

EERO-MATTI SALONEN

Rakenteiden Mekaniikka
7 (1974) 2, s. 94...107
Rakenteiden Mekaniikan
Seura, Helsinki

1. JOHDANTO

Tietokoneet ja uudet numeeriset menetelmät ovat tehneet useiden ennen vaikeina pidettyjen rakenteiden jännitysanalyysin rutiiniluontoiseksi tehtäväksi. Käytetyt menetelmät sisältävät kuitenkin yleensä likimääräisyyksiä, jotka saattavat aiheuttaa tuloksiin huomattaviakin virheitä. Virheiden suuruuden arvioiminen on käytännössä vaikea tehtävä. Eräs tapa saada jonkinlainen arvio virheiden suuruusluokasta perustuu kokemuksiin menetelmällä saaduista tuloksista tutkittavaa tapausta lähellä olevissa rakenteissa, joissa tarkka ratkaisu tunnetaan, jolloin virheiden suuruus voidaan suoraan todeta. Koska analyyttisiä ratkaisuja tunnetaan hyvin harvoissa tapauksissa, tämä menetelmä ei ole kovin käyttökelpoinen. Toinen tapa on ratkaista rakenne peräkkäisillä tihennetyillä approksimaatioilla ja tutkia tulosten muuttumista. Mikäli muutokset ovat kohtuullisen pieniä, voidaan otaksua, että tiheimmällä approksimaatiolla saadut arvot ovat verraten lähellä todellista ratkaisua. Tämä tapa on suuritöinen eikä

silti aina luotettava.

Tässä artikkelissa esitetään eräs edellisistä tavoista poikkeava, siirtymämenetelmän yhteydessä sovellettavissa oleva menettely, jota voidaan joissain tapauksissa käyttää ratkaisun tarkkuuden arvioimiseen. Menettely perustuu likiratkaisun jännitystilaa vastaavan ajatellun kuormituksen ja todellisen kuormituksen vertailuun.

2. TEORIA

Käytetty virhearviointi perustuu seuraavaan toteamukseen:

Mikä hyvänsä kinemaattisesti luullinen siirtymätila esittää rakenteen tarkkaa ratkaisua erälle kuormitukselle.

Jos nimittäin rakenteelle annetaan mielivaltaiset siirtymät, voidaan siirtymistä laskea ensin muodonmuutokset ja muodonmuutoksista taas vastaavat jännitykset ja näistä tasapainoyhtälöiden perusteella lopuksi ne ulkoiset kuormat, jotka vaaditaan pitämään saadut jännitykset tasapainossa. Näin lasketulle kuormitukselle ratkaisu on täysin tarkka. Vertaamalla laskemalla saatua kuormitusta annettuun todelliseen kuormitukseen voidaan saada arvio tehdystä virheestä.

Kinemaattisesti luullisella siirtymätilalla tarkoitetaan tässä siirtymätiloja, joissa siirtymät toteuttavat tehtävässä asetetut kinemaattiset (geometriset) reunaehdot ja joissa siirtymät ovat niin jatkuvia, että kappaleeseen ei synny rakoja.

Siirtymämenetelmällä tarkoitetaan taas analysointitapaa, jossa tehtävä esitetään siten, että tuntemattomina esiintyy pelkästään siirtymäsuureita. Suuret ohjelmakokonaisuudet perustuvat tavallisimmin siirtymämenetelmään. Numeerista likiratkaisua siirtymäkomponen-

teille u , v ja w etsitään yleensä muodossa

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= a_1\psi_1(x,y,z) + a_2\psi_2(x,y,z) + \dots + a_n\psi_n(x,y,z), \\ v(x,y,z) &= b_1\psi_1(x,y,z) + b_2\psi_2(x,y,z) + \dots + b_n\psi_n(x,y,z), \\ w(x,y,z) &= c_1\psi_1(x,y,z) + c_2\psi_2(x,y,z) + \dots + c_n\psi_n(x,y,z), \end{aligned} \quad (1)$$

jossa $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ ovat tunnettuja paikkakoordinaattien x , y ja z funktioita (ns. interpolaatio-, koordinaatti- tai muotofunktioita) ja a_1, a_2, \dots, c_n määräämättömiä parametreja. Valitsemalla parametreille tietyt arvot esittävät lausekkeet (1) täysin määrättyä siirtymätilaa, josta muodonmuutokset ja jännitykset voidaan laskea. Tehtävän suuritöisin osa on parametrien arvojen määrittäminen. Ne pyritään valitsemaan siten, että esityksestä (1) johtuvat jännitykset toteuttaisivat jännityksiä koskevat tasapainoyhtälöt mahdollisimman hyvin. Tämä tapahtuu tavallisesti potentiaalienergian minimin tai mikä on sama virtuaalisten siirtymien periaatetta hyväksikäyttäen. Näitä periaatteita sovellettaessa on esityksen (1) toteutettava tehtävän kinemaattiset reunaehdot. Näin ollen on tämän luvun alussa esitetty virhearviointimenettely sovellettavissa muotoa (1) olevan likiratkaisun yhteydessä.

3. ENSIMMÄINEN SOVELLUTUS

Tarkastellaan menettelyn soveltamista kuvan 1a esittämään kimmoisalla alustalla olevaan tasajäykkään tasaisen kuorman q kuormittamaan vapaasti tuettuun palkkiin. Tavanomaisten teknillisen taivutusopin ja Winklerin teorian otaksumien jälkeen voidaan tehtävä kuvata pitään palkin taipumaa $v(x)$ ainoana tarvittavana siirtymäsuure-

na. Sen likiratkaisua etsitään kaavojen (1) mukaisesti:

$$v(x) = b_1 \psi_1(x) + b_2 \psi_2(x) + \dots + b_n \psi_n(x) \quad (2)$$

Palkin muodonmuutos saadaan sen käyristymänä

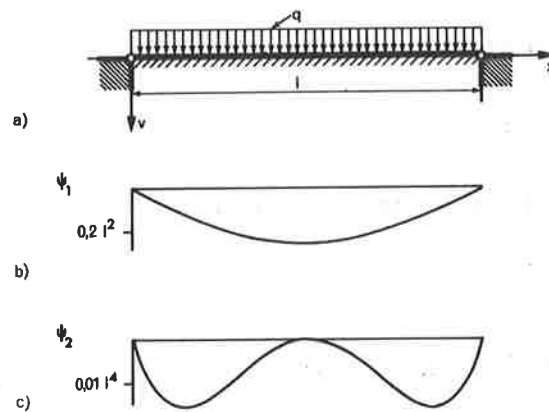
$$\kappa = -\frac{d^2 v}{dx^2} = -(b_1 \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + b_2 \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + \dots + b_n \frac{d^2 \psi_n}{dx^2}) \quad (3)$$

Tarvittavia jännityssuureita ovat tässä taivutusmomentti

$$M = EI\kappa = -EI(b_1 \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + b_2 \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + \dots + b_n \frac{d^2 \psi_n}{dx^2}) \quad (4)$$

jossa EI on palkin taivutusjäykkyys ja reaktiovoima

$$p = kv = k(b_1 \psi_1 + b_2 \psi_2 + \dots + b_n \psi_n) \quad (5)$$



Kuva 1. a) Kimmoisella alustalla oleva palkki

b) Muotofunktio ψ_1

c) Muotofunktio ψ_2

Fig. 1 a) A beam on an elastic foundation

b) Shape function ψ_1

c) Shape function ψ_2

jossa k on alustakerroin. Jännityssuureita koskeva palkin tasapainoyhtälö on tunnetusti

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q - p = 0. \quad (6)$$

Ratkaisemalla yhtälöstä (6) se ajateltu kuormitus \bar{q} , joka vaaditaan pitämään esityksestä (2) johtuva jännitystila tasapainossa, saadaan

$$\begin{aligned} \bar{q} &= -\frac{d^2 M}{dx^2} + p \\ &= EI \left(b_1 \frac{d^4 \psi_1}{dx^4} + b_2 \frac{d^4 \psi_2}{dx^4} + \dots \right) + k (b_1 \psi_1 + b_2 \psi_2 + \dots). \end{aligned} \quad (7)$$

Otetaan aluksi kaavassa (2) mukaan vain yksi termi ($n = 1$) ja valitaan muotofunktioksi

$$\psi_1(x) = x(l-x). \quad (8)$$

Sen kuvaaja on esitetty kuvassa 1b. Nähdään, että taipuma

$$v(x) = b_1 \psi_1(x). \quad (9)$$

toteuttaa tehtävän kinemaattiset reunaehdot

$$v(0) = v(l) = 0. \quad (10)$$

Soveltamalla virtuaalisten siirtymien periaatetta b_1 :n arvoksi tulee

$$b_1 = 0,01126 q l^2 / EI,$$

jota laskettaessa alustakertoimen lukuarvoksi on valittu

$$k = 324 EI / l^4.$$

Kaavoista (4) ja (7) saadaan

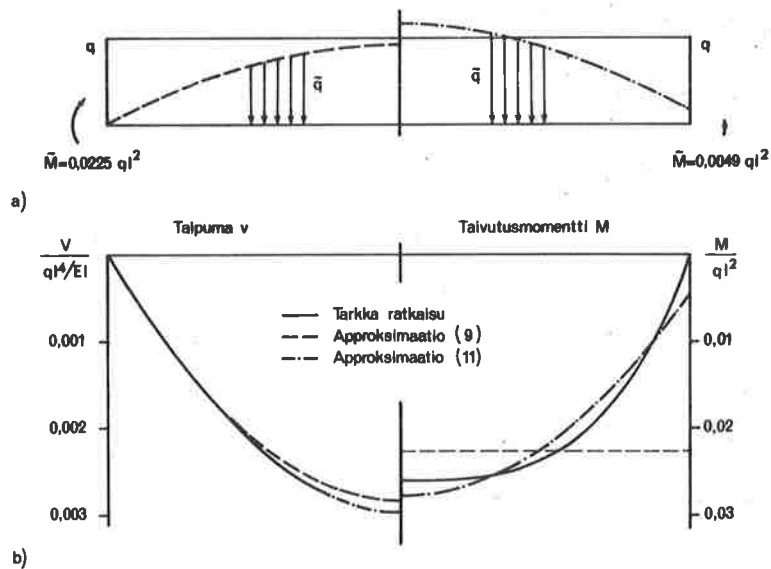
$$M = EI \cdot 2b_1 = 0,02252 q l^2 ,$$

$$\tilde{q} = 0 + kb_1 \psi_1 = 3,649 \times (l-x)q/l^2 .$$

Kuvan 2a vasemmalla puolella on esitetty vaadittava kuormitus \tilde{q} . Havaitaan lisäksi, että ratkaisusta (9) saadaan palkin päähän vaikuttavan ulkoisen momentin arvoksi

$$\tilde{M}(0) = \tilde{M}(l) = 0,02252 q l^2 ,$$

vaikka todellisuudessa palkin päissä vaikuttavien momenttien tulisi voimareunaehtojen perusteella hävitä. Koska ratkaisua (9) vastaava kuormitus poikkeaa näin huomattavasti todellisesta kuormituksesta, on varmaa, että itse ratkaisukaan ei voi olla kovin tarkka. Kuvasta



Kuva 2. a) Approksimaatioita (9) ja (11) vastaavat kuormitukset

b) Taipuman ja taivutusmomentin kuvaajat

Fig. 2. a) Loadings corresponding to approximations (9) and (11)

b) Deflection and bending moment

2b voidaankin tämä todeta etenkin taivutusmomentin suhteen vertaamalla tuloksia analyttiseen ratkaisuun, joka on tässä tehtävässä helposti löydettävissä.

Kokeillaan seuraavaksi approksimaatiota, jossa on mukana kaksi termiä ($n = 2$):

$$v(x) = b_1 \psi_1(x) + b_2 \psi_2(x) . \quad (11)$$

$\psi_1(x)$ on edelleen kaavan (8) mukainen ja

$$\psi_2(x) = x(l-x)(x-l/2)^2 . \quad (12)$$

ψ_2 :n kuvaaja on esitetty kuvassa 1c. Nähdään, että lauseke (11) toteuttaa jälleen kinemaattiset reunaehdot (10). Virtuaalisten siirtymien periaatteen avulla saadaan parametrien arvoiksi

$$b_1 = 0,01198 \, ql^2/EI ,$$

$$b_2 = -0,007635 \, q/EI ,$$

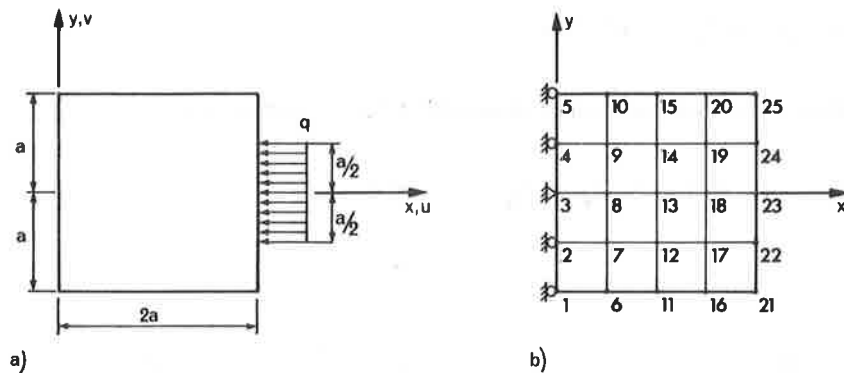
ja kaavoja (4) ja (7) soveltamalla seuraa kuvan 2a oikealla puolella esitetty vaadittava ulkoinen kuormitus \tilde{q} , $\tilde{M}(0)$, $\tilde{M}(l)$. Jatkuva kuormitus \tilde{q} on nyt lähempänä tasaisen kuormituksen arvoa q , ja etenkin palkin päissä vaikuttavat taivutusmomentit arvoltaan $0,0049 \, ql^2$ ovat enää n. 18 % lasketusta taivutusmomentin maksimiarvosta, kun ne edellä olivat 100 %. Tämän perusteella voidaan ratkaisun otaksua olevan jo verraten tarkan (vrt. kuva 2b).

4. TOINEN SOVELLUTUS

Edellisessä luvussa käsitellyssä esimerkissä muotofunktioiden

kuvaajat olivat sileitä, melkein kaikkialla rakenteen alueella nol-
lasta eroavia arvoja saavia käyriä. Nykyään käytetyt ohjelmapak-
kaukset perustuvat kuitenkin yleensä elementtimenetelmään, jossa
muotofunktiot ovat tyypiltään aivan erilaisia. Muotofunktiot määri-
tellään elementtimenetelmässä paloittain (elementteittäin); ne saavat
kukin nollasta eroavia arvoja vain pienessä rakenteen osa-alueessa
ja muotofunktioiden derivaatat saattavat olla epäjatkuvia elementti-
en rajapinnoilla. Näistä piirteistä johtuen tulee elementtimenetel-
mällä saatua ratkaisua vastaava ajateltu kuormitus hyvin erikoislaa-
tuisiksi.

Otetaan esimerkkinä menettelyn soveltamisesta elementtimene-
telmän yhteydessä kuvan 3a esittämä, reunalta $x = 2a$ pituusyksik-
kää kohti tasaisen kuorman q kuormittama neliön muotoinen levy,
jonka otaksutaan olevan tasojännitystilassa. Levy on tuettu reunal-
ta $x = 0$ kitkattomasti x -akselin suunnassa. Rakenne analysoidaan
käyttämällä kuvassa 3b näkyvää elementtiverkkoa (25 nurkkapistettä),



Kuva 3. a) Neliön muotoinen levy

b) Levylle käytetty elementtiverkko

Fig. 3. a) A square shaped stretched plate

b) Division of the plate into finite elements

joka muodostuu 16:sta neljä nurkkapistettä omaavasta neliöelementistä. Siirtymäkomponentteja u ja v approksimoidaan kaavojen (1) mukaisesti:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_1\psi_1(x,y) + u_2\psi_2(x,y) + \dots + u_{25}\psi_{25}(x,y) , \\ v(x,y) &= v_1\psi_1(x,y) + v_2\psi_2(x,y) + \dots + v_{25}\psi_{25}(x,y) . \end{aligned} \quad (13)$$

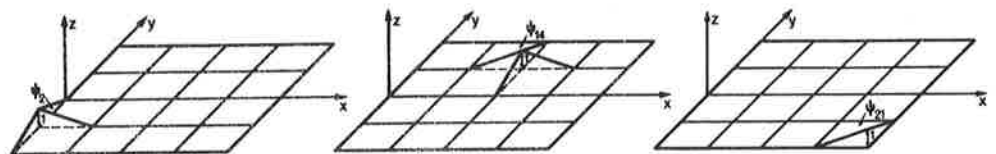
Kaavojen (1) määräämättömiä parametreja $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ on merkitty kirjaimilla $u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots$, koska parametrit ovat elementtimenetelmässä itse asiassa siirtymäkomponenttien arvoja nurkkapisteen kohdalla. Tämä voidaan todeta tarkastelemalla lausekkeitä (13) ja kuvaa 4, johon on piirretty näkyviin kolmen muotofunktion kulku. Muotofunktiot saavat arvon 1 kukin oman alaindeksinsä ilmaisevan nurkkapisteen kohdalla ja ovat nollasta eroavia vain tähän nurkkapisteeseen liittyvien elementtien alueella. Tässä on käytetty suorakaide-elementeille tavallisia kuvassa 4 näkyviä bilineaarisia muotofunktioita.

Tehtävän kinemaattisiksi reunaehdoiksi on otettu

$$u(0,y) = 0 , \quad v(0,0) = 0 . \quad (14)$$

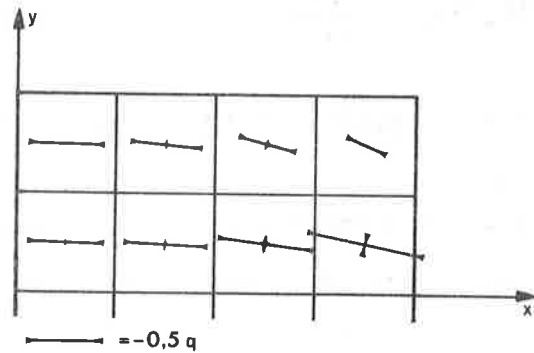
Ne on helppo toteuttaa esityksessä (13) ottamalla

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = v_3 = 0 . \quad (15)$$



Kuva 4. Muotofunktiot ψ_2 , ψ_{14} ja ψ_{21}
Fig. 4. Shape functions ψ_2 , ψ_{14} and ψ_{21}

Loput määräämättömistä parametreista määritetään virtuaalisten siirtymien periaatteen avulla. Laskelmien tuloksena (Poissonin vakio = 0) saadaan lopuksi kuvassa 5 näkyvä pääjännitysresultanttien jakautuma.



Kuva 5. Pääjännitysresultantit elementtien keskipisteissä
Fig. 5. Principal stress resultants at element centroids

Kuvan 5 tapaiset siistissä muodossa monella desimaalilla esitetyt tietokoneen antamat tulokset saattavat helposti johtaa unohtamaan, että kyseessä on likiratkaisu, jonka tarkkuus ei ehkä ole aina riittävä. Tutkitaan nyt tämän kirjoituksen tavalla, mitä kuormitusta saatu likiratkaisu vastaa. Siirtymiä (13) vastaavat muodonmuutokset ovat

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = u_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \dots \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = v_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + v_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \dots \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = u_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \dots\end{aligned}\quad (16)$$

Jännitysresultantit levyn pituusyksikköä kohti riippuvat muodonmuu-

toksista seuraavasti:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{Et}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) = \frac{Et}{1-\nu^2} (u_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \nu v_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \dots \\
 N_y &= \frac{Et}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) = \frac{Et}{1-\nu^2} (v_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \nu u_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \dots \\
 N_{xy} &= \frac{Et}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \frac{Et}{2(1+\nu)} (u_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \dots
 \end{aligned} \tag{17}$$

jossa E on levyn aineen kiintämoduuli, ν Poissonin vakio ja t levyn paksuus. Levyn jännitysresultanteja koskevat tasapainoyhtälöt ovat

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\
 \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + Y &= 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

jossa X ja Y ovat tilavuusvoiman x - ja y -akselin suuntaiset komponentit levyn pintayksikköä kohti. Kaavoja (18) soveltaen saadaan jännitysresultanteja (17) tasapainossa pitävien ajateltujen kuormien \tilde{X} ja \tilde{Y} määrittämiseksi kaavat

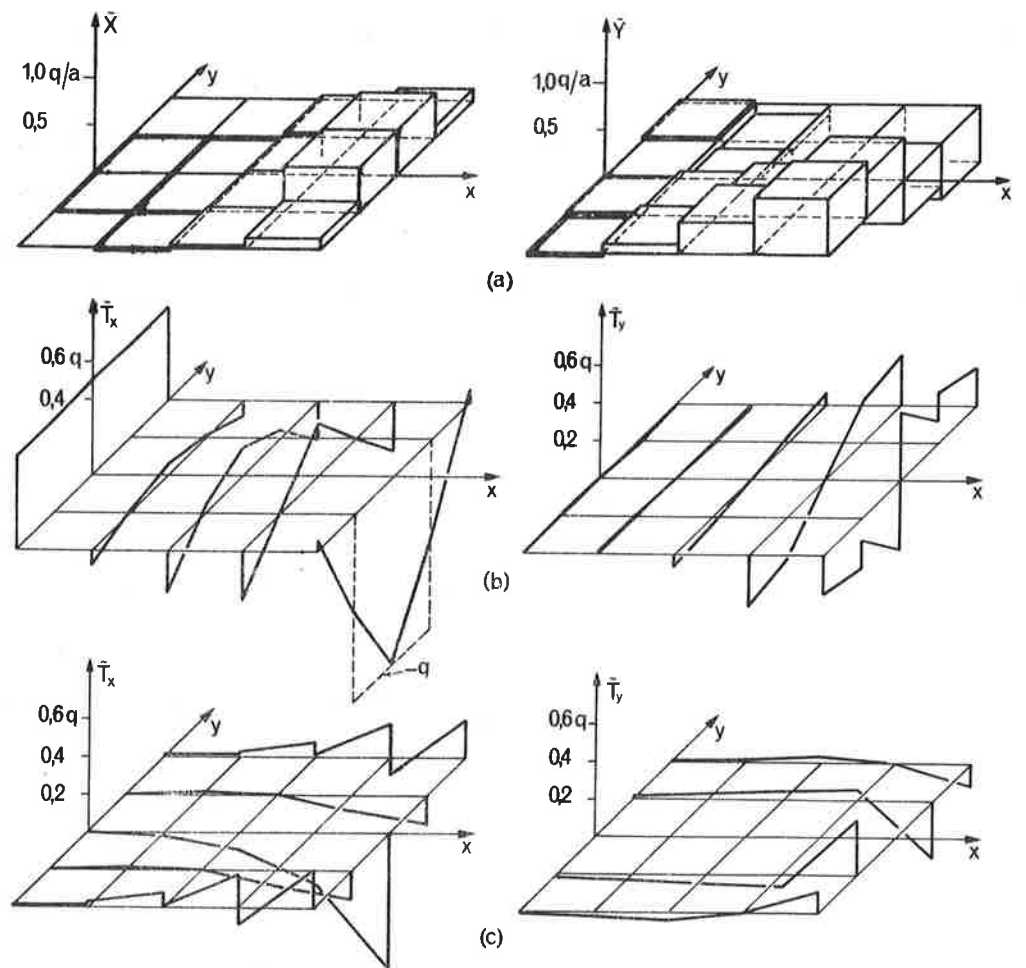
$$\begin{aligned}
 \tilde{X} &= - \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}, \\
 \tilde{Y} &= - \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Kaavojen vaatimat derivoinnit on helppo suorittaa, koska E , ν ja t on tässä esimerkissä otettu vakioiksi. Suorittamalla laskelmat ha-

vaitaan, että \tilde{X} ja \tilde{Y} saavat kunkin elementin alueella vakioarvot. Niiden jakautumat on esitetty kuvassa 6a. Koska käytetyt muotofunktiot eivät ole sileitä, eivät niistä derivoimalla saadut muodonmuutoskomponentit (16) ole jatkuvia vaan niiden arvoissa voi tapahtua hyppäyksiä elementtien rajapinnoilla. Täten myös jännitysresultanttien (17) arvot saavat hyppäyksiä, jotka eivät ole taas tasapainoehtojen kannalta mahdollisia, jollei epäjatkuvuuskohdissa ajatella vaikuttavaksi viivakuormaa, jonka x- ja y-komponentit rajaviivan pituusyksikköä kohti ovat

$$\begin{aligned}\tilde{T}_x &= \ell(N_x^+ - N_x^-) + m(N_{xy}^+ - N_{xy}^-), \\ \tilde{T}_y &= m(N_y^+ - N_y^-) + \ell(N_{xy}^+ - N_{xy}^-).\end{aligned}\tag{20}$$

Kaavoissa (20) indeksit + ja - viittaavat suureiden arvoihin epäjatkuvuuskohdan eri puolilla ja ℓ ja m ovat epäjatkuvuusviivalle piirretyn + puolelta - puolelle osoittavan yksikkönormaanin suunta-kosineja. Kappaleen reunoilla vaadittavat viivakuormat saadaan myös kaavoista (20) ajatteleamalla kappaleen reunaviiva epäjatkuvuuskohdaksi ja ottamalla kappaleen ulkopuolisten jännitysresultanttien arvoiksi nolla. Edellä selostetulla tavalla lasketut vaadittavat lineaarisesti jakautuneet viivakuormat on esitetty kuvassa 6b ja c. Todellinen kuormitus muodostui vain reunalla $x = 2a$ välillä $-a/2 \leq y \leq a/2$ vaikuttavasta viivakuormasta $T_x = -q$ (vrt. kuva 6b, vasen puoli). Kuvan 6 esittämä kuormitus, jolle elementtimenetelmän ratkaisu on siis täysin tarkka, ei muistuta paljoakaan todellista kuormitusta, joten saatu likiratkaisu ei voi olla kovin luotettava.



Kuva 6. a) Elementtimenetelmän ratkaisua vastaavat tilavuusvoimat
 b) Elementtien y-akselin suuntaisilla rajaviivoilla vaikuttava viivakuormitus
 c) Elementtien x-akselin suuntaisilla rajaviivoilla vaikuttava viivakuormitus

Fig. 6. a) Distributed loading corresponding to the finite element solution
 b) Line loading acting on element boundaries parallel to the y-axis
 c) Line loading acting on element boundaries parallel to the x-axis

5. MENETELMÄN KÄYTTÖMAHDOLLISUUKSISTA

Edellä on käsitelty pelkästään lineaarista kimmoteoriaa. Menettely on sovellettavissa myös geometrisesti ja fysikaalisesti epälineaarisiin tapauksiin. Muodonmuutosten, jännitysten ja lopuksi vaadittavien ajateltujen ulkoisten kuormien laskemiseksi käytetyt kaavat vain monimutkaistuvat huomattavasti. Tällaisissa tapauksissa etsitään itse ratkaisu yleensä käymällä läpi koko rakenteen kuormitushistoria antamalla kuormitukset pieninä lisäyksinä ja pitämällä kirjaa kertyneistä jännityksistä. Näistä voidaan periaatteessa aina laskea tasapainoyhtälöiden avulla ajatellut ratkaisua vastaavat ulkoiset kuormat.

Yhteenvedona voidaan sanoa, että kinemaattisesti luvalliset likiratkaisut merkitsevät sitä, että rakenne lasketaan eri kuormitukselle kuin on tarkoitettu. Etenkin elementtimenetelmän ratkaisua vastaava kuormitus on hyvin monimutkainen, kuten käy ilmi jo luvussa 4 käsitellystä yksinkertaisesta esimerkistä. Vaikeutena syntyvän virheen arvioinnissa on löytää käyttökelpoinen "mitta", jonka avulla saataisiin selville kvantitatiivisesti likiratkaisua vastaavan kuormituksen ja todellisen kuormituksen välinen ero.

Eero-Matti Salonen, apul.prof., Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi