

TERÄSBETONISTEN LEVYKUORIEN ANALYSOINTI ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ

Raimo Siitonen ja Martti Mikkola

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 9
No. 1 1976 s. 29-38

YHTEENVETO: Artikkelissa selostetaan tutkimusta, jossa teräsbetonisia lieriömäisiä levykuoria analysoitiin elementtimenetelmää käyttäen. Teräsbetonin konstitutiivisessa mallissa otetaan huomioon kimmoinen toiminta, betonin halkeaminen ja betonin ja teräksien plastinen myötö. Levykuoren levyjen otaksutaan toimivan tasojännitystilassa ja niiden taivutus eli toiminta laattoina jätetään huomioonottamatta. Elementtityyppinä käytetään kolmiomaista vakiovuodonmuutoselementtiä. Kuorma-siirtymäkäyrät määritettiin lisäämällä kuormaa portaittain. Kussakin kuormitusportaassa ratkaisu saatiin iteratiivisesti jäännösvoimamenetelmää käyttäen. Suppenemista kiihdytettiin modifioidulla Aitkenin δ^2 -prosessilla.

Menetelmän käyttökelpoisuuden toteamiseksi laskettiin useita tapauksia, jotka vastasivat kirjallisuudesta löydettyjä kokeellisia tutkimuksia. Laskettujen ja kokeellisten arvojen vertailun tuloksena todetaan, että laattavaihtuksen huomiotta jättäminen aiheuttaa suuria virheitä kuorma-siirtymäkäyrässä ja kantokuormassa lyhyillä ja keskipitkillä kuorilla. Pitkien kuorien toimintaa menetelmä pystyy kuvaamaan tyydyttävällä tarkkuudella.

1. JOHDANTO

Useimmat levykuorten analysointia varten kehitetyt menetelmät perustuvat oletukseen, että rakenteen aine on homogeenista ja lineaarisesti kimmoista. Yksinkertaisissa laskutavoissa otaksutaan lisäksi kalvoteorian pätevän, jolloin rakenteen osalevyt ovat tasojännitystilassa. Tarkemmissa menetelmissä otetaan huomioon myös levyjen toiminta laattoina. Mallikokeilla on osoitettu, että tarkemmilla teorioilla pystytään kuvaamaan melko hyvin myös teräsbetonisten kuorien käyttäytymistä halkeiluun saakka, mutta tämän jälkeen ne eivät enää päde eikä niiden avulla voida määrittää rakenteen kantokuormaa.

Rakenteen kantokuorman likiarvo saadaan verrattain kätevästi selville raja-kuormamenetelmällä, mutta menetelmän haittana on, ettei sillä pystytä määrittämään siirtymiä. Toisaalta analyttisillä menetelmillä on miltei mahdotonta täysin kuvata teräsbetonin monimutkaista käyttäytymistä.

Helsingin teknillisen korkeakoulun rakennusinsinööriosastolla on kehitetty teräsbetonilevyjen analysointia varten konstitutiivinen malli, joka kuvaa

betonin ja terästen kimmoista ja plastista käyttäytymistä ja betonin halkeilua, mutta ei ota huomioon levyjen toimintaa myös laattoina. Tässä esitettävässä tutkimuksessa /1/ mallia on sovellettu levykuoriin, ja vertaamalla elementtimenetelmällä laskettuja tuloksia kirjallisuudessa julkaistuihin koetuloksiin on pyritty selvittämään menetelmän soveltuvuus teräsbetonisten levykuorten analysointiin.

2. TERÄSBETONIN KONSTITUTIIVINEN MALLI

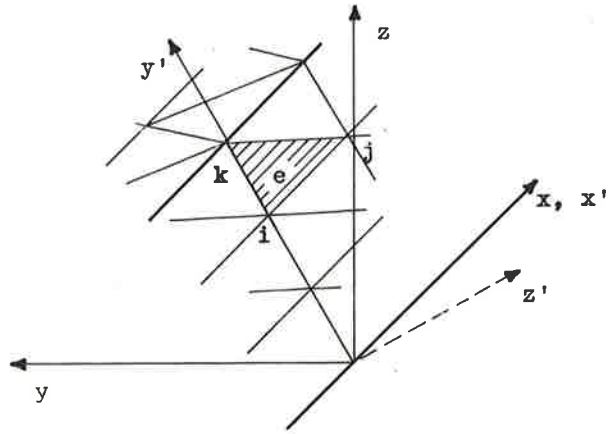
Teräsbetonin konstitutiivisena mallina käytetään Mikkolan ja Schnobrichin julkaisussa /2/ esittämää mallia, joka on kuvattu Rakenteiden Mekaniikka-lehdessä /3/. Siinä otetaan huomioon ehjän betonin kimmainen käyttäytyminen ennen halkeamista, haljenneen betonin yksiaksiaalinen kimmoplastinen käyttäytyminen, halkeamien sulkeutumismahdollisuus ja kaksiaksaalisesti puristetun betonin plastinen käyttäytyminen. Teräkset toimivat kimmoplastisesti ja niiden ja betonin välinen tartunta otaksutaan täydelliseksi. Betonin ja terästen välisiä liukumia, vaarnavaikutusta ja betonin virumista ei mallissa oteta huomioon.

3. RATKAISU ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ

Käytettävä elementti on tavanomainen vakiomuodonmuutos-elementti, jonka nurkkapisteillä on kaksi vapausastetta. Kolmiulotteisen kuoren jäykkyysmatriisi muodostetaan tavallisesti siten, että asetetaan sekä levy- että laattaelementin jäykkyysmatriisi alamatriiseiksi kuorielementin jäykkyysmatriisiin, joka muunnetaan rakennekoordinaatistoon ja lisätään rakenteen jäykkyysmatriisiin. Muodostettaessa kolmiulotteista kuorta pelkistä levyelementeistä mainittua menettelyä ei voida suoraan soveltaa, koska tällöin levyllä ei ole jäykkyyttä tasoaan vastaan kohtisuorassa suunnassa ja niinollen tämän suunnan lasketut siirtymät tulisivat äärettömän suuriksi.

Koska itse asiassa vain levykuoren särmiin liittyvillä nurkkapisteillä on kolme vapausastetta, tätä tutkimusta varten tehdyssä tietokoneohjelmassa on päädytty menetelmään, jossa vain näiden nurkkapisteiden siirtymät, nurkka-voimat ja jäykkyysmatriisin alkiot muunnetaan rakennekoordinaatistoon. Muiden nurkkapisteiden vastaavat suureet ovat sen levyn koordinaatistossa, johon ne kuuluvat.

Muunnetaan esimerkkinä kuvassa 1 olevan elementin e nurkkasiirtymät ja -voimat sekä jäykkyysmatriisi rakennekoordinaatistoon.



Kuva 1 Särmään liittyvä elementti

Nurkkapisteen k levyn koordinaatistossa $x'y'$ ilmaistujen siirtymien d'_k ja rakennekoordinaatistossa ilmaistujen siirtymien d_k välillä on kuvan 2 mukaan yhteys

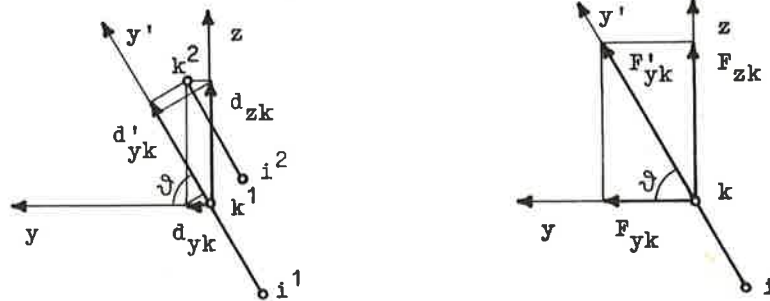
$$\{d'_k\} = \begin{bmatrix} d'_{kx} \\ d'_{ky} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{kx} \\ d_{ky} \\ d_{kz} \end{bmatrix} = [L]\{d_k\}, \quad (1)$$

koska levyn koordinaatiston x' -akseli on yhdensuuntainen rakennekoordinaatiston x -akselin kanssa. Nurkkavoimien $\{F'_k\}$ ja $\{F_k\}$ välillä on samanlainen yhteys.

Koko elementin e nurkkasiirtymien $\{d'\}^e$ ja $\{d\}^e$ välillä on yhteys

$$\{d'\}^e = \begin{bmatrix} d'_{ix} \\ d'_{iy} \\ d'_{jx} \\ d'_{jy} \\ d'_{kx} \\ d'_{ky} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \\ d_{jx} \\ d_{jy} \\ d_{kx} \\ d_{ky} \\ d_{kz} \end{bmatrix} = [T]\{d\}^e. \quad (2)$$

Nurkkavoimat $\{F'\}^e$ saadaan nurkkavoimista $\{F\}^e$ samanlaisella muunnoksella.



Kuva 2 Piste k rakennekoordinaatistossa ilmaistujen nurkkasiirtymien ja -voimien muuntaminen levyn koordinaatistoon

Elementin e rakennekoordinaatistossa ilmaistu jäykkyyso-matriisi $[k]^e$ saadaan levyn koordinaatistossa ilmaistusta jäykkyyso-matriisista $[k']^e$ muunnoksella

$$[k]^e = [T]^t [k']^e [T] \quad (3)$$

joten jäykkyyso-matriisin $[k]^e$ sarakkeiden ja rivien määrä kasvaa yhdellä kutakin levykuoren särmään liittyvää elementin nurkkapistettä kohti.

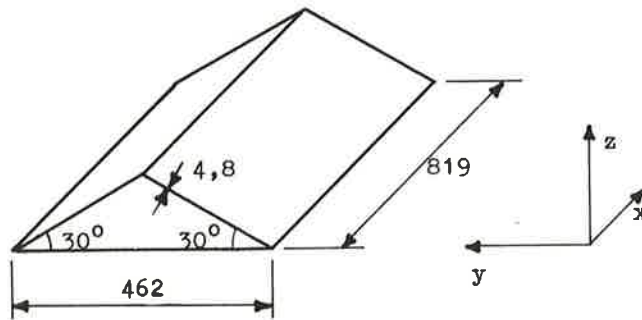
Koska levyelementit pystyvät kantamaan kuormaa vain omassa tasossaan, on särmien välisiin nurkkapisteesiin vaikuttavat ulkoiset voimat myös muunnettava. Ne voidaan siirtää särmiin vaikuttaviksi voimiksi, kuten tehdään monessa analyttisessä menetelmässä, tai ne jaetaan levyn suuntaisiin ja levyä vastaan kohtisuoraan komponentteihin, joista edelliset jäävät paikoilleen ja jälkimmäinen siirretään särmiin.

Teräsbetonin epälineaarista käyttäytymistä seurataan kasvattamalla kuormaa pienin lisäyksin. Siirtymänlisäykset saadaan käyttämällä myös /3/:ssä kuvattua alkujännitysmenetelmää, jossa elementin jonkin aineosan jäykkyyden muututtua muunnetaan tämän aineosan laskettujen ja sen hetkisten "todellisten" jännitysten ero elementin nurkkapisteesissä vaikuttavaksi valekuormaksi, joka lisätään rakenteen ulkoiseen kuormaan. Tästä lasketaan uudet siirtymän lisäykset; syntyvän iteratiivisen prosessin suppenevuutta kiihdytetään /4/:ssä selostetulla muunnetulla Aitkenin δ^2 -prosessilla, jossa uudet siirtymänlisäykset ekstrapoloidaan kolmista aikaisemmista siirtymänlisäyksistä.

4. SOVELLUTUKSIA

A.R. Dykes on julkaissut teoksessa /5/ laajan koesarjan, jossa on tutkittu mittasuhteiltaan samanlaisia, mutta mitoiltaan erilaisia teräsbetonisia ja

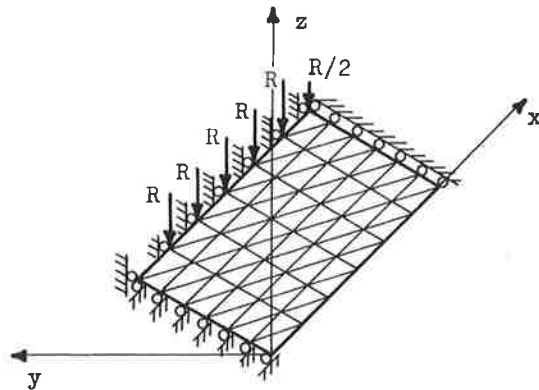
alumiinisia levykuoria, joista tähän vertailuun on valittu kuvan 3 esittämä levykuori.



$$\begin{aligned}
 E_b &= 16500 \text{ MN/m}^2 \\
 \mu &= 0,17 \\
 f_c &= 21,4 \text{ MN/m}^2 \\
 f_t &= f_c/10 \\
 E_{st} &= 91200 \text{ MN/m}^2 \\
 f_y &= 390 \text{ MN/m}^2 \\
 \mu_x &= \mu_y = 0,0056
 \end{aligned}$$

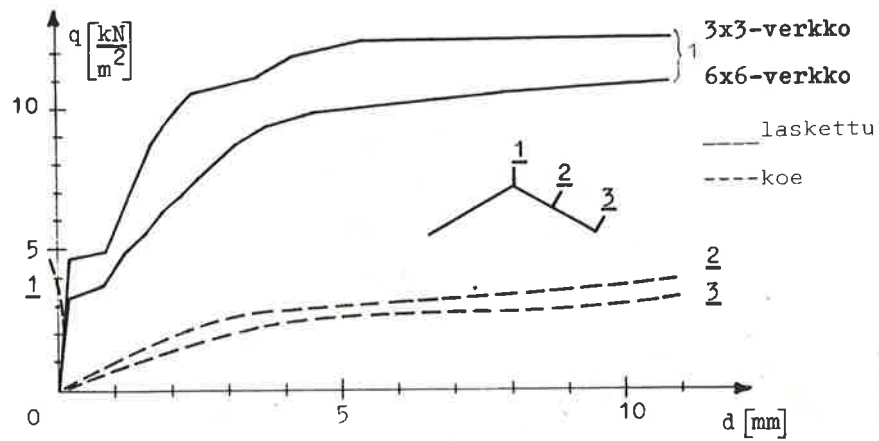
Kuva 3 Dykesin levykuori materiaaliominaisuuksineen

Rakenteesta analysoitiin symmetriaa hyväksi käyttäen vain neljännes, joka jaettiin sekä 3×3 - että 6×6 -verkkoihin (kuva 4).

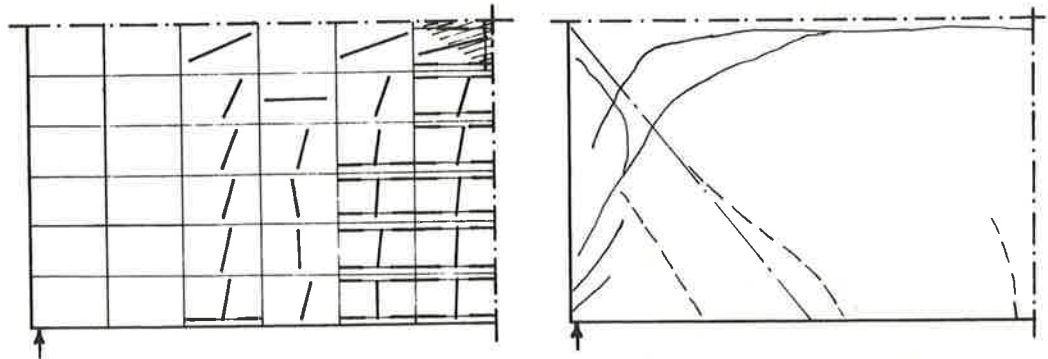


Kuva 4 6×6 -verkko, kiinnitykset ja suhteelliset nurkka-voimat

Kuvassa 5 on esitetty kuoren harjan keskikohdan laskettu siirtymäkäyrä ja mallikokeessa mitattuja keskikohdan siirtymäkäyriä. Laskemalla saadut ja kokeessa syntyneet halkeamat on esitetty kuvassa 6.



Kuva 5 Levykuoren keskikohdan lasketut ja kokeessa mitatut siirtymäkäyrät



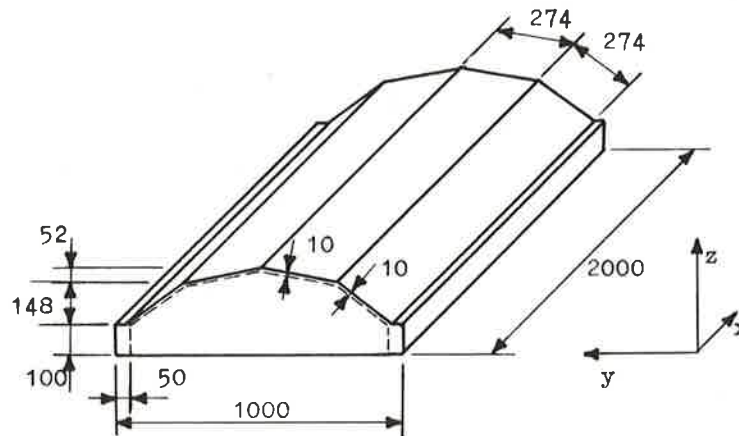
Kuva 6 6 x 6-verkossa ja kokeessa syntyneet halkeamat

Lasketut tulokset vastaavat koetuloksia erittäin huonosti. Harvalla elementtiverkolla rakenteen murtokuormaksi tuli noin $12,4 \text{ kN/m}^2$, ja tiheällä noin $10,8 \text{ kN/m}^2$; mallikokeessa murtokuorma oli noin $3,5 \text{ kN/m}^2$. Halkeamatkin syntyivät vain osittain oikeisiin paikkoihin.

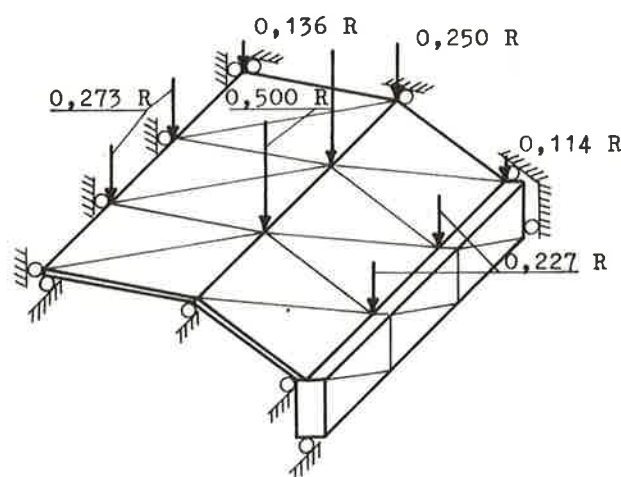
Huonojen tulosten syy on selvä: kuoren pituuden suhde leveyteen on vain 1,77 ja siksi kuoren osalevyjen laattavaikutus on murtohetkellä hallitseva. Aluksi harjan keskikohdan lasketut ja mitatut siirtymät vastaavat hyvin toisiaan, mutta kun levyihin on syntynyt myötöviivoja, harja on noussut ylös. Myötöviivateorian mukaista murtumista edistivät vielä levyjen ohuus ja se, että raudoitus oli levyjen keskipinnassa.

A. Enamin julkaisemasta laajasta koesarjasta /6/ käsitellään tässä kuvan 7 esittämää levykuorta, jossa on neljä ohutta levyä ja reunapalkit. Raken-

teesta analysoitiin neljännes käyttäen elementtiverkkoja 3×3 (kuva 8) ja 5×5 .



Kuva 7 A. Enamin levykuori



$$f_c = 30,4 \text{ MN/m}^2$$

$$f_t = f_c / 10$$

$$E_c = 6000 \sqrt{f_c}$$

$$f_y = 442 \text{ MN/m}^2$$

$$E_{st} = 206000 \text{ MN/m}^2$$

Levyt:

$$\mu_x = \mu_y = 0,0040$$

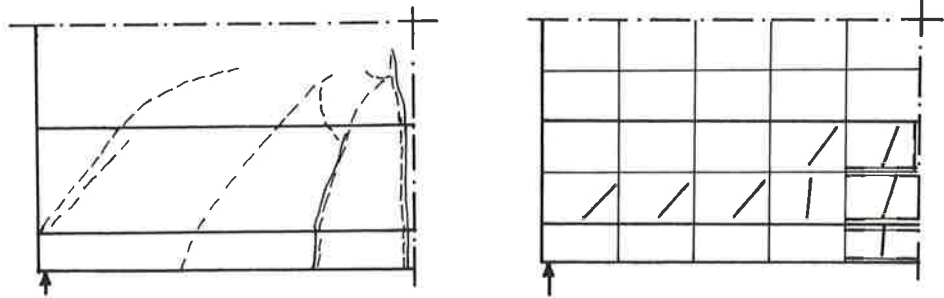
Reunapalkit:

$$\mu_x = 0,0042$$

$$\mu_y = 0,0040$$

Kuva 8 3×3 -elementtiverkko, kiinnitykset, suhteelliset nurkkavoimat ja käytetyt materiaalivekiöt

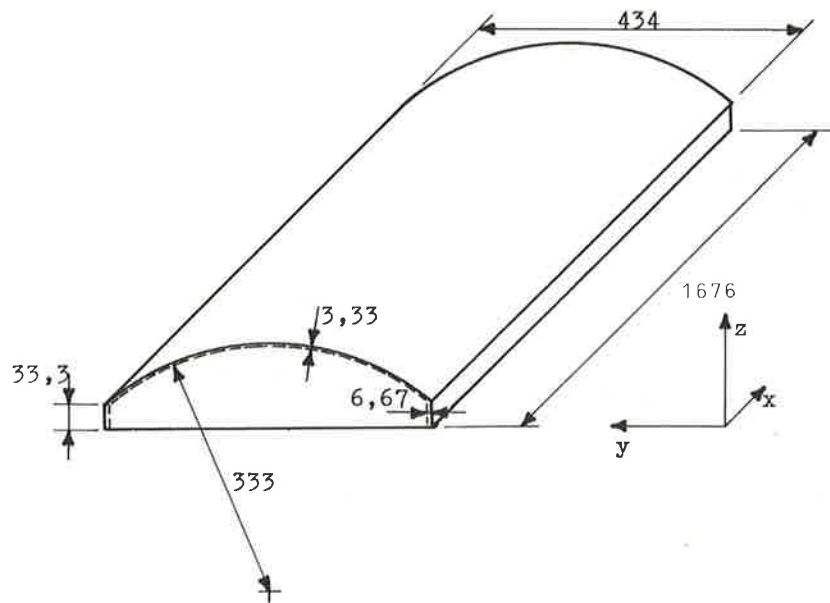
Harvalla verkolla rakenteen murtokuormaksi tuli $18,1 \text{ kN/m}^2$ ja tiheällä $15,8 \text{ kN/m}^2$; kokeessa murtokuorma oli $13,8 \text{ kN/m}^2$. Laskemalla saadut ja kokeessa syntyneet halkeamat on esitetty kuvassa 9.



Kuva 9 5x5-verkossa ja kokeessa syntyneet halkeamat

Tiheällä elementtiverkolla laskettu murtokuorman arvo vastaa melko hyvin kokeessa saatua, samoin halkeamien sijainti on pystytty määrittämään melko hyvin.

H.G. Harrisin ja R.N. Whiten [7] sylinterinmuotoisilla levykuorilla suoritetuista kokeista on tähän vertailuun valittu kuvan 10 esittämä rakenne.

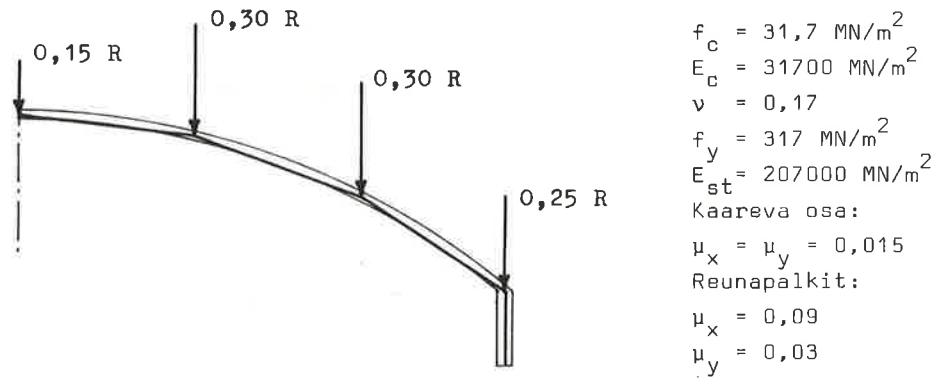


Kuva 10 Harrisin ja Whiten levykuori

Kuoren kaarevaa poikkileikkausta approksimoitiin kuvan 11 esittämällä tavalla suorilla levyelementeillä; rakenteen pituussuunnassa elementtijako oli viisi. Kuorma on jaettu kokeen kuorman mukaisesti siten, että 25% kuormasta kohdistuu suoraan reunapalkeille ja 75% on jakautunut suurinpiir-

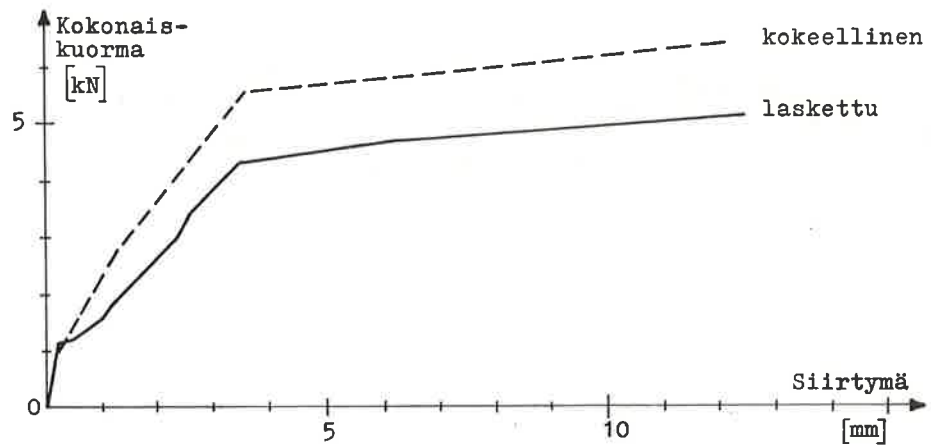
tein tasaisesti kuoriosalle.

Laskemalla ensimmäinen halkeama syntyi kokonaiskuorman arvolla 1,12 kN, kun se kokeessa syntyi vasta arvolla 2,78 kN. Rakenteen murtokuormaksi tuli laskemalla noin 5,5 kN; kokeessa se oli 6,45 kN. Rakenteen jänteen keskikohdan sekä laskettu että mitattu siirtymäkäyrä ovat kuvassa 12. Laskemalla saadut ja kokeessa syntyneet halkeamat on esitetty kuvassa 13.

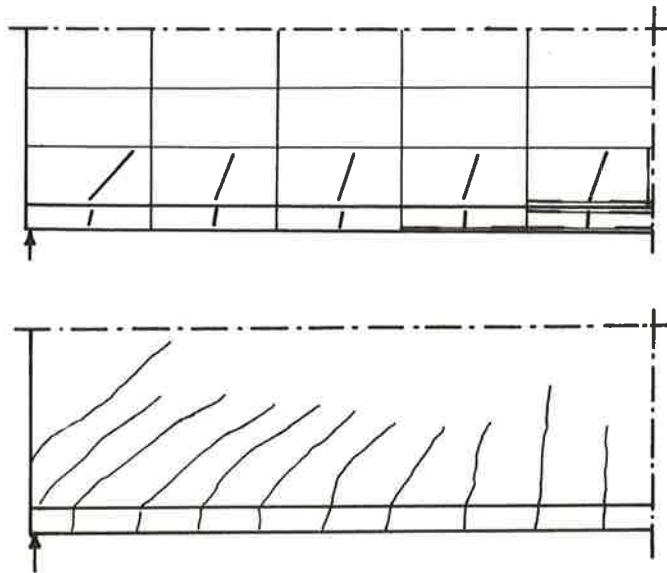


Kuva 11 Kaarevan pinnan approksimointi levyelementeillä, suhteelliset nurkkavoimat ja käytetyt materiaaliivakiot

6.23 a ja kokeessa syntyneet kuvassa 6.23 b.



Kuva 12 Reunapalkin laskettu ja mitattu siirtymäkäyrä jänteen keskikohdassa



Kuva 13 Laskemalla saadut ja kokeessa syntyneet halkeamat

Lasketut siirtymät ovat suurempia kuin kokeessa mitatut, mutta kummankin käyrän muoto on suunnilleen samanlainen. Laskettu rakenteen murtokuorma on pienempi kuin kokeellinen, mutta se on melko lähellä tätä; samoin laskemalla saadut halkeamat vastaavat hyvin kokeessa syntyneitä.

5. JOHTOPÄÄTÖKSET

Lasketut muortokuorman arvot vastaavat yleensä melko huonosti kokeellisia. Huonojen tulosten pääsyyinä on, että useimmat analysoidut levykuoret ovat lyhyitä verrattuna leveyteen, jolloin kuoren toiminta laattana on hallitseva. Pitkien kuorien laskettu käyttäytyminen vastaa paremmin todellisuutta kuin lyhyiden.

Monilevyisten kuorien, joita levyelementeillä approksimoidut sylinterikuoret myös ovat, siirtymät ovat yleensä suurempia ja murtokuormat pienempiä kuin kokeelliset. Tähän lienee syynä se, että elementit liittyvät toisiinsa tavallaan nivelen välityksellä, jolloin rakenteen poikkipinnan muoto voi muuttua vapaammin kuin, jos myös laattavaikutus olisi otettu huomioon.

Tutkimuksesta saatujen kokemusten perusteella on sanottava, että menetelmä ei sovellu lyhyiden ja keskipitkien kuorten analysointiin, vaan laattavaikutus on otettava myös huomioon. Pitkien levykuorien käyttäytymistä menetelmällä pystytään kuvaamaan riittävän hyvin.

6. LÄHDELUETTELO

- [1] Siitonen, R., Teräsbetonisten levykuorten analysointi elementtimenetelmällä. Diplomityö Helsingin teknillisen korkeakoulun rakennusinsinööriosastossa, 1975
- [2] Mikkola, M.J. ja Schnobrich, W.C., Material Behavior Characteristics for Reinforced Concrete Shells Stressed beyond the Elastic Range. Civil Engineering Studies, Struct. Research Series No. 367, Universty of Illinois. August 1970
- [3] Mikkola, M. ja Pajunen, H., Application of the Finite Element Method to the Analysis of Reinforced Concrete Panels, Rakenteiden Mekaniikka Vol. 5, No3, 1972
- [4] Boyle, E.F. ja Jennings, A., Accelerating the Convergence of Elastic-plastic Stress Analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 7, No. 2. 1975
- [5] Dykes, A.R., Experimental and Theoretical Studies of Some Folded Plate Structures, Proceedings, International Association for Shell Structures, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Holland, 1964
- [6] Enami, A., Some Experiments and the Mechanism Conditions of Reinforced Prismatic Folded Plate Structures, Proceedings, International Association for Shells Structures, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1964
- [7] Harris, H.G. ja White, R.N., Inelastic Behavior of R/C Cylindrical Shells, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98, Nq. ST 7, July 1972

Raimo Siitonen, dipl.ins., Rakennusteknillinen ins.tsto Heimo Kakko & Co KY, Helsinki.

Martti Mikkola, prof., Helsingin teknillinen korkeakoulu, Otaniemi.