

YKSINKERTAINEN ELEMENTTIMENETELMÄOHJELMA

JUKKA AALTO ja ANTTI PRAMILA

Rakenteiden Mekaniikka
8 (1975) 1, s. 3...34
Rakenteiden Mekaniikan
Seura, Helsinki

YHTEENVETO

Artikkelissa esitellään Univac 1108 FORTRAN V kielinen, mahdollisimman yksinkertainen elementtimenetelmää soveltava tietokoneohjelma. Ohjelma on rakennettu modulimuotoon, jotta sitä voitaisiin helposti ja pienin muutoksen soveltaa erityyppisten reuna-arvot tehtävien ratkaisuun. Artikkelissa käsitellään esimerkkeinä kvasiharmonisen yhtälön, tasojännitystilan ja kimmoisella alustalla olevan palkin differentiaaliyhtälön ratkaisut em. ohjelmalla.

1. JOHDANTO

Kirjallisuudessa (esim. [1]) on esitetty lukuisia esimerkkiohjelma. Ne ovat yleensä rajoittuneet pelkästään rakenteiden mekaniikan alueen sovellutuksiin. Tässä artikkelissa esiteltävä ohjelma on kehitetty lähteessä [1] esitetyn ohjelman pohjalta. Kehittelyssä on tarkoituksena ollut yleisen ja helposti tutkimus- ja opetustyössä

eteen tulevien erilaisten reuna-arvot tehtävien ratkaisuun modifioitavissa olevan ohjelman aikaansaaminen.

Lähteessä [1] esitetyn ohjelman muuttamista erityyppisten probleemien ratkaisuun sopivaksi vaikeuttaa COMMON määrittelyjen käyttö. Tällöin aliohjelmaan tehty muutos edellyttää muutoksia myös pääohjelmaan tai muihin aliohjelmiin. Tässä artikkelissa esiteltävän ohjelman aliohjelmat ovat täysin itsenäisiä "mustia laatikoita", jotka tietyistä sisäänmenoparametreista laskevat arvot tietyille ulostuloparametreille. Koska COMMON määrittelyjä ei ole käytetty, aliohjelmat sopivat käytettäväksi millaisessa yhteydessä tahansa, kunhan vain tarvittaville sisääntuloparametreille on aikaisemmassa vaiheessa annettu arvot.

Aliohjelmien käyttäjän ei tarvitse tietää muuta kuin aliohjelman suorittama toimenpide sekä sisäänmeno- ja ulostuloparametrien merkitys. Näinollen ohjelma soveltuu erittäin hyvin monimutkaisempien (esim. epälineaaristen) probleemien ratkaisuohjelmien pohjaksi.

Yksinkertaisen perusrakenteen esilletuomiseksi ohjelmoinnissa ei ole käytetty keskusyksikön muistitilaa säästäviä keinoja eikä muutaakaan hienouksia, joten ohjelma soveltuu esitettävässä muodossa käytettäväksi vain suhteellisen pieniin problemeihin (ks. 5. KÄYTTÖOHJE).

2. ELEMENTTIMENETELMÄN PERUSPIIRTEET OHJELMOINNIN KANNALTA

Menetelmän olennaisin piirre on se systemaattinen tapa, jolla tuntematonta funktiota approksimoidaan paloittain. Tarkasteltava alue jaetaan osa-alueisiin (elementteihin, E kpl), joiden reunoilta valitaan N kpl solmupisteitä. Funktion approksimaatio esitetään elementteittäin näihin solmupisteisiin liittyvien n_s solmuparametrien avulla.

Pystyvektorifunktion $\{f(x,y,\dots)\}$ approksimaatio elementin e alueella on

$$\{\tilde{f}\} = \sum_{i=k,\ell,\dots} [\Psi]_i^e \{\delta\}_i . \quad (1)$$

$[\Psi(x,y,\dots)]_i^e$ ($i=k,\ell,\dots$) ovat elementin solmupisteitä k,ℓ,\dots vastaavat muotofunktio­matriisit, $\{\delta\}_i$ ($i=k,\ell,\dots$) solmupisteitä k,ℓ,\dots vastaavat solmuparamet­rivektorit ja k,ℓ,\dots ovat elementin e solmupisteiden numerot.

Mikäli probleeman vallitsevat yhtälöt ovat lineaarisia, saadaan jäännös- tai variaatiomenetelmää soveltamalla lineaarinen yhtälöryhmä

$$[K]\{\delta\} = \{R\} , \quad (2)$$

missä

$$\{R\} = \{R_V\} + \{R_S\} , \quad (3)$$

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} \{\delta\}_1 \\ \vdots \\ \{\delta\}_N \end{bmatrix} , \quad \{R_V\} = \begin{bmatrix} \{R_V\}_1 \\ \vdots \\ \{R_V\}_N \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \{R_S\} = \begin{bmatrix} \{R_S\}_1 \\ \vdots \\ \{R_S\}_N \end{bmatrix} . \quad (4)$$

$\{R_V\}$ saadaan vallitsevasta kenttäyhtälöstä ja $\{R_S\}$ reunaehdoista.

Kerroinmatriisi $[K]$ saadaan elementtien kerroinmatriisien $[K]^e$ summana

$$[K] = \sum_{e=1}^E [K]^e . \quad (5)$$

Ainoastaan elementin e solmupisteitä k,ℓ,\dots vastaavat $[K]^e$:n alimatriisit $[K]_{ij}^e$, ($i,j=k,\ell,\dots$) voivat sisältää nol­lasta poik-

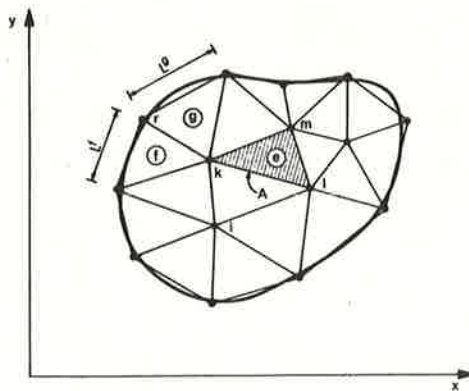
keavia alkioita. Esimerkiksi lineaarisen kolmioelementin tapaukses-
sa saadaan (kuva 1)

$$[K]^e = \begin{bmatrix} & k & l & m \\ k & [K]_{kk}^e & [K]_{kl}^e & [K]_{km}^e \\ l & [K]_{lk}^e & [K]_{ll}^e & [K]_{lm}^e \\ m & [K]_{mk}^e & [K]_{ml}^e & [K]_{mm}^e \\ & \text{muut termit nollia} & & \end{bmatrix} \quad (6)$$

Vastaavasti $\{R_V\}$ saadaan elementtikohtaisten vektoreiden $\{R_V\}^e$
summana

$$\{R_V\} = \sum_{e=1}^E \{R_V\}^e \quad (7)$$

Ainostaan elementin e solmupisteitä k, l, \dots vastaavat alipysty-
vektorit $\{R_V\}_i^e$, ($i=k, l, \dots$) voivat sisältää nolasta poikkeavia
alkioita.



Kuva 1. Alueen jako kolmioelementteihin, merkintöjä.
Fig. 1. Division of the domain into triangular elements,
notations.

Käytännössä $[K]$:n muodostaminen tapahtuu siten, että alimatriisit $[K]_{ij}^e$, ($i=k, l, \dots$) muodostetaan elementeittäin ja sijoitetaan sitä mukaan matriisiin $[K]$ oikeille paikoilleen. Vektori $\{R_V\}$ muodostetaan vastaavalla tavalla elementeittäin elementtikohtaisista alipystyvektoreista $\{R_V\}_i^e$, ($i=k, l, \dots$).

Tuntemattomat solmuparametrit saadaan yhtälöryhmän (2) ratkaisuna. Soveltamalla kaavan (1) mukaista approksimaatiota saadaan tuntemattomalle funktiolle ja sen derivaatoille likiarvot missä tahansa tarkasteltavan alueen pisteessä.

3. ESIMERKKEJÄ

3.1. Kvasiharmoninen yhtälö tasotapauksessa

Toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöä

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad (8)$$

sanotaan kvasiharmoniseksi yhtälöksi. $\phi(x, y)$ on tuntematon x :n ja y :n funktio sekä k_x, k_y ja Q tunnettuja x :n ja y :n funktioita. Näiden merkitystä tietyissä fysikaalisissa probleemeissa on selitetty taulukossa 1. ([2], [4]).

Reunaehtoina voivat esiintyä

$$-k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x - k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y = \bar{q} \quad S_q:lla \quad (9)$$

ja

$$\phi = \bar{\phi} \quad S_\phi:lla \quad (10)$$

Taulukko 1. Kvasiharmonisessa yhtälössä esiintyvien suureiden merkitys eräissä fysikaalisissa ilmiöissä.

Ilmiö	ϕ	k_x, k_y	Q	$q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}$
Potentiaali- virtaus	Nopeuspotentiaali	1	Lähteen antoisuus	Nopeusvektori
Suotovirtaus	Painekorkeus	Vedenläpäisevyys- kertoimet	0	Suotovirtausnopeus- vektori
Stationäärinen lämpökenttä	Lämpötila	Lämmönjohtavuudet	Lämpölähteen teho	Lämpövirran tiheys
Sähkökenttä	Sähköinen potentiaali	Sähköjohtavuudet	Sähk. lähteen antoisuus	Virtatiheys
Magneetti- kenttä	Magneettinen potentiaali	Magn. permeabilii- teetit	Magn. lähteen antoisuus	Magn. vuon tiheys
de Saint Venantin vääntö	Vääntöfunktio	1	2	-
Gravitaatio- kenttä (tyh- jässä tilassa)	Gravitaatio- potentiaali	1	0	Gravitaatiovoima- vektori

Reunat S_ϕ ja S_q muodostavat yhdessä koko reunan

$$S = S_\phi \cup S_q \text{ ja } S_\phi \cap S_q = \text{tyhjä joukko.} \quad (11)$$

n_x ja n_y ovat reunan ulospäin suuntautuvan normaalin suuntakosinit.

Probleeman ratkaisuna saatavien suureiden

$$q_x = -k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad q_y = -k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (12)$$

$$q_{\max} = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} \text{ ja} \quad (13)$$

$$\alpha = \arctan(q_y/q_x) \quad (14)$$

merkitys erilaisissa fysikaalisissa ilmiöissä käy myös ilmi taulukosta 1.

Lineaarista kolmioelementtiä (kuva 1) käyttäen saadaan $\phi(x,y)$:n approksimaatioksi elementin e alueella

$$\tilde{\phi} = \sum_{i=k,\ell,m} \psi_i^e \tilde{\phi}_i, \quad (15)$$

missä $\tilde{\phi}_i$ on $\tilde{\phi}(x,y)$:n solmuarvo solmupisteessä i . Muotofunktiot $\psi_i^e(x,y)$ saadaan kaavasta

$$\psi_i^e = (a_i + b_i x + c_i y)/2A \quad (i=k,\ell,m), \quad (16)$$

missä kertoimet a_i , b_i ja c_i ($i=k,\ell,m$) saadaan muotoa

$$\left. \begin{aligned} a_k &= x_\ell y_m - x_m y_\ell \\ b_k &= y_\ell - y_m \\ c_k &= x_m - x_\ell \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

olevista kaavoista soveltamalla syklistä permutaatiota järjestyksessä k, l, m . A on elementin e pinta-ala, jolle pätee

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=k, l, m} x_i b_i \quad (18)$$

Kaava (15) vastaa nyt kaavaa (1), jossa

$$\{\tilde{f}\}_{1 \times 1} = \tilde{\phi}, \quad [\psi]_{1 \times 1}^e = \psi_i^e \quad \text{ja} \quad \{\delta\}_{1 \times 1} = \tilde{\phi}_i \quad (19)$$

$[K]^e$:n alimatriisit ja $\{R_V\}^e$:n alipystyvektorit saadaan kaavoista

$$[K]_{1 \times 1}^e{}_{ij} = K_{ij}^e = \frac{1}{4A} (k_x b_i b_j + k_y c_i c_j) \quad (i, j = k, l, m) \quad (20)$$

$$\{R_V\}_{1 \times 1}^e = \frac{1}{3} QA \quad (i = k, l, m) \quad (21)$$

sekä $\{R_S\}$:n i :s alipystyvektori kaavasta

$$\{R_S\}_{1 \times 1} = -\frac{1}{2} (L_q^f k^f + L_q^g g) \quad (i = r) \quad (22)$$

Q , k_x ja k_y on oletettu vakioiksi elementin alueella. Samoin \bar{q} on oletettu vakioiksi \bar{q}^f pitkin reunapisteeseen r liittyvän elementin f reunaa ja vakioiksi \bar{q}^g pitkin elementin g reunaa (kuva 1).

Suureille q_x , q_y , q_{\max} ja α saadaan approksimatiiviset arvot kaavoista

$$\tilde{q}_x = -\frac{k_x}{2A} \sum_{i=k, l, m} b_i \tilde{\phi}_i, \quad \tilde{q}_y = -\frac{k_y}{2A} \sum_{i=k, l, m} c_i \tilde{\phi}_i, \quad (23)$$

$$\tilde{q}_{\max} = \sqrt{\tilde{q}_x^2 + \tilde{q}_y^2} \quad \text{ja} \quad (24)$$

$$\tilde{\alpha} = \arctan(\tilde{q}_y / \tilde{q}_x) \quad (25)$$

3.2. Kimmoinen tasojännitystila

Kimmoisen tasojännitystilan ratkaisemista elementtimentelmällä on käsitelty alan oppikirjoissa (esim [1]) paljon, joten probleeman peruskäsitteet oletetaan tässä tunnetuiksi.

Käytetään seuraavia merkintöjä:

u ja v	siirtymät suunnissa x ja y ,
\tilde{u} ja \tilde{v}	siirtymien approksimaatiot suunnissa x ja y ,
\tilde{u}_i ja \tilde{v}_i	siirtymien solmuarvot solmupisteessä i ,
\bar{u}_i ja \bar{v}_i	annetut siirtymien solmuarvot reunasolmupisteessä $i=r$,
\bar{U}_i ja \bar{V}_i	annetut (pinta ja pistekuormista aiheutuvat) solmuvoimat reunasolmupisteessä $i=r$,
X ja Y	tilavuusvoimat,
E ja ν	kimmomoduuli ja Poissonin vakio,
ϵ_x , ϵ_y ja γ_{xy}	muodonmuutokset,
σ_x , σ_y ja τ_{xy}	jännitykset,
$\sigma_1, \sigma_2, \tau_{\max}$ ja α	pääjännitykset, maksimileikkausjännitys ja pääjännitysten suuntakulma.

Lineaarista kolmioelementtiä (kuva 1) käyttäen saadaan $u(x,y)$:n ja $v(x,y)$:n approksimaatioiksi elementin e alueella

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \sum_{i=k,l,m} \begin{bmatrix} \psi_i^e & 0 \\ 0 & \psi_i^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \end{bmatrix}, \quad (26)$$

missä ψ_i^e saadaan kaavasta (16). Kaava (26) vastaa nyt kaavaa (1), jossa

$$\{\tilde{f}\}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix}, [\psi]_{2 \times 2}^e = \begin{bmatrix} \psi_i^e & 0 \\ 0 & \psi_i^e \end{bmatrix} \text{ ja } \{\delta\}_{2 \times 1}^e = \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \end{bmatrix} \quad (27)$$

$[K]^e$:n alimatriisit ja $\{R_V\}^e$:n alipystyvektorit saadaan kaavoista

$$[K]_{ij}^e = \frac{t}{4A} \begin{bmatrix} D_1 b_i b_j + D_3 c_i c_j & D_2 b_i c_j + D_3 c_i b_j \\ D_3 b_i c_j + D_2 c_i b_j & D_3 b_i b_j + D_1 c_i c_j \end{bmatrix} \quad (28)$$

$(i, j = k, l, m)$,

$$\{R_V\}_i^e = \frac{1}{3} A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (i=k, l, m) \quad (29)$$

sekä R_S :n i :s alipystyvektori kaavasta

$$\{R_S\}_i^e = \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \end{bmatrix} \quad (i=r) \quad (30)$$

Kaavoissa (28) ja (29) A on elementin pinta-ala ja t sen paksuus, joka on oletettu vakioksi elementin alueella. Kertoimet b_i ja c_i ($i=k, l, m$) saadaan kaavoista (17) ja

$$D_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad D_2 = D_1 \nu \quad \text{ja} \quad D_3 = D_1 \frac{1-\nu}{2} \quad (31)$$

Kimmomoduuli, Poissonin vakio sekä tilavuusvoimat (pinta-ala-yksikköä kohti) on myös oletettu vakioiksi elementin alueella. Muodonmuutosten ja jännitysten approksimaatiot (vakioita elementin alueella) ovat

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_x &= \frac{1}{2A} \sum_{i=k,l,m} b_i \tilde{u}_i, \\ \tilde{\epsilon}_y &= \frac{1}{2A} \sum_{i=k,l,m} c_i \tilde{v}_i, \\ \tilde{\gamma}_{xy} &= \frac{1}{2A} \sum_{i=k,l,m} (b_i \tilde{v}_i + c_i \tilde{u}_i)\end{aligned}\tag{32}$$

ja

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_x &= D_1 \tilde{\epsilon}_x + D_2 \tilde{\epsilon}_y, \\ \tilde{\sigma}_y &= D_2 \tilde{\epsilon}_x + D_1 \tilde{\epsilon}_y, \\ \tilde{\tau}_{xy} &= D_3 \tilde{\gamma}_{xy}.\end{aligned}\tag{33}$$

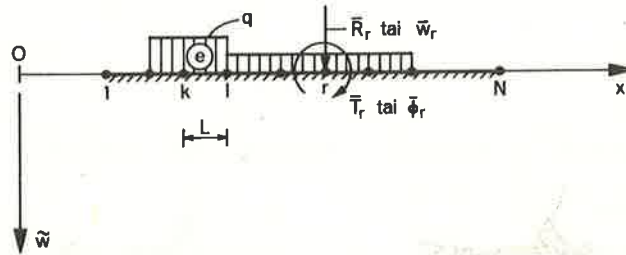
Pääjännitysten, maksimileikkausjännityksen sekä pääjännitysten suuntakulman approksimaatiot ovat

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{1,2} &= 1/2 (\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y) \pm \sqrt{(\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y)^2 + 4\tilde{\tau}_{xy}^2}, \\ \tilde{\tau}_{\max} &= 1/2(\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2) \quad \text{ja} \\ \tilde{\alpha} &= 1/2 \arctan\left(\frac{2\tilde{\tau}_{xy}}{\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y}\right)\end{aligned}\tag{34}$$

3.3. Kimmoisella alustalla oleva palkki

Käytetään seuraavia merkintöjä (kuva 2):

- w taipuma,
 \tilde{w} taipuman approksimaatio,
 \tilde{w}_i ja $\tilde{\phi}_i$ taipuman ja kiertymän solmuarvot solmupisteessä i ,
 \bar{w}_i ja $\bar{\phi}_i$ annettu taipuma ja kiertymä solmupisteessä $i=r$,
 \bar{R}_i ja \bar{T}_i annettu solmuvoima ja solmumomentti solmupisteessä $i=r$,
 q jakautunut kuormitus,
 EI palkin taivutusjäykkyys,
 k alustaluku sekä
 M ja Q momentti ja leikkausvoima.



Kuva 2. Kimmoisella alustalla oleva palkki, merkintöjä.
 Fig. 2. A beam on elastic foundation, notations.

Toisen kertaluvun viivaelementtiä käyttäen saadaan $w(x)$:n approksimaatioksi elementin e alueella

$$\tilde{w} = \sum_{i=k, l} [\psi_i^e \psi_i^{\prime e}] \begin{bmatrix} \tilde{w}_i \\ \tilde{\phi}_i \end{bmatrix}, \quad (35)$$

missä

$$\psi_k^e = \zeta_k^2 (3 - 2\zeta_k), \quad \psi_k^{\prime e} = \zeta_k^2 \zeta_l L,$$

$$\psi_{\ell}^e = \zeta_{\ell}^2(3-2\zeta_{\ell}), \quad \psi'_{\ell}{}^e = -\zeta_k \zeta_{\ell}^2 L \quad (36)$$

ja

$$\zeta_k = (x_{\ell} - x)/L, \quad \zeta_{\ell} = (x - x_k)/L \quad (37)$$

sekä L on elementin pituus. Kaava (35) vastaa nyt kaavaa (1), jossa

$$\{f\}_{1 \times 1} = \tilde{w}, \quad [\Psi]_{1 \times 2}^e = [\psi_i^e \quad \psi_i^e] \quad \text{ja} \quad \{\delta\}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_i \\ \phi_i \end{bmatrix}. \quad (38)$$

$[K]^e$:n alimatriisit ja $\{R_V\}^e$:n alipystyvektorit saadaan kaavoista

$$\begin{bmatrix} [K]_{kk}^e & [K]_{k\ell}^e \\ [K]_{\ell k}^e & [K]_{\ell\ell}^e \end{bmatrix}_{4 \times 4} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$+ \frac{kL^2}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix},$$

$$\{R_V\}_k = \frac{qL}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ L \end{bmatrix}, \quad \{R_V\}_{\ell} = \frac{qL}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ -L \end{bmatrix} \quad (40)$$

sekä $\{R_S\}$:n i :s alipystyvektori kaavasta

$$\{R_S\}_i = \begin{bmatrix} \bar{R}_i \\ \bar{T}_i \end{bmatrix} \quad (i=r) \quad (41)$$

Palkin taivutusjäykkyys, alustaluku ja jakautunut kuormitus on oletettu vakioksi elementin alueella. Leikkausvoiman ja taivutusmomentin (elementin keskipisteessä) approksimatiiviset arvot ovat

$$\tilde{Q} = - \frac{6EI}{L^3} (2\tilde{w}_k + L\tilde{\phi}_k - 2\tilde{w}_l + L\tilde{\phi}_l) \quad (42)$$

ja

$$\tilde{M} = - \frac{EI}{L} (-\tilde{\phi}_k + \tilde{\phi}_l) . \quad (43)$$

4. OHJELMA

4.1. Pääohjelma

Ohjelma on laadittu täydellistä moduliperiaatetta noudattaen: Pääohjelma sisältää ainoastaan määrittelyjä ja aliohjelmakutsuja. Aliohjelmat ovat täysin itsenäisiä, koska COMMON määrittelyjä ei ole käytetty. Niitä voidaan pitää mustina laatikkoina, jotka suorittavat tietyn tehtävän. Aliohjelmakutsuissa samoin kuin aliohjelmien nimien yhteydessä on lueteltu niiden muuttujien nimet, joita käytetään argumentteina aliohjelmassa (sisääntuloparametrit) tai joille aliohjelma laskee tietyn arvon (ulostuloparametrit).

Pääohjelman alussa annetaan PARAMETER määrittelyllä [5] maksimi-arvot MNP, MNE, MNB,... kokonaislukumuuttujille NP, NE, NB,... . DIMENSION määrittelyllä varataan tila tarvittaville taulukkumuuttujille.

Pääohjelma kutsuu aliohjelmia seuraavassa järjestyksessä:

1. NDATA, joka lukee ja tulostaa otsikon sekä lukumäärätiedot;
2. GDATA, joka lukee ja tulostaa materiaalitiedot, solmupisteiden koordinaatit, elementtejä koskevat tiedot ja reunaehdot;

3. FORMSK, joka laskee $[K]$:n alkiot ja sijoittaa ne taulukkoon SK;
4. FORMRV, joka laskee $\{R_v\}$:n alkiot ja sijoittaa ne taulukkoon RV;
5. BOUCON, joka ottaa huomioon reunaehdot;
6. SOLVE, joka ratkaisee lineaarisen, symmetrisen ja nauhamaisen yhtälöryhmän;
7. PAROUT, joka tulostaa solmuparametrien arvot;
8. DEROUT, joka laskee ja tulostaa derivaattasuureet.

Aliohjelma FORMSK kutsuu aliohjelmaa FORMEK, joka laskee $[K]^e$:n alimatriisien $[K]_{ij}^e$ alkiot.

Ohjelman modulaarisuuden vuoksi erityyppisiä kenttäprobleemeja ratkaistaessa tarvitsee muutoksia tehdä ainoastaan aliohjelmiin FORMEK, FORMRV ja DEROUT.

4.2. Aliohjelmat

Jokaisen aliohjelman alussa määritellään DIMENSION käskyllä aliohjelmassa käytettävien taulukkomuuttujien dimensiot, jotka määräytyvät sisäänmenoparametreista. Seuraavassa aliohjelmakohtaisessa esityksessä dimensiointeihin ei enää puututa.

NDATA

Aliohjelma lukee reikäkorteilta arvoja otsikko- ja lukumäärämuuttujille. Datojen lukemisen jälkeen se laskee elementtikerroinmatriisin ja koko systeemin kerroinmatriisin vaakarivien lukumäärän sekä tulostaa lukemansa datat rivikirjoittimelle.

Aliohjelman ulostuloparametrit ovat:

Nimi	Tyyppi	Selitys
TITLE	merkkijono	otsikko
NP	kok.luku	solmupisteiden lukumäärä
NE	"	elementtien lukumäärä
NDI	"	tarkasteltavan alueen dimensioiden lukumäärä
NDF	"	solmuparametrien lukumäärä solmupistettä kohti
NCN	"	elementin solmupisteiden lukumäärä
NB	"	reunaehtosolmupisteiden lukumäärä
NMAT	"	materiaalityyppien lukumäärä
NMP	"	materiaaliparametrien lukumäärä
NBA	"	kerroinmatriisin nauhaleveys (kuva 3)
NEK	"	elementtikerroinmatriisin dimensio
NEQ	"	yhtälöiden lukumäärä

GDATA

Aliohjelman sisääntuloparametrit ovat: NP, NE, NB, NDI, NDF, NCN, MAT ja NMP, joiden merkitys selviää edeltä.

Aliohjelma lukee reikäkorteilta arvoja taulukkomuuttujille sekä tulostaa lukemansa rivikirjoittimelle.

Aliohjelman ulostuloparametrit ovat:

Nimi	Tyyppi	Dimensio	Selitys
NBC	kok.luku	NBx1	reunaehtosolmupisteiden numerot sis. taulukko
NFIX	"	"	reunaehtotyyppien sis. taulukko
BV	reaalil.	NBxNDF	reunaehtoarvot sis. taulukko
IMAT	kok.luku	NEx1	elementtien materiaalinumerot sis. taulukko

NOP	kok.luku	NE×NCN	elementtien solmupistenumerot sis. taulukko
ORT	reaalil.	NMAT×NMP	materiaaliparametrit sis. taulukko
CORD	- " -	NP×NDI	solmupisteiden koordinaatit sis. taulukko

FORMEK

Aliohjelman sisääntuloparametrit ovat: IE (elementin numero), NP, NE, NMAT, NMP, IMAT, NOP, ORT ja CORD, joiden merkitystä on edellä selitetty.

Aliohjelma muodostaa elementin IE kerroinmatriisin nollasta eroavat alkiot ja sijoittaa ne taulukkoon EK. Se kirjoittaa myös DEROUT aliohjelmassa tarvittavat elementtikohtaiset tiedot apumuistiin. Jokaiselle käsiteltävistä esimerkeistä on oma aliohjelmansa, joka laskee alkiot vastaavista kaavoista (20), (28) ja (39).

Aliohjelman ulostuloparametrit ovat:

EK	reaalil.	NEK×NEK	elementtikerroinmatriisin nollasta eroavat alkiot sis. taulukko
----	----------	---------	--

FORMSK

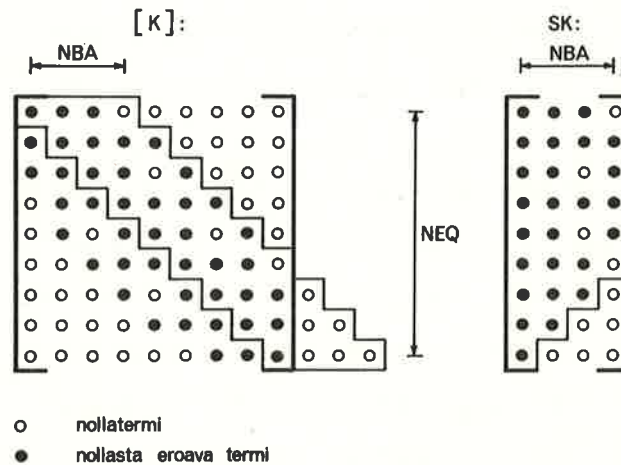
Aliohjelman sisääntuloparametrit ovat: NP, NE, NDI, NDF, NCN, NEK, NEQ, NBA, NMAT, NMP, IMAT, NOP, ORT ja CORD, joiden merkitys käy ilmi edeltä.

FORMSK aliohjelma kutsuu aliohjelmaa FORMEK, jonka laskeman elementtikerroinmatriisin nollasta eroavat alkiot se sijoittaa koko systeemin kerroinmatriisiin. Koska koko systeemin kerroinmatriisi on yleensä symmetrinen ja nauhamainen, säilytetään siitä taulukossa ai-noastaan kuvassa 3 havainnollistettu osa. Kun kaikki elementit on

käyty läpi, siirtyy toteutus pääohjelmaan.

Aliohjelman ulostuloparametrit ovat:

SK reaalil. $NEQ \times NBA$ kerroinmatriisin [K] kuvassa 3 havainnollistetun osan sisältävä taulukko



Kuva 3. Kerroinmatriisin [K] säilyttäminen taulukossa SK.
Fig. 3. Storing matrix [K] in array SK.

FORMRV

Aliohjelman sisääntuloparametrit ovat: NP, NE, NEQ, NMAT, NMP, IMAT, NOP, ORT ja CORD.

Aliohjelma muodostaa vektorin $\{R_V\}$ alkiot elementeittään. Nämä lasketaan esimerkkejä 3.1, 3.2 ja 3.3 vastaavista kaavoista (21), (29) ja (40). Kvasiharmonisen yhtälön ja tasojännitystilan $\{R_V\}$ vektorit saadaan samalla aliohjelmalla. Koska kimmoisella alustalla olevan palkin ratkaisussa käytetään erityyppistä elementtiä, se tarvitsee oman elementtityypin mukaisen aliohjelman. Vektorin $\{R_V\}$ alkiot sijoitetaan taulukkoon RV.

Aliohjelman ulostuloparametrit:

RV reaalil. NEQx1 $\{R_V\}$:n alkiot sis. taulukko

BOUCON

Aliohjelman sisääntuloparametrit ovat: NB, NDF, NEQ, NBA, NBC, NFIX, BV, SK ja R.

Aliohjelma sijoittaa datatietoina annetut reunaehdot yhtälöryhmään (2). Reunaehtoina voidaan antaa joko solmuparametrien arvoja tai $\{R_S\}$:n alkioita.

Muuttuja NFIX ilmaisee reunaehdon tyyppin ao. reunaehtosolmupisteessä. 2 vapausasteen tapauksessa se voi saada arvot 00, 01, 10, 11, jolloin reunaehdot ovat vastaavasti: vapausasteita 1. ja 2. vastaavat $\{R_S\}$:n alkiot annettu, vapausastetta 1 vastaava $\{R_S\}$:n alkiot annettu ja vapausastetta 2. vastaava solmuparametrin arvo annettu jne.

Reunaehtoina annetut solmuparametrien arvot $\bar{\delta}_i$ ($i=r$) otetaan huomioon seuraavasti: alkuperäinen yhtälöryhmä (2) korvataan yhtälöryhmällä

$$[K^*]\{\delta\} = \{R^*\} , \quad (44)$$

missä

$$K_{ii}^* = 10^{20} K_{ii} \quad \text{ja} \quad R_i^* = 10^{20} K_{ii} \bar{\delta}_i . \quad (45)$$

Muut $[K^*]$:n ja $\{R^*\}$:n alkiot ovat samat kuin $[K]$:n ja $\{R\}$:n. Yhtälöryhmän (44) ratkaisu toteuttaa likimäärin yhtälöt

$$\tilde{\delta}_i = \bar{\delta}_i . \quad (46)$$

Reunaehtoina annetut $\{R_S\}$:n alkiot lisätään taulukkoon R oikeille paikoilleen.

Aliohjelman ulostuloparametrit ovat:

SK	reaalil.	NEQxNBA	reunaehdoilla redusoidun kerroinmatriisin sis. taulukko
R	- " -	NEQx1	reunaehdoilla redusoidun vakiovektorin sis. taulukko

SOLVE

Aliohjelman sisääntuloparametrit ovat: NEQ, NBA, SK ja R (yht.-ryhmän (44) vakiovektori).

Aliohjelma ratkaisee lineaarisen, symmetrisen ja nauhamaisen yhtälöryhmän Gaussin eliminaatiota käyttäen. Ratkaisuvektorin alkiot sijoitetaan taulukkoon R.

Aliohjelman ulostuloparametrit:

R	reaalil.	NEQx1	solmuparametrit sis. taulukko
---	----------	-------	-------------------------------

PAROUT

Aliohjelman sisääntuloparametrit ovat: NP, NDF, NEQ ja DEL (solmuparametrit sis. taulukko).

Aliohjelma tulostaa solmupisteiden numerot ja solmuparametrien arvot.

DEROUT

Aliohjelman sisääntuloparametrit ovat: NE, NEQ ja DEL.

Aliohjelma lukee elementeittäin FORMEK:n apumuistiin sijoittamat tiedot sekä laskee ja tulostaa derivaattasuureiden arvot.

5. KÄYTTÖOHJE

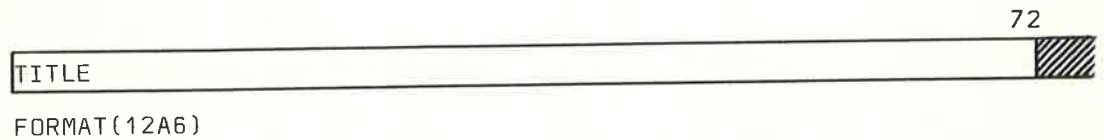
Ohjelma on tarkoitettu ainoastaan pienten probleemien ratkaisuun. Esitetyssä muodossaan ohjelmaa voidaan käyttää tehtävissä, joissa

$$NP \times NDF \times NBA < 54\ 000 \quad (47)$$

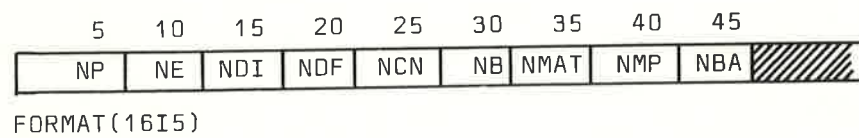
Tarvittavat ajo- ja ohjauskäskyt ovat saatavissa lähteestä [5].

Ohjelma tarvitsee seuraavat datakortit:

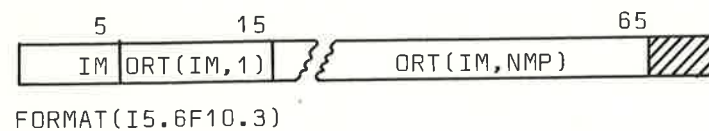
1. Otsikko



2. Lukumäärätiedot



3. Materiaalitiedot, 1 kortti jokaista materiaalityyppiä kohti



IM on materiaalityypin numero

4. Solmupisteiden koordinaatit, 1 kortti jokaista solmupistettä kohti

5	15	35
IP	CORD(IP,1)	CORD(IP,NDI)

FORMAT(I5, 3F10.3)

IP on solmupisteiden numero

5. Elementin solmupisteiden ja materiaalityypin numerot, 1 kortti jokaista elementtiä kohti

5	10	65	60
IE	NOP(IE,1)	NOP(IE,NCN)	IMAT(IE)

FORMAT(16I5)

6. Reunaehdot, 1 kortti jokaista reunaehtosolmupistettä kohti

5	10	20	60
NBC(IB)	NFIX(IB)	BV(IB,1)	BV(IB,NDF)

FORMAT(2I5, 6F10.3)

Ohjelma tulostaa selostavat otsikot ja lasketut suureet rivi-
kirjoittimelle.

LIITE A Ohjelman listaus

LIITE B Esimerkkiajot

KIRJALLISUUTTA

- 1 Zienkiewicz D.C., The finite element method in engineering science. 2. painos. Lontoo, McGraw-Hill, 1971.
- 2 Norrie, D.H. & deVries, G., The finite element method. 1. painos, New York, Academic press, 1973.

- 3 Mikkola M., Kimmoisella alustalla oleva palkki. Otaniemi 1969. Teknillinen korkeakoulu rakennusstatiiikka. Julkaisu 1.
- 4 Orivuori S. & Laine H., Elementtimenetelmän soveltaminen kvasi-harmonisen yhtälön ratkaisemiseen. Rakenteiden mekaniikka 6 (1973)2, s. 99...113.
- 5 Univac 1100 Series, Operating System. Sperry Rand Corporation. 1974.

Jukka Aalto, dipl.ins., Valtion teknillistieteellisen toimikunnan tutkimusassistentti.
Antti Pramila, tekn.yo., TKK:n vt. vanhempi assistentti.

LIITE A OHJELMAN LISTAUS

```

C      MAIN-YKSINKERTAINEN PERUSOHJELMA
PARAMETER NMP=250, NNE=500, NNR=50, NND1=2, NPDF=2, MNC=1, MNRA=60
X, MNMAT=5, MNMP=5
X, MNEQ=MNDP*MNP, MNEK=MNDP*MNC
DIMENSION CORD(MNP, NND1), NOP(MNE, MNCN), IMAT(MNF), ORT(MNMAT, MNMP)
X, NRC(MNP), NFIX(MNR), RV(MNP, NPDF)
X, EK(MNEK, MNEK), SK(MNEQ, MNRA), P(MNEQ)
CALL NDATA(NP, NE, NR, NDI, NDF, NCN, NFK, NEO, NPA, NMAT, NMP)
CALL GDATA(NP, NE, NR, NDI, NDF, NCN, NMAT, NMP, NRC, NFIX, RV, IMAT, NOP, ORT)
X, CORD)
CALL FORMSK(NP, NE, NDI, NDF, NCN, NEK, NEO, NPA, NMAT, NMP, IMAT, NOP, ORT)
X, CORD, EK, SK)
CALL FORMRV(NP, NE, NDF, NEO, NMAT, NMP, IMAT, NOP, ORT, CORD, R)
CALL HOICOM(NP, NDF, NEO, NPA, NRC, NFIX, RV, SK, R)
CALL SOLVE(NFO, NPA, TV, R)
CALL PAROIT(NP, NDF, NFO, R)
CALL DFRONT(NE, NFO, U)
STOP
END

SIIRROITTIME NDATA(NP, NE, NR, NDI, NDF, NCN, NEK, NEO, NPA, NMAT, NMP)
DIMENSION TITLE(12)
READ(5, 1) TITLE
WRITE(6, 2) TITLE
READ(5, 3) NP, NE, NDI, NDF, NCN, NPA, NMAT, NMP, NPA
WRITE(6, 4)
WRITE(6, 5) NP, NE, NDI, NDF, NCN, NPA, NMAT, NMP, NPA
NE=MNDP*MNC
NFO=MNDP*MNP
RETURN
1 FORMAT(12A6)
2 FORMAT(12I, 32A4)
3 FORMAT(16I5)
4 FORMAT(4A4C, NP, NE, NDI, NDF, NCN, NR, NMAT, NMP, NPA)
END

SIIRROITTIME GDATA(NP, NE, NR, NDI, NDF, NCN, NMAT, NMP, NRC, NFIX, RV, IMAT)
X, NOP, ORT, CORD)
DIMENSION NRC(MNP), NFIX(MNR), RV(MNP, NPDF), IMAT(MNF), NOP(MNE, MNCN)
X, ORT(MNMAT, MNMP), CORD(MNP, NND1)
WRITE(6, 1)
DO 10 I=1, MNMAT
READ(5, 2) IM, (ORT(IM, IMP), IMP=1, MNP)
1 WRITE(6, 2) IM, (ORT(IM, IMP), IMP=1, MNP)
WRITE(6, 3)
DO 20 I=1, NMP
READ(5, 4) IP, (CORD(IP, IDI), IDI=1, NDI)
2 WRITE(6, 4) IP, (CORD(IP, IDI), IDI=1, NDI)
WRITE(6, 5)
DO 30 I=1, NE
READ(5, 6) IE, (NOP(IE, ICN), ICN=1, MNCN), IMAT(IE)
3 WRITE(6, 6) IE, (NOP(IE, ICN), ICN=1, MNCN), IMAT(IE)
WRITE(6, 7)
DO 40 IR=1, NNR
READ(5, 8) NRC(IR), NFIX(IR), (RV(IR, IDF), IDF=1, NPDF)
4 WRITE(6, 8) NRC(IR), NFIX(IR), (RV(IR, IDF), IDF=1, NPDF)
RETURN
1 FORMAT(17HONNATERIAALITIEDOT)
2 FORMAT(15, 6F10, 3)
3 FORMAT(13HOSOLMUPISTEET)
4 FORMAT(15, 3F10, 3)
5 FORMAT(13HOLEMENTIT)
6 FORMAT(16I5)
7 FORMAT(11HCREINAENDOT)
8 FORMAT(21, 6F10, 3)
END
    
```


HUOMAUTUKSIA

```

SUBROUTINE FORMEK(IE,NP,NF,NMAT,NMP,IMAT,NOP,ORT,CORD, EK)
DIMENSION IMAT(NF),NOP(NF,3),ORT(NMAT,NMP),CORD(NP,2),EK(3,3)
X,B(3),C(3)
IF(IE.FG.1)RFWIND 11
IM=IMAT(IE)
XK=ORT(IM,1)
YK=ORT(IM,2)
K=NOP(IE,1)
L=NOP(IE,2)
M=NOP(IE,3)
R(1)=CORD(L,2)-CORD(M,2)
R(2)=CORD(M,2)-CORD(K,2)
R(3)=CORD(K,2)-CORD(L,2)
C(1)=CORD(M,1)-CORD(L,1)
C(2)=CORD(K,1)-CORD(M,1)
C(3)=CORD(L,1)-CORD(K,1)
AE=.5*(CORD(K,1)*R(1)+CORD(L,1)*R(2)+CORD(M,1)*R(3))
WRITE(11)XK,YK,K,L,M,AE,(R(1),C(1),I=1,3)
DO 10 I=1,3
DO 10 J=1,3
10 EK(I,J)=(XK*R(1)+R(J)+YK*C(1)+C(J))/4./AF
RETURN
END
    
```

k_x ja k_y

ks. kaavat (17)

ks. kaava (18)

ks. kaava (20)

```

SUBROUTINE FORMEK(IE,NP,NF,NMAT,NMP,IMAT,NOP,ORT,CORD, EK)
DIMENSION IMAT(NF),NOP(NF,3),ORT(NMAT,NMP),CORD(NP,2),EK(6,6)
X,B(3),C(3)
IF(IE.FG.1)RFWIND 11
IM=IMAT(IE)
F=ORT(IM,1)
POIS=ORT(IM,2)
T=ORT(IM,3)
D1=E/(1.-POIS**2)
D2=D1*POIS
D3=D1*(1.-POIS)/2.
K=NOP(IE,1)
L=NOP(IE,2)
M=NOP(IE,3)
R(1)=CORD(L,2)-CORD(M,2)
R(2)=CORD(M,2)-CORD(K,2)
R(3)=CORD(K,2)-CORD(L,2)
C(1)=CORD(M,1)-CORD(L,1)
C(2)=CORD(K,1)-CORD(M,1)
C(3)=CORD(L,1)-CORD(K,1)
AE=.5*(CORD(K,1)*R(1)+CORD(L,1)*R(2)+CORD(M,1)*R(3))
WRITE(11)D1,D2,D3,K,L,M,AE,(R(1),C(1),I=1,3)
DO 10 I=1,3
DO 10 J=1,3
FK(2*I-1,2*J-1)=(D1+R(I)+D(J)+D3*C(I)+C(J))/T/4./AE
FK(2*I-1,2*J)=(D2+R(I)+C(J)+D3*C(I)+R(J))/T/4./AE
FK(2*I,2*J-1)=(D3+R(I)+C(J)+D2*C(I)+R(J))/T/4./AF
FK(2*I,2*J)=(D3+R(I)+R(J)+D1+C(I)+C(J))/T/4./AE
RETURN
END
    
```

ks. kaavat (31)

ks. kaavat (17)

ks. kaava (18)

ks. kaava (28)

```

SUBROUTINE FORMEK(IE,NP,NF,NMAT,NMP,IMAT,NOP,ORT,CORD, EK)
DIMENSION IMAT(NF),NOP(NF,2),ORT(NMAT,NMP),CORD(NP,1),EK(4,4)
IF(IE.FG.1)RFWIND 11
IM=IMAT(IE)
EI=ORT(IM,1)
C=ORT(IM,2)
K=NOP(IE,1)
L=NOP(IE,2)
AE=CORD(L,1)-CORD(K,1)
WRITE(11)EI,C,K,L,AE
FK(1,1)=12.*EI/AF**3+156./420.*C**E
FK(1,2)=6.*EI/AF**2+22./420.*C**AE**2
FK(1,3)=-12.*EI/AF**3+54./420.*C**AE
EK(1,4)=6.*EI/AF**2-15./420.*C**AE**2
EK(2,1)=FK(1,2)
EK(2,2)=4.*EI/AF**4+4./420.*C**AE**3
FK(2,3)=-EK(1,4)
EK(2,4)=2.*EI/AF**3-420.*C**AE**3
FK(3,1)=FK(1,3)
EK(3,2)=EK(2,3)
EK(3,3)=FK(1,1)
EK(3,4)=-EK(1,2)
EK(4,1)=EK(1,4)
EK(4,2)=EK(2,4)
EK(4,3)=FK(3,4)
EK(4,4)=EK(2,2)
RETURN
END
    
```

ks. kaava (39)

HUOMAUTUKSIA

```

SUBROUTINE FORMSK(NP,NE,ND1,ND2,NCN,NEK,NEQ,NRA,NMAT,NMP,IMAT,NOP
Y,ORT,CORD,EK,SK)
DIMENSION IMAT(NE),NOP(NE,NCN),ORT(NMAT,NMP),CORD(NP,ND1)
X,EK(NEK,NEK),SK(NEQ,NBA)
DO 30 IE=1,NE
CALL FORMEK(IE,NP,NE,NMAT,NMP,IMAT,NOP,ORT,CORD,EK)
DO 30 ICN=1,NCN
ISK=(NOP(IE,ICN)-1)*ND2
IF (ISK)30,10,10
10 DO 30 IDF=1,ND2
ISK=ISK+1
IEK=(ICN-1)*ND2+IDF
DO 30 JCN=1,NCN
JSK1=(NOP(IE,JCN)-1)*ND2
DO 30 JDF=1,ND2
JSK=JSK1+JDF+1-ISK
JEK=(JCN-1)*ND2+JDF
IF (JSK)30,30,20
20 SK(ISK,JSK)=SK(ISK,JSK)+EK(IEK,JEK)
30 CONTINUE
RETURN
END
    
```

ks. kuva 3

```

SUBROUTINE FORMRV(NP,NE,ND2,NEQ,NMAT,NMP,IMAT,NOP,ORT,CORD,RV)
DIMENSION IMAT(NE),NOP(NE,2),ORT(NMAT,NMP),CORD(NP,2),RV(NEQ)
DO 10 IE=1,NE
IM=IMAT(IE)
K=NOP(IE,1)
L=NOP(IE,2)
M=NOP(IE,3)
AE=.5*(CORD(K,1)+CORD(L,2)-CORD(M,2))+CORD(L,1)+CORD(M,2)
V=CORD(K,2)+CORD(M,1)+CORD(K,2)-CORD(L,2)
DO 10 ICN=1,2
IS=(NOP(IE,ICN)-1)*ND2
DO 10 IDF=1,ND2
IS=IS+1
10 RV(IS)=RV(IS)+ORT(IM,NMP-ND2+IDF)*AE/V
RETURN
END
    
```

ks. kaava (18)

ks. kaavat (21) ja (29)

```

SUBROUTINE FORMRV(NP,NE,ND2,NEQ,NMAT,NMP,IMAT,NOP,ORT,CORD,RV)
DIMENSION IMAT(NE),NOP(NE,2),ORT(NMAT,NMP),CORD(NP,1),RV(NEQ)
DO 10 IE=1,NE
IM=IMAT(IE)
K=NOP(IE,1)
L=NOP(IE,2)
AE=CORD(L,1)-CORD(K,1)
RV(2+K-1)=RV(2+K-1)+AE+ORT(IM,NMP)/2
RV(2+K)=RV(2+K)+AE+2*ORT(IM,NMP)/2
RV(2+L-1)=RV(2+L-1)+AE+ORT(IM,NMP)/2
10 RV(2+L)=RV(2+L)-AE+2*ORT(IM,NMP)/2
RETURN
END
    
```

ks. kaava (40)

```

SUBROUTINE BOHED(NB,ND2,NEQ,NRA,NRC,NFIX,RV,SK,R)
DIMENSION NRC(NB),NFIX(NB),RV(NB,ND2),SK(NEQ,NBA),R(NEQ)
DO 10 IR=1,NB
IS=(NRC(IR)-1)*ND2
NX=100+(ND2-1)
NF=NFIX(IR)
DO 10 IDF=1,ND2
IS=IS+1
IC=NF/NX
IF (IC.EQ.0)R(IS)=R(IS)+RV(IR,IDF)
IF (IC.EQ.1)SK(IS,1)=SK(IS,1)+.E20
IF (IC.EQ.1)R(IS)=RV(IR,IDF)+SK(IS,1)
NF=NF-NX+IC
10 NX=NX/10
RETURN
END
    
```

ks. kaava (45)

HUOMAUTUKSIA

```

SUBROUTINE SOLVE(NEQ,NRA,SK,R)
DIMENSION SK(NEQ,NRA),R(NEQ)
DO 60 N=1,NEQ
I=N
DO 50 L=2,NRA
I=I+1
IF (SK(N,L))10,50,10
10 C=SK(N,L)/SK(N,1)
J=0
DO 30 K=L,NRA
J=J+1
IF (SK(N,K))20,30,20
20 SK(I,J)=SK(I,J)-C*SK(N,K)
30 CONTINUE
40 SK(N,L)=C
R(I)=R(I)-C*R(N)
50 CONTINUE
60 R(N)=R(N)/SK(N,1)
N=NEQ
70 N=N-1
IF (N)10,110,80
80 L=N
DO 100 K=2,NRA
L=L+1
IF (SK(N,K))90,100,90
90 R(N)=R(N)-SK(N,K)*R(L)
100 CONTINUE
GO TO 70
110 RETURN
END
    
```

```

SUBROUTINE PAROIT(NP,NDF,NPO,DEL)
DIMENSION DEL(NEQ)
WRITE(6,1)
DO 10 IP=1,NP
IS1=(IP-1)*NDF+1
IS2=IP*NDF
10 WRITE(6,2)IP,(DEL(IS),IS=IS1,IS2)
RETURN
1 FORMAT(16H15OLMUPARAMETRI)
2 FORMAT(15,6E15,4)
END
    
```

```

SUBROUTINE DFRONT(NE,NEQ,DEL)
DIMENSION DEL(NEQ)
WRITE(6,1)
REWIND 11
DO 10 IE=1,NF
READ(11)XK,YK,K,L,M,AE,AK,CK,AL,CL,AM,CM
OX=-XK*(AK*DEL(1)+AL*DEL(2)+AM*DEL(3))/2, /AE
OY=-YK*(CK*DEL(1)+CL*DEL(2)+CM*DEL(3))/2, /AE
OMAX=SQRT(OX**2+OY**2)
ANGLE=57.296*ATAN2(OY,OX)
10 WRITE(6,2)IE,OX,OY,OMAX,ANGLE
RETURN
1 FORMAT(50H0 IE OX OY OMAX KU)
X LMA)
2 FORMAT(15,3E15,4,1F10,3)
END
    
```

ks. kaavat (23), (24) ja (25)

```

SUBROUTINE DFRONT(NE,NEQ,DFL)
DIMENSION DEL(NEQ)
WRITE(6,1)
REWIND 11
DO 10 IE=1,NE
READ(11)D1,D2,D3,K,L,M,AE,FK,CK,AL,CL,AM,CM
EX=(FK*DEL(2+K-1)+AL*DEL(2+L-1)+AM*DEL(2+M-1))/2, /AE
EY=(CK*DEL(2+K-1)+CL*DEL(2+L-1)+CM*DEL(2+M-1))/2, /AE
GX=(FK*DEL(2+K-1)+AL*DEL(2+L-1)+CM*DEL(2+M-1))
SY=D1*EX+D2*EY
TY=D3*GX
S1=.5*((SX+SY)+SQRT((SX-SY)**2+.4*TX**2))
S2=.5*((SX+SY)-SQRT((SX-SY)**2+.4*TX**2))
TMAX=.5*(S1-S2)
ANGLE=29.646*ATAN2(2.*TX,SX-SY)
10 WRITE(6,2)IE,SX,SY,TTY,S1,S2,TMAX,ANGLE
1 FORMAT(104H0 IF SX SY TMAX SY X LMA)
X S1 S2 TMAX SY X LMA)
2 FORMAT(15,6E15,6,1F10,3)
RETURN
END
    
```

ks. kaavat (32), (33) ja (34)

HUOMAUTUKSIA

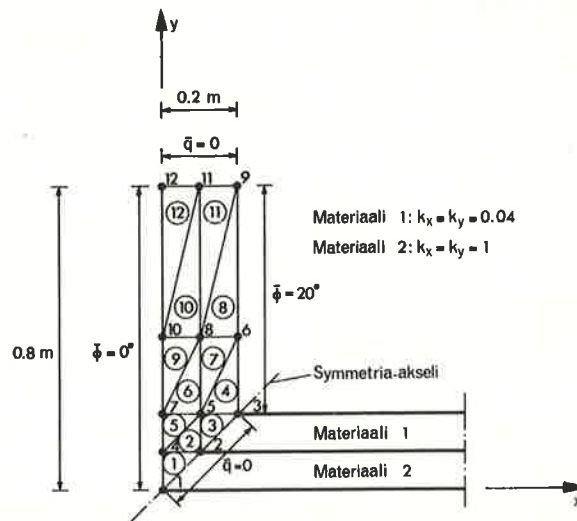
```

SUUNTOIT)N) (P)M)IT(NE)N)FL)FL)
DIMENSION DEL(4,6)
WRITE(A,1)
REWIND 11
DO 1 IP=1,NF
  PFAC(11)EI,C*AL,AE
  PMT=EI/AF*(DFL(2*IP)-DFL(2*IP))
  DM=C*EI/AL*(1+(2*DEL(2*IP-1)+AE)*EI(2*IP)-2*DFL(2*IP-1))  ks. kaavat (42) ja (43)
  *AFF*DEL(2*IP))
1: WRITE(6,2)IE,AM,G
  RETURN
1 FORMAT(27H: 1E  M  G)
2 FORMAT(15,2E11,6)
  END
    
```

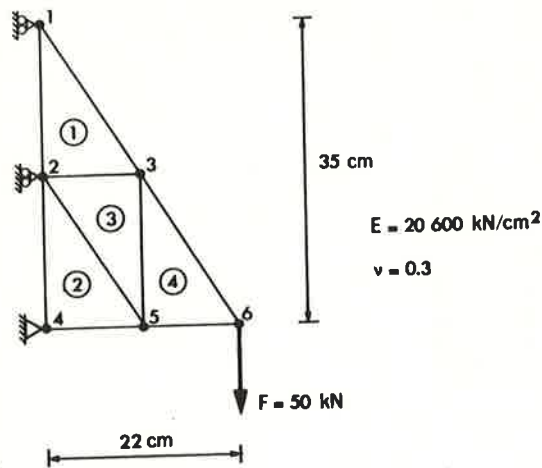
LIITE B ESIMERKKIAJOT

Esimerkkiajona käytetään kvasiharmonisen yhtälön osalta lämmön johtumista kuvan B. 1 mukaisessa tapauksessa. Tasojännitystapauksen esimerkin elementtiverkko ja muut tarvittavat tiedot selviävät kuvasta B. 2. Kuvassa B. 3 on esitetty esimerkkinä laskettu kimmoisella alustalla oleva palkki.

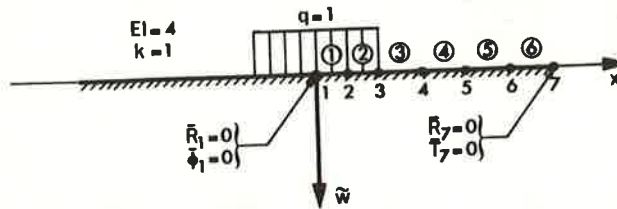
Esimerkkiajoissa elementtien ja solmupisteiden lukumäärä on tilan säästämisen vuoksi valittu mahdollisimman pieneksi.



Kuva B. 1. Testiesimerkki 1, lämmönjohtuminen.
Fig. B. 1. Test example 1, heat conduction.



Kuva B. 2. Testiesimerkki 2, tasojäännitystila
Fig. B. 2. Test example 2, plane stress



Kuva B. 3. Testiesimerkki 3, kimmoisella alustalla oleva palkki
Fig. B. 3. Test example 3, a beam on elastic foundation

TESTI 1

MP	ME	NDI	NDF	NCN	NR	NMAT	NMP	NBA
12	12	2	1	3	1	2	3	4
MATERIAALITIEDOT								
1		.04 0		.04 0			.00 0	
2		1.00 0		1.00 0			.00 0	
SOLMUPISTEET								
1		.00 0		.00 0				
2		.10 0		.10 0				
3		.20 0		.20 0				
4		.30 0		.30 0				
5		.40 0		.40 0				
6		.50 0		.50 0				
7		.60 0		.60 0				
8		.70 0		.70 0				
9		.80 0		.80 0				
10		.90 0		.90 0				
11		1.00 0		1.00 0				
12		.00 0		.00 0				

J. Aalto ja A. Pramila: Yksinkertainen ...

ELEMENTIT				
1	1	2	4	1
2	4	2	5	1
3	1	7	5	1
4	5	1	6	1
5	4	5	7	1
6	7	5	8	1
7	5	6	8	1
8	6	6	9	1
9	7	8	10	1
10	10	8	11	1
11	8	9	11	1
12	10	11	12	1

REUNAPÄÄT		
1	1	0.00
4	1	0.00
7	1	0.00
10	1	0.00
12	1	0.00
3	1	20.00
6	1	20.00
9	1	20.00

SOLMUPARAMETRIT	
1	.500000
2	.221144+00
3	.200000+00
4	.110572-20
5	.646421+00
6	.260000+00
7	.430947-20
8	.760114+00
9	.200000+00
10	.675657-20
11	.760694+00
12	.723477-20

IE	OX	OY	OMAX	KULMA
1	-.221144+01	-.110572-19	.221144+01	-180.001
2	-.221144+01	-.425277+01	.479330+01	-117.475
3	-.774163+01	-.170111+00	.774330+01	-178.742
4	-.774163+01	-.596046-07	.774143+01	-180.001
5	-.646421+01	-.320375-19	.646421+01	-180.001
6	-.646421+01	-.560466+00	.648915+01	-174.975
7	-.760114+01	-.227386-01	.769590+01	-179.831
8	-.760114+01	-.290023-07	.769590+01	-180.001
9	-.760114+01	-.122355-19	.760114+01	-180.001
10	-.760114+01	-.214515-01	.760117+01	-179.839
11	-.760252+01	-.850662-03	.769252+01	-179.994
12	-.760694+01	-.119551-20	.760694+01	-180.001

TESTI 2

NP	NF	NDI	NDF	NEN	NR	NMAT	NMP	NPA
6	4	2	2	3	4	1	5	4

MATERIAALITIEDOT

1	20000.000	0.300	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
---	-----------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

SOLMUPISTEET

1	0.000	35.000
2	0.000	17.500
3	11.000	17.500
4	0.000	0.000
5	11.000	0.000
6	22.000	0.000

ELEMENTIT

1	1	2	3	1
2	2	4	5	1
3	2	5	3	1
4	3	5	6	1

REUNAEDOT

1	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	0.000
4	11.000	0.000	0.000
6	0.000	0.000	0.000

SOLMUPANEUTIT

1	0.00000000	-0.04587400
2	0.00000000	-0.09865900
3	0.00000000	-0.44217500
4	0.00000000	-0.42427300
5	0.00000000	-0.56470700
6	0.00000000	-0.16169100

IE	SV	SV	TVY	S1	S2	THAX	KULMA
1	0.18334400	-0.45754000	-0.17540600	0.28063300	-0.10630500	-0.19795400	-11.203
2	-0.43238700	0.36550700	-0.47674700	-0.10255100	-0.08149000	-0.40820200	-47.420
3	0.24904300	0.21895000	-0.52979000	0.38903000	0.17894100	-0.55315700	-37.067
4	0.29800000	0.34423700	-0.63490900	0.71115000	-0.56691300	0.67907200	-48.240

TESTI 3

NP	NE	NDI	NDF	NEN	NR	NMAT	NMP	NPA
7	6	1	2	2	2	2	3	4

MATERIAALITIEDOT

1	4.000	1.000	1.000	1.000
2	4.000	1.000	1.000	1.000

SOLMUPISTEET

1	.600
2	.700
3	1.400
4	2.400
5	3.400
6	4.400
7	5.400

ELEMENTIT

1	1	2	1
2	2	3	1
3	3	4	2
4	4	5	2
5	5	6	2
6	6	7	2

REUNAHDOT

1	1	.E 00	.0 00
7	0	.0 00	.0 00

SOLMUPARAMETRIIT

1	.641567+00	-.298417-21
2	.600242+00	-.106899+00
3	.499412+00	-.121425+00
4	.303913+00	-.195066+00
5	.124238+00	-.162491+00
6	-.239915-01	-.137382+00
7	-.157553+00	-.132195+00

IE	M	0
1	.640854+00	-.127200+00
2	.425861+00	-.408156+00
3	.542982-01	-.349881+00
4	-.130033+00	-.445216-01
5	-.100436+00	-.819753-01
6	-.207484-01	.589320-01