

BETONIN VIRUMISEN JA KUTISTUMISEN ESITTÄMISEEN
SOVELTUVAT MALLIT

PAULI JUMPPANEN

Rakenteiden Mekaniikka
8 (1975)3-4, s. 165...187
Rakenteiden Mekaniikan
Seura, Helsinki

YHTEENVETO

Artikkelissa käsitellään Euroopan maissa betonirakenteiden suunnittelussa yleisimmin käytettyjä virumisen ja kutistumisen määrittämistapoja. Lisäksi tarkastellaan vastaavia CEB:n normisuosituksia ja Suomen normien ohjeita. Sovellutusesimerkkinä käsitellään teräsbetonipalkin taipuman määrittämistä.

1 JOHDANTO

Betonin virumisen kannalta tärkein aineosa on lähinnä hydradotuneista kalsiumsilikaateista muodostunut kiinteä sementtigeeli. Viruminen johtunee geelissä tapahtuvasta Ca-ionien diffuusiosta, joka yhdistyy geelihuokosissa olevan kemiallisesti sitoutumattoman veden diffuusiovuohon geelin adsorboivien kerrosten läpi. Betonikappaleiden pinnassa olevat kapillaarihuokokset puolestaan auttavat veden siirtymistä kappaleista ympäristöön tai päinvastoin.

Betonin kiviaines ei sanottavasti viru, joten sillä on lähinnä virumista pienentävä vaikutus. Tämä ei kuitenkaan päde esim. kevytsorabetonin tapauksessa. Sen runkoaineena oleva poltettu savi (kaoliniitit) muodostaa huokoisen vettä erittäin hyvin adsorboivan geelin, jossa diffuusio voi tapahtua. Kevytsorabetonin virumisen luonteeseen, keston ja suuruuteen runkoaineksella on huomattava vaikutus.

Edellisen perusteella voidaan todeta, että betonin viruminen riippuu ainakin ympäristön kosteudesta ja lämpötilasta, betonin koostumuksesta ja kovettumisasteesta sekä ko. betonikappaleen geometriasta. Tietenkin myös kuormituksen suuruudella ja kestolla on virumiseen olennainen vaikutus.

Betonin kovettumiseen liittyvä kutistuminen johtuu ensi sijassa ylimääräisen veden poistumisesta betonikappaleista. Siten ympäristön kosteus ja kappaleen geometria vaikuttavat ensisijaisesti kutistumiseen. Veden poistuminen vaikuttaa puolestaan virumisen edellytyksiin ja diffuusiovirumisen yhteydessä tapahtuva veden kulkeutuminen kutistumisen edellytyksiin. Täten nämä kaksi jossakin määrin affiinia ilmiötä kytkeytyvät läheisesti toisiinsa.

Virumisen ja kutistumisen aikariippuvuuden kuvaamiseksi on esitetty n. 1930-luvulta lähtien useita sekä mikroskooppisen että makroskooppisen (fenomenologisen) tason malleja. Tässä artikkelissa tarkastellaan sellaisia jälkimmäiseen ryhmään kuuluvia lineaarisia malleja, jotka soveltuvat käytettäviksi rakennesuunnittelun yhteydessä. Tällöin on mahdollista käyttää tavanomaista superpositioperiaatetta jännityksiä ja siirtymiä määrittäessä. Käsittely rajoitetaan tapauksiin, joissa lämpötila ja kosteus pysyvät vakioina.

Lisäksi tarkastellaan betonirakenteiden ja jännitettyjen betonirakenteiden normeissa esitettyjä virumisen ja kutistumisen määrittämistapoja sekä niiden yhteyksiä artikkelissa esitettyihin viskoelastisiin malleihin. Sovellutuksena käsitellään teräsbetonipalkin taipumien määrittämistä.

2. SUPERPOSITIOPERIAATE

Tarkastellaan lineaarisesta viskoelastisesta aineesta tehtyä vetosauvaa, johon vaikuttaa ajasta $t=0$ alkaen jatkuva jännitys (kuva 1a). Sauvan venymäksi ajanhetkellä t saadaan tunnetusti

$$\epsilon(t) = \int_0^t \phi(t-\tau, \tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (1)$$

τ on aikamuuttuja välillä $[0, t]$ merkiten samalla aineen ikää. Lauseke (1) sisältää ns. Boltzmannin superpositioperiaatteen, jonka mukaan kokonaismuodonmuutos saadaan laskemalla yhteen eri aikoina vallitsevien jännitysten aiheuttamat muodonmuutokset. Verrannollisuuskerroin ϕ on aineen monotoonisesti pienenevä muistifunktio, jonka arvot riippuvat myös aineen iästä (kuva 1b). (1):stä saadaan osittaisintegroimalla lauseke

$$\epsilon(t) = -D(0, t)\sigma(t) + D(t, 0)\sigma(0) + \int_0^t D(t-\tau, \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Tässä ϕ :n integraalifunktiota on merkitty D :llä, jolloin

$$\frac{d}{d\tau} D(t-\tau, \tau) = -\phi(t-\tau, \tau). \quad (3)$$

Fysikaalisesti D merkitsee aineen virumisfunktiota (kuva 1c). Symboli $(\dot{\quad})$ merkitsee derivoimista ajan suhteen.

Koska betoni on ensi kertaa kuormitettaessa useiden vuorokausien tai viikkojen ikäistä, on sopivaa esittää perusyhtälöt kuvan (2) aikakoordinaatistoa käyttäen. Siinä

- t = tarkasteluhetki,
- τ = betonin ikä ja samalla aikamuuttuja välillä $[0, t]$,
- τ_1 = betonin ikä kuormituksen alkaessa ja
- $t-\tau_1$ = kuormituksen ikä.

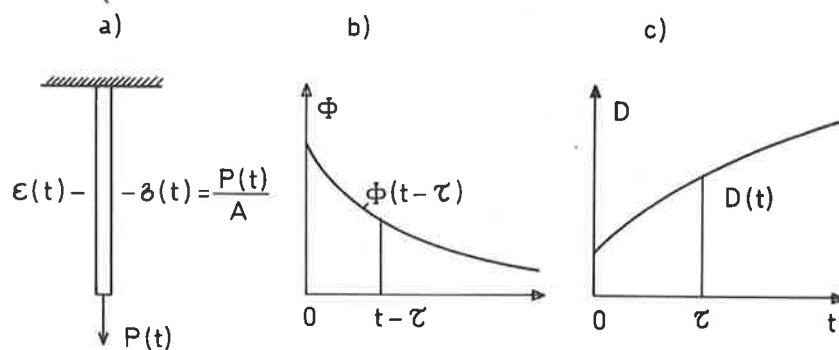
Yhtälö (2) voidaan kirjoittaa näin ollen muotoihin

$$\epsilon(t, \tau_1) = D(0, t) \sigma(t) - \int_{\tau_1}^t \frac{d}{d\tau} D(t-\tau, \tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (4)$$

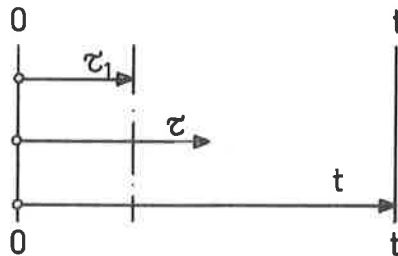
$$\epsilon(t, \tau_1) = D(t-\tau_1, \tau_1) \sigma(\tau_1) + \int_{\tau_1}^t D(t-\tau, \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (5)$$

(4):n muodostamisessa on käytetty riippuvuutta (3) hyväksi.

2- ja 3-dimensioisen tapauksen muodonmuutosten ja jännitysten väliset riippuvuudet voidaan ilmaista yhtälöitä (4) ja (5) vastaavilla tavoilla. Lausekkeet löytyvät esim. julkaisuista [2,13].



Kuva 1. a) vetosauva, b) muistifunktio, c) virumisfunktio.



Kuva 2. Aikakoordinaatisto.

3. LINEAARISIA VIRUMISMALLEJA

3.1 Iästä riippumaton virumismalli

Kun yhtälöön (4) tai (5) sijoitetaan lineaarinen virumisfunktio D , saadaan rakenteiden analysointiin sopiva 1-dimensioinen konstitutiivinen yhtälö. Todennäköisesti vanhin käytetty virumismalli (mm. Mc Millan [10] v. 1916) sisältää ajatuksen ajan mukana muuttuvasta kimmokertoimesta. Kun merkitään

$$D(t, \tau_1) = \frac{1}{E_0} [1 + \phi(t, \tau_1)], \quad (6)$$

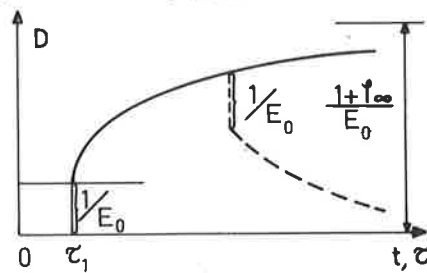
saadaan ajasta riippuva kimmokerroin

$$E(t) = \frac{1}{D(t, \tau_1)} = \frac{E_0}{1 + \phi(t, \tau_1)}. \quad (7)$$

E_0 on betonin kimmokerroin, tavallisesti $E(28 \text{ vrk})$. ϕ :n otaksutaan tavallisimmin muuttuvan eksponentiaalisesti.

$$\phi(t, \tau_1) = \phi_\infty [1 - e^{-\beta(t - \tau_1)}]. \quad (8)$$

Kuormituksen alkuhetki ei täten vaikuta virumisen edistymiseen eikä sen loppuarvoon, joka on ϕ_∞/E_0 . Malli sopiikin parhaiten vanhalle betonille. Termi ϕ_∞ tunnetaan mitoituskäytännössä nimeltä "hiipumaluku" (tai virumisluku). Se ilmoittaa kuinka moninkertainen virumisen loppuarvo on kimmoiseen alkumuodonmuutokseen verrattuna vakio-kuorman vaikuttaessa (kuva 3).



Kuva 3. Iästä riippumaton virumismalli, viruminen ja palautuminen

Mikäli muodonmuutoksen otaksutaan palautuvan kuormituksen poistamisen jälkeen samaa eksponentiaalista lakia (8) noudattaen, kysymyksessä on ns. lineaarisen standardiaineen virumisfunktio. Vastava σ :n ja ϵ :n välinen differentiaaliyhtälö saadaan esim. (4):stä derivoimalla

$$\dot{\sigma} + (1 + \phi_{\infty})\beta\sigma = E_0 \dot{\epsilon} + E_0\beta\epsilon. \quad (9)$$

3.2 Dischingerin virumismalli

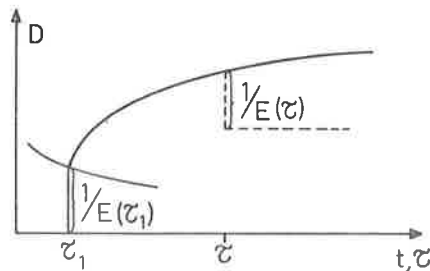
Dischingerin [5] v. 1939 esittämä virumisfunktio kuuluu

$$D(t, \tau_1) = \frac{1}{E(\tau_1)} [1 + \phi(t) - \phi(\tau_1)],$$

$$\phi(t) = \phi_{\infty}(1 - e^{-\beta t}), \quad (10)$$

$$\phi(\tau_1) = \phi_{\infty}(1 - e^{-\beta \tau_1}).$$

Malli ottaa siten huomioon betonin kovettumisasteen kuormitettaessa ja johtaa kuormituksen alkamishetkestä riippuen erilaiseen viruman loppuarvoon (kuva 4). Kun kuormitus poistetaan, venymän elastinen osuus palautuu, mutta virumisosuus jää kokonaisuudessaan palautumatta. Dischingerin mallia käytettäessä alkukimmokerroin $E(\tau_1)$ korvataan usein betonin vakiokimmokertoimella E_0 (ks. (6)). Tällöin mallin virumisosuus on sama kuin kappaleessa 3.1 esitetyllä mallilla.



Kuva 4. Dischingerin virumismalli.

Yhtälöstä (4) saadaan ratkaistuksi virumisfunktiota (10) vastaava differentiaaliyhtälö

$$\dot{\sigma} + \dot{\phi}\sigma = E(\tau_1)\dot{\epsilon}. \quad (11)$$

(11) voidaan tulkita ns. Maxwellin aineen differentiaaliyhtälöksi, kun aineen viskoosisuus kasvaa ajan mukana äärettömyyteen. Tämän meillä Dischingerin nimeä kantavan mallin perusyhtälöt on Glanville [8] esittänyt jo v. 1930.

3.3 Arutyunyanin virumismalli

Varsin täydellisen lineaarisen virumismallin on esittänyt Arutyunyan [1,2,13] v. 1947. Hänen virumisfunktionsa on muotoa

$$D(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau), \quad (12)$$

$$C(t, \tau) = \phi(\tau) [1 - e^{-\gamma t}].$$

C sisältää siten ns. Kelvin-Voigtin aineen virumisfunktion. Yhtälöstä (4) saadaan vastaava (ϵ, σ) -riippuvuus,

$$\epsilon(t, \tau_1) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t-\tau, \tau) \right] \sigma(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Virumisfunktion (12) moduuleille Arutyunyan on ehdottanut lausekkeitä

$$\phi(\tau) = C_0 + \frac{A}{\tau}, \quad (14)$$

$$E(\tau) = E_\infty (1 - E' e^{-\alpha \tau}).$$

C_0 , A , E_∞ ja E' ovat ainevakioita.

Mikäli E :tä pidetään ajasta riippumattomana vakiona, (13):n paikalle voidaan kirjoittaa muuttuvakertoiminen 1.-kertaluvun differentiaaliyhtälö, joka ratkeaa analyttisesti. Muutoin malli tai sitä käytettäessä syntyvät yhtälöt on ratkaistava numeerisesti.

Arutyunyanin mallin virumisfunktio ottaa huomioon sekä kuormituksen alkuhetken vaikutuksen että kuormituksen aikana tapahtuvan tosin vähäisemmän betonin kovettumisen (tai vanhenemisen) vaikutuksen virumistulokseen (kuva 5). Mallia on arvosteltu siksi, että se on liian monimutkainen ja että virumisfunktion (12) yksi eksponenttifunktio ei kuvaa riittävän hyvin pitkäaikaisvirumista [3]. Arutyunyan onkin esittänyt mallinsa yleisemmässä muodossa, jossa $C(t, \tau)$ funktio on eksponenttifunktioiden sarja

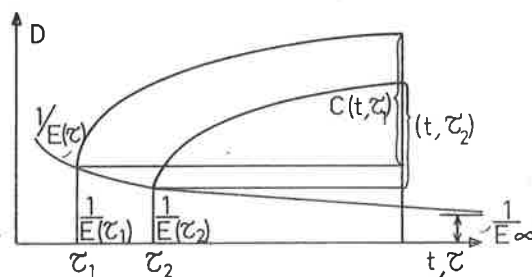
$$C(t, \tau) = \phi(\tau) \sum_{k=0}^m B_k e^{-\gamma_k t} \quad (15)$$

Toinen mahdollisuus on korvata C :n lausekkeet toisen tyyppisillä funktioilla. Esim. Bažant on suosittanut käytettäväksi virumisfunktia

$$C(t, \tau) = a + \frac{b}{\tau} \frac{t}{c+t} \quad (16)$$

Tässä a , b ja c ovat ainevakioita. Funktion $t/(c+t)$ käyttö betonin virumisen kuvaamiseen on tuttu jo vuosikymmenien takaa.

Arutyunyanin mallin moduuleille on määritetty laajoihin koearjoihin perustuen myös lämpötilariippuvuuksia käyrästöjen, taulukoiden tai yksinkertaisten funktioiden muodossa.



Kuva 5. Arutyunyanin mallin virumisfunktion muodostuminen.

3.4 Parannettu Dischingerin malli

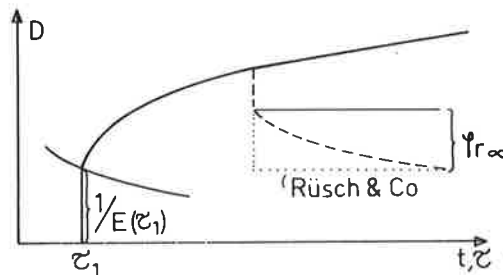
Tämän yleisesti "rate of flow" mallin nimellä tunnettavan virumisfunktion esitti ensimmäisenä Prokopovich [12] v. 1963. Siinä oli sama palautumaton virtausosa kuin Dischingerin mallissa ja ajan mukana palautuva kimmainen osa. Täydellisemmässä muodossa mallia ovat käsitelleet mm. England ja Illston [6] sekä Illston ja Jordaan [9]. Virumisfunktio esitetään muodossa (vrt. (6), (10))

$$D(t, \tau_1) = \frac{1}{E(\tau_1)} [1 + \phi(t, \tau_1)]. \quad (17)$$

Elastisen venymän ja viruman suhdetta kuvaava funktio jaetaan palautumattomaan ja palautuvaan osaan

$$\begin{aligned} \phi(t, \tau_1) &= \phi_i(t, \tau_1) + \phi_r(t, \tau_1), \\ \phi_i(t, \tau_1) &= \phi_{i\infty} e^{-\beta_i \tau_1} \left[1 - e^{-\beta(t-\tau_1)} \right], \\ \phi_r(t, \tau_1) &= \phi_{r\infty} \left[1 - e^{-\beta_r \phi_i(t, \tau_1)} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Palautumaton osa ϕ_i on siten sama kuin Dischingerin mallissa (10), ja palautuva osa ϕ_r riippuu ϕ_i :stä. ϕ_r :n loppuarvo on betonin kuormituksesta ja vanhenemisesta riippumaton, mutta sen muodostumisnopeus on sitä suurempi mitä nuorempaa betoni on. Virumisfunktio on esitetty kuvassa 6.



Kuva 6. Parannettu Dischingerin ("rate of flow") malli.

Mallin yksinkertaistamiseksi useat tutkijat ovat ehdottaneet, että ϕ_r korvattaisiin ainakin pitkäaikaisilmiöitä tarkasteltaessa vakiotermeillä. Nielsenin [11] mukaan sopiva ϕ_r :n arvo on 1/3 ja Rüschin ja Jungwirthin [14] mukaan (kuva 6)

$$\phi_r = \phi_{r\infty} = 0.4, \text{ kun } t - \tau_1 > 90 \text{ vrk.} \quad (20)$$

3.5 CEB:n suositus

CEB/FIB:n suosittama tapa betonin virumisarvojen määrittämiseksi perustuu lähinnä kappaleessa 3.4 esitettyyn parannettuun Dischingerin malliin [21]. Virumisfunktio esitetään muodossa (alkup. esityksessä $D=c$)

$$D(t, \tau_1) = \frac{1}{E_c(\tau_1)} + \frac{1}{E_c(28 \text{ vrk})} \phi(t, \tau_1). \quad (21)$$

Betonin vastaava muodonmuutos saadaan sijoittamalla tämä yhtälöön (4) tai (5). Virumiskerroin $\phi(t, \tau_1)$ on annettu muodossa (alkup. esityksessä $k=\beta$)

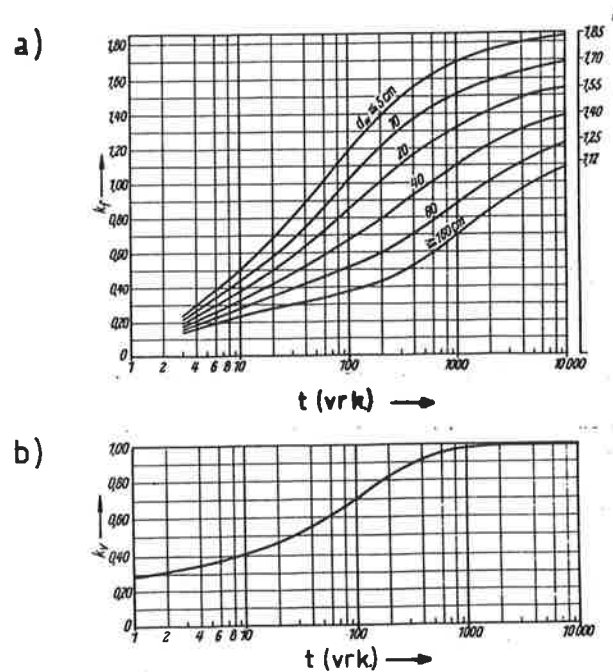
$$\phi(t, \tau_1) = \phi_{f0} [k_f(t) - k_f(\tau_1)] + 0.4 k_d(t - \tau_1). \quad (22)$$

ϕ_{f0} on perusvirumisluku, jonka arvo vaihtelee 0,8-3,0 ympäristön suhteellisesta kosteudesta riippuen. Termi k_f kuvaa virumisen edistymistä ajan mukana ja on annettu käyrinä rakenteen efektiivisen paksuuden,

$$h_{th} = \lambda \frac{A_c}{u}, \quad (23)$$

eri arvoille (kuva 7a). Tässä λ on ilman kosteudesta riippuva kerroin (60-2) A_c betonikappaleen poikkipinta-ala ja u kuivumiselle alttiina olevan poikkileikkauksen rajapinnan pituus (kotelokannattajien tapauksessa otetaan huomioon puolet sisemmästä ympärysmittasta).

Termi k_d on palautuvan virumisosan kerroin ja sen arvot vaihtelevat ajan mukana kuvassa 7b esitetyn käyrän mukaisesti. Kun $t - \tau_1 \geq 3$ kk, k_d voidaan valita ykkösen suuruiseksi kuten myös yhtälössä (20) on esitetty.



Kuva 7. CEB:n suosituksen [21] mukaiset käyrät palautumattomalle (k_f) ja palautuvalle (k_v) virumalle ($h_{th} = d_w$).

3.6 Suomen normeissa esitetyt virumisen määrittämistavat

Suomessa betonin virumisen määrittämistapaan on otettu viimeksi kantaa jännitettyjen betonirakenteiden normeissa [23] 1970/73, betoninormeissa [22] 1967/75 sekä betoni- ja teräsbetonirakenteita koskevissa rajatilamitoitusohjeissa [24] 1975. Johtavana tähtenä näyttää olleen ns. "virumislukumenettelyn" (tai "hiipumalukumenettelyn") säilyttäminen ottaen kuitenkin huomioon CEB:n suositukset. Virumislukumenettelyhän perustuu kappaleessa 3.1 esitettyyn ns. muuttuvan tai redusoidun kimmokertoimen käyttöön ja on vanhin betonirakenteihin sovellettu virumisarvojen määrittämistapa.

Rajatilamitoitusohjeiden [24] mukaan virumisen loppuarvo määritetään kaavasta

$$\epsilon_{cc} = k_t \phi \epsilon_c \quad (24)$$

Kokonaisvenymäksi saadaan siten (vrt. (6))

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_{cc} = (1 + k_t \phi) \frac{\sigma_c}{E_c} \quad (25)$$

(24):ssä

$$k_t = 2.5 - 1.5 K_j / K_n.$$

K_n on betonin nimellislujuus ja K_j lujuus kuormitushetkellä. k_t ottaa siten huomioon kuormitushetken vaikutuksen. Virumisluku määritellään

$$\phi = k_{ch} \phi_1.$$

ϕ_1 on perusvirumisluku vaihdellen 1-3 ympäristön kosteudesta riippuen ja k_{ch} kappaleen muunnetusta paksuudesta riippuva kerroin vaihdellen 0,7-1,2.

Saman esityksen sisältävät myös vuodelta 1967 periytyvät betoninormit [22]. Niissä k_t (=k) on annettu käyrän muodossa ja ϕ :n muuttuminen rakenteen paksuuden myötä sanallisin ohjein.

Tarkempia ohjeita virumisen määrittämiseksi sisältyy jännitettyjen betonirakenteiden normeihin [23]. Virumisen aiheuttama venymä lasketaan kaavasta (24) ja kokonaismuodonmuutos kaavasta (25). Virumisluku määritetään lausekkeena

$$\phi = k_{ch} k_{cw} \phi_1, \quad (28)$$

jossa ϕ_1 :n ja k_{ch} :n lisäksi on betonin sementtimäärästä ja vesisementtisuhteesta riippuva kerroin $k_{cw} \cdot k_{ch}$ ja k_{cw} on annettu käyrinä ja ϕ_1 vaihtelee kuten edellä 1-3.

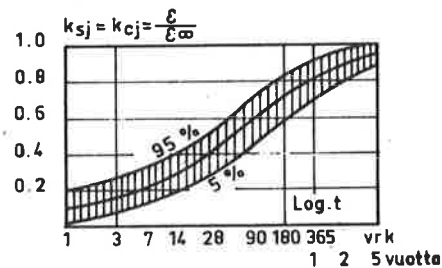
Virumisen edistymistä ajan funktiona kuvaa käyrä k_{cj} (kuva 8), joka voidaan määrittellä

$$k_{cj} = \frac{\epsilon_{cc}(t_j - \tau_1)}{\epsilon_{\infty}} \quad (29)$$

Tässä t_j on tarkasteluhetki ja τ_1 kuormituksen alkamishetki. Jos hetkellä t_j tapahtuu kappaleen jännitystilassa muutos, jota vastaa kimmoinen venymä $\Delta\epsilon_e$, tästä aiheutuva viruma on ajanhetkellä t_n (24):n mukaan

$$\Delta\epsilon_{cc} = \Delta\epsilon_e k_t \phi(k_{cn} - k_{cj}) \quad (30)$$

Suureet k_{cn} ja k_{cj} poimitaan ajanhetkien t_n ja t_j kohdalta kuvan 8 käyrältä. Normien [23] vastaavasta kaavasta (30) puuttuu kerroin k_t . Tämä voi aiheuttaa huomattavan virheen nuorena kuormitettujen betonirakenteiden (esim. jännebetonipalkkien) jännityksiin ja venymiin.



Kuva 8. Suomen normien [23] mukainen kutistumisen (k_{sj}) ja virumisen (k_{cj}) edistymisfunktio.

3.7 Virumismallien vertailu

Kappaleissa 3.1 - 3.4 on esitetty neljä viime vuosikymmeninä yleisimmin käytettyä betonin virumisarvojen määrittämistapaa. Lisäksi on ollut käytössä useita näistä neljästä johdettuja malleja, mutta myös aivan eri pohjalle rakentuvia lineaarisia ja epälineaarisia

virumisfunktioita. Itä-Euroopan maissa mitoituskäytäntö perustuu yleensä Arutyunyanin malliin. Varsinkin Keski-Euroopan maat ovat seuranneet yksityiskohtaisesti CEB:n suositusta (tai päinvastoin). Tämähän perustuu lähinnä kappaleessa 3.4 esitettyyn parannettuun Dischingerin malliin.

Muodollisesti Arutyunyanin virumismalli on edellä esitetystä täydellisempi. Sen huonoja puolia ovat C:n sisältämän virumisfunktion sopimattomuus pitkäaikaisilmiön kuvaamiseen ja probleemojen ratkaisuvaikkeudet ko. mallia käytettäessä. Edellinen heikkous voidaan poistaa käyttämällä sopivampaa virumisfunktiota ja jälkimmäinen esittämällä tavallisimpien tapausten (teräsbetonipilarit ja -palkit, esijännitetyt palkit) valmiit ratkaisut esim. taulukkomuodossa (ks. [2]). Monimutkaisemmissa probleemoissa, joissa muutoinkin joudutaan numeeriseen ratkaisuun, Arutyunyanin mallia on sovellettu kautta maailman.

Parannettu Dischingerin ("rate of flow") malli antaa varsin hyvin koetulosten kanssa sopusoinnussa olevia virumisarvoja. Senkin soveltaminen esitettyssä muodossaan (18) on käytännön mitoitusyössä melko työlästä. Jos taas palautuva osa ϕ_r otaksutaan vakioksi, joudutaan muodollisesti Dischingerin "rate of creep" malliin ja esim. yhtälö (11) on tällöin voimassa. Mitoituksessa voidaan tällöin käyttää ns. virumislukumenettelyä, kuten esim. CEB:n suosituksessa on ehdotettu.

CEB:n suosittaman mallin huono puoli on se, että virumisfunktiot annetaan vain graafisessa muodossa. Sen soveltaminen yksinkertaisten palkki- ja laattarakenteiden ulkopuolella ja monimutkaisten kuormitusten tapauksessa on vaikeasti tulkittavissa. Esim. Constantinescu ja Illston [4] ovat esittäneet CEB:n virumiskäyriä approksimoivat ilmaisen sopivat analyttiset lausekkeet.

Lisäksi CEB:n mallin virumisfunktio (22) (samoin kuin Dischingerin mallit ja Suomen normien yhtälö (30)) sisältää seuraavan ilmaisen virheen, jonka Zerna ja Trost [19] sekä Schade [15] ovat osoittaneet. Kun kuormitus alkaa hetkellä τ_1 ja tarkastellaan sen vaikutusta ajanhetkellä t , superpositioperiaatteen (1) mukaan verrannollisuuskerroin on muotoa $k(t-\tau_1)$ eikä $k(t)-k(\tau_1)$. Jälkimmäisessä tapauksessa superpositioperiaate ei ole voimassa eikä jännitysten muodonmuutosten yhteenlaskeminen eri aikana alkavista kuormista anna oikeata tulosta.

Kuten jo aikaisemmin todettiin, Suomen normeissa on pyritty säilyttämään mahdollisimman pitkälle perinteellinen virumisluku- ("hiipumaluku,") menettely. Tällöin käytetään yhtä virumisfunktioita (29) ja eri tekijöiden vaikutus otetaan huomioon virumisluvun (28) ja kertoimen k_t välityksellä. Tämä menettely ehkä yksinkertaistaa mitoitus- ta, mutta johtaa epäfysikaaliseen malliin, jolla ei ole vastineenaan mitään viskoelastisuusteoriassa tunnettua ainetta. Esim. viimeiset CEB:n suositukset [20,21] (aikaisempia kirjoittaja ei tunne) perustuvat parannettuun Dischingerin malliin. Tällöin mm. betonin ominaisuudet kuormitushetkellä (ks. (21)) otetaan huomioon kimmokertoimen eikä nimellis- (tai suunnittelu-) ja kuutiolujuuden (ks. (26)) avulla.

4. KUTISTUMISEN HUOMIOONOTTAMINEN

Johdannossa todettiin kutistumisen riippuvan ensisijaisesti ympäristöolosuhteista ja kappaleen geometriasta, mutta myös betonikappaleen fysikaalisesta tilasta. Jos kutistumista pidetään likimain kappaleen jännitystilasta riippumattomana, se voidaan ottaa huomioon kuten lämpötilanmuutos erillisenä terminä $\epsilon_{cs}(t)$. Tällöin (4)

$$\epsilon(t, \tau_1) = \epsilon_{cs}(t) + D(0, t) \sigma(t) - \int_{\tau_1}^t \frac{d}{d\tau} D(t-\tau, \tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (31)$$

Sama termi $\epsilon_{cs}(t)$ voidaan liittää muihinkin edellä oleviin venymän lausekkeisiin. Kutistuminen noudattaa monien tutkimusten [7,2] mukaan eksponentiaalista lakia,

$$\epsilon_{cs}(t) = \epsilon_{so}(1 - e^{-st}) \quad (32)$$

kasvaen siis monotoonisesti iän mukana loppuarvoa ϵ_{so} kohden. Yleisessä tapauksessa kutistuminen on myös paikan funktio,

$$\epsilon_{cs}(x, y, z, t) = \epsilon_{so}(x, y, z)(1 - e^{-st}).$$

Jos staattisesti määrätyn kappaleen kutistuminen tapahtuu kauttaaltaan tasaisesti, se ei aiheuta mitään rasituksia. Sen sijaan staattisesti määräämättömään rakenteeseen tasainenkin kutistuminen kenteet saavat aina kutistumisrasituksia, koska teräs ei kutistu. Epätasainen kutistuminen aiheuttaa tietenkin rasituksia kaiken tyyppisissä kappaleissa. Kutistumisen synnyttämät jännitykset aiheuttavat edelleen betonin virumista.

Kutistumisen alkuaikakohdaksi laskelmissa on valittava se hetki (τ_0), josta lähtien kutistuminen aiheuttaa laskelmissa ja mitoituksessa huomioon otettavia jännityksiä. Tällöin (32):n mukaan

$$\epsilon_{cs}(t, \tau_0) = \epsilon_{so}(e^{-s\tau_0} - e^{-st}). \quad (33)$$

Erikoistapauksissa τ_0 voi olla sama kuin kuormituksen alkamishetki. Arutyunyanin [2] mukaan pienempää τ_0 :n arvoa kuin yksi vrk. ei tarvitse käyttää.

CEB:n suosituksissa [21] annetaan kutistuman laskemiseksi kaava (alkup. tekstissa $k = \beta$)

$$\epsilon_{cs}(t, \tau_0) = \epsilon_{so}[k_s(t) - k_s(\tau_0)], \quad (34)$$

joka vastaa lauseketta (33). ϵ_{s0} on kutistuman perusarvo vaihdellen $+10 \cdot 10^{-5}$ (vedessä) - $-40 \cdot 10^{-5}$. k_s kuvaa kutistumisen edistymistä ajan funktiona ja se on annettu käyriä rakenteen tehokkaan paksuuden (23) eri arvoille (kuva 9). k_s on luonteeltaan sama funktio kuin k_f (kuva 7a).

Suomen normeissa [23] kutistuman suuruus määritetään yhtälöstä

$$\epsilon_{cs} = \epsilon_1 k_{sh} k_{sw} (1-10\rho), \quad (35)$$

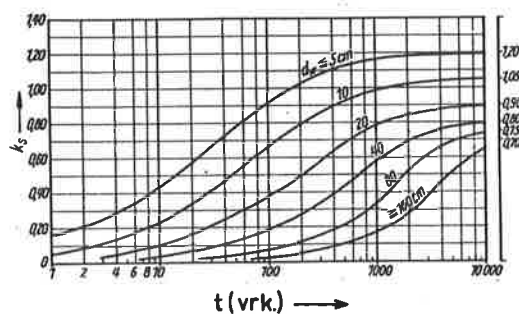
tai [24]

$$\epsilon_{cs} = k_{sh} \epsilon_1. \quad (36)$$

ϵ_1 on kutistuman perusarvo vaihdellen 0 (vedessä) - $-0,45 \cdot 10^{-5}$. k_{sh} on rakenteen redusoidusta paksuudesta riippuva kerroin ja k_{sw} riippuu sementin määrästä ja vesisementtisuhteesta. Aikavälillä t_j, t_n tapahtuva kutistuminen määritetään kaavasta

$$\Delta\epsilon_{cs} = (k_{sn} - k_{sj}) \epsilon_{cs}. \quad (37)$$

Kutistumisen edistymisfunktio k_s on täsmälleen sama kuin virumisen edistymisfunktio k_c (29)(kuva 8). Kirjoittajan mielestä kaava (35) ja koko kutistumisen määrittämistapa on perusteiltaan siinä määrin epämääräinen, että kertoimen k_{sw} voisi hyvin jättää pois. Muitakin yhtä paljon vaikuttavia tekijöitä on jätetty huomiotta.



Kuva 9. CEB:n suosituksen [21] mukaiset käyrät kutistumisen määrittämiseksi ($h_{th} = d_w$).

5. TAIVUTETUN TERÄSBETONIPALKIN RATKAISEMINEN

5.1 Taipuman differentiaaliyhtälö

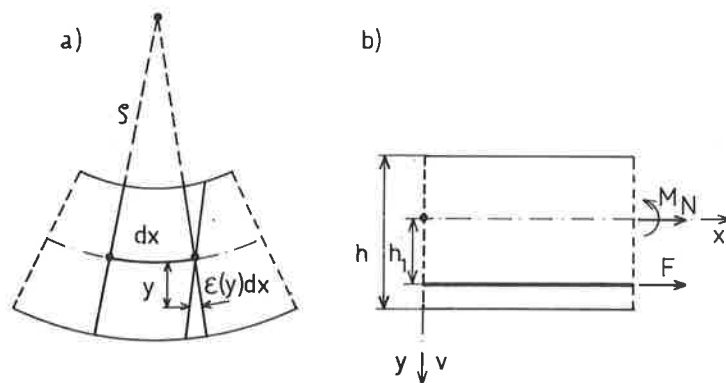
Palkin taipumaviivan differentiaaliyhtälö saadaan Bernoulli'n otaksunan voimassa ollessa käyristymän ja aksiaalisen venymän välisestä riippuvuudesta (kuva 10a),

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \approx v''(x,t) = - \frac{\epsilon(x,y,t)}{y} \quad (38)$$

Poikkileikkauksen (kuva 10b) jännitysten määrittämiseksi kirjoitetaan tasapainoehdot

$$M = \int_{A_{1c}} \sigma_c y dA + F h_1 = M_c + F h_1, \quad (39a)$$

$$N = \int_{A_{1c}} \sigma_c dA + F = N_c + F \quad (39b)$$



Kuva 10. Taivutettu teräsbetonipalkki, a) käyristymä, b) jännitysresultantit.

Näissä A_{1c} on palkin toimiva betonipoikkipinta (taipumia laskettaessa teräksiin saakka) sekä M_c ja N_c betonipoikkileikkauksen ottamat osat momentista ja normaalivoimasta. Betonin ja teräksen jännitykset ovat tunnetusti

$$\sigma_c(y,t) = \frac{M_c(t) y}{I} + \frac{N_c(t)}{A_{1c}}, \quad (40a)$$

$$\sigma_s(t) = \frac{F(t)}{A_s}. \quad (40b)$$

Kun tasapainoehtoista (39) eliminoidaan M_c ja N_c , saadaan betonin jännitykselle lauseke

$$\sigma_c(y,t) = \frac{y}{I} [M(t) - F(t) h_1] + \frac{1}{A_{1c}} [N(t) - F(t)]. \quad (41)$$

Poikkileikkauksen venymä on yhtälön (4) mukaan

$$\epsilon_c(y,t,\tau_1) = D(0,t) \sigma_c(y,t) - \int_{\tau_1}^t \frac{d}{d\tau} D(t-\tau,\tau) \sigma_c(y,\tau) d\tau. \quad (42)$$

Tähän on sijoitettava kulloinkin käytettävän virumisfunktion D lauseke. Yhtälö (42) sisältää tuntemattoman voiman F , joka voidaan ratkaista yhteensopivuusehdosta,

$$\epsilon_c(h_1,t) = \epsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t)}{E_s}, \quad (43)$$

terästen painopisteen korkeudella. (43):ssa terästen venymä ϵ_s on otettu kimmoiseksi. Mikäli käytetään iästä riippumatonta virumismallia (6) tai Dischingerin mallia (10), probleema ratkeaa yleensä analyyttisesti esim. Laplace-muunnosta käyttäen. Malleja (12) ja (17) käytettäessä analyyttinen ratkaisu onnistuu helposti vain erikoistapauksissa.

Kun yhtälöön (38) sijoitetaan betonipoikkileikkauksen venymän lauseke (42), saadaan palkin taipumaviivan määrittämiseksi yhdistetty differentiaali-integraaliyhtälö

$$-\sigma''(x,t) = \frac{1}{y} D(0,t) \sigma_c(x,y,t) - \frac{1}{y} \int_{\tau_1}^t \frac{d}{d\tau} D(t-\tau,\tau) \sigma_c(x,y,\tau) d\tau. \quad (44)$$

y :lle voidaan valita laskelmissa jokin kiinteä arvo, esim. ylä- tai alareunan etäisyys painopisteakselista.

5.2 Trostin ratkaisumenetelmä

Koska yhtälö (44) joudutaan yleensä ratkaisemaan numeerisesti, sen käyttö muutoin yksinkertaisissa teräsbetonipalkkien analysointi-tehtävissä on hankalaa. Tämän vuoksi Trost [16,17,18] on esittänyt erinomaisen likimääräismenetelmän, joka yksinkertaistaa huomatta-vasti ratkaisumenettelyä. Hän lähtee liikkeelle yhtälön (4) sijasta lausekkeesta (5) ja esittää virumisfunktion muodossa

$$\sigma(t, \tau_1) = \frac{1}{E_c} [1 + \phi(t, \tau)] , \quad (45)$$

$$\phi(t, \tau) = \phi k(\tau) f(t).$$

E_c :ksi voidaan valita probleeman luonteesta riippuen esim. alkukim-mokerroin $E(\tau_1)$ tai 28 vrk:n kimmokerroin. ϕ on (45) "virumisluku" ja $f(t)$:ksi Trost suosittaa funktiota

$$f(t) = \sum_{i=1}^4 A_i (1 - e^{-t/\tau_i}). \quad (46)$$

Tavallisesti tästä käytetään vain yhtä tai kahta termiä. $k(\tau)$ voi-daan esittää eksponenttifunktiona

$$k(\tau) = a + be^{-\tau/\tau_N},$$

Jos sen sijasta käytetään Arutyunyanin esittämää hyperboolista riippuvuutta (14), Trostin malli (45) on Arutyunyanin mallin (12) erikoistapaus.

Virumisfunktiota (45) käytettäessä venymän lauseke (5) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\epsilon(t, \tau_1) = \frac{1}{E_c} [1 + \phi(t - \tau_1, \tau_1)] + \frac{1}{E_c} \int_{\tau_1}^t [1 + \phi(t - \tau, \tau)] \dot{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (47)$$

Trost ehdottaa (48):n sisältämän integraalilausekkeen korvaamista estimaatilla

$$[\sigma(t) - \sigma(\tau_1)] [1 + \rho \phi(t - \tau_1, \tau_1)] \quad (48)$$

jossa ns. "relaksaatiokertoimen" ρ arvot vaihtelevat välillä $(\frac{1}{2}, 1)$. Esim. likimain tasaisena pysyvän kuormituksen tapauksessa ρ :lle saadaan sopiva likiarvo kaavasta

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{4k(\tau_1)} \quad (49)$$

Suomen normeissa $k(\tau_1) = k_t$.

Lauseketta (48) käyttäen diffenetiaaliyhtälö (38) saadaan muotoon

$$-v''(x, t) = [1 + \phi(t - \tau_1, \tau_1)] \frac{\sigma_c(x, y, \tau_1)}{E_c y} + [1 + \rho \phi(t - \tau_1, \tau_1)] \frac{\sigma_c(x, y, t) - \sigma_c(x, y, \tau_1)}{E_c y} \quad (50)$$

y:ksi voidaan valita jokin reunaetäisyys, jolloin σ_c on vastaava reunajännitys. Jos kutistumisen vaikutus halutaan ottaa huomioon, se voidaan tehdä lisäämällä ϵ :n lausekkeihin (42) tai (47) termi $\epsilon_{cs}(t)$.

Yhtälöä (50) käytettäessä palkin taipumien laskeminen poikkeaa kimmoisten palkkien yhteydessä käytetyistä menetelmistä vain siten, että mukana ovat eräänlaiset redusointikertoimet $\phi(t - \tau_1, \tau_1)$ ja ρ . (45):n mukaan kerroin

$$\phi(t - \tau_1, \tau_1) = \phi k(\tau_1) f(t - \tau_1)$$

riippuu kuormituksen alkamishetkestä ja kestosta. Jos ϕ tulkitaan virumisluvuksi ("hiipumaluvuksi"), taipumia laskettaessa voidaan käyttää esim. CEB:n suosituksen tai Suomen normien mukaista virumisen määrittämistapaa. Trostin mallia voidaan siten pitää iästä riippumattoman virumismallin yleistykseenä. Toisaalta se on jo aiemmin todettu Arutyunyanin virumismallin erikoistapaukseksi.

KIRJALLISUUTTA

- 1 Arutyunyan, N.Kh., Dokl. Akad. Nauk Arm. S.S.S.R. 7, No. 5, 1947.
- 2 Arutyunyan, N.Kh., Some problems in the theory of creep. Pergamon, 1966 (venäjänk. alkuteos 1957).
- 3 Bažant, P.Z., Najjar, J.L., Comparison of approximate linear methods for concrete creep. J. of the Structr. Div., Sept. 1973.
- 4 Constantinescu, D.R., Illston, J.M., Direct methods of analysing the structural effects of linear creep of ageing concrete. Materiaux et constructions, No. 42, 1974.
- 5 Dischinger, F., Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken. Bauingenieur, No:t 5, 6, 1939.
- 6 England, G.L., Illston, J.M., Methods of computing stress in concrete from a history of measured strain. Civ. Eng. & Publ. Works Rev., April, June 1965.
- 7 Freudenthal, A.M., Roll, F., Creep and creep recovery of concrete under high compressive stress. ACI-Journal, No. 12, 1958.
- 8 Glanville, W.H., The creep or flow of concrete under load. Building Research Techn. Paper, No. 12, 1930.
- 9 Illston, J.M., Jordaan, I.J., Creep prediction for concrete under multiaxial stress. ACI-Journal, March 1972.
- 10 Mc Millan, F.R., Discussion of method of designing reinforced concrete slabs. Trans. of ASCE, 1916.
- 11 Nielsen, L.F., Kriechen und Relaxation des Betons. Beton und Stahlbetonbau, 1970.
- 12 Prokopovich, I.E., Effect of long-term processes upon stress and strain states of structures (venäjäksi). Gosstroyizdat, Moscow 1963.
- 13 Rabotnov, Yu.N., Creep problems in structural members. NHPC, 1969 (venäjänk. alkuteos 1966).
- 14 Rüsç, H., Jungwirth, D., Hilsdorf, H., Kritische Sichtung der Verfahren zur Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen. Beton und Stahlbetonbau, No:t 3, 4, 6, 1973.
- 15 Schade, D., Einige eindimensionale Ansätze zur Berechnung des Kriechens und der Relaxation von Betontragwerken. Beton und Stahlbetonbau, No. 3, 1972.
- 16 Trost, H., Spannungs-Dehnungs-Gesetz eines viskoelastischen Festkörpers wie Beton und Folgerungen. Beton, No. 6, 1966.

- 17 Trost, H., Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton. Beton und Stahlbetonbau, No. 10, 1967.
- 18 Trost, H., Mainz, B., Zweckmässige Ermittlung der Durchbiegungen von Stahlbetontragwerken. Beton und Stahlbetonbau, No. 6, 1969.
- 19 Zerna, W., Trost, H., Rheologische Beschreibungen des Werkstoffes Beton. Beton und Stahlbetonbau, No. 7, 1967.
- 20 Effects structuraux des déformations différées du béton. CEB-FIP Manuel (luonnos), Bulletin d'information, No. 80, Febr. 1972.
- 21 Code de référence pour les structures en béton. CEB-FIP Manuel (2. luonnos), Bulletin d'information, No. 111, 1975.
- 22 Betoninormit 1967/75. Valtion painatuskeskus 1975, RIL 1975.
- 23 Jännitettyjen betonirakenteiden normit 1970/73. Suomen Betoniyhdistys 1973.
- 24 Rajatilamitoitusohjeet. Valtion painatuskeskus 1975, RIL 1075.

Pauli Jumppanen, apul.prof., Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi