PAALUVOIMIEN LASKEMINEN TASOTAPAUKSESSA MATRIISIMERKINTÖJÄ KÄYTTÄEN

ANTTI AULA

Rakenteiden Mekaniikka
7 (1974) 3, s. 119...127
Rakenteiden Mekaniikan
Seura, Helsinki

YHTEENVETO

Artikkelissa on johdettu kaavat paaluperustuksen anturan siirtymien ja paaluvoimien laskemiseksi tasotapauksessa. Vaakavoiman, pystyvoiman ja momentin aiheuttamat anturan siirtymät ratkaistaan muodostamalla paaluryhmän jäykkyysyhtälö paalujen kimmoisten ominaisuuksien ja geometrian avulla. Edelleen ratkaistaan yksittäiset paaluvoimat anturan siirtymien ja paalun ominaisuuksien avulla. Teorian perustana on siirtymämenetelmä. Esityksessä käytetään matriisimerkintöjä. Esimerkkinä on ratkaisu erään paaluperustuksen voimat.

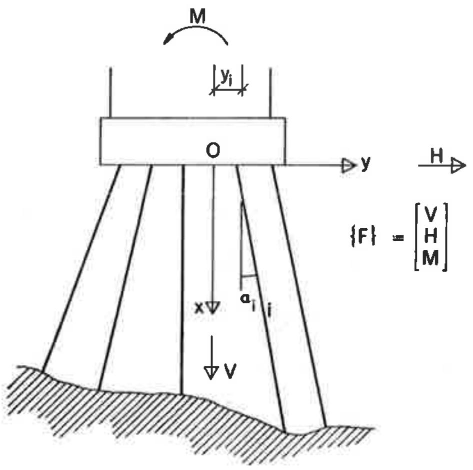
1. JOHDANTO

Paaluryhmän paaluvoimien määrittäminen on käytännön suunnittelutyössä toimivalle insinöörille usein toistuva laskutehtävä. Laskutehtävässä käytettävien kaavojen ja merkintöjen selkeys vähentää työtä ja laskuvirheiden syntymisalttiutta. Matriisimerkintöjen käyttö tarjoaa kompaktin esitystavan numeerisille laskelmille, vähentää toistuvien suureiden kirjoitusvaivaa ja mikä on nykyisin tärkeää, soveltuu hyvin tietokoneelle ohjelmoitavaksi.

2. LASKUMENETELMÄN PERUSTEET JA RAJOITUKSET

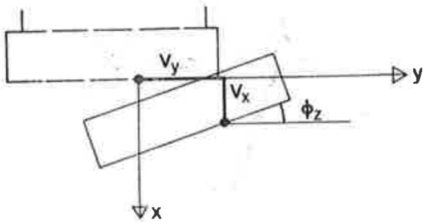
Staattisilta perusteiltaan laskumenetelmä noudattaa siirtymämenetelmää. Merkinnät ja ratkaisuyhtälöiden muodostaminen poikkeavat klassillisesta Nokkentvedin menetelmästä.

Paalut oletetaan molemmista päistään nivelöidyiksi ja poikkileikkaukseltaan muuttumattomiksi suoriksi sauvoiksi. Antura johon paalut liittyvät on täysin jäykkä ja voi liikkua sekä kiertyä tasossa. Rakenteen koordinaatiston origo asetetaan johonkin pisteeseen anturan alapinnan tasossa. Ulkoinen kuorma - vaakavoima H, pystyvoima V ja taivutusmomentti M - redusoidaan origoon (kuva 1).



Kuva 1. Koordinaatisto ja ulkoiset voimat
Fig. 1. Coordinate axes and external forces

Anturan siirtymätilaa havainnollistaa kuva 2. Paalujen alapäät ovat siirtymättömiä, kun taas yläpäiden siirtymät määräytyvät täysin anturan siirtymistä.



$$\{v\} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \phi_z \end{bmatrix}$$

Kuva 2. Anturan siirtymätila
Fig. 2. Displacements of the foundation slab

3. PAALUJEN JÄYKKYYSOMINAISUUDET

Paalurivin i puristusjäykkyys

$$k_i = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{Ej\ Aj}{Lj} \quad \text{, missä}$$

Ej = yksittäisen paalun j kimmomoduuli

Aj = yksittäisen paalun j poikkipinta-ala

Lj = yksittäisen paalun j pituus

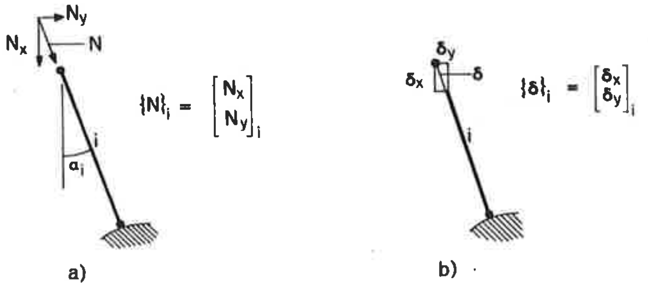
n_i = rivissä i olevien paalujen lukumäärä.

Mikäli samaan riviin kuuluvat paalut ovat jäykkyysominaisuuksiltaan samoja on

$$k_i = n_i \frac{E\ A}{L}$$

Paaluvoima ja paalun pään siirtymä jaetaan komponentteihin x- ja y-akselien suunnille (ks. kuva 3).

$$\{N\}_i = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix}_i \quad \text{ja} \quad \{\delta\}_i = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix}_i \tag{1}$$



Kuva 3. Paalun voimat ja siirtymät
Fig. 3. Forces and displacements at the top of pile

Paalun pään siirtymien $\{\delta\}_i$ ja anturan siirtymien $\{v\}$ yhteensopivuudesta seuraa:

$$\{\delta\}_i = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} v_x - y_i\,\phi_z \\ v_y \end{bmatrix} \tag{2}$$

Siirtymien ja voimien välisen yhteyden ilmaisee yhtälö

$$\{N\}_i = [K]_i \, \{\delta\}_i \,, \tag{3}$$

missä $[K]_i$ on paalurivin i jäykkyysmatriisi xy-koordinaatistossa.

$$[K]_i = k_i \begin{bmatrix} \cos^2\alpha_i & \sin\alpha_i \cos\alpha_i \\ \sin\alpha_i \cos\alpha_i & \sin^2\alpha_i \end{bmatrix} \tag{4}$$

Merkitään lyhyyden vuoksi $c_i = \cos\alpha_i$ ja $s_i = \sin\alpha_i$. Tällöin

$$[K]_i = k_i \begin{bmatrix} c_i^2 & s_i c_i \\ s_i c_i & s_i^2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Sijoitetaan (5) ja (2) yhtälöön (3), jolloin saadaan

$$\{N\}_i = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix}_i = k_i \begin{bmatrix} c_i^2 & s_i c_i & -c_i^2 y_i \\ s_i c_i & s_i^2 & -s_i c_i y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \phi_z \end{bmatrix} \tag{6}$$

4. KOKO PAALUPERUSTUKSEN JÄYKKYYSOMINAISUUDET

Tasapainoehdosta ulkoisen kuorman ja paaluvoimien välillä seuraa, kun ulkoista kuormitusta merkitään vektorilla

$$\{F\} = \begin{bmatrix} V \\ H \\ M \end{bmatrix}, \tag{7}$$

että

$$V = \sum_{i=1}^{n} N_{xi} = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i \begin{bmatrix} c_i^2 & s_i c_i & -c_i^2 y_i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \phi_z \end{bmatrix}$$

$$H = \sum_{i=1}^{n} N_{yi} = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i \begin{bmatrix} s_i c_i & s_i^2 & -s_i c_i y_i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \phi_z \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$M = -\sum_{i=1}^{n} y_i N_{xi} = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i \begin{bmatrix} -c_i^2 y_i & -s_i c_i y_i & c_i^2 y_i^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \phi_z \end{bmatrix}$$

missä n on paalurivien lukumäärä. Summamerkki on vedetty "ulos" vektorista. Ryhmä (8) esittää nyt paaluperustuksen siirtymien ja voimien välistä yhteyttä ja voidaan vielä sieventää muotoon

$$\begin{bmatrix} V \\ H \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum k_i c_i^2 & \sum k_i s_i c_i & -\sum k_i c_i^2 y_i \\ \sum k_i s_i c_i & \sum k_i s_i^2 & -\sum k_i s_i c_i y_i \\ -\sum k_i c_i^2 y_i & -\sum k_i s_i c_i y_i & \sum k_i c_i^2 y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \phi_z \end{bmatrix} \tag{9}$$

eli

$$\{F\} = [K]\{v\} \tag{10}$$

Yhtälöryhmän (10) ratkaisuna saadaan anturan siirtymätila $\{v\} = [K]^{-1}\{F\}$.

5. PAALUVOIMIEN MÄÄRITTÄMINEN ANTURAN SIIRTYMISTÄ

Paaluvoiman xy - koordinaatistossa anturan siirtymien funktiona määrittelee yhtälö (6), josta paaluvoima N voidaan laskea. Paalun kuorma skalaarina N (puristus positiivista) saadaan kaavasta

$$N = \begin{bmatrix} c_i & s_i \end{bmatrix} \{N\}_i . \tag{11}$$

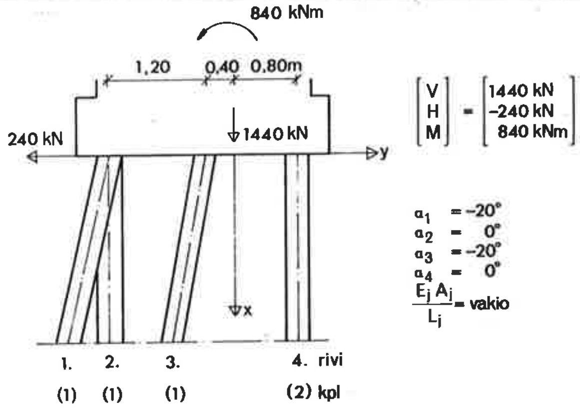
6. LASKELMIEN SUORITUKSESTA

Yhtälöryhmä (9) voidaan muodostaa suoraan, kun paalurivien jäykkyysominaisuudet, koordinaatiston paikka ja ulkoiset kuormat tunnetaan. Samasta yhtälöryhmästä havaitaan, että on edullista sijoittaa origo jonkin paalurivin kohdalle, jolloin vastaava $y_i = 0$. Yhtälöryhmässä tarvittavat kertoimet on helpointa laskea taulukon muodossa paaluriveittäin, jolloin yhtälöryhmän ratkaisun jälkeen paaluvoimia määritettäessä voidaan tarvittavat kertoimet poimia taulukosta.

Joissakin tapauksissa paaluperustus anturoineen liittyy kiinteästi rakennesysteemiin. Tällöin voidaan paaluperustus liittää yhtälöryhmän (9) kerroinmatriisin avulla koko rakenteen jäykkyysmatriisiin sen alimatriisina ja näin saada ratkaistua paaluperustus yhdessä muun rakenteen kanssa toimivana osana.

7. SOVELLUTUSESIMERKKI

Sovellutusesimerkin mitat ja kuormitukset käyvät selville kuvasta 4. Rakenteelliset tiedot on koottu taulukkoon 1.



Kuva 4. Esimerkkitehtävän paalutus
Fig. 4. Pile foundation calculated

Taulukko 1. Rakenteelliset tiedot
Table 1. Structural data

rivi	y_i	n_i	$\frac{EA}{L}$	k_i	c_i	s_i	$k_i c_i^2$	$k_i s_i c_i$	$k_i s_i^2$	$k_i c_i^2 y_i$	$k_i s_i c_i y_i$	$k_i c_i^2 y_i^2$
1	-1,6	1	"1"	1	0,9397	-0,3420	0,8830	-0,3214	0,1170	-1,4128	0,5142	2,2605
2	-1,6	1	"1"	1	1	0	1	0	0	-1,6000	0	2,5600
3	-0,4	1	"1"	1	0,9397	-0,3420	0,8830	-0,3214	0,1170	-0,3532	0,1286	0,1413
4	0,8	2	"1"	2	1	0	2	0	0	1,6000	0	1,2800
						$\sum$	4,7660	-0,6428	0,2340	-1,7660	0,6428	6,2418

Yhtälöryhmä ja sen ratkaisu:

$$\begin{bmatrix} 4,7660 & -0,6428 & 1,7660 \\ -0,6428 & 0,2340 & -0,6428 \\ 1,7660 & -0,6428 & 6,2418 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1440 \\ -240 \\ 840 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260,22 \\ -199,95 \\ 40,36 \end{bmatrix}$$

Paaluvoimat:

Rivi 1

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0,8830 & -0,3214 & 1,4128 \\ -0,3214 & 0,1170 & -0,5142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 260,22 \\ -199,95 \\ 40,36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 351,1 \\ -127,8 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0,9397 & -0,3420 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 351,1 \\ -127,8 \end{bmatrix} = 373,6 \text{ kN}$$

Rivi 2

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1,6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 260,22 \\ -199,95 \\ 40,36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 324,8 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 324,8 \\ 0 \end{bmatrix} = 324,8 \text{ kN}$$

Rivi 3

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 0,8830 & -0,3214 & 0,3532 \\ -0,3214 & 0,1170 & -0,1286 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 260,22 \\ -199,95 \\ 40,36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 308,3 \\ -112,2 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0,9397 & -0,3420 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 308,3 \\ -112,2 \end{bmatrix} = 328,1 \text{ kN}$$

Rivi 4

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1,6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 260,22 \\ -199,95 \\ 40,36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 455,9 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$N_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 455,9 \\ 0 \end{bmatrix} = 455,9 \text{ kN}$$

yhdelle paalulle

$$N_4 = \frac{1}{2}\left(455,9\right) = 228,0 \text{ kN}$$

KIRJALLISUUTTA

1 Livesley, R.K., Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press 1969.

Antti Aula, dipl.ins., Pohjolan Voima Oy, Oulu