JÄYKKYYDELTÄÄN EPÄJATKUVASTI MUUTTUVAN ULOKEPALKIN TAIPUMAN MÄÄRITTÄMINEN SARJAN SUMMANA

Rakenteiden Mekaniikka
7 (1974) 1, s. 33...42
Rakenteiden Mekaniikan
Seura, Helsinki

ILKKA RIIKONEN

1. JOHDANTO

Jäykkyydeltään muuttuvan palkin taipuman, tai yleisemmin taipuisuusominaisuuksien, tarkka määrittäminen on periaatteessa aina integrointitehtävä. Muutamia erikoistapauksia lukuunottamatta jäykkyyden muutokset ovat lisäksi sellaisia, että on turvauduttava numeeriseen integrointiin tai tyydyttävä pelkästään "ekvivalentin EI:n arviointiin insinöörin sormituntumalla".

Käytännön tehtävissä voidaan esimerkiksi ulokepalkin taipuma laskea tyydyttävällä tarkkuudella siten, että palkki otaksutaan jaetuksi vakiojäykkiin osiin ja sovelletaan superpositioperiaatetta. Seuraavassa esitettyjä yksinkertaisia superponointikaavoja voidaan pitää konstruktööreille tutun Tekniikan käsikirja 1A:n taulukko 2:n suorana sovellutuksena, ja ne lienevät siten laskelmia yleisimmin suorittavien insinöörien ja teknikoiden omaksuttavissa helpommin kuin suoranaiset numeerisen integroinnin laskukaavat.

2. PERIAATE

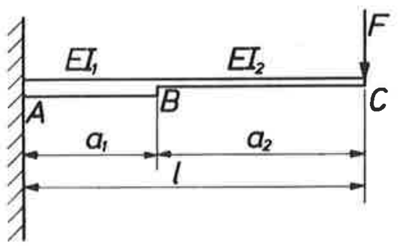
Kuvan 1 esittämässä tapauksessa palkin AC pään C taipuma δ_C voidaan ajatella muodostuvaksi kolmesta osasta δ_0, δ_1 ja δ_2 (kuva 2), joiden lausekkeet ovat

$$\delta_0 = \frac{Fa_1^3}{3EI_1} + \frac{Fa_2a_1^2}{2EI_1}, \tag{1}$$

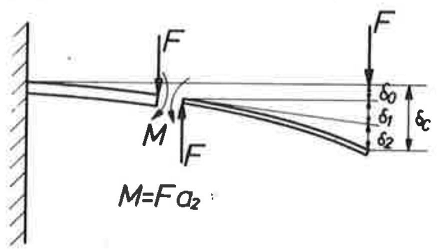
$$\delta_1 = \beta a_2 = \left(\frac{Fa_1^2}{2EI_1} + \frac{Fa_2a_1}{EI_1}\right)a_2, \tag{2}$$

$$\delta_2 = \frac{Fa_2^3}{3EI_2}. \tag{3}$$

Kuten lausekkeista havaitaan, taipuma $\delta_0 + \delta_1$ ei ollenkaan riipu jäykkyydestä välillä BC. Tämä sama taipuma saadaankin toista tietä otaksumalla palkin jäykkyydeksi koko välillä AC arvo EI_1 seuraavasti:



Kuva 1. Jäykkyydeltään epäjatkuvasti muuttuva ulokepalkki.



Kuva 2. Jäykkyydeltään epäjatkuvasti muuttuvan ulokepalkin taipuman muodostuminen voiman F vaikuttaessa palkin päässä.

$$\delta_0 + \delta_1 = \frac{F\ell^3}{3EI_1} - \frac{Fa_2^3}{3EI_1} . \tag{4}$$

Lauseke (4) edustaa itse asiassa sellaisen palkin taipumaa, joka on äärettömän jäykkä välillä BC. Pään C kokonaistaipumaksi saadaan nyt yhdistämällä (3) ja (4)

$$\delta_C = \frac{F\ell^3}{3EI_1} - \frac{Fa_2^3}{3EI_1} + \frac{Fa_2^3}{3EI_2} = \frac{F}{3}\left(\frac{\ell^3 - a_2^3}{EI_1} + \frac{a_2^3}{EI_2}\right). \tag{5}$$

3. YLEISTYKSIÄ

Noudattaen kaavan (5) ajattelutapaa voidaan kuvan 3 mukaiselle palkille välittömästi kirjoittaa pään taipuma siinä vaikuttavan voiman F vaikutuksesta seuraavasti

$$\delta_F = \frac{F\ell_1^3}{3EI_1} - \frac{F\ell_2^3}{3EI_1} + \frac{F\ell_2^3}{3EI_2} - \dots - \frac{F\ell_n^3}{3EI_{n-1}} + \frac{F\ell_n^3}{3EI_n} ,$$

eli

$$\delta_F = \frac{F}{3} \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_i^3 - \ell_{i+1}^3}{EI_i} \tag{6}$$

kun määritellään $\ell_{n+1} = 0$.

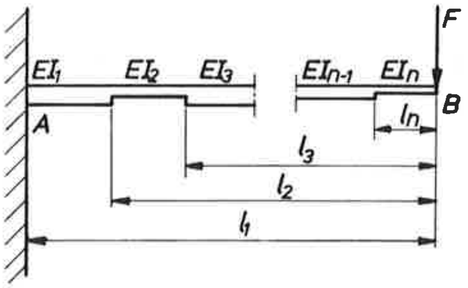
Pistevoiman palkin päähän aiheuttaman kulmanmuutoksen lausekkeeksi saadaan analogisesti

$$\beta_F = \frac{F}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_i^2 - \ell_{i+1}^2}{EI_i} \tag{7}$$

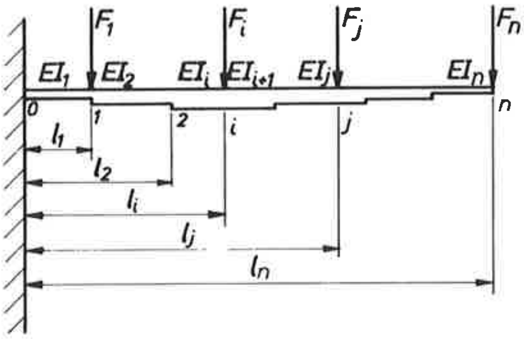
Jos palkin päässä vaikuttaa voiman F sijasta pistemomentti M, voidaan pään taipumalle ja kulmanmuutokselle kirjoittaa lausekkeet

$$\delta_M = \frac{M}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_i^2 - \ell_{i+1}^2}{EI_i} , \tag{8}$$

$$\beta_M = M \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_i - \ell_{i+1}}{EI_i} . \tag{9}$$



Kuva 3. Useasta kohdasta jäykkyydeltään epäjatkuvasti muuttuva ulokepalkki.



Kuva 4. Jäykkyydeltään epäjatkuvasti muuttuva ulokepalkki joustomatriisin muodostukseen käytetyin merkinnöin varustettuna.

4. KAAVOJEN (6)...(9) SOVELLUTUKSIA

4.1 Joustomatriisi

Mukavuussyistä siirrytään mittaamaan pituudet palkin kiinnitetystä päästä kuvan 4 mukaisesti. Voiman F_i aiheuttamaksi taipumaksi i-pisteessä saadaan tällöin kaavaa (6) vastaten

$$\delta_{ii} = \frac{F_i}{3} \sum_{k=1}^{i} \frac{(\ell_i - \ell_{k-1})^3 - (\ell_i - \ell_k)^3}{EI_k}, \tag{10}$$

missä $\ell_0 = 0$. Noudattaen kaavojen (1) ja (2) periaatteita voidaan pisteessä i vaikuttavan voiman aiheuttama taipuma pisteessä j kirjoittaa

$$\delta_{ji} = \delta_{ii} + \beta_{ii}(\ell_j - \ell_i), \tag{11}$$

missä

$$\beta_{ii} = \frac{F_i}{2} \sum_{k=1}^{i} \frac{(\ell_i - \ell_{k-1})^2 - (\ell_i - \ell_k)^2}{EI_k}$$

ja δ_{ii} saadaan kaavasta (10). Kaava (11) pätee, kun $j \geqslant i$. Jos $j < i$, voidaan δ_{ij} laskea kaavan (11) mukaan ja Bettin-Maxwellin säännöstä saadaan $\delta_{ji} = \delta_{ij}$.

Kaavoja (10) ja (11) käyttäen voidaan siis laskea poikkileikkaukseltaan melko mielivaltaisesti muuttuvan ulokepalkin joustomatriisi esimerkiksi värähtelyprobleemien ratkaisemiseksi. Tietenkään kaikissa epäjatkuvuuskohdissa ei tarvitse olla voimaa vaikuttamassa, mutta kaavoissa (10) ja (11) esiintyvän yksinkertaisen summeeraustavan käyttämiseksi on kunkin voiman kohdalle ajateltava epäjatkuvuuskohta, vaikka jäykkyys olisi sama voiman vaikutuspisteen molemmin puolin.

4.2 Jatkuvan palkin ratkaiseminen joustomatriisin ja Jordanin eliminaation avulla

Ajatellaan aluksi kuvan 4 palkkia, joka on jäykästi kiinnitetty vasemmasta päästään. Otaksutaan, että pisteissä i, j ja k ($1 \leqslant i < j < k \leqslant n$) palkille annetaan siirtymäehdot ja muissa pisteissä vaikuttavat voimat F_ℓ ($1 \leqslant \ell \leqslant n$, $\ell \neq i$, j ja k) on tunnettu. Tukireaktioiden F_i, F_j ja F_k sekä muiden pisteiden taipumien määrittämiseksi lasketaan ensin palkin joustomatriisi kaavojen (10) ja (11) avulla. Täten saadaan yhtälöryhmä

$$[A]\{F\} = \{\delta\}. \tag{12}$$

Tästä yhtälöryhmästä voidaan ratkaista tukireaktiot F_i, F_j, F_k ja muiden pisteiden siirtymät suoraan kolmella Jordanin eliminaation askeleella. Eliminaatiovaiheiden havainnollistamiseksi kirjoitetaan voimavektori joustomatriisin päälle seuraavasti [1]

$$\begin{array}{c} F_1 \ldots F_i \ldots F_j \ldots F_k \ldots \\ \left[\begin{array}{c} a_{11} \ldots a_{1i} \ldots a_{1j} \ldots a_{1k} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \ldots a_{ii} \ldots a_{ij} \ldots a_{ik} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1} \ldots a_{ji} \ldots a_{jj} \ldots a_{jk} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1} \ldots a_{ki} \ldots a_{kj} \ldots a_{kk} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right] \end{array} = \left[\begin{array}{c} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ \delta_j \\ \vdots \\ \delta_k \\ \vdots \end{array}\right] . \qquad (13)$$

Yhtälöissä (13) saadaan F_i ja δ_i vaihtamaan paikkaa muuttamalla kerroinmatriisin termejä seuraavasti

$$\begin{aligned} a'_{\ell m} &= a_{\ell m} - \frac{a_{\ell i} a_{im}}{a_{ii}} && \forall\, \ell \neq i,\ \forall\, m \neq i, \\ a'_{\ell i} &= \frac{a_{\ell i}}{a_{ii}} && \forall\, \ell \neq i, \\ a'_{i\ell} &= -\frac{a_{i\ell}}{a_{ii}} && \forall\, \ell \neq i, \\ a'_{ii} &= \frac{1}{a_{ii}} . \end{aligned} \qquad (14)$$

Näissä kaavoissa on pilkulla yläindeksinä merkitty elementin uutta arvoa eliminaatioaskeleen jälkeen, kun a_{ii} on toiminut pivot-elementtinä. Kaavat (14) saadaan ratkaisemalla F_i yhtälöryhmän (13) i:nneltä vaakariviltä, eli

$$F_i = \frac{1}{a_{ii}} (\delta_i - a_{i1}F_1 - a_{i2}F_2 - \cdots - a_{ij}F_j \cdots - a_{in}F_n) , \qquad (15)$$

ja ajattelemalla tällä kerrotuksi matriisin i:s pystyrivi. Yhtälöissä suoritetaan sitten uudelleenryhmittely siten, että voimat ja δ_i

otetaan ylös tekijöiksi.

Samanlaisilla laskutoimituksilla vaihdetaan F_j:n ja δ_j:n sekä F_k:n ja δ_k:n paikat keskenään. Tällöin on vasemman puolen voima-siirtymä-vektori tunnettu ja oikean puolen tuntemattomien arvot voidaan laskea välittömästi.

Pienehköjen probleemien kyseessä ollen Jordanin eliminaation askeleet ovat helposti muistettavina pöytälaskukoneen käyttäjänkin hallinnassa. Halutut suureet ovat laskettavissa ilman yhtälöiden uudelleenjärjestelyjä ja kerroinmatriisin ositusta.

4.3 Tapaus, jossa jatkuvan palkin kiinnityspää on nivelellinen

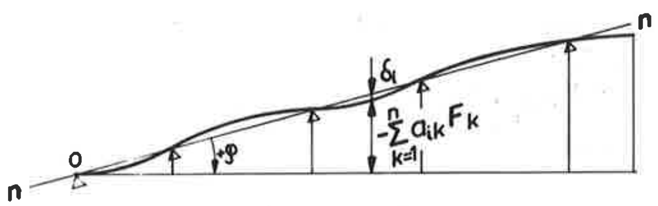
Jos kuvan 4 palkin vasen pää ei ole kiinnitetty, vaan vapaasti tuettu, kuvaavat termit $a_{ij}\,F_j$ taipumia, jotka on laskettu pisteeseen 0 piirretystä tangentista kuvan 5 mukaisesti. Tällöin saadaan i-pisteen perusviivasta n-n mitatuksi taipumaksi

$$\delta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}F_k + \phi\ell_i. \qquad (16)$$

Yhtälöihin ilmestyneen uuden tuntemattoman ϕ ratkaisemiseksi saadaan yhtälö momenttiehdosta 0-pisteen suhteen

$$\sum_{i=1}^{n} F_i\ell_i = 0, \qquad (17)$$

Yhdistämällä (16) ja (17) saadaan edelleen symmetrisen kerroinmatrii-



Kuva 5. Päästään nivelellisesti tuetun jatkuvan palkin taipuman sarjamuotoisen lausekkeen muodostuminen.

sin omaava yhtälöryhmä

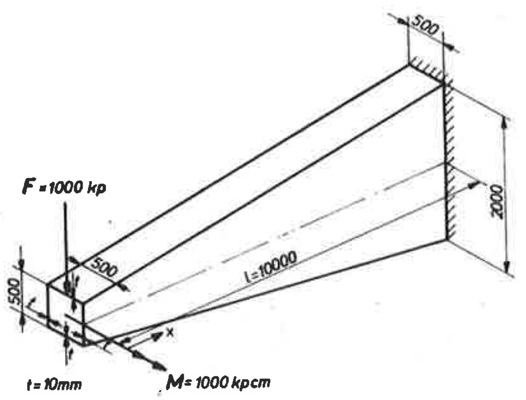
$$\begin{bmatrix} a_{11}\cdots & a_{1n} & \ell_1 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\cdots & a_{nn} & \ell_n \\ \ell_1\cdots & \ell_n & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad (18)$$

josta voidaan ratkaista tuntemattomat tukireaktiot, kulma ϕ ja tuntemattomat taipumat, kuten kohdassa 4.2 esitettiin.

4.4 Menetelmän käyttö jäykkyydeltään jatkuvasti muuttuvan palkin taipumien laskentaan

Seuraavassa on esimerkkinä laskettu kuvan 6 esittämän, korkeudeltaan suoraviivaisesti muuttuvan kotelopalkin δ_F, β_F, δ_M ja β_M seuraavalla approksimaatiolla:

1. jaetaan palkki n yhtä pitkään väliin
2. lasketaan neliömomentti I jakopisteissä
3. otetaan kunkin välin neliömomenttia edustamaan väliä rajoittavien jakopisteiden neliömomenttien keskiarvo.



Kuva 6. Korkeudeltaan lineaarisesti muuttuva kotelouloke-palkki.

Vertailun vuoksi taipumat on laskettu myös integroimalla numeerisesti taivutustyön derivaattojen lausekkeet seuraavilla approksimaatioilla:

$$\frac{\delta_F}{F} = \int_0^{\ell} \frac{x^2}{EI(x)}\,dx \simeq \left(\frac{\ell}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n} \frac{(i - \frac{1}{2})^2}{EI_i}\,, \tag{19}$$

$$\frac{\delta_M}{M} = \frac{\beta_F}{F} = \int_0^{\ell} \frac{x}{EI(x)}\,dx \simeq \left(\frac{\ell}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{i - \frac{1}{2}}{EI_i}\,, \tag{20}$$

$$\frac{\beta_M}{M} = \int_0^{\ell} \frac{1}{EI(x)}\,dx \simeq \frac{\ell}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{EI_i}\,. \tag{21}$$

Näissä kaavoissa I_i on i:nnen välin päiden neliömomenttien keskiarvo. Taulukossa 1 on esitetty tulosten numeerinen vertailu erilaisilla jakotiheyksillä.

Siinä erikoistapauksessa, että EI on vakio, superpositiokaavat (6)...(9) antavat oikean tuloksen jo yhdellä jakovälillä kaikille suureille δ_F, β_F, δ_M ja β_M, mutta kaavat (19)...(21) vain kolmelle viimeksi mainitulle.

Taulukko 1. Kuvan 6 mukaisen koteloulokepalkin pään taipuma ja kulmanmuutos jakotiheyden funktiona sarjakaavoilla (6)... (9) ja trapetsikaavoilla (19)...(21) laskettuna.

Jakoluku	Sarjakaavalla	Trapetsikaavalla	Sekä sarja- että trapetsikaavalla	
n	$\frac{\delta_F}{cm}$	$\frac{\delta_F}{cm}$	$\frac{10^3\beta_F}{rad} = \frac{10^3\delta_M}{cm}$	$\frac{10^6\beta_M}{rad}$
1	0,1314	0,0985	0,1970	0,3941
2	0,1407	0,1251	0,2660	0,7518
4	0,1415	0,1361	0,2920	1,0278
8	0,1412	0,1397	0,2972	1,1519
16	0,1411	0,1407	0,2980	1,1909
32	0,1411	0,1410	0,2981	1,2014

F = 1000 kp, M = 1000 kpcm, E = 2 100 000 kp/cm²

5. LOPPUPÄÄTELMIÄ

Kirjoituksessa on johdettu superpositioperiaatteella jäykkyydeltään epäjatkuvasti muuttuvan palkin pään taipuman ja kaltevuuskulman sarjamuotoiset lausekkeet pistevoiman ja momentin vaikutuksesta. Kaavojen sovellutuksena on esitetty laskentaperiaate ulokepalkin joustomatriisille, jota voidaan käyttää hyväksi mm. jatkuvan palkin staattisesti määräämättömien suureiden, taipumien ja ominaisvärähtelyjen laskennassa.

Sarjakaavoja voidaan käyttää tyydyttävällä tarkkuudella myös jäykkyydeltään jatkuvasti muuttuvan palkin taipumien approksimoimiseen. Tämän johdosta sarjakaavoilla selvitään yhtäläisillä ja yksinkertaisilla laskurutiineilla sellaisenkin palkin laskennasta, jonka jäykkyys muuttuu sekä jatkuvasti että epäjatkuvasti. Palkin jako osaväleihin voidaan vaivatta tehdä tarkoituksenmukaisimmalla tavalla. Palkin sisältäessä vakiojäykkiä osia on tulos näiltä osin eksakti.

Helposti muistettavina ja ohjelmoitavina sarjakaavat soveltuvat yhtä hyvin pienehköjen tehtävien käsinlaskentaan kuin suurien ohjelmapakettien aliohjelmiin.

KIRJALLISUUTTA

1 Zukhovitskiy, S.I., Avdeyeva, L.I., Linear and convex programming, Kiev Institute, Transl. by Scripta Technica Inc., Philadelphia and London, W.B. Saunders Co., 1966, s. 1...6.

Ilkka Riikonen, dipl.ins., Kone Oy, Hyvinkää.