

MARKKU TUOMALA, HEIKKI KAIRA  
JA MARTTI MIKKOLA

Rakenteiden Mekaniikka  
8 (1975)3-4, s. 211...252  
Rakenteiden Mekaniikan  
Seura, Helsinki

#### YHTEENVETO

Artikkelissa on esitetty taipuisan laatan ja laakean kuoren tasapainoyhtälöiden muodostaminen elementtimenetelmän mukaan. Laattaan on sovellettu von Kármánin teoriaa. Laakean kuoren tapauksessa on käytetty Marguerren kaavoja.

Tasapainoyhtälöt on johdettu virtuaalisen työn periaatteen avulla. Tuntemattomina suureina ovat tällöin rakenteen siirtymät.

Elementteinä on käytetty 15- ja 27-parametrisiä kuorielementtejä. Epälineaarinen yhtälöryhmä on ratkaistu iteratiivisesti.

Laaditun tietokoneohjelman avulla on laskettu eräitä esimerkkejä ja verrattu niitä eri tutkijoiden aikaisemmin saamiin tuloksiin.

#### MERKINNÖISTÄ

Vektorit ja matriisit merkitään alaviivalla:  $\underline{x}$ ,  $\underline{A}$ .

Matriisien sisätulo määritellään kaavalla

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \text{tr}(\underline{A}^T \underline{B}) ,$$

jossa

$$\text{tr} \underline{C} = \sum_i C_{ii} .$$

Osittaisderivaatta merkitään

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_{,x} .$$

Vektorin derivaatta vektorin suhteen on

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dots \\ \vdots \end{bmatrix} .$$

Vektorin  $\underline{u}$  gradientti karteesisessa  $X_1 X_2 X_3$ -koordinaatistossa

$$\nabla \underline{u} \equiv \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \end{bmatrix} .$$

Divergenssi on

$$\text{div} \underline{T} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} , \text{ jossa } t_i = \sum_j T_{ij,j} .$$

## 1. JOHDANTO

Ohuet laatta- ja kuorirakenteet analysoidaan tavallisesti lineaarisen teorian mukaan. Tällöin vallitsevat differentiaaliyhtälöt ja materiaalin konstitutiivinen yhtälö linearisoidaan.

Ohuiden taivutettujen rakenteiden kantokuormaa määritettäessä on materiaalin epälineaarisuuden lisäksi otettava huomioon suurten siirtymien vaikutus tasapainoyhtälöihin ja muodonmuutoksiin eli geometrinen epälineaarisuus. Esim. reunoiltaan puristettujen laattojen

ja kuorten kantokuormalle saadaan arvio erään matemaattisen mallin lineaarisen ominaisarvot tehtävän avulla. Ominaiskuorman eli lommahduskuorman arvolla siirtyminen alkuperäisestä tilasta poikkeavaan uuteen tasapainotilaan tulee mahdolliseksi. Enemmän tietoa kuorman ja siirtymän välisestä riippuvuudesta saadaan geometrisesti epälineaarisen teorian avulla. Rakenteen muotovirheiden, kuorman epäkeskisyyden tai jo aiheutuneiden taipumien takia siirtymä alkaa kasvaa jyrkästi lähellä lommahduskuormaa. Monissa tapauksissa rakenne voi kuitenkin kantaa lommahduskuormaa suurempia kuormia, jos siirtymiä ei tarvitse rajoittaa.

Ohuita laattoja ja kuoria käytetään erityisesti lentokoneenrakennuksessa ja avaruustekniikan laitteissa, joissa painon minimointi on tärkeää. Myös muussa rakennustekniikassa entistä korkealaatuisempien materiaalien taloudellinen käyttö johtaa ohuempien ja taipuisempien rakenteiden valintaan.

Laattojen suuren taipuman huomioonottavat deformaatiokaavat ja vallitsevat differentiaaliyhtälöt esitti von Kármán v. 1910 [1]. Tällaisen epälineaarisen reuna-arvot tehtävän ratkaisua suljetussa muodossa ei tunneta. Sen sijaan on johdettu joukko approksimatiivisia ratkaisuja. Tarkkoina voidaan pitää Levýn v. 1942 kaksoissarjoilla laskemia tuloksia suorakaidelaatoille [2].

Tietokoneaikakaudella 1960-luvulta lähtien on fysikaalisesti ja geometrisesti epälineaarisia rakenteita analysoitu elementtimenetelmällä. Turnerin työryhmän julkaisussa [3] esitettiin epälineaarisen tehtävän kaksi ratkaisumenetelmää: lineaarinen inkrementaalinen ja iteratiivinen menetelmä. Edellisessä kuormaa muutetaan portaittain ja rakenteen ominaisuuksia pidetään vakioina muutosten välillä. Iteratiivisessa ratkaisussa epälineaarinen yhtälöryhmä ratkaistaan Newton-Raphson -menetelmällä [4] tai sen jollakin muunnoksella.

Tämän työn tietokoneohjelman perustana olevassa teoriassa käytetään ns. Lagrangen tarkastelutapaa, jossa siirtymä-, muodonmuutos- ja voimasuureet lausutaan rakenteen alkutilan suhteen. Laatan muodonmuutokset ovat von Kármánin teorian mukaiset. Laakean kuoren elementtiyhdytälöt perustuvat Marguerren muodonmuutoskaavoihin [5]. Yhtälöt on johdettu 15- ja 27-parametrisille kolmioelementeille. Kirjoituksen lopussa on muutamia esimerkkejä, joiden avulla on tutkittu muodostettujen elementtimallien tarkkuutta.

## 2. PERUSYHTÄLÖT

### 2.1 Kappaleen deformaatio

Lähteinä on käytetty teoksia [6], [7] ja [8]. Kappale B koostuu materiaalipisteistä eli partikkeleista. Ajanhetkellä  $t_0$  kappale varaa alueen  $D_0$ . Partikkelin  $X$  paikkavektori valitun suorakulmaisen koordinaatiston suhteen on tällöin  $\underline{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T$ . Koordinaatit  $\underline{X}$  määritellään partikkelin materiaalkoordinaateiksi. Ajanhetkellä  $t$  partikkeli  $X$  on pisteessä

$$\underline{x} = \underline{\chi}(\underline{X}, t), \quad (2.1)$$

ja kappale varaa alueen  $D_t$ .

Siirtymävektori  $\underline{u}$   $D_0$ :n suhteen on

$$\underline{u} = \underline{\chi}(\underline{X}) - \underline{X}. \quad (2.2)$$

$D_0$ :n differentiaalin alkio  $d\underline{X}$  kuvautuu deformaatiossa alkioiksi  $d\underline{x}$

$$d\underline{x} = \underline{F}d\underline{X}, \quad (2.3)$$

jossa deformaatiogradientin  $\underline{F} = \nabla \underline{\chi}$  alkiot ovat

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}.$$

Kaavan (2.2) nojalla tulee

$$\underline{F} = \underline{I} + \nabla \underline{u} , \quad (2.4)$$

jossa  $\nabla \underline{u}$  on siirtymägradientti alkioin

$$(\nabla \underline{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

ja  $\underline{I}$  on yksikkömatriisi.

Materiaalikoordinaatistosta  $X_i$  tulee deformoituneessa tilassa käyräviivainen koordinaatisto, jonka kantavektorit ovat

$$\underline{g}_j = \frac{\partial \underline{x}}{\partial X_j} = \sum_i (\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}) \underline{i}_i = \sum_i F_{ij} \underline{i}_i . \quad (2.5)$$

Viiva-alkion neliö  $D_0$ :ssa on

$$ds_0^2 = d\underline{X}^T d\underline{X} \quad (2.6)$$

ja vastaavasti  $D_t$ :ssä

$$ds^2 = d\underline{x}^T d\underline{x} . \quad (2.7)$$

Invariantti  $ds^2 - ds_0^2$  mittaa muodonmuutosta  $D_t$ :n ja  $D_0$ :n välillä. Kaavan (2.3) avulla saadaan

$$ds^2 - ds_0^2 = d\underline{X}^T (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I}) d\underline{X} = 2 d\underline{X}^T \underline{E} d\underline{X} , \quad (2.8)$$

missä viimeinen yhtälö määrittelee Greenin muodonmuutosmatriisin /10/

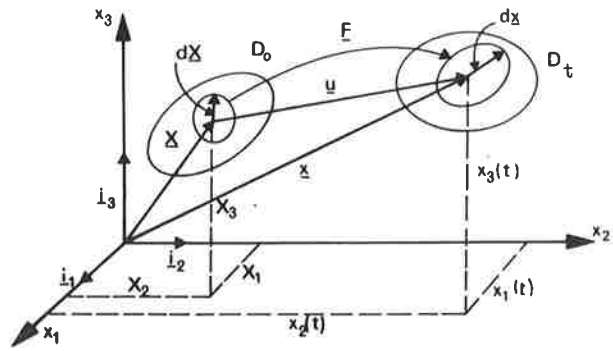
$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I}) . \quad (2.9)$$

Tarkastellaan sitten tapausta, jossa alkutilan materiaalikoordinaatit ovat käyräviivaiset koordinaatit  $\alpha^i$ . Niiden ja karteesisien koordinaattien  $X_i$  väliset yhteydet ovat

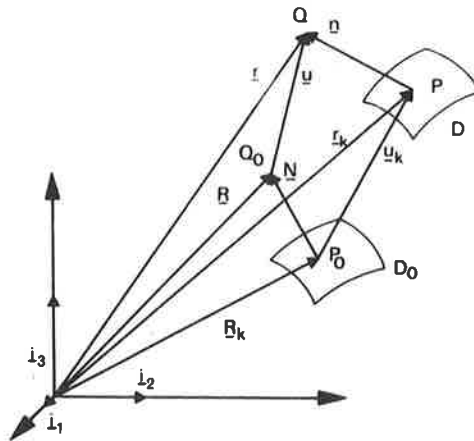
$$X_i = X_i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3), \quad i = 1, 2, 3 . \quad (2.10)$$

Koordinaattiviivojen  $\alpha^i$  suuntaiset kantavektorit ovat  $D_0$ :ssa

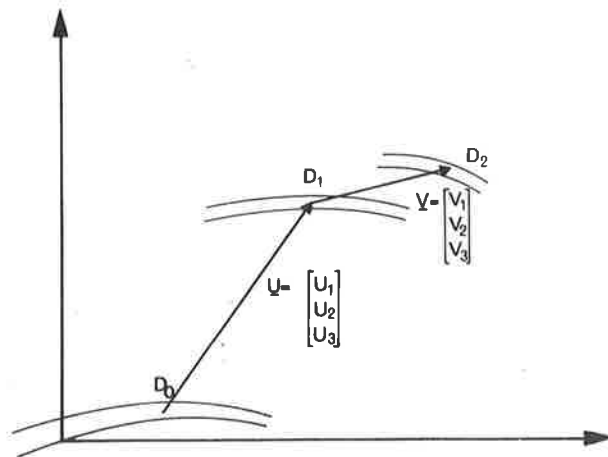
$$\underline{G}_i = \frac{\partial \underline{X}}{\partial \alpha^i} . \quad (2.11)$$



Kuva 1. Kappaleen deformaatio.  
Fig. 1. Deformation of a body.



Kuva 2. Kuoren deformaatio.  
Fig. 2. Deformation of a thin shallow shell.



Kuva 3. Siirtymien lisäykset.  
Fig. 3. Incremental displacements.

Deformoituneessa tilassa  $D_t$  vastaavat kantavektorit ovat

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \alpha^i} . \quad (2.12)$$

Viiva-alkioiden neliöiden erotus on nyt

$$ds^2 - ds_0^2 = d\underline{\alpha}^T (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{F}_0^T \underline{F}_0) d\underline{\alpha} = 2 d\underline{\alpha}^T \underline{E} d\underline{\alpha} , \quad (2.13)$$

jossa

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha^j} \end{bmatrix} , \quad \underline{F}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_i}{\partial \alpha^j} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

ja

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{F}_0^T \underline{F}_0) . \quad (2.15)$$

### 2.1.1 Laakean kuoren muodonmuutokset

Laakean kuoren keskipinnan mielivaltaisen pisteen  $P_0$  paikkavektori alkutilassa  $D_0$  on

$$\underline{R}_k = X_1 \underline{i}_1 + X_2 \underline{i}_2 + w_0(X_1, X_2) \underline{i}_3 . \quad (2.16)$$

Kuoren pisteen  $Q_0$  paikkavektori  $D_0$ :ssa on

$$\underline{R} = \underline{R}_k + \zeta \underline{N} , \quad (2.17)$$

jossa  $\zeta$  on keskipinnan normaalia  $\underline{N}$  pitkin mitattu etäisyys. Pisteissä  $P_0$  ja  $Q_0$  sijainneet partikkelit ovat deformaation jälkeen pisteissä  $P$  ja  $Q$ , joiden paikkavektorit ovat

$$\underline{r}_k = \underline{R}_k + \underline{u}_k , \quad (2.18)$$

$$\underline{r} = \underline{R} + \underline{u} . \quad (2.19)$$

Kirchhoffin mukaan oletetaan myös  $D_t$ :ssä pätevän

$$\underline{r} = \underline{r}_k + \zeta \underline{n} , \quad (2.20)$$

joten

$$\underline{u} = \underline{u}_k + \zeta(\underline{n}-\underline{N}), \quad (2.21)$$

$\underline{n}$  on deformoituneen pinnan normaalivektori. Laakean kuoren tapauksessa saadaan

$$\underline{N} \approx \begin{bmatrix} -w_{0,1} \\ -w_{0,2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{n} \approx \begin{bmatrix} -w_{0,1} - u_{k3,1} \\ -w_{0,2} - u_{k3,2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

kun normaalia  $\underline{n}$  laskettaessa oletetaan lisäksi derivaatat

$$u_{ki,j}, \quad i,j = 1,2 \quad (2.23)$$

pieniksi.

Koordinaatit  $x_1, x_2$  ja  $\zeta$  muodostavat käyräviivaisen koordinaatiston. Greenin muodonmuutosmatriisi johdetaan kaavojen (2.11), ..., (2.15) avulla:

$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{F}^T \underline{F} - \underline{F}_0^T \underline{F}_0), \quad (2.24)$$

missä

$$\underline{F} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{\alpha}}, \quad \underline{F}_0 = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{\alpha}}, \quad \underline{\alpha}^T = [x_1 \ x_2 \ \zeta].$$

Ottamalla huomioon, että kuoren laakeuden ja ohuuden nojalla termit

$$(w_{0,i})^2, \quad |\zeta w_{0,ij}|, \quad i,j = 1,2$$

sekä tekijän  $\zeta^2$  sisältävät termit ja derivaatat (2.23) ovat ykkösen rinnalla pieniä, saadaan kaavasta (2.24)

$$E_{11} = \frac{1}{2} \sum_i (F_{i1}^2 - F_{0i1}^2) \quad (2.25)$$



$$\approx u_{k1,1} + \frac{1}{2}(u_{k3,1})^2 + w_{0,1} u_{k3,1} - \zeta u_{k3,11}$$

Merkitään

$$u = u_{k1}, \quad v = u_{k2}, \quad w = u_{k3}, \quad x = X_1, \quad y = X_2, \quad z = \zeta$$

ja

$$e_{xx} = E_{11}, \quad e_{yy} = E_{22}, \quad e_{xy} = 2E_{12},$$

ja kootaan muodonmuutoskomponentit vektoriksi  $\underline{e}$ :

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} w_{,x}^2 \\ \frac{1}{2} w_{,y}^2 \\ w_{,x} w_{,y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{0,x} w_{,x} \\ w_{0,y} w_{,y} \\ w_{0,x} w_{,y} + w_{0,y} w_{,x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\equiv \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4$$

$E_{13}$ ,  $E_{23}$  ja  $E_{33}$  jätetään pieninä suureina pois.

Kaavat (2.26) johti Marguerre 1930-luvulla [8]. Von Kármánin muodonmuutokset laatalle saadaan sijoittamalla Marguerren kaavoihin  $w_0 = 0$ . Yleisemmät kaavat laatalle on esittänyt Novozhilov [24].

## 2.2 Tasapainoyhtälöt ja virtuaalisen työn periaate

Kappaleen sisäiset tasapainoyhtälöt voidaan esittää muodossa (ks. [9])

$$\operatorname{div} \underline{S}_0^T + \underline{b}_0 = 0, \quad (2.27)$$

jossa  $\underline{S}_0$  on Lagrangen eli 1. Piola-Kirchhoffin jännitysmatriisi ja  $\underline{b}_0$  alkutilan  $D_0$  tilavuutta kohti laskettu massa vaikuttava voima. Jännitys  $\underline{S}_0$  on myös laskettu alkutilan pintaa kohti. Kappaleen pinnalla tasapainoehdot ovat

$$\underline{S}_0^T \underline{n}_0 = \underline{t}_0 \quad S_{ot}:llä, \quad (2.28)$$

jossa  $\underline{n}_0$  on kappaleen pinnan alkion yksikkönormaali alkutilassa ja  $\underline{t}_0$  pintaan vaikuttava ulkoinen voima.

Lagrangen jännitysmatriisi on yleensä epäsymmetrinen. Sen asemasta on mukavampaa käyttää symmetristä Kirchhoffin eli 2. Piola-Kirchhoffin jännitysmatriisia  $\underline{S}$ , joka suhtautuu  $\underline{S}_0$ :aan seuraavasti (ks. [9])

$$\underline{S}_0 = \underline{S} \underline{F}^T. \quad (2.29)$$

Tasapainoyhtälöt (2.27) ja (2.28) voidaan lausua  $\underline{S}$ :n avulla sijoittamalla niihin  $\underline{S}_0$  (2.29):stä.

Tasapainoyhtälöiden kanssa ekvivalentti on virtuaalisen työn periaate, joka Lagrangen jännitysmatriisia käyttäen voidaan lausua muodossa (ks. [9])

$$\int_{B_0} \underline{S}_0^T \cdot \nabla \delta \underline{u} \, dv = \int_{B_0} \underline{b}_0^T \delta \underline{u} \, dv + \int_{S_{ot}} \underline{t}_0^T \delta \underline{u} \, da. \quad (2.30)$$

$\delta \underline{u}$  on jatkuvuus- ja geometriset reunaehdot täyttävä virtuaalisten siirtymien kenttä. Kirchhoffin jännitysmatriisia käyttäen virtuaalisen työn periaate kuuluu

$$\int_{B_0} \underline{S} \cdot \delta \underline{E} \, dv = \int_{B_0} \underline{b}_0^T \delta \underline{u} \, dv + \int_{S_{ot}} \underline{t}_0^T \delta \underline{u} \, da. \quad (2.31)$$

Elementtimenetelmän approksimatiiviset tasapainoyhtälöt johdetaan seuraavassa yhtälön (2.31) avulla.

Tarkastellaan kappaletta B kahdessa lähekkäisessä konfiguraatiossa  $D_1$  ja  $D_2$ .

Greenin muodonmuutosmatriisi on  $D_2$ :ssa

$$\underline{2}_E = \frac{1}{2}(\underline{2}_F^T \underline{2}_F - \underline{I}) . \quad (2.32)$$

Kun  $\delta \underline{v}$  on virtuaalinen siirtymävektori, saadaan

$$\delta(\underline{2}_E) = \frac{1}{2}(\underline{1}_F^T \delta \underline{G} + \delta \underline{G}^T \underline{1}_F + \delta \underline{G}^T \underline{G} + \underline{G}^T \delta \underline{G}) , \quad (2.33)$$

$$\delta(\underline{1}_E) = \lim_{\underline{v} \rightarrow 0} \delta(\underline{2}_E) = \frac{1}{2}(\underline{1}_F^T \delta \underline{G} + \delta \underline{G}^T \underline{1}_F) , \quad (2.34)$$

jossa

$$\underline{G} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{X}} = \underline{2}_F - \underline{1}_F . \quad (2.35)$$

Jännitysmatriisi  $D_2$ :ssa on

$$\underline{2}_S = \underline{1}_S + \Delta \underline{S} . \quad (2.36)$$

Inkrementaaliset tasapainoyhtälöt johdetaan Biot'in [13] mukaan vähentämällä  $D_2$ :n virtuaalisen työn yhtälöstä  $D_1$ :n vastaava yhtälö.

Tällöin saadaan

$$\int_{B_0} \text{tr}(\underline{1}_S \delta(\underline{G}^T \underline{G})) + \text{tr}(\Delta \underline{S} \delta(\underline{2}_E)) - (\underline{2}_{b_0} - \underline{1}_{b_0})^T \delta \underline{v} dv - \int_{S_{ot}} (\underline{2}_{t_0} - \underline{1}_{t_0})^T \delta \underline{v} dS = 0 \quad (2.37)$$

Kaavoissa (2.31) ja (2.37) on esim. pintakuorma [25]

$${}^i_t_{t_0} = {}^i_t \frac{d^i S}{dS_0} \quad i = 1, 2 , \quad (2.38)$$

jolle painekuorman  $p$  tapauksessa on johdettu lauseke [25]

$${}^i_t d^i S = -i_p {}^i_j ({}^i_F^{-1})^T \underline{n}_0 dS_0 , \quad i = 1, 2 , \quad (2.39)$$

$${}^i_j = \det {}^i_F .$$

Koska  $\underline{2}_F$  riippuu  $D_1$ :n ja  $D_2$ :n välisestä siirtymästä, lasketaan

likimäärin

$$\underline{2}_{t_0} - \underline{1}_{t_0} \approx -\Delta p {}^1_j ({}^1_F^{-1})^T \underline{n}_0 . \quad (2.40)$$

## 3. ELEMENTTIMENETELMÄN YHTÄLÖT

Elementtimenetelmässä tutkittava kohde jaetaan äärellisiin al-  
kioihin eli elementteihin. Elementeistä ja niiden reunaviivoilta va-  
litaan solmupisteitä  $N$  kappaletta. Funktiota  $f$  approksimoidaan muo-  
tofunktioiden  $\underline{N}_{f_i}$  ja funktion solmupistearvojen avulla kaavalla

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \underline{N}_{f_i}(\underline{x}) \underline{f}_i \quad (3.1)$$

Solmupisteeseen  $i$  liittyvä muotofunktiovektori  $\underline{N}_{f_i}(\underline{x})$  saa nol-  
lasta poikkeavia arvoja vain pisteeseen  $i$  liittyvissä elementeissä.

Matriisimerkinnöin on

$$f(\underline{x}) = \underline{N}_f \underline{f}_n \quad (3.2)$$

jossa  $\underline{N}_f$  on nyt vaakavektori

$$\underline{N}_f = [\underline{N}_{f1} \dots \underline{N}_{fN}] \quad (3.3)$$

vektori  $\underline{f}_n$  sisältää  $f$ :n ja mahdollisesti sen derivaattojen solmu-  
pistearvot

$$\underline{f}_n = [\underline{f}_1^T \dots \underline{f}_N^T]^T \quad (3.4)$$

## 3.1 Tasapainoyhtälöt

Siirtymien  $u, v$  ja  $w$  elementtimenetelmän mukaiset approksimaa-  
tiot ovat

$$u = \underline{N}_u \underline{u}_n \quad (3.5)$$

$$v = \underline{N}_v \underline{v}_n$$

$$w = \underline{N}_w \underline{w}_n$$

Muodonmuutosvektorin  $\underline{g}$  osat  $\underline{g}_i$  saadaan derivoimalla siirtymien  
kaavoista:

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} N_{u,x} \\ N_{v,y} \\ N_{u,y} \\ N_{v,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \equiv \underline{B}_1 \underline{k}_n \quad (3.6)$$

$$\underline{e}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} N_{w,x} & w_n \\ N_{w,y} & w_n \\ N_{w,y} & w_n \\ N_{w,x} & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{w,x} \\ N_{w,y} \end{bmatrix} w_n \equiv \frac{1}{2} \underline{W}_1 \underline{B}_2 w_n, \quad (3.7)$$

$$\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} w_{o,x} \\ w_{o,y} \\ w_{o,y} \\ w_{o,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{w,x} \\ N_{w,y} \end{bmatrix} w_n \equiv \underline{W}_0 \underline{B}_2 w_n, \quad (3.8)$$

$$\underline{e}_4 = \begin{bmatrix} -z & N_{w,xx} \\ N_{w,yy} \\ 2N_{w,xy} \end{bmatrix} w_n \equiv z \underline{B}_3 w_n, \quad (3.9)$$

Vektori  $\underline{e}$  on solmupistesiirtymien funktiona

$$\underline{e} = \underline{B}_1 \underline{k}_n + \frac{1}{2} \underline{W}_1 \underline{B}_2 w_n + \underline{W}_0 \underline{B}_2 w_n + z \underline{B}_3 w_n, \quad (3.10)$$

ja virtuaalinen muodonmuutosvektori on

$$\delta \underline{e} = \underline{B}_1 \delta \underline{k}_n + \frac{1}{2} \underline{W}_1 \underline{B}_2 \delta w_n + \underline{W}_0 \underline{B}_2 \delta w_n + z \underline{B}_3 \delta w_n, \quad (3.11)$$

Kimmoisen aineen jännitys voidaan lausua kimmomatriisin  $\underline{D}$  ja muodonmuutosten avulla:

$$\underline{s} = \underline{D} \underline{e}. \quad (3.12)$$

Sijoittamalla  $\delta \underline{e}$  ja  $\underline{s}$  virtuaalisen työn yhtälöön (2.31) saadaan

$$\begin{bmatrix} \delta \underline{k}_n^T & \delta w_n^T \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} K_k & K_{kw} \\ K_{wk} & K_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{k}_n \\ w_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_k \\ F_w \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (3.13)$$

missä

$$\underline{K}_k = \int_V \underline{B}_1^T \underline{D} \underline{B}_1 dv,$$

$$\underline{K}_{kw} = \underline{K}_{kw1} + \underline{K}_{kw2} + \underline{K}_{kw3} ,$$

$$\underline{K}_{wk} = 2\underline{K}_{kw1}^T + \underline{K}_{kw2}^T + \underline{K}_{kw3}^T ,$$

$$\underline{K}_w = \underline{K}_{w1} + \underline{K}_{w2} + \underline{K}_{w3} + \underline{K}_{w4} + 2\underline{K}_{w4}^T + \underline{K}_{w5} + 2\underline{K}_{w5}^T + \underline{K}_{w6} + \underline{K}_{w6}^T ,$$

$$\underline{K}_{kw1} = \frac{1}{2} \int_V \underline{B}_1^T \underline{D} \underline{W}_1 \underline{B}_2 \, dv ,$$

$$\underline{K}_{kw2} = \int_V \underline{B}_1^T \underline{D} \underline{W}_0 \underline{B}_2 \, dv ,$$

$$\underline{K}_{kw3} = \int_V z \underline{B}_1^T \underline{D} \underline{B}_3 \, dv ,$$

$$\underline{K}_{w1} = \int_V z^2 \underline{B}_3^T \underline{D} \underline{B}_3 \, dv ,$$

$$\underline{K}_{w2} = \frac{1}{2} \int_V \underline{B}_2^T \underline{W}_1^T \underline{D} \underline{W}_1 \underline{B}_2 \, dv ,$$

$$\underline{K}_{w3} = \int_V \underline{B}_2^T \underline{W}_0^T \underline{D} \underline{W}_0 \underline{B}_2 \, dv ,$$

$$\underline{K}_{w4} = \frac{1}{2} \int_V \underline{B}_2^T \underline{W}_0^T \underline{D} \underline{W}_1 \underline{B}_2 \, dv ,$$

$$\underline{K}_{w5} = \frac{1}{2} \int_V z \underline{B}_3^T \underline{D} \underline{W}_1 \underline{B}_2 \, dv ,$$

$$\underline{K}_{w6} = \int_V z \underline{B}_3^T \underline{D} \underline{W}_0 \underline{B}_2 \, dv ,$$

$$\underline{F}_k = \int_V \begin{bmatrix} \underline{N}_u^T & b_{ox} \\ \underline{N}_v^T & b_{oy} \end{bmatrix} dv + \int_{S_{ot}} \begin{bmatrix} \underline{N}_u^T & t_{ox} \\ \underline{N}_v^T & t_{oy} \end{bmatrix} da ,$$

$$\underline{F}_w = \int_V \underline{N}_w^T b_{oz} \, dv + \int_{S_{ot}} \underline{N}_w^T t_{oz} \, da ,$$

V on rakenteen tilavuus alkutilassa,  $S_{ot}$ :llä tunnetaan reunavoimat.

Eliminoimalla yhtälöstä (3.13) virtuaaliset siirtymät päädytään epälineaariseen yhtälöryhmään

$$\underline{K} \underline{r} = \underline{P} , \tag{3.14}$$

jossa  $\underline{r} = \begin{bmatrix} \underline{k}_n \\ \underline{w}_n \end{bmatrix}$  ,  $\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{F}_k \\ \underline{F}_w \end{bmatrix}$  .

## 3.2 Inkrementaaliset tasapainoyhtälöt

Tarkastellaan jälleen rakennetta kahdessa lähekkäisessä konfiguraatiossa  $D_1$  ja  $D_2$ .  $D_2$ :n siirtymävektori  ${}^2\underline{u}$  on

$${}^2\underline{u} = {}^1\underline{u} + \Delta\underline{u} \quad \text{eli} \quad {}^2 \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = {}^1 \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} .$$

$D_1$ :n ja  $D_2$ :n välillä syntyvät muodonmuutokset

$$\Delta\underline{e} = {}^2\underline{e} - {}^1\underline{e} = \underline{B}_1 \underline{l}_n + \underline{W}_1 \underline{B}_2 \underline{t}_n + \frac{1}{2} \underline{I}_1 \underline{B}_2 \underline{t}_n + \underline{W}_0 \underline{B}_2 \underline{t}_n + z \underline{B}_3 \underline{t}_n , \quad (3.15)$$

$$\text{jossa } \underline{l}_n = \begin{bmatrix} \underline{r}_n \\ \underline{s}_n \end{bmatrix} , \quad \underline{I}_1 = \begin{bmatrix} t, x & & \\ & t, y & \\ & & t, y \quad t, x \end{bmatrix} .$$

Vektori  $\Delta\underline{e}$  aiheuttaa jännitysvektorin muutoksen

$$\Delta\underline{s} = \underline{D} \Delta \underline{e} , \quad (3.16)$$

$\underline{D}$  on materiaalin konstitutiivinen matriisi.

Virtuaalisia siirtymiä  $\delta r$ ,  $\delta s$  ja  $\delta t$  vastaava virtuaalinen muodonmuutos on  $D_2$ :ssa

$$\delta({}^2\underline{e}) = \underline{B}_1 \delta \underline{l}_n + \underline{W}_1 \underline{B}_2 \delta \underline{t}_n + \underline{I}_1 \underline{B}_2 \delta \underline{t}_n + \underline{W}_0 \underline{B}_2 \delta \underline{t}_n + z \underline{B}_3 \delta \underline{t}_n \quad (3.17)$$

ja  $D_1$ :ssa

$$\delta({}^1\underline{e}) = \underline{B}_1 \delta \underline{l}_n + \underline{W}_1 \underline{B}_2 \delta \underline{t}_n + \underline{W}_0 \underline{B}_2 \delta \underline{t}_n + z \underline{B}_3 \delta \underline{t}_n . \quad (3.18)$$

Kaavan (2.37) nojalla saadaan

$$\int_V ({}^1 \underline{s}^T \underline{I}_1 \underline{B}_2 \delta \underline{t}_n + \Delta \underline{s}^T (\underline{B}_1 \delta \underline{l}_n + \underline{W}_1 \underline{B}_2 \delta \underline{t}_n + \underline{I}_1 \underline{B}_2 \delta \underline{t}_n + \underline{W}_0 \underline{B}_2 \delta \underline{t}_n + z \underline{B}_3 \delta \underline{t}_n)) - \delta \underline{l}_n^T \Delta \underline{F}_k - \delta \underline{t}_n^T \Delta \underline{F}_w = 0 . \quad (3.19)$$

Eliminoimalla edellisestä kaavasta (3.19) virtuaaliset siirtymät saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_1 & \underline{K}_{1t} \\ \underline{K}_{t1} & \underline{K}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{l}_n \\ \underline{t}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Delta F}_k \\ \underline{\Delta F}_w \end{bmatrix} \quad \text{eli } \underline{K}^i \underline{\Delta r} = \underline{\Delta P} \quad , \quad (3.20)$$

jossa

$$\underline{K}_1 = \int_V \underline{B}_1^T \underline{D} \underline{B}_1 \, dv \quad ,$$

$$\underline{K}_{1t} = \underline{K}_{1t1} + \underline{K}_{1t2} + \underline{K}_{1t3} + \underline{K}_{1t4}^e \quad ,$$

$$\underline{K}_{t1} = \underline{K}_{t1}^T + \underline{K}_{t2}^T + \underline{K}_{t3}^T + 2(\underline{K}_{t4}^e)^T \quad ,$$

$$\begin{aligned} \underline{K}_t = & \underline{K}_{t1} + \underline{K}_{t2} + \underline{K}_{t3} + \underline{K}_{t4} + \underline{K}_{t5}^T + \underline{K}_{t5} + \underline{K}_{t6}^T + \underline{K}_{t6} + \underline{K}_{t7} \\ & + \underline{K}_{t8}^e + 2(\underline{K}_{t8}^e)^T + \underline{K}_{t9}^e + \underline{K}_{t10}^e + 2(\underline{K}_{t10}^e)^T + \underline{K}_{t11}^e + 2(\underline{K}_{t11}^e)^T \quad , \end{aligned}$$

$$\underline{K}_{1t1} = \int_V \underline{B}_1^T \underline{D} \underline{W}_1 \underline{B}_2 \, dv \quad ,$$

$$\underline{K}_{1t2} = \int_V \underline{B}_1^T \underline{D} \underline{W}_0 \underline{B}_2 \, dv \quad ,$$

$$\underline{K}_{1t3} = \int_V z \underline{B}_1^T \underline{D} \underline{B}_3 \, dv \quad ,$$

$$\underline{K}_{1t4}^e = \frac{1}{2} \int_V \underline{B}_1^T \underline{D} \underline{T}_1 \underline{B}_2 \, dv \quad ,$$

$$\underline{K}_{t1} = \int_V z^2 \underline{B}_3^T \underline{D} \underline{B}_3 \, dv \quad ,$$

$$\underline{K}_{t2} = \int_V \underline{B}_2^T \underline{W}_1^T \underline{D} \underline{W}_1 \underline{B}_2 \, dv \quad ,$$

$$\underline{K}_{t3} = \int_V \underline{B}_2^T \underline{W}_0^T \underline{D} \underline{W}_0 \underline{B}_2 \, dv \quad ,$$

$$\underline{K}_{t4} = \int_V \underline{B}_2^T \underline{W}_0^T \underline{D} \underline{W}_1 \underline{B}_2 \, dv \quad ,$$

$$\underline{K}_{t5} = \int_V z \underline{B}_3^T \underline{D} \underline{W}_1 \underline{B}_2 \, dv \quad ,$$

$$\underline{K}_{t6} = \int_V z \underline{B}_3^T \underline{D} \underline{W}_0 \underline{B}_2 \, dv \quad ,$$

$$\underline{K}_{t7} = \int_V \underline{B}_2^T \underline{S}_2 \underline{B}_2 \, dv \quad ,$$



$$K_{t8}^e = \frac{1}{2} \int_V \underline{B}_2^T \underline{W}_1^T \underline{T}_D \underline{T}_1 \underline{B}_2 dv ,$$

$$K_{t9}^e = \frac{1}{2} \int_V \underline{B}_2^T \underline{T}_1^T \underline{T}_D \underline{T}_1 \underline{B}_2 dv ,$$

$$K_{t10}^e = \frac{1}{2} \int_V z \underline{B}_3^T \underline{T}_D \underline{T}_1 \underline{B}_2 dv ,$$

$$K_{t11}^e = \frac{1}{2} \int_V \underline{B}_2^T \underline{W}_0^T \underline{T}_D \underline{T}_1 \underline{B}_2 dv ,$$

$$\underline{S}_2 = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} .$$

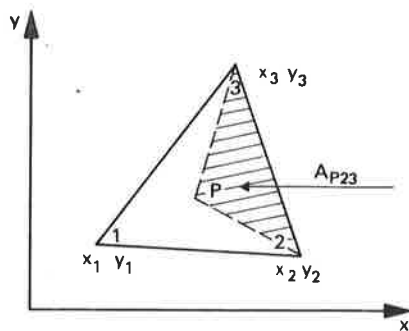
Jos kuormitus ei riipu muodonmuutoksesta, kuormavektorit  $\Delta \underline{F}_k$  ja  $\Delta \underline{F}_w$  saadaan sijoittamalla termien  $b_{0i}$  ja  $t_{0i}$  tilalle inkrementit  $\Delta b_{0i}$  ja  $\Delta t_{0i}$  kaavaan (3.13). Yleisemmin asiaa on tarkasteltu lähteessä [25]

Homogeenisen aineen tapauksessa jäykkyysmatriiseista katoavat  $z$ :n sisältävät termit. Inkrementaalinen matriisi  $\underline{K}^i$  linearisoidaan poistamalla siitä indeksillä  $e$  varustetut termit.

### 3.3 Jäykkyysmatriisien laskeminen

Valitaan elementiksi kolmioelementti ja käytetään muotofunktioina pinta-alakoordinaattien polynomeja.  $L_i$  koordinaattien ja  $x, y$  koordinaattien välillä on yhteys

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} . \quad (3.21)$$



$$\begin{aligned} L_1 &= A_{P23}/A \\ L_2 &= A_{P13}/A \\ L_3 &= A_{P12}/A \end{aligned}$$

Kuva 4. Pinta-alakoordinaatit  
Fig. 4. Area co-ordinates

Derivoinnin ketjusäännöllä johdetaan yhteydet

$$\nabla_L = \underline{J} \nabla, \quad (3.22)$$

$$\nabla_2 = \underline{H} \nabla_{2L},$$

joissa

$$\begin{aligned} \nabla_L &= \left[ \frac{\partial}{\partial L_1} \quad \frac{\partial}{\partial L_2} \right]^T, \quad \nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right]^T, \\ \nabla_{2L} &= \left[ \frac{\partial^2}{\partial L_1^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial L_2^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_2} \right], \quad \nabla_2 = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right]^T. \end{aligned}$$

Matriisit  $\underline{J}$  ja  $\underline{H}$  on esitetty esim. teoksessa [14] s. 82 kaava (2.103) ja s. 171 kaava (5.32).

$L_i$ -koordinaattien polynomit integroidaan kaavalla

$$\int_A L_1^m L_2^n L_3^p = 2A \frac{m! n! p!}{(m+n+p+2)!}. \quad (3.23)$$

Seuraavassa tarvitaan muotofunktiovektoreita

$$\begin{aligned} \underline{N}_3 &= \left[ 1 \quad L_1 L_2 \quad L_1 L_2 \quad L_2 L_3 \quad L_3 L_1 \quad L_1 L_2^2 - L_2 L_1^2 \quad L_2 L_3^2 - L_3 L_2^2 \quad L_3 L_1^2 - L_1 L_3^2 \right], \\ \underline{N}_2 &= \left[ L_1(2L_1-1) \quad L_2(2L_2-1) \quad L_3(2L_3-1) \quad 4L_1 L_2 \quad 4L_2 L_3 \quad 4L_3 L_1 \right], \quad (3.24) \\ \underline{N}_1 &= \left[ L_1 \quad L_2 \quad L_3 \right], \\ \underline{M}_3 &= \left[ \underline{N}_3 \quad L_1 L_2 L_3 \right]. \end{aligned}$$

Interpoloitaessa kalvosiirtymiä  $u$  ja  $v$  lineaarisilla polynomeilla ja taipumaa  $w$  kolmannen asteen polynomilla tulee elementtiin 15 vapausastetta, Tämän elementin  $E_{15}$  kussakin kolmessa solmupisteessä ovat parametreinä  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $w_{,x}$  ja  $w_{,y}$ . Kun kaikille siirtymille valitaan kolmannen asteen interpolaatiopolynomit, saadaan 27 parametrisen elementti  $E_{27}$ , jonka solmupisteiden vapausasteet ovat  $u$ ,  $u_{,x}$ ,  $u_{,y}$ ,  $v$ ,  $v_{,x}$ ,  $v_{,y}$ ,  $w$ ,  $w_{,x}$  ja  $w_{,y}$ .

Tarkastellaan hiukan elementin  $E_{27}$  lineaaristen matriisien  $\underline{K}_k$  ja  $\underline{K}_{w1}$  laskemista. Taipuma  $w$  lausuttuna yhdeksän solmupisteparametrin  $\underline{w}_n$  avulla on

$$\underline{w} = \underline{N}_3 \underline{C}_w \underline{w}_n, \quad (3.25)$$

jossa  $\underline{C}_w$  on vakiomatriisi. Käyritymävektori  $\underline{k}$  on

$$\underline{k} = -\nabla_2 \underline{w} = -\underline{H} \nabla_2 \underline{N}_3 \underline{C}_w \underline{w}_n = \underline{B}_3 \underline{w}_n. \quad (3.26)$$

Vektorin  $\underline{k}$  alkio jakautuvat elementin alueella lineaarisesti:

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{N}_1 \\ \underline{N}_1 \\ \underline{N}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xn} \\ k_{yn} \\ k_{xyn} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Vektori  $\underline{k}_n$  lasketaan kaavasta (3.26) sijoittamalla siihen pisteiden 1, 2 ja 3  $L_i$ -koordinaatit:

$$\underline{k}_n = \underline{F} \underline{w}_n, \quad (3.28)$$

jossa  $\underline{F}$  on  $9 \times 9$  vakiomatriisi.  $\underline{K}_{w1}$  on nyt vakion  $h$  paksuiselle elementille

$$\underline{K}_{w1} = \frac{h^3}{12} \underline{F}^T \left( \int_A \begin{bmatrix} D_{11} \underline{N}_1^T \underline{N}_1 & D_{12} \underline{N}_1^T \underline{N}_1 & D_{13} \underline{N}_1^T \underline{N}_1 \\ \text{symm.} & D_{22} \underline{N}_1^T \underline{N}_1 & D_{23} \underline{N}_1^T \underline{N}_1 \\ & & D_{33} \underline{N}_1^T \underline{N}_1 \end{bmatrix} dA \right) \underline{F}, \quad (3.29)$$

missä

$$\int_A \underline{N}_1^T \underline{N}_1 dA = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \quad (3.30)$$

Siirtymille  $u$  ja  $v$  kirjoitetaan kaavan (3.25) tapaan

$$\begin{aligned} u &= \underline{M}_3 \underline{C}_u \underline{u}_n , \\ v &= \underline{M}_3 \underline{C}_v \underline{v}_n , \end{aligned} \quad (3.31)$$

joissa  $\underline{u}_n$  ja  $\underline{v}_n$  ovat toistaiseksi 10-termisiä vektoreita sisältäen myös keskipisteen siirtymät  $u_0$  ja  $v_0$ . Vektorin  $\underline{e}_1$  alkiot ovat nyt toisen asteen polynomeja, joten voidaan kirjoittaa

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \underline{N}_2 \\ \underline{N}_2 \\ \underline{N}_2 \end{bmatrix} \underline{I} \begin{bmatrix} \underline{u}_n \\ \underline{v}_n \end{bmatrix} . \quad (3.32)$$

Matriisin  $\underline{K}_k$  laskeminen palautuu tulon  $\underline{N}_2^T \underline{N}_2$  integrointiin, joka on suoritettu mm. teoksessa [21].

Jäykkymatriisien lukuisat muut lineaariset ja epälineaariset osat integroidaan helpoimmin numeerisesti. Gauss-Radau-menetelmän kaavoja on esitetty teoksessa [17].

Elementin  $E_{27}$  vapausasteet  $u_0$  ja  $v_0$  eliminoidaan elementtivaiheessa, sillä niistä aiheutuisi hankaluuksia yhtälöryhmää koottaessa ja lisätyötä ratkaisuvaiheessa.

### 3.4 Muotofunktioiden jatkuvuusvaatimukset

Muotofunktioiden tulee täyttää seuraavat vaatimukset, jotta konvergenssi kohti oikeaa ratkaisua olisi saavutettavissa [21], [22]:

#### 1) Täydellisyys

Muotofunktioiden on pystyttävä esittämään mitä tahansa jatkuvaa funktiota elementin alueella, kun elementtiverkkoa tihennetään.

#### 2) Yhteensopivuus

Paloittaisen approksimaation täytyy supeta elementtien välisillä rajoilla kohti todellisen ratkaisun jatkuvuutta elementtiverkkoa tihennettäessä.

Vaatimuksen 1) nojalla jäykän kappaleen liike ei saa aiheuttaa muodonmuutosta ja muotofunktioiden on pystyttävä esittämään vakio-muodonmuutostilaa.

Elementin  $E_{15}$   $u:n$  ja  $v:n$  polynomit toteuttavat ehdot 1) ja 2). Vektorin  $\underline{e}$  kaavassa  $\underline{e}_4$  sisältää  $w:n$  toiset derivaatat  $x:n$  ja  $y:n$  suhteen. Jotta elementteittäin approksimoitu käyristymä  $\underline{\kappa}$  olisi varmasti olemassa, täytyy  $w:n$  ensimmäisten derivaattojen olla jatkuvia laatan alueella. Nyt parabolisesti jakautuvaa sivun normaaliderivaattaa  $w_{,n}$  ei voida yksikäsitteisesti lausua sivun päätepisteiden derivaattojen  $w_{,n1}$  ja  $w_{,n2}$  avulla. Kuten lasketut tulokset osoittavat [19], toteutuu vaatimus 2) likimäärin, kun verkkoa tihennetään.

Taipuisan laatan elementissä  $E_{15}$  kalvosiirtymät  $u$ ,  $v$  ja  $w$  eivät ole yhteensopivia deformatuneessa tilassa.

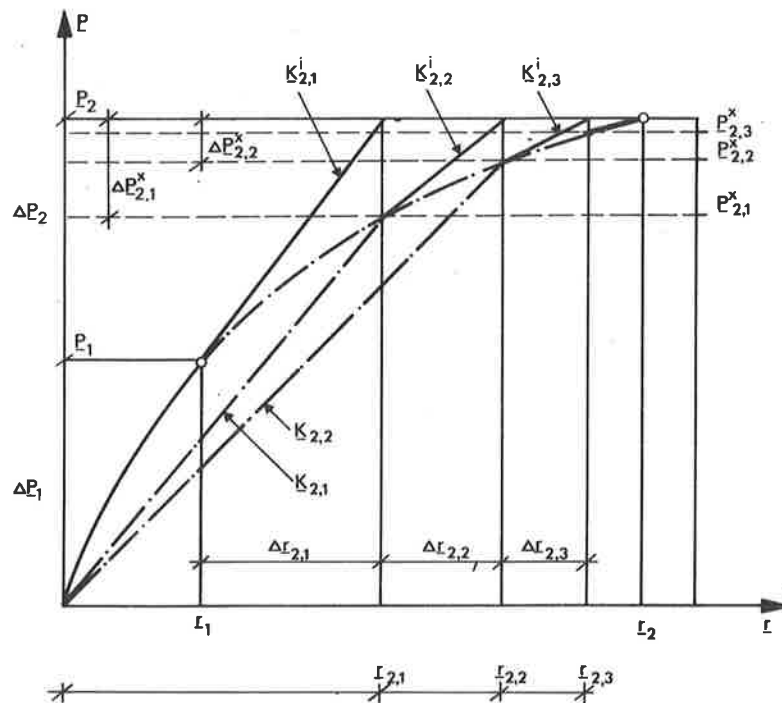
Elementin  $E_{27}$  kalvosiirtymät täyttävät vaatimukset 1) ja 2). Taipuisan laatan elementissä  $u$ ,  $v$  ja  $w$  ovat yhteensopivia, koska kaikki kolme ovat kolmannen asteen polynomeja.

### 3.5 Epälineaaristen tasapainoyhtälöiden ratkaiseminen

Epälineaarisen yhtälön (3.14)

$$\underline{K} \underline{\Gamma} = \underline{P}$$

ratkaisua suljetussa muodossa ei tunneta. Sen sijaan on kehitetty numeerisia ratkaisumenetelmiä.



Kuva 5. Iteratiivinen ratkaisumenetelmä  
Fig. 5. Iteration process

Newtonin iteraatiomenetelmän Jacobin matriisia vastaa inkrementaalinen jäykkyysmatriisi  $\underline{K}^i$ . Yhdistetyn inkrementaalisen ja iteraatiivisen menetelmän inkrementin  $k$  iteraatiokierroksen  $j$  siirtymän muutos on (ks. kuva 5)

$$\Delta \underline{r}_{k,j} = (\underline{K}_{k,j}^i(\underline{r}_{k,j-1}))^{-1} (\underline{P}_k - \underline{K}_{k,j-1}(\underline{r}_{k,j-1})\underline{r}_{k,j-1}) \quad (3.33)$$

jossa

$$\underline{P}_k = \sum_{n=1}^k \Delta \underline{P}_n \quad (3.34)$$

$$\underline{r}_{k,j-1} = \underline{r}_{k-1} + \sum_{n=1}^{j-1} \Delta \underline{r}_{k,n} \quad (3.35)$$

Kun iteroinnin tuloksena on saatu siirtymävektori  $\underline{r}_{k,j-1}$ , lasketaan tasapainoyhtälöiden avulla sitä vastaava sisäisten voimien kanssa ekvivalentti solmuvoimavektori

$$\underline{P}_{k,j-1}^x = \underline{K}_{k,j-1}(\underline{r}_{k,j-1})\underline{r}_{k,j-1} \quad (3.36)$$

Rakenteen kuormavektorin  $\underline{P}_k$  ja vektorin  $\underline{P}_{k,j-1}^x$  erotus

$$\Delta \underline{P}_{k,j-1}^x = \underline{P}_k - \underline{P}_{k,j-1}^x \quad (3.37)$$

antaa voimat, jotka eivät vielä toteuta tasapainoyhtälöitä. Kaavan (3.33) mukaan lasketaan voimia  $\Delta \underline{P}_{k,j-1}^x$  vastaavat rakenteen solmupisteesiirtymien muutokset.

## 4. NUMEERISIA ESIMERKKEJÄ

## 4.1 Laattakaista

15- ja 27-parametrinen laattaelementtien  $E_{15}$  ja  $E_{27}$  tarkkuutta on testattu muutamilla esimerkeillä. Ensimmäisenä ratkaistaan kuvan 6 vapaasti tuettu laattakaista tasaiselle kuormalle. Kuvan 6 yksiköt on valittu samoiksi kuin lähteissä [12] ja [18], joista Timoshenkon analyttinen ratkaisu on jäljennetty kuviin 7 ja 8.

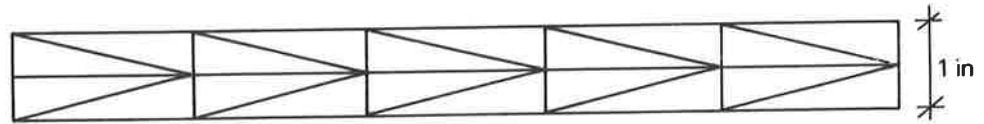
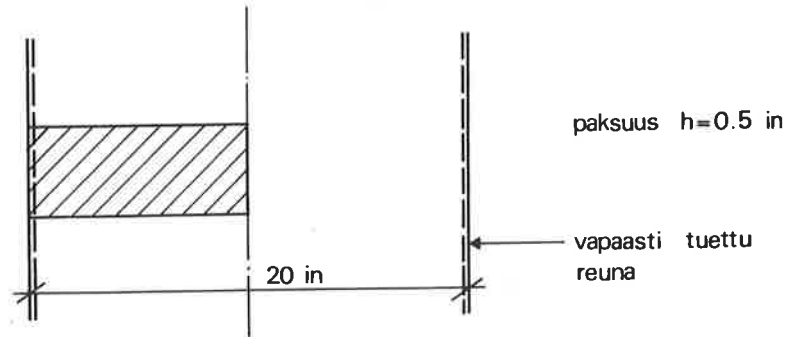
Kuvassa 7 on esitetty laattakaistan keskilinjan taipuman riippuvuus tasaisesta kuormasta. Kuorman inkrementteihin 1000...5000 liittyvät taipuman arvot on myös annettu tapauksissa ( $E_{15}, V_{18}$ ) ja ( $E_{27}, V_8$ ). Aksiaaliset- ja taivutusjännitykset on esitetty kuvassa 8 verkolle  $V_8$  ja elementille  $E_{27}$ . Taulukkoon 1 on koottu myös elementin  $E_{15}$  tapauksessa jännitykset verkolle  $V_{18}$ .

Taulukko 1

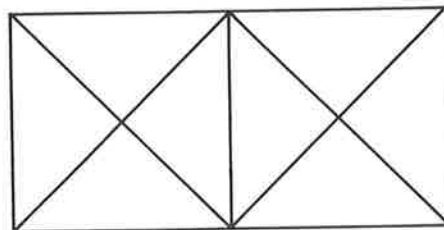
p	$E_{27}$	$V_8$	taiv. jänn.	$E_{15}$	$V_{18}$	taiv. jänn.		
	aks.	jänn.		aks.	jänn.			
1000	.119	$\cdot 10^6$	.128	$\cdot 10^6$	.111	$\cdot 10^6$	.130	$\cdot 10^6$
2000	.195		.160		.183		.162	
3000	.259		.182		.243		.185	
4000	.316		.200		.297		.203	
5000	.369		.215		.347		.218	

Lineaarisen laattaelementin epäkonformisuudesta johtuen taivutusjännitykset ovat edustavia vain elementin painopisteessä [19]. Laattakaistan taivutusjännitys keskilinjalla voidaan ekstrapoloida painopistejännityksistä.

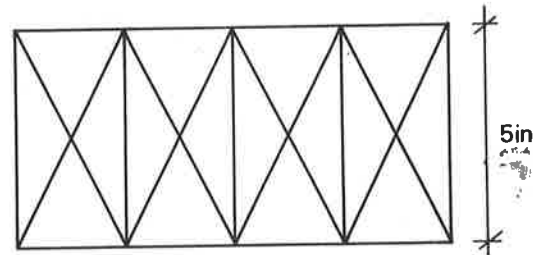




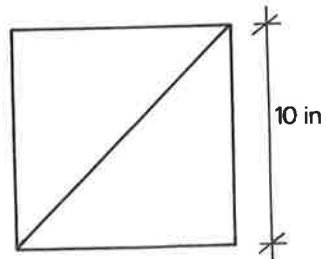
Verkko  $V_{18}$



Verkko  $V_8$



Verkko  $V_{14}$

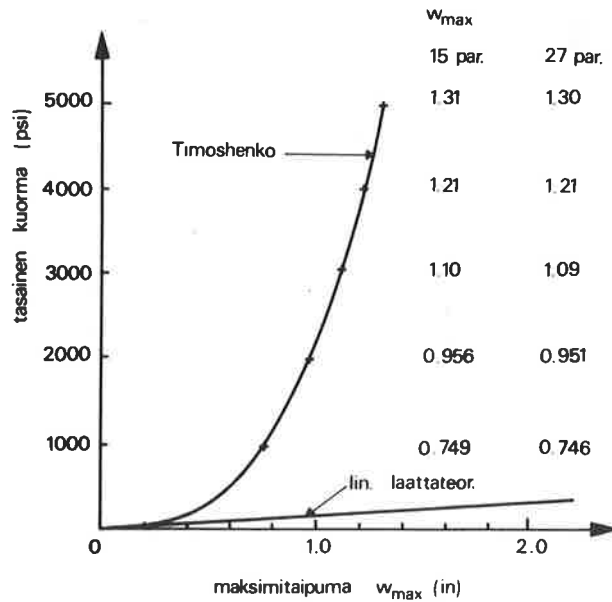


Verkko  $V_4$

Isotrooppinen materiaali :  
 Kimmokerroin  $E = 3 \cdot 10^7$  psi  
 Poissonin luku  $\nu = 0.3$

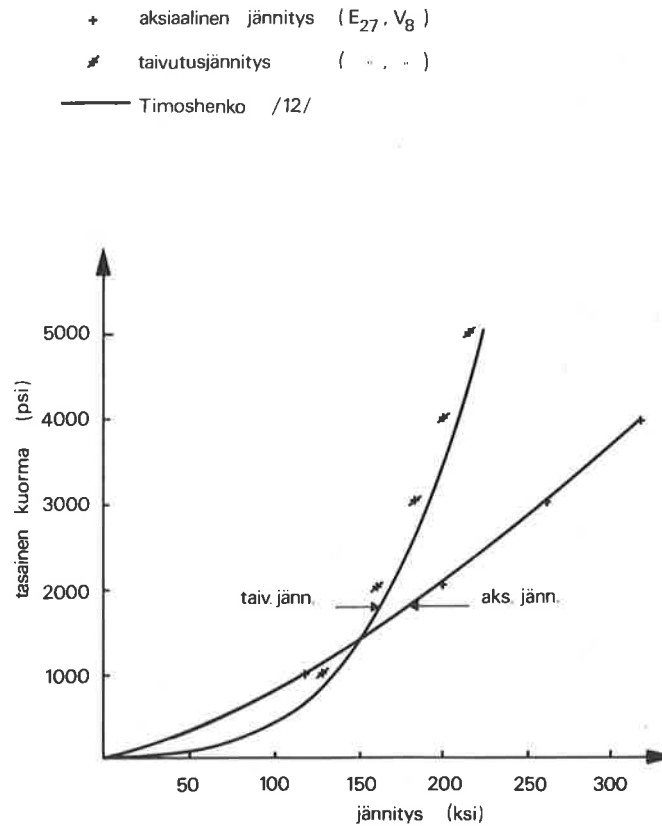
Kuva 6. Laattakaistan jako elementteihin.  
 Fig. 6. A plate strip.

+ 27 parametrinen elementti, V8



Kuva 7. Laattakaistan suurin taipuma kuorman funktiona.  
Fig. 7. Load-deflection curve for a plate strip.

Taulukon 1 ja kuvan 8 tuloksista havaitaan, että harvalla verkolla ja tarkalla kalvosiirtymien interpolaatiolla ( $V_8$ ,  $E_{27}$ ) ovat kalvojännitykset suhteellisesti huomattavasti tarkempia kuin taivutusjännitykset. Tiheämmällä verkolla ( $V_{18}$ ,  $E_{15}$ ) taivutusjännitykset ovat tarkentuneet n. 1.5 %, mutta kalvojännitykset puolestaan ovat n. 6 % liian pienet. Tapauksissa ( $E_{27}$ ,  $V_4$ ) ja ( $E_{27}$ ,  $V_{14}$ ) saatiin kuormalla  $p=1000$   $w_{\max}=0.80$  ja  $w_{\max}=0.746$ .

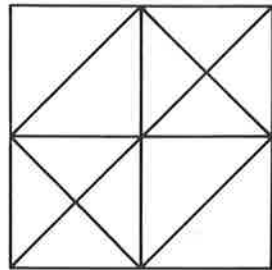
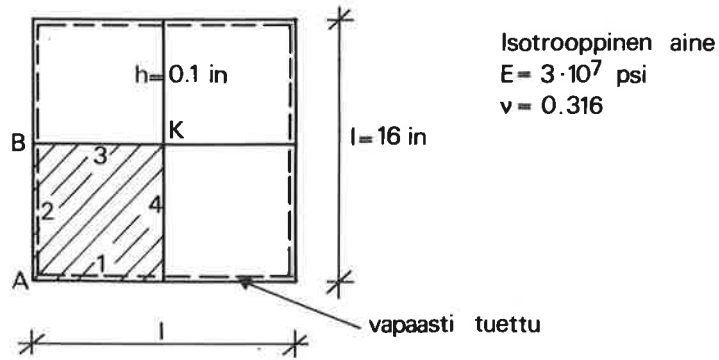


Kuva 8. Laattakaistan jännitykset.  
 Fig. 8. Membrane and bending stresses for a plate strip.

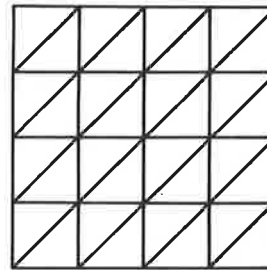
#### 4.2 Vapaasti tuettu neliölaatta

Toisena esimerkkinä on laskettu vapaasti tuettu neliölaatta tasaiselle kuormalle. Levý [2] on ratkaissut tämän tehtävän trigonometristen sarjojen avulla. Kuviin 10 ja 11 Levyn ratkaisu on jäljennetty teoksesta [12]. Materiaaliominaisuudet, mitat ja yksiköt ovat samat kuin alkuperäisessä esimerkissä. Laatan mitat, materiaaliominaisuudet ja käytetyt elementtiverkot on esitetty kuvassa 9.

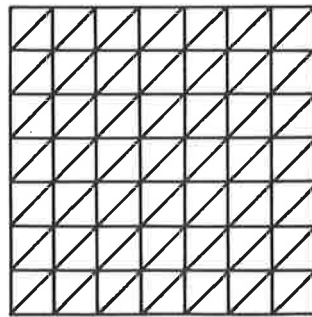
Keskipisteen K taipumat  $w_K$  eri tapauksista on koottu taulukkoon 2.



Verkko  $V_{13}$



Verkko  $V_{25}$



Verkko  $V_{64}$

Reunaehdot ( $E_{27}$ )

1	$u$	$v$	$w$	$u_{,x}$	$w_{,x}$	$=0$
2	$u$	$v$	$w$	$v_{,y}$	$w_{,y}$	$=0$
3	$v$	$e_{xy}$	$w_{xy}$	$w_{,y}$		$=0$
4	$u$	$e_{xy}$	$w_{xy}$	$w_{,x}$		$=0$

$$e_{xy} = \frac{1}{2}(v_{,x} + u_{,y}) \quad w_{xy} = \frac{1}{2}(v_{,x} - u_{,y})$$

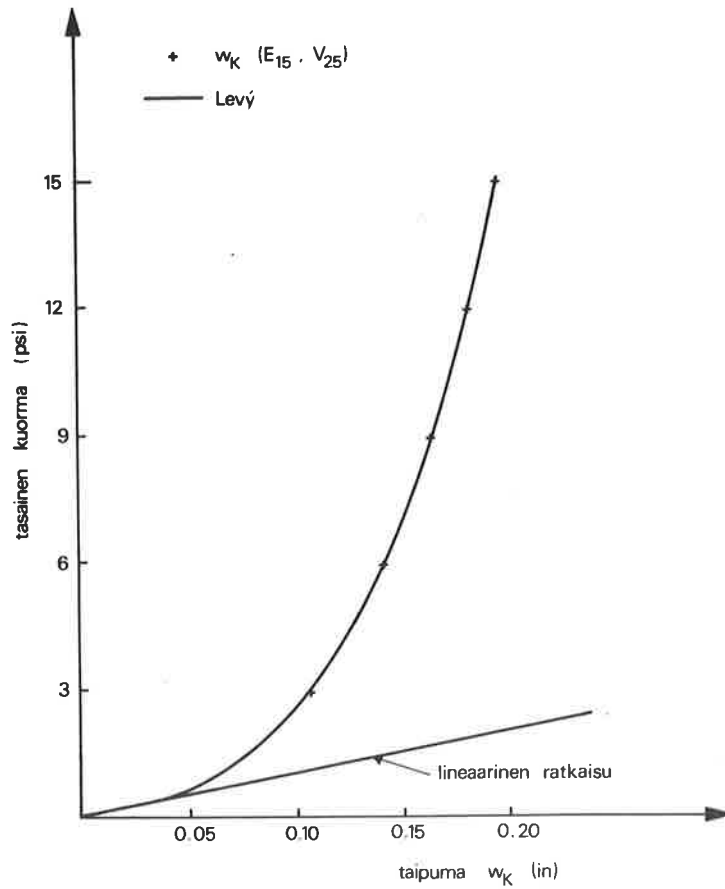
Kuva 9. Neliölaatan elementtiverkot.

Fig. 9. Finite element meshes for a simply supported square plate.

Taulukko 2

Keskipisteen taipuma  $w_K$  (in)

$p$ (psi)	$E_{15}, V_{13}$	$E_{15}, V_{25}$	$E_{15}, V_{64}$	$E_{27}, V_{25}$
3	.104	.105		.105
6	.137	.138	.139	.139
9	.159	.161		.162
12	.177	.178	.179	.179
15	.191	.193		.194

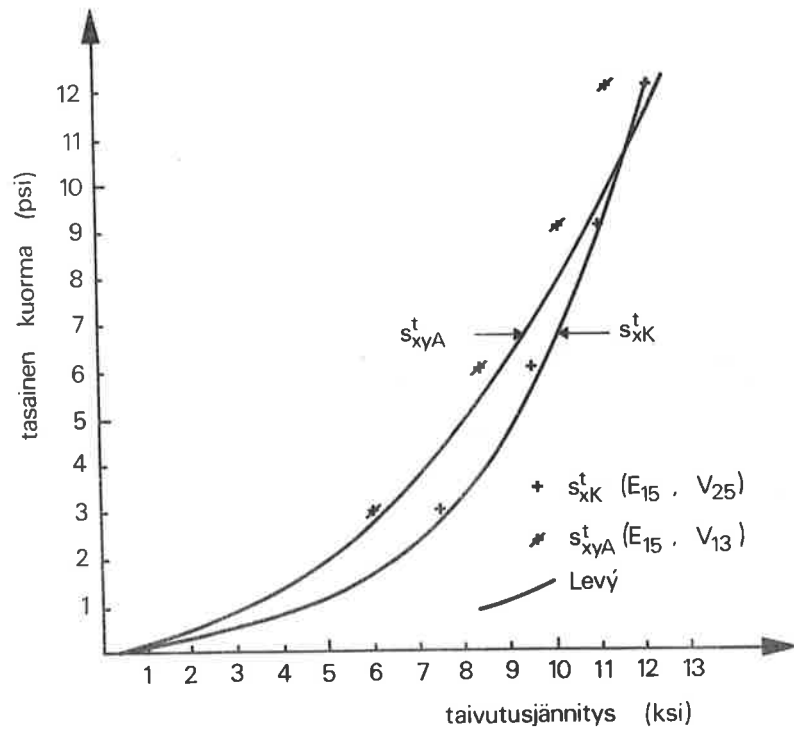
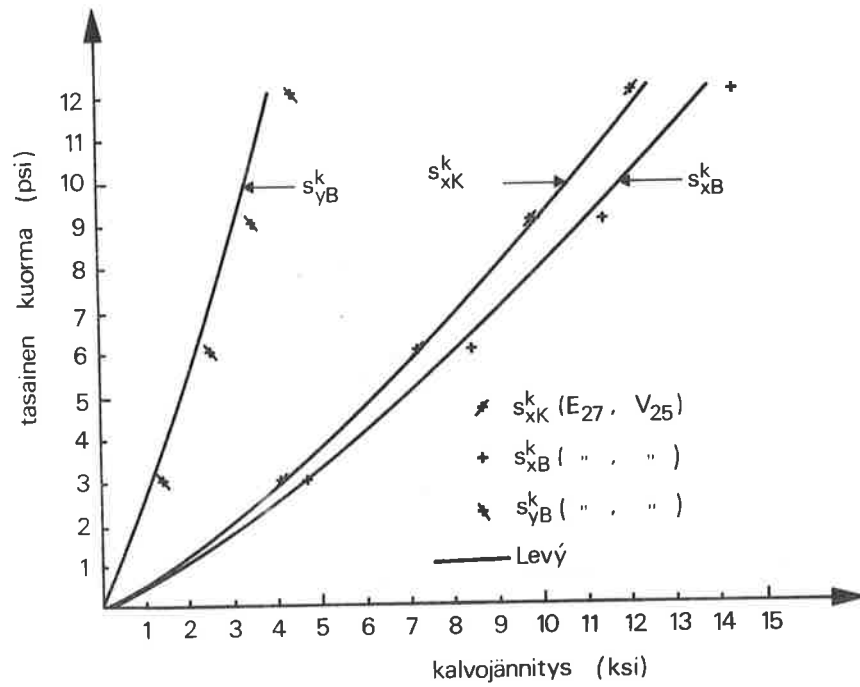


Kuva 10. Neliölaatan keskipisteen taipuma kuorman funktiona.  
 Fig. 10. Deflection versus load for a ss. square plate.

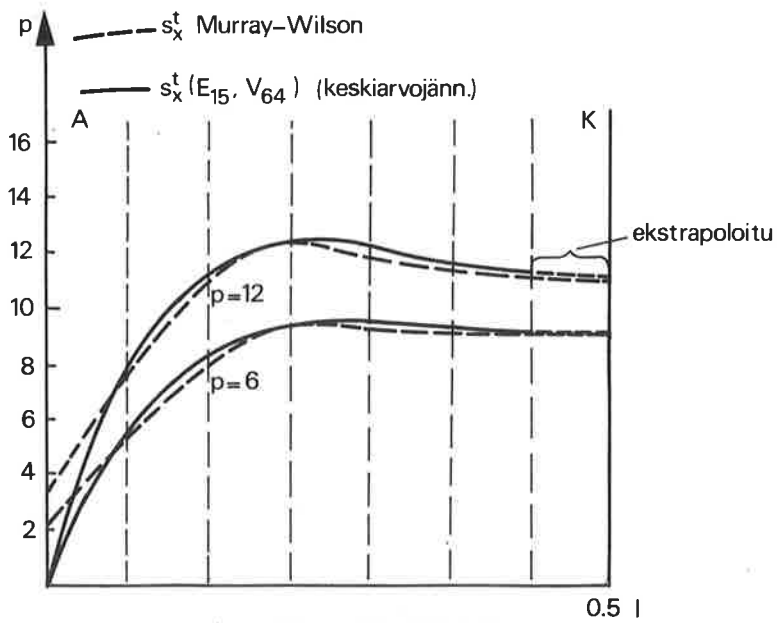
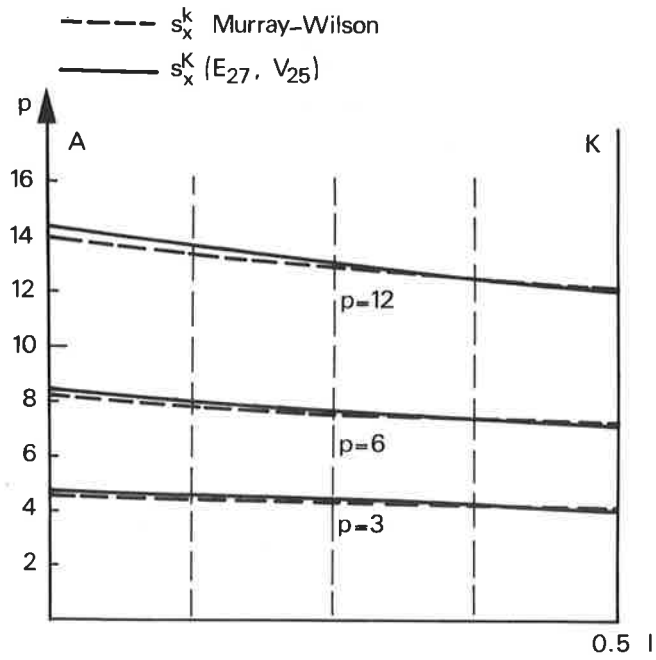
Kuvassa 10 on tapauksen  $(E_{15}, V_{25})$  taipuman  $w_K$  riippuvuus taivutuksen kuorman intensiteetistä  $p$ . Kummankin elementin antamat taipuman arvot ovat verkolla  $V_{25}$  lähes samat. Verkon tihennys  $V_{13}$ :sta  $V_{64}$ :ään ei elementillä  $E_{15}$  vaikuta paljoakaan taipuman arvoon.

Myöskään taivutusjännityksiin ei kalvosiirtymien interpolointiasteella (lineaarinen tai kolmannen asteen polynomi) ole kovin suurta vaikutusta alueella  $w_K < 2h$ . Kuvaan 11 on merkitty keskipisteen taivutusjännitykset  $s_{xK}^t$  tapauksesta  $(E_{15}, V_{25})$  ja laatan kulman A momenttia  $M_{xy}$  vastaavat jännitykset  $s_{xyA}^t$  tapaukselle  $(E_{15}, V_{13})$  kuorman arvoilla 3,6,9,12. Jännitys  $s_{xyA}^t$  on Levyn vastaavaa jännitystä pienempi. Harvalla elementtijaolla  $s_{xyA}^t$  riippuu verkon tyypistä. Esimerkiksi tapauksissa  $(E_{15}, V_{25})$  ja  $(E_{15}, V_{64})$  lasketut arvot ovat Levyn arvoja suuremmat. Tutkimalla  $s_{xy}^t$ -jännityksen jakaumaa pitkin laatan halkaisijaa havaitaan eri tapauksien tulosten eroavan vain lähellä pisteitä A ja K; varsinkin A:n lähellä, jossa  $s_{xy}^t$  muuttuu nopeasti. Murray ja Wilson [18] sekä Bergan [12] ovat laskeneet elementtimenetelmällä A pisteen  $s_{xy}^t$ -jännityksille pienempiä arvoja kuin tapauksessa  $(E_{15}, V_{13})$  saadut. Teoksessa [20] puolestaan on saatu suurempia arvoja kuin Levyn laskemat.

Jännitykset  $s_{xK}^t$  on laskettu ekstrapoloimalla painopistejännityksistä, koska eri elementeistä saatavien jännitysten keskiarvo laatan pisteessä K ei ole edustava lineaarisen laattaelementin epäkonformisuuden takia [19]. Nurkkaan K liittyvistä elementeistä saatavien  $s_{xK}^t$ -jännitysten keskiarvo on huomattavasti pienempi kuin Levyn tulos. Kuvassa 12 on verrattu Murrayn-Wilsonin ja yhdistelmän  $(E_{15}, V_{64})$  antamia laatan keskilinjan  $s_x^t$ -jakaumia kuorman arvoilla 6 ja 12.



Kuva 11. Neliölaatan kalvo- ja taivutusjäännitykset.  
 Fig. 11. Membrane and bending stresses for a square plate.



Kuva 12. Kalvo- ja taivutusjännitysten jakautumat linjalla A-K.  
 Fig. 12: Membrane and bending stresses on line A-K.



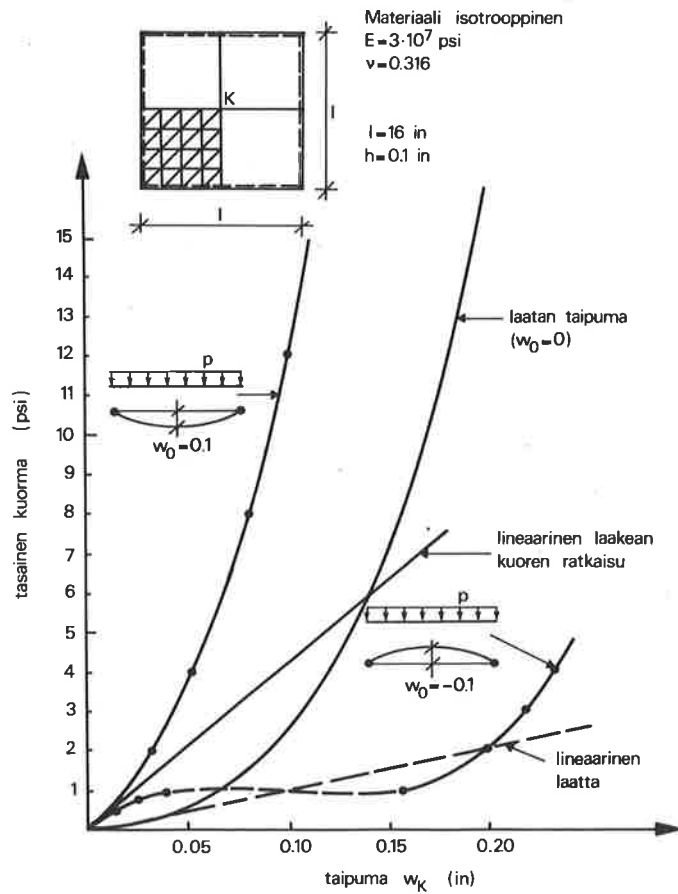
Pisteiden K ja B kalvojäännitykset  $s_{xK}^k$ ,  $s_{xB}^k$  ja  $s_{yB}^k$  kuorman funktiona on piirretty kuvaan 12 tapauksessa ( $E_{27}$ ,  $V_{25}$ ). Elementin  $E_{15}$   $s_{xK}^k$ -jäännitykset ovat  $E_{27}$ :n jäännityksiä pienemmät,  $s_{xA}^k$ -jäännitykset puolestaan ovat Levyn ja  $E_{27}$ :n arvoja huomattavasti suuremmat. Laatan keskilinjan  $s_x^k$ -jäännitysten jakaumaa on verrattu kuvassa 12 jälleen teoksessa [10] esitettyyn jakaumaan.

Taivutusjäännitysten tasaamiseen sovellettiin Odenin [11] konjugaattiapproksimaatiota. Konjugaattijäännitykset eivät tässä tapauksessa paljoakaan poikenneet keskiarvojäännityksistä.

#### 4.3 Laakea kuori

Elementillä  $E_{15}$  ja verkolla  $V_{25}$  tutkittiin laakean kuoren eli alkutaipuman omaavan laatan taipuman riippuvuutta tasaisesta kuormasta, kuva 13. Kun kuormitus on päinvastaiseen suuntaan kuin alkutaipuma, tapahtuu eräällä kuorman arvolla läpilyönti. Kuvan 13 läpilyöntiesimerkissä kuorma-siirtymä-käyrän tangentti on kriittisen kuorman saavuttamisen jälkeen lievästi laskeva. Suuremmalla alkutaipuman arvolla kuin h tulee em. tangentista kriittisen kuorman jälkeen jyrkemmin laskeva. Newtonin iteraatiomenetelmällä negatiivisen tangentin aluetta kuorma-siirtymä-käyrästä ei voida seurata, vaan iteraatio etsii arvon läpilyönnin jälkeisestä tilasta.

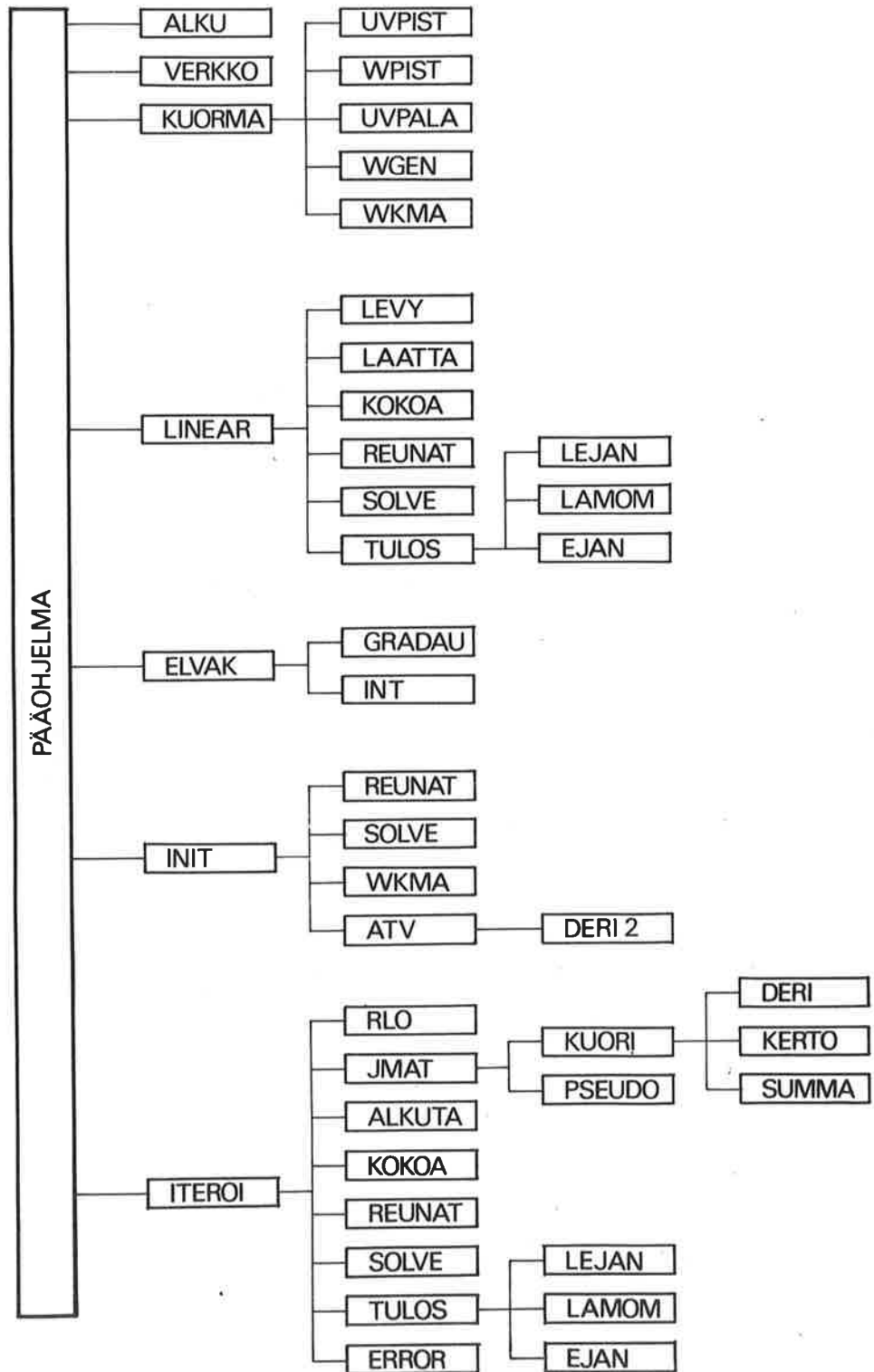
Kuvan 13 alkutaipuman muoto on valittu asettamalla laatalle tasainen kuorma ja ratkaisemalla lineaarisella laattaohjelmalla solmupistesiertymät. Elementtimenetelmän idean mukaisesti näiden siirtymäarvojen ja lineaarisen laattaelementin muotofunktioiden avulla interpoloidaan alkutaipumapinta.



Kuva 13. Alkuaan taipuneen laatan keskipisteen taipuma kuorman funktiona.  
 Fig. 13. Load-deflection curves for initially deflected plates.

## 5. TIETOKONEOHJELMA

Taipuisten laattojen ja laakeiden kuorten analysointiin laadittiin tietokoneohjelma FORTRAN IV kielellä. Ohjelma testattiin UNIVAC 1108 tietokoneella, jonka 64 ksanan keskusyksikköön ohjelma kokonaisuudessaan mahtuu. Ohjelma koostuu lukuisista aliohjelmista, joiden hierarkia käy ilmi kuvan 14 lohkokaaviosta. Ajon käyttöön ohjelma tarvitsee 11 työtiedostoa.



Kuva 14. Tietokoneohjelman lohkokaavio.  
 Fig. 14. Flow chart for the computer program.

## 5.1 Ohjelmien lyhyt kuvaus

### PAA

on pääohjelma, joka ohjaa muiden ohjelmien toimintaa.

### ALKU

lukee joitakin tehtävän alkuarvoja, esim. materiaaliominaisuudet, laatan koon ja muodon sekä reunaehdot.

### VERKKO

muodostaa symmetrisen tai epäsymmetrisen nelikulmaisen verkon tai lukee epäsäännöllisen verkon tiedot datakor-teilta.

### KUORMA

lukee kuormituksen lähtötiedot ja ohjaa kuormitusali-ohjelmien toimintaa.

### UVPIST

laskee kinemaattisesti ekvivalentin kuormavektorin termit  $x$ - ja  $y$ -suuntaisista pistekuormista.

### WPISTE

laskee kuormavektorin termit  $z$ -suuntaisista pistekuormista.

### UVPALA

muodostaa lineaarisesti jakautuneen  $x$ - ja/tai  $y$ -suuntaisen viivakuorman levyn reunoille sekä laskee tästä kuormavektorin termit.

WGEN

muodostaa parabolisesti jakautuneen z-suuntaisen kuorman.

WKMA

laskee WGEN:in generoiman tai elementeittäin annetun kuorman perusteella vastaavat kuormavektorin termit.

LINEAR

on ohjausohjelma, joka kokoaa tarvittavat tiedot epälineaarista ratkaisua varten. Geometrisesti lineaarisen levyn tai laatan tapauksessa ohjaa laskun kulkua loppuun asti.

LEVY

laskee lineaarisen levyelementin jäykkyyismatriisin.

LAATTA

laskee lineaarisen laattaelementin jäykkyyismatriisin.

KOKOA

kokoaa ko. tehtävään liittyvän rakenteen jäykkyyismatriisin.

REUNAT

sijoittaa reunaehdot rakenteen jäykkyyismatriisiin ja kuormavektoriin.

SOLVE

ratkaisee lineaarisen yhtälöryhmän Gaussin eliminaatiolla.

LEJAN

laskee siirtymistä lineaarisen levyn jännitykset.

LAMOM

laskee laatan momentit ja taivutusjännitykset.

EJAN

laskee taipumista aiheutuvat epälineaariset kalvojännitykset.

ELVAK

laskee KUORI-ohjelman tarvitsemia taulukoita, jotka pysyvät vakioina koko iteroinnin ajan.

GRDAU

suorittaa numeerisen integroinnin 5x5 tai 4x4 Gauss-Radau-pisteessä.

INT

integroi numeerisesti 7 pisteen kaavalla.

INIT

laskee alkutaipuman arvot kaikissa solmupisteissä.

ATV

laskee alkutaipumasta syntyvät vakiotaulukot KUORI ohjelmaa varten.

DERI

laskee siirtymien derivaattojen arvot integrointipisteissä.

## ITEROI

on ohjausohjelma, joka hoitaa iteroinnin kulun halutun iterointimenetelmän mukaan.

## RLO

muodostaa inkrementaalisen kuormavektorin.

## JMAT

lisää elementtien jäykkymatriiseihin epälineaarisuudesta aiheutuvat termit sekä kokoaa rakenteen sekantti-jäykkymatriisin.

## KUORI

laskee elementtien sekantti- ja tangenttijäykkymatriiseihin epälineaarisuudesta syntyvät lisätermit.

## PSEUDO

laskee sekanttijäykkyyttä vastaavan kuormituksen.

## KERTO

ohjelma matriisien kertolaskua varten.

## SUMMA

matriisien yhteenlaskua varten.

## ALKUTA

laskee laakean kuoren elementtien siirtymistä riippumattomat jäykkymatriisin osat.

## ERROR

laskee siirtymälisäyksistä testisuureen iteraation lopetuskriteeriä varten.

KIRJALLISUUTTA

- 1 von Kármán T., Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. 15 (1910) 4, s. 349.
- 2 Levy S., Bending of Rectangular Plates with Large Deflections. 1942. NACA Technical Note no. 846.
- 3 Turner J.L. & Dill E.H. & Martin H.C. & Melosh R.J., Large Deflection Analysis of Complex Structures Subjected to Heating and External Loads. J. Aero-Space Science 27 (1960), s. 97... 106.
- 4 Hildebrand F.B., Introduction to Numerical Analysis. McGraw-Hill, 1956.
- 5 Marguerre K., Die mitttragende Breite der gedrückten Platte. Luftfahrt-Forschung 14 (1937), s. 85.
- 6 Leigh D.C., Nonlinear Continuum Mechanics. New York, McGraw-Hill, 1968. 240 s.
- 7 Truesdell C. & Noll W., The Nonlinear Field Theories of Mechanics. Encyclopedia of Physics III/3. Berlin, Springer Verlag OHG, 1965.
- 8 Washizu K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Oxford, Pergamon Press, 1968. 349 s.
- 9 Gurtin M.E., The Linear Theory of Elasticity. Encyclopedia of Physics VI/2. Berlin, Springer Verlag, 1972.
- 10 Fung Y.C., Foundations of Solid Mechanics. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1965. 525 s.
- 11 Oden J.T., Finite Elements of Nonlinear Continua. McGraw-Hill, 1972. 407 s.
- 12 Bergan P.G., Nonlinear Analysis of Plates Considering Geometric and Material Effects. Trondheim 1972. The Norwegian Institute of Technology, Division of Structural Mechanics. Report no. 72-1.
- 13 Biot M.A., Mechanics of Incremental Deformations. John Wiley and Sons, 1965.
- 14 Holand I. & Bell K., Finite Element Methods in Stress Analysis. Tapir, The Technical Univ. of Norway, 1968.
- 15 Brebbia C. & Connor J., Geometrically Nonlinear Finite-Element Analysis. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 95 (1969) 2, s. 463...483.
- 16 Vos R.G., Generalization of Plate Finite Element to Shells. Journal of the Engineering Mechanics Division 98 (1972) 2, s. 385...400.
- 17 Stroud A.H. & Secrest D., Gaussian Quadrature Formulas. Prentice-Hall, 1966.



- 18 Murray D.W. & Wilson E.L., Finite-Element Large Deflection Analysis of Plates. Journal of the Engineering Mechanics Division 95 (1969) 1, s. 143...165.
- 19 Bazeley G.P. & Cheung Y.K. & Irons B.M. & Zienkiewicz O.C., Triangular Elements in Plate Bending-Conforming and Nonconforming Solutions. Matrix Methods in Structural Mechanics, Proceedings of the Conference held at Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 26-28 October 1965.
- 20 Yang H.T.Y., Flexible Plate Finite Element on Elastic Foundations. Journal of the Structural Division 96 (1970) 10, s. 2083...2101.
- 21 Felippa C.A., Refined Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Two-Dimensional Structures. Berkeley, Univ. of Calif., 1966.
- 22 Oliveira E.R., Theoretical Foundations of the Finite Element Method. International Journal of Solids and Structures 4 (1968), s. 929...952.
- 23 Yang T.Y., A Finite Element Procedure for Large Deflection Analysis of Plates with Initial Deflections. AIAA Journal 9 (1971) 8, s. 1468...1473.
- 24 Novozhilov V.V., Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity. 3. painos. Rochester, New York, Graylock Press, 1963. 233 s.
- 25 Hibbitt H.D. & Marcal P.V. & Rice J.R., A Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacement. International Journal of Solids and Structures 6 (1970), s. 1069...1086.
- 26 Coan J.M., Large-Deflection Theory for Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression. Journal of Applied Mechanics 18 (1951) 2, s. 143...151.
- 27 Berger H.M., A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates. Journal of Applied Mechanics 22 (1955), s. 465...472.
- 28 Balachandra M. & Gopalacharyulu S., Large Deflections of Clamped Plate by Modified Fourier Series. Journal of Applied Mechanics 32 (1965) 4, s. 843.
- 29 Soong T.C., A Procedure for Applying the Extended Kantorovich Method to Nonlinear Problems. Journal of Applied Mechanics 39 (1972) s. 927...934.
- 30 Martin H.C., On Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems. Proceedings of Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, USA. AFFOK-TR-66-80. (1965), s. 647...716.

- 31 Wissmann J.W., Nonlinear Structural Analysis; Tensor Formulation. Proc. of Conf. on Matr. Meth. in St. Mech., AFFDL-TR-66-80. (1965), s. 679...696.
- 32 Mallett R.H. & Marcal P.V., Finite Element Analysis of Nonlinear Structures. Journal of the Structural Division 94 (1968) 9, s. 2081...2105.
- 33 Tezcan S.S. & Mahapatra B.C. & Mathews C.I., Tangent Stiffness Matrices for Finite Elements. IABSE Publication. 30-I (1970), s. 217...246.
- 34 Rajasekaran S. & Murray D.W., Incremental Finite Element Matrices. Journal of the Structural Division 99 (1973) 12, s. 2423...2438.
- 35 Kawai T. & Yoshimura N., Analysis of Large Deflection of Plates by the Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering 1 (1969), s. 123...133.
- 36 Roberts T.M. & Ashwell D.G., The Use of Finite Element Mid-Increment Stiffness in the Post-Buckling Analysis of Imperfect Structures. Int. J. Solids Structures 7 (1971), s. 805...823.
- 37 Colville J. & Becker E.B. & Furlong R.W., Large Displacement Analysis of Thin Plates. Journal of the Structural Division 99 (1973) 3, s. 349...364.
- 38 Yang T.Y., Finite Displacement Plate Flexure by the Use of Matrix Incremental Approach. International Journal for Numerical Methods in Engineering 4 (1972), s. 415...432.
- 39 Jones R.F., Shell and Plate Analysis by Finite Elements. Journal of the Structural Division 99 (1973) 5, s. 889...902.
- 40 Bäcklund J., Finite Element Analysis of Nonlinear Structures. Göteborg, Chalmers Tekniska Högskola, 1973. 132 s.
- 41 Murray D.W. & Wilson E.L., An Approximate Nonlinear Analysis of Thin Plates. Proc. of Conf. on Matr. Meth. in St. Mech., AFFDL-TR-66-150. (1968), s. 1207...1230.
- 42 Harbord R., Berechnung von Schalen mit endlichen Verschiebungen-Gemischte finite Elemente-Braunschweig, TU Braunschweig, 1973. 141 s.

Suomen Akatemia on myöntänyt apurahaa tutkimustyöhön, johon oheinen artikkeli liittyy.

Markku Tuomala, dipl.ins., Helsingin teknillinen korkeakoulu, Otaniemi  
Heikki Kaira, tekn.yo, Helsingin teknillinen korkeakoulu, Otaniemi  
Martti Mikkola, professori, Helsingin teknillinen korkeakoulu, Otaniemi