

# PAALUPERUSTUKSEN LASKEMINEN <sup>1)</sup>

Rakenteiden Mekaniikka  
8 (1975) 2, s. 81...106  
Rakenteiden Mekaniikan  
Seura, Helsinki

KARI SIREN ja MARTTI MIKKOLA

---

## YHTEENVETO

Esityksessä on johdettu ensin kaavat paalulaatan siirtymien, paalujen päiden siirtymien ja voimasuureiden laskemiseksi olettaen, että Hooken laki on voimassa ja että laatta on täysin jäykkä. Sen jälkeen on esitetty paalukohtaiset jäykkyyismatriisit seuraaville paalun tuentatapauksille ja ympäröivän maan sivuvastustyypeille:

- 1) paalun molemmat päät on nivelöity,
- 2) paalun yläpää on nivelöity,
- 3) paalun alapää on nivelöity,
- 4) paalun molemmat päät ovat jäykästi kiinnitetyt,
  - a) maan sivuvastusta ei ole otettu huomioon,
  - b) maan sivuvastuskerroin on vakio,
  - c) maan sivuvastuskerroin kasvaa lineaarisesti.

---

1) Perustuu K. Sirenin Helsingin teknillisessä korkeakoulussa tekemään erikoistyöhön.

Lisäksi on esitetty kuinka voidaan muodostaa paalukohtainen jäykkyysmatriisi, kun maan sivuvastustyyppi on erilainen paalun ylä- ja alaosassa. Lopussa on laskettu sovellutus esimerkki tehdyllä tietokoneohjelmalla.

#### 1. YLEISTÄ RATKAISUMENETELMÄSTÄ

Paalutuksen ratkaisuun käytetään siirtymämenetelmää, jolloin ratkaisun yleinen kulku on seuraava. Rakenne jaetaan elementteihin (paaluihin) ja muodostetaan jokaisen paalun jäykkyysmatriisi sen omassa koordinaatistossa. Tämän jälkeen muunnetaan paalujen jäykkyysmatriisit rakennekoordinaatistoon (laatan koordinaatistoon) ja lasketaan ne yhteen, jolloin saadaan koko paalutuksen jäykkyysmatriisi. Koska paalulaatta otaksutaan täysin jäykäksi, voidaan paalujen päiden siirtymät lausua laatan siirtymien avulla. Syntyvässä yhtälöryhmässä ovat tuntemattomina laatan siirtymät; kolme siirtymää ja kolme kiertymää yleisessä tapauksessa, kaksi siirtymää ja yksi kiertymä tasotapauksessa. Niiden ratkaisemisen jälkeen lasketaan paalu-kohtaiset siirtymät ja paaluihin syntyvät voimat.

#### 2. KAAVOJEN JOHTAMINEN

Valitaan rakenteelle oikeakätinen XYZ-koordinaatisto siten, että Z-akselin positiivinen suunta on alaspäin; koordinaattiakselien suuntaiset yksikkövektorit ovat  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  ja  $\bar{k}$ . Merkitään paalun suuntaista yksikkövektoria  $\bar{p}$ :llä

$$\bar{p} = p_1 \bar{i} + p_2 \bar{j} + p_3 \bar{k} = \cos \alpha_1 \bar{i} + \cos \alpha_2 \bar{j} + \cos \alpha_3 \bar{k},$$

jossa  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ja  $\alpha_3$  ovat paalun suuntakulmat koordinaattiakselien suhteen. Paalukohtaisen koordinaatiston yksikkövektoreiksi valitaan paalun suuntainen vektori  $\bar{p}$  ja yksikkövektori  $\bar{t}$ , joka on XY-tason suuntainen,

$$\bar{t} = \frac{\bar{k} \times \bar{p}}{\sqrt{1-p_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-p_3^2}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = \frac{-p_2 \bar{i} + p_1 \bar{j}}{\sqrt{1-p_3^2}},$$

ja yksikkövektori  $\bar{n}$

$$\bar{n} = \bar{t} \times \bar{p} = \frac{1}{\sqrt{1-p_3^2}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -p_2 & p_1 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = \frac{p_1 p_3 \bar{i} + p_2 p_3 \bar{j} - (1-p_3^2) \bar{k}}{\sqrt{1-p_3^2}}.$$

Yksikkövektorit  $\bar{p}$ ,  $\bar{n}$  ja  $\bar{t}$  ovat määrittelystä johtuen kohtisuorassa toisiaan vastaan ja muodostavat paalukohtaisen koordinaatiston kannan (kuva 1). Jos suuntakulma  $\alpha_3 = 0$ , niin paalukohtaisen ja rakenteen koordinaatistojen akseleille valitaan samat suunnat.

Otetaan käyttöön seuraavat merkinnät:

$$\bar{\Delta} = \Delta_1 \bar{i} + \Delta_2 \bar{j} + \Delta_3 \bar{k} \quad \text{paalulaatan siirtymä}$$

$$\bar{\phi} = \phi_1 \bar{i} + \phi_2 \bar{j} + \phi_3 \bar{k} \quad \text{paalulaatan kiertymä}$$

$$\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k} \quad \text{paalun pään paikkavektori}$$

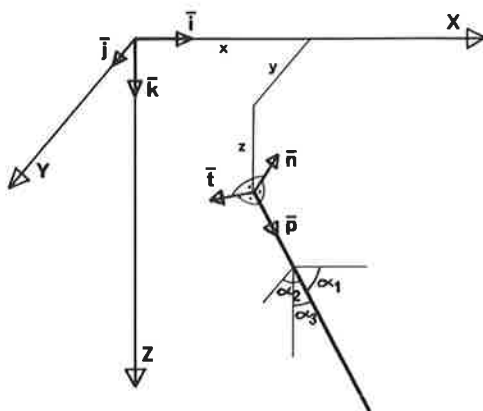
$$\bar{\delta} = \delta_1 \bar{i} + \delta_2 \bar{j} + \delta_3 \bar{k} \quad \text{paalun pään siirtymä laatan koordinaatistossa}$$

$$\bar{\varphi} = \varphi_1 \bar{i} + \varphi_2 \bar{j} + \varphi_3 \bar{k} \quad \text{paalun pään kiertymä laatan koordinaatistossa.}$$

Paalulaatan siirtymästä ja kiertymästä aiheutuvat paalun päähän siirtymät ja kiertymät ovat laatan koordinaatistossa

$$\bar{\delta} = \bar{\Delta} + \bar{\varphi} \times \bar{r}, \quad (1)$$

$$\bar{\varphi} = \bar{\phi}. \quad (2)$$



Kuva 1. Käytetyt koordinaatistot.  
Fig. 1. The coordinate systems of the foundation slab and of a pile.

Paalun pään siirtymät ja kiertymät sen omassa koordinaatistossa saadaan projisoimalla yksikkövektorien  $\bar{p}$ ,  $\bar{n}$  ja  $\bar{t}$  suunnille

$$\begin{aligned} \delta_p &= \bar{p} \cdot \bar{\delta} && \text{siirtymä akselin suuntaan,} \\ \delta_n &= \bar{n} \cdot \bar{\delta} && \text{siirtymä vektorin } \bar{n} \text{ suuntaan,} \\ \delta_t &= \bar{t} \cdot \bar{\delta} && \text{siirtymä vektorin } \bar{t} \text{ suuntaan,} \\ \varphi_p &= \bar{p} \cdot \bar{\varphi} && \text{kiertymä akselin ympäri,} \\ \varphi_n &= \bar{n} \cdot \bar{\varphi} && \text{kiertymä vektorin } \bar{n} \text{ ympäri,} \\ \varphi_t &= \bar{t} \cdot \bar{\varphi} && \text{kiertymä vektorin } \bar{t} \text{ ympäri.} \end{aligned} \quad (3)$$

Merkitsemällä paalun pään siirtymävektoria

$$v = (\delta_1 \delta_2 \delta_3 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3)^T \quad (4a)$$

ja laatan siirtymävektoria

$$V = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \phi_1 \phi_2 \phi_3)^T \quad (4b)$$

voidaan kaavat (1) ja (2) lausua matriisimuodossa

$$v = BV, \quad (5)$$

jossa B tarkoittaa matriisia

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & y & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4c)$$

Paalun pään siirtymävektori  $v$  saadaan muunnetuksi paalukohtaisen koordinaatiston siirtymävektoriksi

$$v_p = (\delta_p \delta_n \delta_t \varphi_p \varphi_n \varphi_t)^T \quad (6)$$

muunnoskaavalla

$$v_p = Tv. \quad (7)$$

Muunnosmatriisin  $T$  alkiot saadaan kaavojen (3) perusteella

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos\alpha_1}{\tan\alpha_3} & \frac{\cos\alpha_2}{\tan\alpha_3} & -\sin\alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_3} & \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos\alpha_1}{\tan\alpha_3} & \frac{\cos\alpha_2}{\tan\alpha_3} & -\sin\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_3} & \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Merkitään paalun pään voimasuureita paalukohtaisessa koordinaatistossa vektorilla

$$F = (N_p \ Q_n \ Q_t \ M_p \ M_n \ M_t)^T \quad (9)$$

Paaluvoimien  $F$  ja paalun pään siirtymien  $v_p$  välillä vallitsee Hooken lain mukainen lineaarinen yhteys

$$F = K v_p \quad (10)$$

jossa  $K$  on paalun jäykkyyssmatriisi. Sen määrittämistä käsitellään kohdassa 3.

Merkitään perustusta rasittavien kuormien vektoria

$$P = (P_x \ P_y \ P_z \ M_x \ M_y \ M_z)^T \quad (11)$$

Johdetaan tasapainoyhtälöt virtuaalisten siirtymien periaatteella. Muodostamalla laattaan vaikuttavien voimien virtuaalisten töiden summa saadaan ottaen kaavat (5), (7) ja (10) huomioon

$$\begin{aligned} V^T P &= \sum v_p^T F = \\ &= V^T P = \sum V^T B^T T^T K T B V = \\ &= V^T P - V^T (\sum B^T T^T K T B) V = 0 . \end{aligned}$$

Tästä seuraa tasapainoyhtälö

$$P = \tilde{K} V , \quad (12)$$

jossa  $\tilde{K} = \sum B^T T^T K T B$  on paalutuksen jäykkyyssmatriisi. Peruslaatan siirtymät saadaan ratkaisemalla yhtälö (12)

$$V = \tilde{K}^{-1} P , \quad (13)$$

josta saadaan edelleen paalun pään siirtymät paalun omassa koordinaatistossa kaavojen (5) ja (7) avulla

$$v_p = T B V = T B \tilde{K}^{-1} P \quad (14)$$

ja paalun pään voimasuureet kaavasta (9)

$$F = K v_p = K T B \tilde{K}^{-1} P . \quad (15)$$

### 3. PAALUKOHTAISET JÄYKKYYSMATRIISIT

#### 3.1. Yleistä

Merkitään paalun taipumaviivaa  $v(x)$ :llä, taivutusmomenttia  $M(x)$ :llä ja leikkausvoimaa  $Q(x)$ :llä.

Paalun pään voimasuureiden ja siirtymien välillä pätee yhtälö

(10)

$$\begin{bmatrix} N_p \\ Q_n \\ Q_t \\ M_p \\ M_n \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & 0 & 0 & K_{26} \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 & K_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{53} & 0 & K_{55} & 0 \\ 0 & K_{62} & 0 & 0 & 0 & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_p \\ \delta_n \\ \delta_t \\ \varphi_p \\ \varphi_n \\ \varphi_t \end{bmatrix} ,$$

jonka yhtälöt komponenttimuodossa ovat

$$N_p = K_{11} \delta_p ,$$

$$Q_n = K_{22} \delta_n + K_{26} \varphi_t ,$$

$$Q_t = K_{33} \delta_t + K_{35} \varphi_n ,$$

$$M_p = K_{44} \varphi_p ,$$

$$M_n = K_{53} \delta_t + K_{55} \varphi_n ,$$

$$M_t = K_{62} \delta_n + K_{66} \varphi_t .$$

Kun oletetaan, että paalun jäykkyydet ja maan sivuvastus ovat samat molempien normaalien  $\bar{n}$  ja  $\bar{t}$  suunnissa, saadaan jäykkyyser-toimien välille yhteydet  $K_{22} = K_{33}$ ,  $K_{55} = K_{66}$ ,  $K_{26} = -K_{35}$  ja  $K_{62} = -K_{53}$ . Jäykkyydematriisin symmetrisyyden perusteella pätee  $K_{26} = K_{62}$ .



## 3.2. Paalun tuentatapaukset

Paalun aksiaalinen jäykkyys on

$$K_{11} = \frac{EA}{l}$$

edellyttäen, että paalun suuntaista kitkaa tai koheesiota ei oteta huomioon. Paalun vääntöjäykkyys on

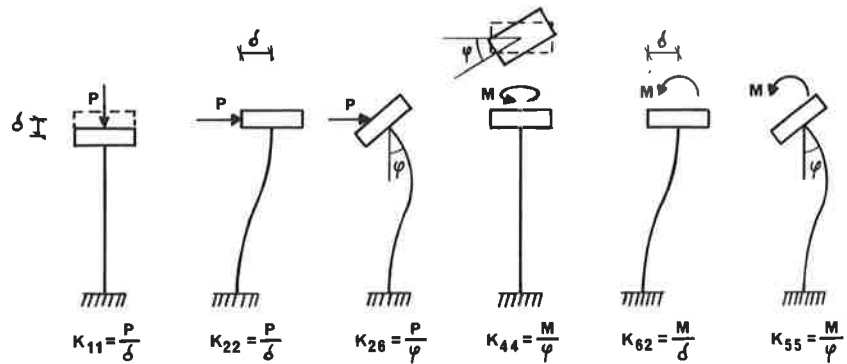
$$K_{44} = \frac{G I_t}{l}$$

jolloin paalun päät on otaksuttu väännön suhteen kiinnitetyiksi, mutta ympäröivän maan vääntövastusta ei ole otettu huomioon. Muut jäykkyysmatriisin alkiot saadaan eri tuentatapauksille seuraavassa kaaviossa esitetyin kaavoin ja reunaehdoin.

Tuentatapaus:	1 nivel molemmissa päissä	2 nivel yläpäässä jäykkä kiinnitys alapäässä
Jäykkyys:		
$K_{22} = K_{33} = \frac{-Q(0)}{\delta}$	$v(0)=\delta \quad v(l)=0$ $M(0)=0 \quad M(l)=0$	$v(0)=\delta \quad v(l)=0$ $M(0)=0 \quad v'(l)=0$

Tuentatapaus:	3 jäykkä kiinnitys yläpäässä nivel alapäässä	4 jäykkä kiinnitys molemmissa päissä
Jäykkyys:		
$K_{22} = K_{33} = \frac{-Q(0)}{\delta}$	$v(0)=\delta \quad v(l)=0$ $v'(0)=0 \quad M(l)=0$	$v(0)=\delta \quad v(l)=0$ $v'(0)=0 \quad v'(l)=0$
$K_{26} = K_{35} = \frac{-Q(0)}{\varphi}$	$v(0)=0 \quad v(l)=0$ $v'(0)=\varphi \quad M(l)=0$	$v(0)=0 \quad v(l)=0$ $v'(0)=\varphi \quad v'(l)=0$
$K_{62} = -K_{53} = \frac{M(0)}{\delta}$	$v(0)=\delta \quad v(l)=0$ $v'(0)=0 \quad M(l)=0$	$v(0)=\delta \quad v(l)=0$ $v'(0)=0 \quad v'(l)=0$
$K_{55} = K_{66} = \frac{M(0)}{\varphi}$	$v(0)=0 \quad v(l)=0$ $v'(0)=\varphi \quad M(l)=0$	$v(0)=0 \quad v(l)=0$ $v'(0)=\varphi \quad v'(l)=0$

Kuvassa 2 on esitetty jäykkyyismatriisin alkioiden merkitys tuentatapauksessa 4. Siitä nähdään myös kuinka ne voitaisiin periaatteessa määrittää koekuormittamalla.



Kuva 2. Paalukohtaisen jäykkyyismatriisin alkiot, kun paalu on jäykästi kiinnitetty molemmista päistään.  
 Fig. 2. Elements of local stiffness matrix of a pile with fixed ends.

### 3.3. Maan sivuvastustyyppit

#### 3.3.1. Ilman maan sivuvastusta

Palkin taipumaviivan differentiaaliyhtälö on tunnetusti

$$E I \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = q \quad (16)$$

Koska palkkiin vaikuttava jakautunut kuorma on tässä tapauksessa  $q = 0$ , saadaan differentiaaliyhtälön ratkaisuksi

$$v(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 . \quad (17)$$

Tästä tulee derivoimalla

$$v'(x) = 3 C_1 x^2 + 2 C_2 x + C_3 , \quad (18)$$

$$M(x) = -6 E I C_1 x - 2 E I C_2 , \quad (19)$$

$$Q(x) = -6 E I C_1 . \quad (20)$$

Kohdassa 3.2. esitettyjä reunaehtoja käyttäen saadaan yhtälöistä (17), (18), (19) ja (20) neljä yhtälöä, joista voidaan ratkaista integroimisvakiot  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  ja  $C_4$ , jonka jälkeen jäykkymatriisin alkiot eri tuentatapauksille saadaan samassa kaaviossa esitettyistä kaavoista.

Tuentatapaus 1

$$K_{22} = K_{33} = K_{26} = K_{62} = K_{35} = K_{53} = K_{55} = K_{66} = 0$$

Tuentatapaus 2

$$K_{22} = K_{33} = \frac{3 E I}{l^3} ,$$

$$K_{26} = K_{62} = K_{35} = K_{53} = K_{55} = K_{66} = 0 .$$

Tuentatapaus 3

$$K_{22} = K_{33} = \frac{3 E I}{l^3},$$

$$K_{26} = K_{62} = -K_{35} = -K_{53} = \frac{3 E I}{l^2},$$

$$K_{55} = K_{66} = \frac{3 E I}{l}.$$

Tuentatapaus 4

$$K_{22} = K_{33} = \frac{12 E I}{l^3},$$

$$K_{26} = K_{62} = -K_{35} = -K_{53} = \frac{6 E I}{l^2},$$

$$K_{55} = K_{66} = \frac{4 E I}{l}.$$

## 3.3.2. Maan sivuvastuskerroin vakio

Winklerin alustalla olevan palkin, jolla ei ole jakautunutta kuormaa, taipumaviivan differentiaaliyhtälö on tunnetusti (ks. esim. [8])

$$E I \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + k_1 v(x) = 0, \quad (21)$$

jossa  $k_1$  on alustakerroin [ $N/m^2$ ]. Otetaan käyttöön dimensioton muuttuja  $\xi = \beta x$ , jossa

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k_1}{4EI}}.$$

Yhtälö (21) saa nyt muodon

$$\frac{d^4 v(\xi)}{d\xi^4} + 4 v(\xi) = 0 . \quad (22)$$

Sen ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$v(\xi) = C_1 Y_1(\xi) + C_2 Y_2(\xi) + C_3 Y_3(\xi) + C_4 Y_4(\xi) , \quad (23)$$

missä

$$Y_1(\xi) = \cosh\xi \cos\xi ,$$

$$Y_2(\xi) = (1/2)(\cosh\xi \sin\xi + \sinh\xi \cos\xi) ,$$

$$Y_3(\xi) = (1/2) \sinh\xi \sin\xi ,$$

$$Y_4(\xi) = (1/4)(\cosh\xi \sin\xi - \sinh\xi \cos\xi) .$$

Ratkaisusta (22) saadaan derivoimalla  $x:n$  suhteen

$$v'(\xi) = \beta \frac{dv}{d\xi} , \quad (24)$$

$$M(\xi) = - E I \beta^2 \frac{d^2 v}{d\xi^2} , \quad (25)$$

$$Q(\xi) = - E I \beta^3 \frac{d^3 v}{d\xi^3} . \quad (26)$$

Samoin kuin kohdassa 3.3.1. saadaan yhtälöistä (23), (24), (25) ja (26) neljä yhtälöä, joista voidaan ratkaista integroimisva-  
kiot ja jäykkyyso-matriisin alkio-t.

Tuentatapaus 1

$$K_{22} = K_{33} = 2 E I \beta^3 \frac{\cosh\beta l \sinh\beta l - \cos\beta l \sin\beta l}{\sinh^2 \beta l + \sin^2 \beta l} ,$$

$$K_{26} = K_{62} = K_{35} = K_{53} = K_{55} = K_{66} = 0 .$$

Tuentatapaus 2

$$K_{22} = K_{33} = 2 E I \beta^3 \frac{\cosh^2 \beta l + \cos^2 \beta l}{\cosh \beta l \sinh \beta l - \cos \beta l \sin \beta l} ,$$

$$K_{26} = K_{62} = K_{35} = K_{53} = K_{55} = K_{66} = 0 .$$

Tuentatapaus 3

$$K_{22} = K_{33} = 4 E I \beta^3 \frac{\sinh^2 \beta l + \cos^2 \beta l}{\cosh \beta l \sinh \beta l - \cos \beta l \sin \beta l} ,$$

$$K_{26} = K_{62} = 2 E I \beta^2 \frac{\cosh \beta l \sinh \beta l + \cos \beta l \sin \beta l}{\cosh \beta l \sinh \beta l - \cos \beta l \sin \beta l} ,$$

$$K_{35} = K_{53} = -K_{26} ,$$

$$K_{55} = K_{66} = 2 E I \beta \frac{\sinh^2 \beta l + \sin^2 \beta l}{\cosh \beta l \sinh \beta l - \cos \beta l \sin \beta l} .$$

Tuentatapaus 4

$$K_{22} = K_{33} = 4 E I \beta^3 \frac{\cosh \beta l \sinh \beta l + \cos \beta l \sin \beta l}{\sinh^2 \beta l - \sin^2 \beta l} ,$$

$$K_{26} = K_{62} = 2 E I \beta^2 \frac{\sinh^2 \beta l + \sin^2 \beta l}{\sinh^2 \beta l - \sin^2 \beta l} ,$$

$$K_{35} = K_{53} = -K_{26} ,$$

$$K_{55} = K_{66} = 2 E I \beta \frac{\cosh \beta l \sinh \beta l - \cos \beta l \sin \beta l}{\sinh^2 \beta l - \sin^2 \beta l}$$

### 3.3.3. Maan sivuvastuskerrroin lineaarisesti kasvava

Kun alustakerroin kasvaa lineaarisesti eikä palkilla ole jakautunutta kuormaa, voidaan palkin taipumaviivan differentiaaliyhtälö esittää muodossa (ks. [5])

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + k_2 x v(x) = 0, \quad (27)$$

jossa  $k_2$  on alustakertoimen kulmakerroin  $[N/m^3]$ . Otetaan käyttöön dimensioton muuttuja  $\xi = x/l$  ja merkitään

$$n = \sqrt[5]{\frac{k_2}{EI}}.$$

Yhtälö (25) saa nyt muodon

$$\frac{d^4 v(\xi)}{d\xi^4} + (n l)^5 \xi v(\xi) = 0. \quad (28)$$

Sen ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$v(\xi) = C_1 y_1(\xi) + C_2 y_2(\xi) + C_3 y_3(\xi) + C_4 y_4(\xi), \quad (29)$$

missä

$$y_1(\xi) = 1 - \frac{a}{5!} \xi^5 + \frac{6a^2}{10!} \xi^{10} - \frac{6 \cdot 11 a^3}{15!} \xi^{15} + \frac{6 \cdot 11 \cdot 16 a^4}{20!} \xi^{20} - \dots,$$

$$y_2(\xi) = \xi - \frac{2a}{6!} \xi^6 + \frac{2 \cdot 7 a^2}{11!} \xi^{11} - \frac{2 \cdot 7 \cdot 12 a^3}{16!} \xi^{16} + \frac{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 17 a^4}{21!} \xi^{21} - \dots,$$

$$y_3(\xi) = \frac{\xi^2}{2!} - \frac{3a \cdot 7}{7!} \xi^7 + \frac{3 \cdot 8 a^2}{12!} \xi^{12} - \frac{3 \cdot 8 \cdot 13 a^3}{17!} \xi^{17} + \frac{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 18 a^4}{22!} \xi^{22} - \dots,$$

$$y_4(\xi) = \frac{\xi^3}{3!} - \frac{4a}{8!} \xi^8 + \frac{4 \cdot 9 a^2}{13!} \xi^{13} - \frac{4 \cdot 9 \cdot 14 a^3}{18!} \xi^{18} + \frac{4 \cdot 9 \cdot 14 \cdot 19 a^4}{23!} \xi^{23} - \dots,$$

ja  $a = (n l)^5$ . Yhtälöstä (29) saadaan derivoimalla  $x$ :n suhteen

$$v'(\xi) = \frac{1}{l} \frac{dy}{d\xi}, \quad (30)$$

$$M(\xi) = - \frac{E I}{l^2} \frac{d^2 v}{d\xi^2} , \quad (31)$$

$$Q(\xi) = - \frac{E I}{l^3} \frac{d^3 v}{d\xi^3} . \quad (32)$$

Samoin kuin kohdassa 3.3.1. saadaan yhtälöistä (29), (30), (31) ja (32) neljä yhtälöä, joista saadaan ratkaistuksi integroimisvakiot ja jäykkyyso-matriisin alkiot. Seuraavassa kaaviossa funktioiden  $y_i$  ja niiden derivaattojen arvot tarkoittavat arvoja pisteessä  $\xi = 1$ .

Tuentatapaus 1

$$K_{22} = K_{33} = \frac{E I}{l^3} \frac{y_1 y_2'' - y_1'' y_2}{y_2 y_4'' - y_2'' y_4} ,$$

$$K_{26} = K_{62} = K_{35} = K_{53} = K_{55} = K_{66} = 0 .$$

Tuentatapaus 2

$$K_{22} = K_{33} = \frac{E I}{l^3} \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_2 y_4' - y_2' y_4} ,$$

$$K_{26} = K_{62} = K_{35} = K_{53} = K_{55} = K_{66} = 0 .$$

Tuentatapaus 3

$$K_{22} = K_{33} = \frac{E I}{l^3} \frac{y_1 y_3'' - y_1'' y_3}{y_3 y_4'' - y_3'' y_4} ,$$

$$K_{26} = -K_{35} = \frac{E I}{l^2} \frac{y_2 y_3'' - y_2'' y_3}{y_3 y_4'' - y_3'' y_4} ,$$

$$K_{55} = K_{66} = \frac{E I}{l} \frac{y_2 y_4'' - y_2'' y_4}{y_3 y_4'' - y_3'' y_4} .$$



(Huom.  $y_2 y_3'' = y_2'' y_3 = y_1 y_4'' = y_1'' y_4$  eli  $K_{26} = K_{62}$ .)

Tuentatapaus 4

$$K_{22} = K_{33} = \frac{E I}{l^3} \frac{y_1 y_3' - y_1' y_3}{y_3 y_4' - y_3' y_4}$$

$$K_{26} = -K_{35} = \frac{E I}{l^2} \frac{y_2 y_3' - y_2' y_3}{y_3 y_4' - y_3' y_4}$$

$$K_{62} = -K_{53} = \frac{E I}{l^2} \frac{y_1 y_4' - y_1' y_4}{y_3 y_4' - y_3' y_4}$$

$$K_{55} = K_{66} = \frac{E I}{l} \frac{y_2 y_4' - y_2' y_4}{y_3 y_4' - y_3' y_4}$$

(Huom.  $y_2 y_3' = y_2' y_3 = y_1 y_4' = y_1' y_4$  eli  $K_{26} = K_{62}$ .)

3.3.4. Maan sivuvastustyyppi on erilainen paalun ylä- ja alaosassa

Merkitään paalun taipumaviiva paalun yläosassa  $v_y$ :llä ja alaosassa  $v_a$ :lla; yläosan pituus olkoon  $l_1$ .

Maan sivuvastustyyppin ollessa erilainen paalun ylä- ja alaosassa (esim. vain osa paalusta maassa) tarvitaan kohdassa 3.2. esitettyjen paalun päiden neljän reunaehdon lisäksi neljä jatkuvuusehtoa ylä- ja alaosan yhteensovittamiseksi

$$v_y(l_1) = v_a(l_1)$$

$$v_y'(l_1) = v_a'(l_1)$$

$$M_y(l_1) = M_a(l_1)$$

$$Q_y(l_1) = Q_a(l_1)$$

Kahdeksan integroimisvakiota  $C_{iy}$  ja  $C_{ia}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) voidaan nyt ratkaista ja muodostaa jäykkyyismatriisin alkiot kohdassa 3.2. esitetyillä kaavoilla. Tämä yhtälöryhmän ratkaisu on työläytensä vuoksi edullisinta jättää tietokoneen tehtäväksi.

### 3.3.5. Sivuvastuskertoimien määrittäminen

Kohdissa 3.3.2. ja 3.3.3. esitetyillä maan sivuvastustyypeillä kuvataan yleensä koheesiomaata ja kitkamaata. Koheesiomaassa maan sivuvastuskerroin ( $k_1$ ) on vakio, kun taas kitkamaassa sivuvastuskerroin ( $k_2 \times x$ ) kasvaa lineaarisesti syvyyden kasvaessa. (Kerrointa  $k_2$  määritettäessä on huomioitava, että yhtälössä (27) sivuvastuskerroin  $k_2 \times x$  kasvaa paalua pitkin mentäessä eikä siis tarkasti ottaen syvyyden kasvaessa. Tästä aiheutuva ero voidaan poistaa kertomalla syvyyden avulla arvioitu  $k_2 \cos \alpha_3$ :lla).

Kertoimien  $k_1$  ja  $k_2$  arvoihin vaikuttaa paitsi maan ominaisuudet myös kuormittavan pinnan eli paalun leveys. Usein oletetaan, että sivuvastuskertoimet ovat suoraan verrannollisia paalun leveyteen  $b$ , ja merkitään

$$k_1 = b m_1 ,$$

$$k_2 = b m_2 ,$$

joissa  $m_1$  ja  $m_2$  ovat riippuvaisia vain maan ominaisuuksista.

Kirjallisuudessa on käsitelty maan sivuvastus- ja alustaker-toimia mm. teoksissa [1], [2], [3], [4], [8], [9] ja [11], mutta niistä on kuitenkin vaikea löytää yleispäteviä ja luotettavia arvoja.

Kitkamaalle saadaan teoksesta [11] seuraavat arvot:

Kitkamaa	$m_2$ [MN/m <sup>4</sup> ]		
	löyhä	normaali	tiivis
Pohjavedenpinnan yläpuolella	7	21	56
Pohjavedenpinnan alapuolella	4	14	36

Koheesiomaan sivuvastus on riippuvainen maan leikkauslujuudesta, ja sen voidaan olettaa vaihtelevan arvojen  $m_1 = 1 \text{ MN/m}^3 \dots 30 \text{ MN/m}^3$  välillä. Pitkäaikaisille kuormille on koheesiomaassa käytettävä huomattavasti pienempiä arvoja kuin lyhytaikaisille kuormille. On jopa asetettu kyseenalaiseksi voidaanko maan sivuvastusta ottaa ol-  
lenkaan huomioon pysyvien kuormien tapauksessa.

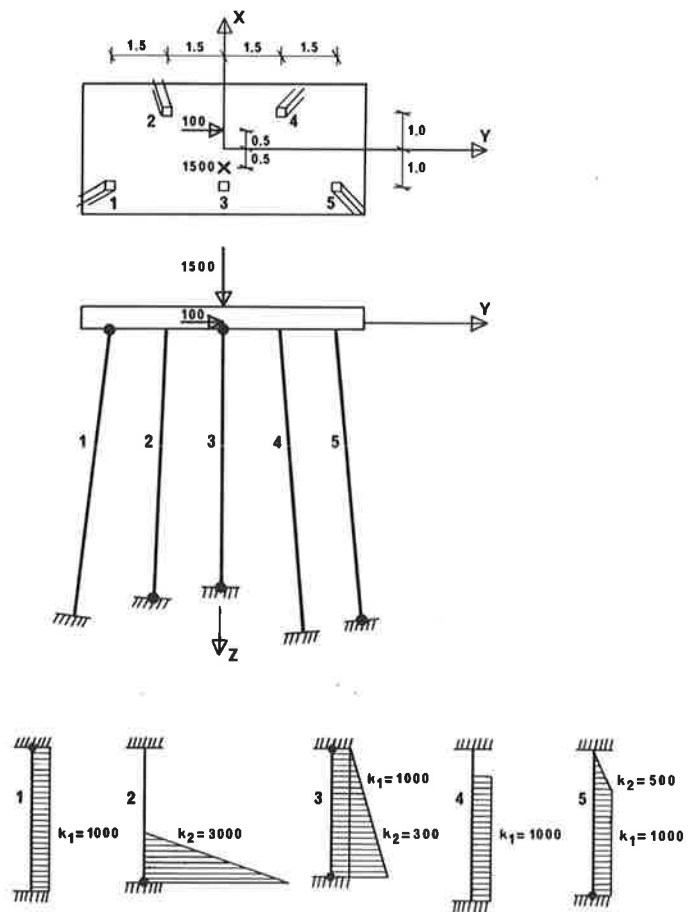
#### 4. ESIMERKKI

Esimerkkinä on laskettu tietokoneella kuvan 3 mukaisen paalu-  
tuksen siirtymät ja voimasuureet. Paaluryhmään on pyritty kokoamaan mahdollisimman monia paalun tuentatapoja ja maan sivuvastustyyppettä, minkä takia se ei suinkaan vastaa mitään käytännön tapausta. Lähtö-  
tiedot on tulostettu tarkistusta varten, ja lisäksi välituloksina on esitetty paalukohtaiset jäykkyyssmatriisit. Lopuksi on laskettu ver-  
tailun vuoksi saman paaluryhmän siirtymät ja voimasuureet ottamatta huomioon maan sivuvastusta.

Laatan koordinaatisto  $X Y Z$  on sama kuin kohdassa 2. (ku-  
vassa 1) esitetty. Paalukohtaisen koordinaatiston  $XX YY ZZ$  määrit-

televät yksikkövektorit  $\bar{n}$ ,  $\bar{t}$  ja  $\bar{p}$  mainitussa järjestyksessä. (Jos paalu on Z-akselin suuntainen ovat laatan koordinaatiston ja paalukohtaisen koordinaatiston akselit samansuuntaiset.) Tulokset on esitetty liitteessä.

Laatuina on käytetty kilonewtonia ja metriä; kiertymät on tulos-tettu radiaaneina.



Kuva 3. Esimerkkipaaluryhmän mitat, paalujen tuentatavat ja sivuvastukset sekä kuormitus. Pituudet m, voimat kN,  $k_1$  kN/m<sup>2</sup>,  $k_2$  kN/m<sup>3</sup>.

Fig. 3. The example pile group, support conditions and lateral resistance of piles and the applied load. Lengths m, forces kN,  $k_1$  kN/m<sup>2</sup>,  $k_2$  kN/m<sup>3</sup>.

## KÄYTETYT MERKINNÄT

$a$	$= (\eta l)^5$
$b$	paalun leveys [m]
$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	yksikkövektorit
$k_1$	sivuvastuskerroin [ $N/m^2$ ]
$k_2$	sivuvastuskertoimen kulmakerroin [ $N/m^3$ ]
$l$	paalun pituus [m]
$m_1$	sivuvastuskerroin [ $N/m^3$ ]
$m_2$	sivuvastuskertoimen kulmakerroin [ $N/m^4$ ]
$n$	paalujen lukumäärä
$\bar{p}, \bar{n}, \bar{t}$	paalukohtaiset yksikkövektorit
$\bar{r}$	paalun pään paikkavektori
$v$	paalun pään siirtymävektori
$v_p$	paalun pään siirtymävektori paalukohtaisessa koordinaatistossa
$v(x)$	paalun taipumaviiva
$x, y, z$	paalun pään koordinaatit
$y_i$	funktiot taipuman lausekkeessa (29)
$A$	paalun pinta-ala [ $m^2$ ]
$B$	matriisi (4c)
$C_i$	integroimisvakioita
$E$	kimmokerroin [ $N/m^2$ ]
$F$	paalun pään voimasuurevektori
$G$	liukukerroin [ $N/m^2$ ]
$I$	taivutusjäyhyysmomentti [ $m^4$ ]
$I_t$	vääntöjäyhyysmomentti [ $m^4$ ]

$K$	paalukohtainen jäykkyyismatriisi
$\tilde{K}$	paalutuksen jäykkyyismatriisi
$M(x)$	paalun taivutusmomentti
$P$	kuormitusvektori
$Q(x)$	paalun leikkausvoima
$T$	koordinaatiston muunnosmatriisi
$V$	paalulaatan siirtymävektori
$X, Y, Z$	koordinaattiakselit
$Y_i$	funktiot taipuman lausekkeessa (23)
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	paalun suuntakulmat
$\beta$	$= \sqrt[4]{k_1/4EI}$ [1/m]
$\bar{\delta}$	paalun pään siirtymä
$\bar{\Delta}$	peruslaatan siirtymä
$\eta$	$= \sqrt[5]{k_2/EI}$ [1/m]
$\xi$	$= \beta x$ tai $= x/l$
$\bar{\varphi}$	paalun pään kiertymä
$\bar{\phi}$	paalulaatan kiertymä

#### KIRJALLISUUTTA

- 1 Broms, B., Lateral Resistance of Piles in Cohesive Soils. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, March 1964.
- 2 Broms, B., Lateral Resistance of Piles in Cohesionless Soils. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, May 1964.
- 3 Broms, B., Design of Laterally Loaded Piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, May 1965.

- 4 Francis, A.J., Analysis of Pile Groups with Flexural Resistance. Journal of the Soil Mechanics and Foundations, May 1964.
- 5 Hetényi, M., Beams on elastic foundation. Ann Arbor, The University of Michigan Press, 1946.
- 6 Jumppanen, P., Sauvarakenteiden luennot Htkk:ssa, 1970-71.
- 7 Lokki, O., Numeeriset Menetelmät II, Teknillisen korkeakoulun ylioppilaskunta. moniste no 213, Otaniemi, 1969.
- 8 Mikkola, M., Kimmoisella alustalla oleva palkki, Htkk Rakennusstatiiikka, Julkaisu 1, Otaniemi, 1969.
- 9 Ollila, M., Theorie der räumlichen Pfahlwerke im elastischen Kontinuum, Helsinki, 1973.
- 10 Paavola, H., Perustusten luennot Htkk:ssa, 1971-72.
- 11 Terzaghi, K., Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction, Géotechnique, 1955.
- 12 Väisälä, K., Vektorianalyysi. 5. painos. Helsinki, WSOY, 1966.

Kari Siren, tekn.yo., Teknillinen Laskenta Oy, Helsinki

Martti Mikkola, prof., Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi

LIITE

PAALURYHMA  
\*\*\*\*\*

LAHTOTIEDOT  
 PAALUJA 5  
 KURMITLSTAPAUKSIA 1  
 KIMMOKERROIN 30000000.  
 LIUKUKERROIN 12500000.

PAALU	X	Y	Z	KALTEV.	KULMA	PITLUS	ALA	HITMOM.	VHITMOM.
1	-1.00	-3.00	.00	7.20	240.0	7.70	.0900	.6585-03	.1215-02
2	1.00	-1.50	.00	8.00	340.0	7.20	.0900	.6585-03	.1215-02
3	-1.00	.00	.00	PYSTYS.	.0	6.90	.0900	.6585-03	.1215-02
4	1.00	1.50	.00	8.00	40.0	8.10	.0900	.6585-03	.1215-02
5	-1.00	3.00	.00	7.50	135.0	7.80	.0900	.6585-03	.1215-02

TUKI	YMAA	AMAA	YPIT.	YKERR.	AKERR.
2	20	20	.00	.0	1000.0
3	10	30	4.50	.0	3000.0
1	40	40	.00	1000.0	300.0
4	10	20	1.50	.0	1000.0
3	30	20	2.00	500.0	1000.0

PAALUKOHTAISET JAYKKYYSMATRIISIT

PAALU 1	350649.343	.000	.000	.000	.000	.000
	.000	1516.775	.000	.000	.000	.000
	.000	.000	1516.775	.000	.000	.000
	.000	.000	.000	1972.402	.000	.000
	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	.000	.000	.000	.000	.000	.000
PAALU 2	374999.996	.000	.000	.000	.000	.000
	.000	509.288	.000	.000	.000	1951.209
	.000	.000	509.288	.000	-1951.209	.000
	.000	.000	.000	2109.374	.000	.000
	.000	.000	-1951.209	.000	10095.398	.000
	.000	1951.209	.000	.000	.000	10095.398
PAALU 3	391304.343	.000	.000	.000	.000	.000
	.000	2182.198	.000	.000	.000	.000
	.000	.000	2182.198	.000	.000	.000
	.000	.000	.000	2201.086	.000	.000
	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	.000	.000	.000	.000	.000	.000
PAALU 4	333333.328	.000	.000	.000	.000	.000
	.000	1647.235	.000	.000	.000	3747.537
	.000	.000	1647.235	.000	-3747.537	.000
	.000	.000	.000	1874.999	.000	.000
	.000	.000	-3747.537	.000	12585.268	.000
	.000	3747.537	.000	.000	.000	12585.268
PAALU 5	346153.839	.000	.000	.000	.000	.000
	.000	2071.961	.000	.000	.000	3926.721
	.000	.000	2071.961	.000	-3926.721	.000
	.000	.000	.000	1947.115	.000	.000
	.000	.000	-3926.721	.000	12761.372	.000
	.000	3926.721	.000	.000	.000	12761.372



## KUORMITUSTAPAUSET 1

## LAATAN KOORDINAATISTO: X Y Z

KUORMITUS	SIIRTYMAT
FX = .00	CX = .00135
FY = 100.00	DY = .01190
FZ = 1500.00	DZ = .00067
MX = .00	WX = -.00042
MY = 750.00	WY = .00051
MZ = 50.00	WZ = .00076

## PAALUKHTAINEN KOORDINAATISTO: XX YY ZZ

## SIIRTYMAT

PAALU	DZZ	DXX	DYY	WZZ	WXX	WYY
1	.00086	-.01170	-.00242	.00072	-.00033	-.00062
2	.00054	-.00207	.01276	.00069	-.00066	.00034
3	.00118	.00135	.01114	.00076	-.00042	.00051
4	.00056	.00830	.00957	.00076	-.00009	.00066
5	.00104	.00848	-.00722	.00084	.00056	-.00006

## VOIMASUURET

PAALU	NORM.V/ZZ	LEIKK.V/XX	LEIKK.V/YY	VAANTOM/ZZ	TAIV.M/XX	TAIV.M/YY
1	299.867	-17.744	-3.664	1.428	.000	.000
2	204.114	-.399	7.793	1.446	-31.598	-.649
3	462.582	2.956	24.312	1.679	.000	.000
4	185.282	16.385	16.361	1.420	-37.041	39.731
5	358.993	17.320	-17.136	1.642	35.429	32.498

KUORMITLSTAPPAUS 1

LAATAN KOORDINAATISTO: X Y Z

KUORMITUS	SIIRTYMAT
FX = .00	DX = -.00211
FY = 100.00	DY = .08139
FZ = 1500.00	CZ = .00043
WX = .00	WY = -.00296
WY = 750.00	WZ = .00116
WZ = 50.00	W7 = .00032

PAALUKHTAINEN KOORDINAATISTO: XX YY ZZ

SIIRTYMAT

PAALU	DZZ	DXX	DYY	WZZ	WXX	WYY
1	.00078	-.07041	-.04155	.00038	.00043	-.00341
2	.00002	-.02972	.07622	-.00008	-.00319	.00008
3	.00159	-.00211	.08108	.00032	-.00296	.00116
4	.00115	.05079	.06426	.00013	-.00155	.00279
5	.00065	.05994	-.05517	.00070	.00284	.00127

VOIMASLUREET

PAALU	NORM.V/ZZ	LEIKK.V/XX	LEIKK.V/YY	VAANTOM/ZZ	TAIV.M/XX	TAIV.M/YY
1	273.977	-9.140	-5.394	.747	.000	.000
2	8.364	-4.631	15.749	-.169	-113.391	-33.341
3	622.059	.000	.000	.000	.000	.000
4	382.187	27.692	31.460	.235	-131.187	118.954
5	223.752	8.724	-9.658	1.359	75.335	68.048