

G. Strang ja G.J. Fix, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs., N.J., 1973, 306 sivua. Hinta 103,75 mk (elokuussa 1974).

Kirja on tämän hetken ainoa elementtimenetelmän matemaattisiin perusteisiin puuttuva teos. Se jakaantuu kahdeksaan lukuun. Kirjan lopussa on 16 sivun mittainen elementtimenetelmään liittyvien kirjojen ja artikkelien luettelo.

Ensimmäisessä luvussa käsitellään aluksi yksidimensioisia tehtäviä: esitetään lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaiseminen variaatiomenetelmällä, Ritzin menetelmä, puututaan monen sivun voimalla virhearviointiin ja käsitellään tavallisten differentiaaliyhtälöiden teoriaan liittyvän perustehtävän, Sturm-Liouvilien yhtälön, ratkaisu elementtimenetelmällä. Variaatiomenetelmien yhteydessä käsitellään perusteellisesti luvallisten funktioiden joukkoa (montako derivaattaa jatkuvia tarkasteltavilla funktioilla). Tämän jälkeen otetaan peliin mukaan toinenkin dimensio. Perustapauksena kahdessa dimensiossa tarkastellaan Poissonin yhtälöä erityyppisin reunaehdoin (Dirichlet, Neumann ja näiden sekamuodot). Biharmonisen yhtälön ratkaisullekin on varattu oma tilansa. Luvun loppupuolella luodaan katsaus kirjallisuudessa yhtälöiden $\Delta^2 u = f$ ja $\Delta^4 w = f$ ratkaisemiseksi esitettyihin elementteihin.

Toisesta luvusta ei ole mitään erikoista maininnan arvoista.

Kolmannessa luvussa otetaan esille approksimointi tietyn dimensioiden omaavilla avaruuksilla, esitetään asiaan kuuluvat virhearviot, sekä pisteittäiset että eri normien mukaiset. Kaarevien ja isoparametrusten elementtien esittely suoritetaan luvun loppupuolella.

Variaatiomenetelmiä käytettäessä joudutaan usein tinkimään seuraavista vaatimuksista: riittävä jatkuvuus elementistä toiseen liikut-

taessa, reunaehtojen tarkka toteuttaminen ja minimoitavan funktionaalin tarkka laskeminen.

Neljännessä luvussa tutkitaan seurauksia, kun luovutaan edellä mainittujen vaatimusten täydellisestä toteuttamisesta. Ei-yhteensopivilla (non-conforming) elementeillä jatkuvuusehdot eivät toteudu kokonaisuudessaan. Näitä elementtejä käytettäessä saattaa ratkaisu divergoida elementtijakoa tihennettäessä. Konvergenssin tarkistamiseksi esitetään B.Ironsin keksimä oivallinen ja yksinkertainen testi ns. patch test. Reunaehtoja approksimoidaan monesti asettamalla ne todellista reunaviivaa myötäilevälle likimääräiselle reunalle. Tästä aiheutuvalle lisävirheelle johdetaan lausekkeet. Funktionaalin (integraalilauseke) laskemisessa tehdään oma virheensä soveltamalla sen laskemiseen numeerista integrointia. Tähän numeerisen integroinnin tekniikkaan ja siitä aiheutuvan virheen suuruuteen puututaan reilulla kymmenellä sivulla neljännessä luvussa.

Viides luku sisältää ratkaisun stabiilisuuden tarkastelua.

Kuudennessa luvussa käsitellään ominaisarvotehtävien ratkaisua. Esitetään Rayleigh'n osamäärä ja ominaisarvotehtävän Galerkinin muoto sekä näiden diskreetit muodot. Ominaisarvojen ja -vektoreiden virhearviot muodostetaan täsmällisellä lause-todistus -tyylillä. Esitetään tiivistetty kuvaus eri tietokoneratkaisualgoritmeista, mm. inverse iteration ja inverse power method.

Seitsemäs luku on omistettu alkuarvotehtävien ratkaisemiseen (aikaisemmat luvut koskivat ajasta riippumattomia tehtäviä). Luvussa todetaan mm., että paikkariippuvuus kannattanee hoitaa elementtimenetelmällä (voitetaan geometrian asettamat vaikeudet). Sen sijaan aikariippuvuudesta huolehditaan edullisimmin sopivalla differenssimenetelmällä. Näitä periaatteita noudattamalla johdetaan 1-dimensioi

sen transientin lämmönjohtumistehtävän (parabolinen yhtälö) ratkaisu Galerkinin menetelmällä. Tällöin saadaan differentiaaliyhtälöryhmä (ajan suhteen), joka sitten ratkaistaan iteratiivisesti Crank-Nicolsonin menetelmällä. Tehtävän stabiiliutta ja konvergenssia tarkastellaan myös. Hyperbolisen yhtälön ratkaisua tarkastellaan luvun loppuosassa.

Viimeinen eli kahdeksas luku käsittelee jo enemmän erikoiskysymyksiä: singulariteettiprobleemoita.

Kirjan lukeminen ei edellytä syvällisiä funktionaalianalyttisiä tietoja. Korkeakoulun matematiikan peruskurssin tiedot täydennettynä riittänevät. Elementtimenetelmän käyttäjä tulee toimeen ilmankin tätä kirjaa, mutta eivät pä kirjan antavat tärkeät ja perustavaa laatua olevat lisätiedot voi olla ainakaan pahasta.

Seppo Orivuori