangular section. Washington 1951. National Advisory Committee for Aeronautics. Technical memorandum No. 1319.
 - [7] Arutyunyan, N.H. & Abramyan, B., Kruzenie uprugih tel. Moskva 1963. 686 s.
 - [8] Bescoter, S.U., A theory of torsion bending for multicell beams. *Journal of applied mechanics* 21 (1954)1, s. 25...34.
 - [9] Bornscheuer, F.W., Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. *Der Stahlbau* 21 (1952)1, s. 1...9 ja 21 (1952)3, s. 52.
 - [10] Heilig, R., Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform. *Der Stahlbau* 30 (1961)11, s. 333...349.
 - [11] Vlasov, V.Z., Thin-walled elastic beams. Jerusalem 1961.
- Vesa Penttala, tekn.lis., Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Otaniemi*