

IDEAALIMUODOSTAAN POIKKEAVAN JÄNNEBETONIPALKIN
KULJETUKSEN JA ASENNUKSEN AIKAISTEN RASITUSTEN
MÄÄRITTÄMINEN

SEPPO SALONEN

Rakenteiden Mekaniikka
6 (1973) 3-4, s. 159...
170, Rakenteiden Meka-
niikan Seura, Helsinki

YHTEENVETO

Artikkelissa käsitellään lähinnä jännebetonipalkkien kuljetus- ja asennusvaiheessa esiintyviä muodonmuutos- ja jännitystiloja ottamalla huomioon mahdollisimman yksinkertaiseksi oletetun alkukäyrityksen ja -vääntymän aiheuttama epälineaarisuus. Ratkaisu on johdettu tasapainomenetelmän mukaisia differentiaaliyhtälöitä ja potenssisarjakehitelmää käyttäen erilaisille reunaehtotapauksille. Ratkaisussa on rajoitettu kaksoissymmetriseen poikkileikkaukseen. Yhtälöistä (1) ja (2) lähtemällä voidaan käsitellä yleisempiäkin tapauksia. Tarkastellaan niin hitaasti tapahtuvia kuormituksia, että dynaamisia vaikutuksia ei tarvitse ottaa huomioon.

1. JOHDANTO

Puhdas kiepahdus, jonka ratkaisu johtaa ominaisarvotehtävään, edellyttää ideaalista palkkia, jota käytännössä ei voida aikaansaada. Kun palkki on muodoltaan epätäydellinen, materiaaliltaan epähomogeeninen tai jos kuorma vaikuttaa siihen epäkeskisesti, ei mitään

äkillistä kiepahdusta tapahtuu, vaan ideaalisen palkin kiepahduksessa ilmenevät muodonmuutokset alkavat tapahtua "epätäydellisellä" palkilla jo pienillä kuorman arvoilla. Tapaus on siten samantapainen jännitystehtävä kuin esim. epäkeskisesti puristetun tai alkukäyritystä omaavan sauvan kriittisen kuorman määrittäminen. Myötölujuuden sijasta esijännitetyillä palkeilla tulee ratkaisevaksi yhdistetyn jännitystilän aiheuttama betonin halkeilu, jolloin poikkileikkausarvot muuttuvat.

Suoran palkin kiepahduskuorman arvoja löytyy esim. kirjoista [1] ja [8]. Palkkien nostoon ja asennukseen liittyviä kiepahdustapauksia on käsitelty kirjoituksissa [5] ja [6]. Alkumuodonmuutosta omaavan palkin ratkaisua on sen sijaan varsin vähän tutkittu. Stüssi [7] on tutkinut kaksoissymmetrisen poikkileikkauksen omaavaa palkkia, johon vaikuttaa vakiomomentti ja jonka alkumuodonmuutos käsittää vain poikittaisen siirtymän. Nylander [3] ja Massonet [2] ovat tutkineet kaksoissymmetrisen I-poikkileikkauksen omaavaa palkkia, johon vaikuttaa vakiomomentti ja normaalivoima. Alkukäyritymä ja -vääntymä on oletettu affiineiksi vastaavien lopullisten suureitten kanssa. Samalla periaatteella Nylander [4] on johtanut keskisesti kuormitetulle haarukkalaakeroidulle palkille kaavan, jolla voitaneen käsitellä muitakin kuin vakiomomentin tapausta, vaikka vain viimeksimainitulle on johdettu kaavoja.

Seuraavassa tarkasteltavat reunaehtotapaukset on ratkaistu tasapainomenetelmällä samanlaista potenssisarjaa käyttäen kuin kirjoituksessa [6]. Lisäksi on otettu huomioon lausekkeiden (7) ja (8) mukainen alkukäyritys ja -vääntymä. Menettely siis poikkeaa tässä kohden Nylanderin esittämästä. Kysymyksessä oletetaan kaiken aikaa olevan ns. heikko geometrinen epälineaarisuus, jolloin käyrityksille käytetään tavanomaista linearisoitua lauseketta. Materiaali

oletetaan lineaarisesti kimmoiseksi ja poikkileikkaus halkeilemattomaksi ja palkin pituussuunnassa vakioksi. Halkeilun huomioonottamismahdollisuuksia on lyhyesti tarkasteltu kohdassa 7.

2. TASAPAINOYHTÄLÖT SUORALLE PALKILLE

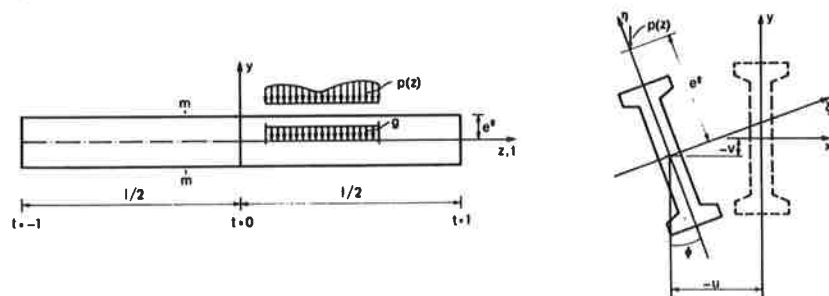
Käytetään kuvan 1 mukaisia koordinaatistoja ja muodostetaan sisäisten ja ulkoisten voimien momenttitasapainoyhtälöt η - ja ζ -akselin suhteen. Kun päissä vaikuttavia voimia lukuunottamatta kuorma oletetaan y -akselin suuntaiseksi, saadaan (yhtälöt 627 ja 631, [1])

$$EI_y u_s'''' - EI_y \phi'''' y_m = -P u_s''(z) + (M_x(z) \phi)'' \quad (1)$$

ja

$$EC_M \phi'''' - GI_t \phi'' + EI_y y_m^2 \phi'''' - EI_y y_m u_s'''' = -P i_p^2 \phi'' - (M_x \phi')' r_x + p e^{\phi} + M_x u_s'' \quad (2)$$

Indeksi s viittaa vääntöakseliin ja m painopisteakseliin. Termit on siten järjestetty, että sisäisistä momenteista derivoidut termit on



Kuva 1. Käytetyt koordinaatistot ja palkin kuormat.
Fig 1. Coordinates and loads of the beam.

jätetty yhtälöiden vasemmalle puolelle. Kolmatta momenttiyhtälöä ei tarvita, koska taipuman vaikutus muihin muodonmuutoksiin on yleensä vähäinen.

Tehdään edelleen seuraavat yksinkertaistukset:

- poikkileikkaus oletetaan kaksoissymmetriseksi, mikä melko hyvin pitää paikkansa ainakin standardoiduilla I-palkeilla. Tällöin pal-
kin vääntöakseli yhtyy sen painopisteakseliin;
- poikkileikkauksen käyristymisjäykkyys jätetään huomioonottamatta
(poikkileikkaus on suhteellisen kapea ja massiivinen);
- resultoivaa puristusvoimaa ei vaikuta;
- tarkastellaan oman painon vaikutusta ($e^* = 0$).

Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan nyt

$$EI_y u'''' = (M_x \phi)'', \quad (3)$$

$$GI_t \phi'' = - M_x u''. \quad (4)$$

3. TASAPAINÖYHTÄLÖT ALKUMUODONMUUTOSTA OMAAVALLE PALKILLE

Oletetaan palkilla olevan alkukäyristys, joka ilmenee alkusiirtymänä $u_0(z)$ x-akselin suunnassa ja alkuvääntymä, joka ilmenee alkukiertymänä $\phi_0(z)$ z-akselin ympäri (z-akselin positiivisesta suunnasta katsottuna vastapäivään).

Oletetaan edelleen, että esijännityksen aiheuttama jännitystila voidaan katsoa muodonmuutoksesta riippumattomaksi, jolloin alkumuodonmuutostila voidaan asettaa jännitysten vertailutilaksi. Sisäisiä voimia laskettaessa on tällöin kokonaissiirtymistä vähennettävä alkusiirtymät. Yhtälöistä (3) ja (4) saadaan

$$EI_y (u - u_0)'''' - (M_x \phi)'' = 0, \quad (5)$$

$$GI_t (\phi - \phi_0)'' + M_x u'' = 0. \quad (6)$$

4. YLEINEN RATKAISU

Alkumuodonmuutokselle oletetaan seuraavassa yksinkertaisuuden vuoksi vakioarvot:

$$u_0'' = \kappa \quad (= \text{vakio}), \quad (7)$$

$$\phi_0' = \Psi/l \quad (= \text{vakio}). \quad (8)$$

Kaavasta (5) saadaan integroimalla

$$EI_y(u - u_0)'' - M_x \phi + C_1 z + C_2 = 0.$$

Reunaehdoista saadaan $C_1 = C_2 = 0$. Kun u eliminoidaan ja suoritetaan muuttujan vaihto $t = 2z/l$, saadaan kiertymäkulmalle differentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + k^2(1 - t^2)^2 \phi + \beta(1 - t^2) = 0, \quad (9)$$

jossa on merkitty

$$k^2 = \frac{g^2 l^6}{256 BC}, \quad \beta = \frac{g l^4 \kappa}{32 C}, \quad (10)$$

$$B = EI_y, \quad C = GI_t. \quad (11)$$

Yhtälölle (9) voidaan ratkaisua etsiä sarjana

$$\phi = \sum_{i=0}^n a_i t^i. \quad (12)$$

Sijoittamalla saadaan

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= -\frac{k^2}{2} a_0 - \frac{\beta}{2}, \\ a_4 &= \frac{1}{24} a_0 (4k^2 + k^4) + \frac{1}{12} \beta (1 + \frac{k^2}{2}), \\ a_6 &= \frac{1}{30} a_0 (-k^2 - \frac{7}{6}k^4 - \frac{1}{24}k^6) + \frac{1}{30} \beta (-\frac{13}{12}k^2 - \frac{1}{24}k^4), \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{6}k^2 a_1, \\ a_5 &= +\frac{k^2}{20} a_1 (2 + \frac{1}{6}k^2), \\ a_7 &= -\frac{k^2}{42} a_1 (1 + \frac{13}{30}k^2 + \frac{1}{120}k^4) \end{aligned} \right\} (14)$$

jne.

Kertoimet a_0 ja a_1 ratkaistaan reunaehdoista. Tämän jälkeen vääntymä saadaan derivoimalla yhtälöstä (12) ja käyrästys yhtälöstä (6). Jännityksiä laskettaessa on vääntymästä vähennettävä $\Psi/1$ ja kiertymästä κ . Sivupintojen välisen lämpötilaeron Δt aiheuttama käyrästys, joka on lisättävä suureeseen κ , on

$$u'' = \frac{\Delta t \lambda}{b}, \quad (15)$$

jossa b on palkin leveys ja λ on betonin lämpölaajenemisluku.

Mikäli siirtymän u arvoja halutaan esim. oikaisuun vaadittavan voiman määrittämiseksi, ne voidaan integroida yhtälöstä (6).

Jos vaaditaan

$$-u \Big|_{t=+1} - \frac{h}{2} \phi \Big|_{t=+1} = 0, \quad (16)$$

niin palkin keskellä ylälaipan reunaan vaikuttava pistemäinen oikaisuvoima saadaan likimain kaavasta

$$-u \Big|_{t=0} - \frac{h}{2} \phi \Big|_{t=0} = Q \left(\frac{1^3}{48 B} + \frac{h^2}{16 C} \right). \quad (17)$$

5. ERILAISIA REUNAEHTOTAPAUKSIA

5.1 Palkin nosto päistä

Palkki oletetaan päistään kuvan 2 mukaisesti ripustetuksi korkeudelta f palkin painopisteakselin yläpuolelta. Sisäisen ja ulkoisen vääntömomentin tasapainoehdosta saadaan tällöin seuraavat reunaehdot:

$$\left. \frac{1}{2} g l f \phi \right|_{t=1} = - \frac{2C}{1} \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=1} - \frac{\Psi}{2} \right), \quad (18)$$

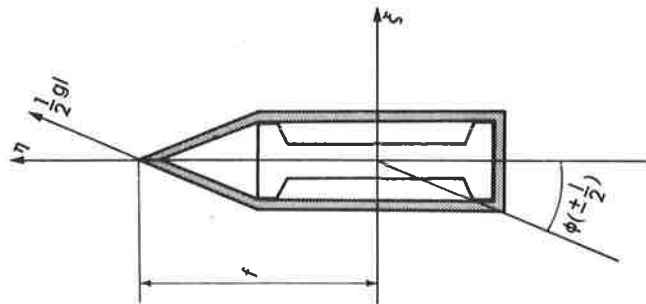
$$\left. \frac{1}{2} g l f \phi \right|_{t=-1} = - \frac{2C}{1} \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=-1} - \frac{\Psi}{2} \right). \quad (19)$$

Kun lauseke (12) sijoitetaan näihin, suoritetaan yhdistelyjä ja pieniä termejä jätetään huomioonottamatta, saadaan lopulta

$$a_0 \left[- \frac{8}{15} k^2 + \frac{2}{35} k^4 + \frac{g l^2 f}{4 C} \left(1 - \frac{11}{30} k^2 + \frac{23}{1260} k^4 \right) \right] = \beta \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{12} \frac{g l^2 f}{4 C} \right) - \frac{\beta k^2}{1260} \left(57 + \frac{22 g l^2 f}{4 C} \right), \quad (20)$$

$$a_1 \left[1 + \left(- \frac{1}{6} k^2 - \frac{11}{360} k^4 \right) + \frac{g l^2 f}{4 C} \left(1 - \frac{19}{210} k^2 - \frac{k^4}{504} \right) \right] = \frac{\Psi}{2}. \quad (21)$$

Näistä saatava kertoimet a_0 ja a_1 sijoitetaan yhtälöihin (13) ja (14). Todettakoon, että jos yhtälössä (20) a_0 :n kertoimesta otetaan huomioon vain 1. ja 3. termi ja asetetaan näiden summa nolllaksi, on saatu epäkeskisyyssmenetelmän mukaisesti kiepahduskuorman arvo ideaaliselle palkille. Tulos on sama kuin tasapainomenetelmällä johdettu lauseke (16), [6].



Kuva 2. Palkin tuenta nostettaessa.
Fig 2. Suspension of the beam at hoisting.

5.2 Palkin tuenta vinossa oleville tuille

Tällainen reunaehtotapaus esiintyy esim. palkkia kuljetettaessa, jolloin tien pinnan kallistuksista johtuen palkin etu- ja takapäätä kiertyvät toistensa suhteen. Vastaavasti tukipinnat, joille palkki asennetaan, voivat olla vinossa toisiinsa nähden. Reunaehdot voidaan kirjoittaa muotoon

$$\phi \Big|_{t=1} = \psi_2, \quad (22)$$

$$\phi \Big|_{t=-1} = \psi_1. \quad (23)$$

Sijoittamalla lauseke (12) saadaan

$$a_0 \left(1 - \frac{11}{30}k^2 + \frac{23}{1260}k^4 \right) - \frac{5}{12}\beta + \frac{11}{630}\beta k^2 = \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2), \quad (24)$$

$$a_1 \left(1 - \frac{19}{210}k^2 - \frac{1}{504}k^4 \right) = \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1). \quad (25)$$

5.3 Epäkeskinen tuenta

Tapaus esiintyy kuljetettaessa, kun palkin peräpäähän tukeutuu perävaunuun, jonka toinen pyörä tilapäisesti irtoaa tien pinnasta. Toinen reunaehto on yhtälön (22) mukainen. Toiseksi reunaehdoksi saadaan (vrt. yhtälö (19))

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{t=-1} - \frac{\psi}{2} = \gamma, \quad (26)$$

jossa

$$\gamma = \frac{(g/2 + G_1) e l}{2 C}. \quad (27)$$

Suure e on tuennan epäkeskisyys ja G_1 perävaunun paino. Kertoimien a_0 ja a_1 ratkaisemiseksi saadaan jälleen yhtälöpari.

6. MUITA TAPAUKSIA

Epäkeskinen kuormitus

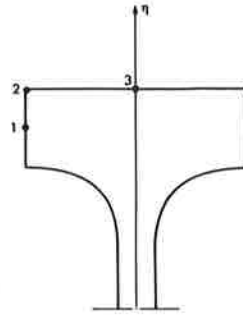
Jos palkkiin vaikuttaa jakautunut hyötykuorma p epäkeskisyydellä e (x :n suuntaan), on tasapainoyhtälön (6) vasemmalle puolelle lisättävä jakautunut vääntömomentti p_e . Tällöin yhtälön (9) lausekkeeseen tulee lisätermi

$$\alpha = \frac{p_e l^2}{4 C} . \quad (28)$$

Suureen g tilalle tulee $g + p$. Esimerkkikohdan 5.2 tapauksessa on otettava huomioon lisätermiit kaavoissa (13), (14), (24) ja (25).

7. JÄNNITYSTEN LASKEMINEN

Edellä laskettuja muodonmuutoksia vastaaviin jännityksiin liittää esijännityksen aiheuttamat jännitykset. Tällöin on lisäksi otettava huomioon mahdollisen tartunnan poiston ja palkin uumassa olevien aukkojen vaikutus. Näin saatua päävetojännitystä voidaan verrata betonin vetolujuuteen. Käytännössä voidaan laskut suorittaa määrittämällä riittävän monessa poikkileikkauksessa esim. kuvan 3 osoittamissa pisteissä pääjännitysten arvot. Mikäli halkeilua esiintyy, muuttuvat poikkileikkauksen jäykkyysarvot eivätkä symmetriaa koskevat alkuotaksumatkaan enää tarkoin pidä paikkaansa. Likimain voidaan menetellä siten, että palkki jaetaan esim. kolmeen osaan ja osilla käytetään keskimääräisiä, reunajännitysten avulla "kuoritun" poikkileikkauksen jäykkyysarvoja. Osoittautuu, että esim. noston ta-



Kuva 3. Jännitysten laskentapisteet poikkileikkauksessa.
 Fig' 3. Points for stress calculation in the cross-section.

pauksessa ei halkeilua juuri voida sallia. Kaikissa tapauksissa ei näin karkean menetelmän suppenevuus kuitenkaan ole tyydyttävä. Elementtimenetelmä olisi ilmeisen sopiva tämän kaltaisen tehtävän käsittelyyn.

Dynaamisia ilmiöitä ei ole edellä käsitelty. Jonkinlaisen käsityksen aikaansaamiseksi voidaan tilavuuspainolle käyttää (esim. kertoimella 0.7 ... 0.9) pienennettyä arvoa.

KÄYTETTYJÄ MERKINTÖJÄ

α	ks. yhtälö (28)
β	ks. yhtälö (10)
γ	ks. yhtälö (27)
κ	alkukäyritys (yhtälö (7))
ξ, η, ζ	suorakulmainen käyräviivainen koordinaatisto
ϕ	kiertymäkulma z-akselin ympäri
Ψ	päätepintojen välinen kulma alkutilassa (yhtälö (8))
a_i	kertoimia (yhtälö (12))
B	poikittainen taivutusjäykkyys (yhtälö (11))

C	vääntöjäykkyys (yhtälö (11))
C_M	käyristymisjäyhyys
e	tuennan tai hyötykuorman epäkeskisyys
e^*	hyötykuorman vaikutuspisteen korkeus vääntöakselilta
E	kimmomoduli
f	ripustuspisteen korkeus painopisteakselilta (kuva (2))
F	poikkileikkauksen pinta-ala
g	palkin oma paino pituusyksikköä kohti
G	liukumoduli
i	indeksi
i_p	poikkileikkauksen polaarinen jäyhyyssäde
I_x, I_y	palkin jäyhyysmomentit
k	ks. yhtälö (10)
l	palkin pituus
M_x	taivutusmomentti x-akselin suhteen
p	hyötykuorma
P	puristusvoima
r_x	$= \frac{1}{F} \int_F (x^2 + y^2) y \, dF$
t	$= 2z/l$, dimensioton, normeerattu koordinaatti
$u(u_s)$	painopisteakselin (vääntöakselin) siirtymä x-akselin suuntaan
x, y, z	suorakulmainen, suoraviivainen koordinaatisto
y_m	painopisteakselin y-koordinaatti
$(\cdot)'$	$= \frac{d(\cdot)}{dz}$

KIRJALLISUUTTA

- 1 Bürgermeister, G. & Steup, H., Stabilitätstheorie, I Teil, 1959.
- 2 Massonet, Ch., Réflexions concernant l' établissement de prescriptions rationnelles sur le flambage des barres en acier, L'Ossature Métallique, 15 (1950) 7-8.
- 3 Nylander, H., Torsional and Lateral Buckling of Eccentrically Compressed I and T Columns, Bull. 2, Div. Build. Stat. Struct. Eng., Roy. Inst. of Techn., Stockholm 1949.
- 4 Nylander, H., Torsion, Bending, and Lateral Buckling of I Beams, Bull. 22, Div. Build. Stat. Struct. Eng., Roy. Inst. of Techn., Stockholm 1956.
- 5 Petterson, O., Vippningsproblem vid hissning och montering av slanka balkar, Nordisk betong 4 (1960) 3, ss. 231...270.
- 6 Salo, I., Päistään nostetun jännebetonipalkin kiepahdus, Rakenteiden Mekaniikka 2 (1969) 2, ss. 75...80.
- 7 Stüssi, F., Exzentrisches Kippen, Schweizerische Bauzeitung, 1935, s. 123.
- 8 Timoshenko, S. & Gere, J., Theory of Elastic Stability, Second edition 1961.

Seppo Salonen, dipl.ins., Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi