

RIIPPUKÖYDEN YLEINEN TEORIA II

PERTTI HOLOPAINEN

Rakenteiden Mekaniikka
6 (1973) 1, s. 36...51
Rakenteiden Mekaniikan
Seura, Helsinki

Artikkelisarjan I osa on julkaistu Rakenteiden Mekaniikassa
4 (1971) 3-4, s. 127...163

YHTEENVETO

Köyden kuormituksen ollessa jatkuva ja sijaitessa köyden tasossa ovat yleisesti tunnettuja köyden differentiaaliyhtälöt ja niiden ratkaisut eräissä erikoistapauksissa, kun köysi oletetaan venymättömäksi. Kimmoisen köyden ratkaisua on usein esitetty siten, että ensin on määrätty venymättömän köyden muoto ja sen jälkeen on erilaisilla korjauksilla huomioitu approksimatiivisesti köyden kimmoisen venymän vaikutus [1], [2]. Kimmoisen köyden tarkat osittaisdifferentiaaliyhtälöt tasotapauksessa sekä niiden ratkaisut, kun pystysuunnassa vaikuttava kuorma $g = g(s)$ on vakio, on esitetty julkaisussa [3].

Tässä esitetään aluksi jatkuvan kuorman $q = q(s)$ kuormitta-

man kimmoisen köyden yhteensopivuusyhtälöiden määrääminen tasossa komplementaarienergian stationäärisen arvon periaatetta soveltaen. Samalla esitetään köysiviivan integroitujen parametrimuotoisten yhtälöiden määrääminen, kun jatkuva kuorma $q(s)$ on vakio. Edelleen käsitellään tapaus, jossa jatkuva kuorma $q(s)$ ja pistekuormat F_i vaikuttavat köyteen samanaikaisesti. Seuraavaksi käsitellään lyhyesti aikaisemmin johdettujen yhtälöiden yleistämistä 3-dimensioiseen avaruuteen, muita kuormitustapauksia ($q(s)$ ei vakio) ja variaatiotehtävää. Lopussa on laskuesimerkki.

1. KÖYSI TASOSSA

1.1 Köyttä kuormittaa samassa tasossa oleva jatkuva kuorma $q(s)$

Koska köyden muoto kuormittamattomassa tilassa on epämääräinen, annetaan kuormitus parametrin s funktiona $q = q(s)$, jossa s on köyden pisteen s etäisyys mitattuna vasemmasta kiinnityspisteestä C_1 kuormittamatonta (venymätöntä) köyttä pitkin. Näin voidaan yksinkertaisesti lausua esim. köyden oma paino.

Alkuolettamukset:

- 1^o Köyden materiaalin perusyhtälö on $\epsilon = f(\sigma)$, jossa f on monotonisesti nouseva ja jatkuva
- 2^o Köydellä ei ole taivutusjäykkyyttä

Merkitään: 0-tilassa $c = (a, b)$

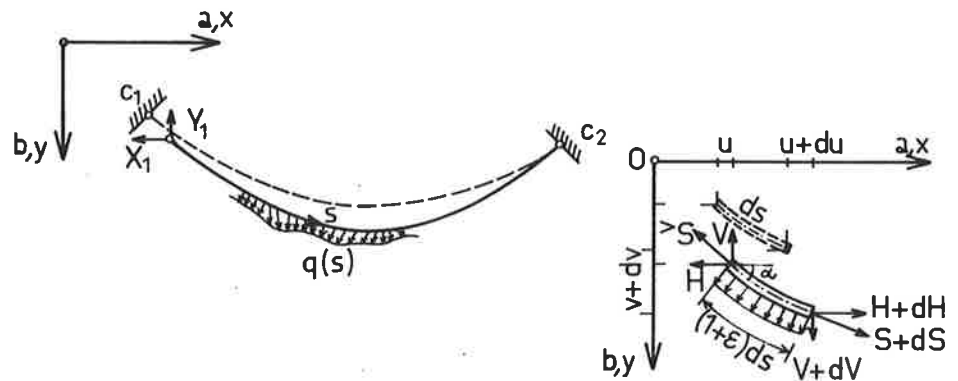
q-tilassa $z = (x, y)$ (kuormitettuna)

q-tilassa $w = (u, v)$ (kuormitettuna)

Köyden kokonaispituus 0-tilassa on s_0 .

Siirtymien reunaehdot: $w_1^* = w_2^* = \bar{0}$

Voimien "reunaehdot": $q(s) = (p(s), g(s))$, $0 < s < s_0$



Kuva 1. Köysi ja köysialkio kuormituksena jatkuva kuorma.

Köyden poikkileikkausala $A_0(s) \approx A(s)$, sillä oletetaan, että fyysiset muodonmuutokset (venymät) ovat suhteellisen pieniä.

Köysivoiman $S(s)$ komponentit $H(s)$, $V(s)$ saadaan tasapainoyhtälöistä

$$H(s) = X_1 - \int_0^s p(s) ds \quad (1a)$$

$$V(s) = Y_1 - \int_0^s g(s) ds, \quad (1b)$$

jotka toteuttavat voimien reunaehdot. Köysialkion momenttitasapainoehdosta saadaan

$$\tan \alpha(s) = \frac{V(s)}{H(s)} \quad (2)$$

ja projektiotasapainoehdosta

$$S(s) = H(s) \cos \alpha(s) + V(s) \sin \alpha(s). \quad (3)$$

Materiaalin perusyhtälön $\epsilon = f(\sigma)$ mukaan saadaan määrätyn köysialkion suhteellinen venymä

$$\epsilon(s) = f(S/A). \quad (4)$$

Komplementaarienergian lausekkeeksi saadaan köydelle (kuva 1)

$$\pi_c = \int_0^{s_0} \left(H \frac{du}{ds} + V \frac{dv}{ds} - U \right) ds = \quad (5)$$

$$= \int_0^{s_0} \left\{ H[(1+\epsilon) \cos\alpha - \frac{da}{ds}] + V[(1+\epsilon) \sin\alpha - \frac{db}{ds}] - (S\epsilon - \bar{U}) \right\} ds$$

jossa suureet H , V , S , ϵ , α ovat lausutut yhtälöiden (1)...(4) avulla tuntemattomien voimien X_1 ja Y_1 ja parametrin s funktiona. Varioitavina suureina ovat voimat X_1, Y_1 , jotka eivät ole s :n funktioita. Variatiotehtävän tuloksena saadaan samaan tapaan, kuin kohdassa 3.1.

s. 144 ja 145 [9]

$$\int_0^{s_0} (1 + \epsilon) \cos\alpha \, ds - (a_2 - a_1) = 0 \quad (6a)$$

$$\int_0^{s_0} (1 + \epsilon) \sin\alpha \, ds - (b_2 - b_1) = 0 \quad (6b)$$

joita lausuvat ehdon siirtymien reunaehtojen toteutumiseksi. Kun yhtälöistä (6) ratkaistaan tuntemattomat voimasuureet X_1, Y_1 saadaan köysikäyrän yhtälöiksi parametrin s avulla

$$x = a_1 + \int_0^s (1 + \epsilon) \cos\alpha \, ds \quad (7a)$$

$$y = b_1 + \int_0^s (1 + \epsilon) \sin\alpha \, ds. \quad (7b)$$

Yhtälöissä (6) ja (7) olevia integraaleja ei aina voida lausua alkeisfunktioiden avulla. Asettamalla $\epsilon = 0$ saadaan yhtälöistä (6) ja (7) venymättömän köyden ratkaisu.

Siinä erikoistapauksessa, että kuormitus $q(s)$ on vakio eli

$$p(s) = p, \quad g(s) = g \quad (8a,b)$$

saadaan yhtälöissä (6) ja (7) olevat integraalit muotoon

$$I_1 = \int (1+\epsilon) \cos\alpha \, ds = \int \frac{[1 + f(\sqrt{P_2(s)}/A(s))](X_1 - ps)}{\sqrt{P_2(s)}} \, ds \quad (9a)$$

$$I_2 = \int (1+\epsilon) \sin\alpha \, ds = \int \frac{[1 + f(\sqrt{P_2(s)}/A(s))](Y_1 - gs)}{\sqrt{P_2(s)}} \, ds \quad (9b)$$

joissa, samoin kuin yhtälöissä (11) ja (12)

$$\begin{aligned}
 P_2(s) &= as^2 + bs + c (= S^2) \\
 a &= p^2 + g^2 > 0 \\
 b &= -2(pX_1 + gY_1) \\
 c &= X_1^2 + Y_1^2 \\
 \Delta &= 4ac - b^2 = (2gX_1 - 2pY_1)^2 > 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

Integraalit (9) voidaan lausua alkeisfunktioiden avulla aina, kun materiaalin muodonmuutosfunktio f ja poikkileikkausalafunktio $A(S)$ ovat rationaalisia (usein $A(S)$ on vakio). Näin on sovellettaessa esim. Ylisen esittämää muodonmuutosfunktiota [4 s. 83 yht. (160)] suhteellisen venymän ϵ määrittämiseen, kun parametrin n arvoina käytetään kokonaislukuja.

Kun oletetaan, että köyden materiaali on lineaarisesti kimmoinen, (kimmokerroin on E) ja köyden poikkileikkausala A on vakio, saadaan integraalit (9) muotoon

$$I_1 = \int \frac{X_1 - ps}{\sqrt{P_2(s)}} ds + \frac{1}{EA} \int (X_1 - ps) ds \tag{11a}$$

$$I_2 = \int \frac{Y_1 - gs}{\sqrt{P_2(s)}} ds + \frac{1}{EA} \int (Y_1 - gs) ds \tag{11b}$$

Koska $a > 0$, voidaan yhtälöissä (11) ensimmäiset integraalit lausua logaritmifunktion ja irrationaalifunktion $\sqrt{P_2(s)}$ avulla. Kun lisäksi $\Delta = 4ac - b^2 > 0$, voidaan em. integraalit lausua myös areafunktioiden ja irrationaalifunktion $\sqrt{P_2(s)}$ avulla. Tällöin saadaan yhtälöistä (11) suorittamalla integroinnit määrättyksi integraaliksi välillä $(0, s_0)$

$$\begin{aligned}
 I_1(0, s_0) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \left(X_1 + \frac{pb}{2a} \right) \left[\sinh^{-1} \left(\frac{2as_0 + b}{\sqrt{\Delta}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{b}{\sqrt{\Delta}} \right) \right] - \\
 &= \frac{p}{a} (\sqrt{P_2(s_0)} - \sqrt{c}) + \frac{s_0}{EA} (X_1 - p \frac{s_0}{2})
 \end{aligned} \tag{12a}$$

$$I_2(0, s_0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(Y_1 + \frac{gb}{2a} \right) \left[\sinh^{-1} \left(\frac{2as_0 + b}{\sqrt{\Delta}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{b}{\sqrt{\Delta}} \right) \right] - \frac{g}{a} (\sqrt{P_2(s_0)} - \sqrt{C}) + \frac{s_0}{EA} \left(Y_1 - g \frac{s_0}{2} \right) \quad (12b)$$

Sijoittamalla yhtälöistä (12) määrättyt integraalit $I_1(0, s_0)$ ja $I_2(0, s_0)$ köysiyhtälöihin (6) saadaan niistä ratkaistuksi tuntemattomat voimasuureet X_1 , Y_1 . Tämän jälkeen köysikäyrä saadaan yhtälöistä (7) sijoittamalla niihin (12):sta $I_1(0, s)$ ja $I_2(0, s)$, joissa määrättyjen integraalien ylärajana on nyt muuttuja (parametri) s .

Jos valitaan $p = 0$ ja pystysuuntainen vakiokuorma $g > 0$ (esim. tasapaksun köyden oma paino), saadaan (12):sta ja (7):stä köysikäyrän yhtälöiksi

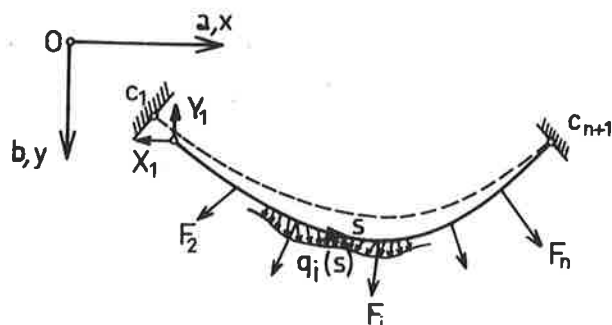
$$x(s) = a_1 + \frac{X_1}{g} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{gs - Y_1}{X_1} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{-Y_1}{X_1} \right) \right] + \frac{s}{EA} X_1 \quad (13a)$$

$$y(s) = b_1 - \frac{1}{g} (\sqrt{X_1^2 + (Y_1 - gs)^2} - \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}) + \frac{s}{EA} \left(Y_1 - \frac{1}{2} gs \right) \quad (13b)$$

mitkä ovat eräitä merkkisopimuksia lukuunottamatta samat kuin [3]:ssa. Funktio $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ on monotoninen ja jatkuva kaikilla x :n arvoilla. Kun köyden kiinnityspisteet on annettu, mutta ei pituutta s_0 , tulee antaa jokin muu ehto, esim. suurin taipuma, jonka perusteella s_0 voidaan määrätä. Jos köyden kuormitus $q(s)$ on vakio, niin s_0 voidaan ratkaista määräämällä venymättömän köyden köysikäyrä siten, että se toteuttaa annetut ehdot. Tällöin edellytetään, että venymät ovat pienehköjä, jolloin kuormitusintensiteetti $q(s)$ pysyy vakiona riittävän tarkasti.

1.2 Köyttä kuormittaa samassa tasossa oleva jatkuva kuorma $q_i(s) = (p_i(s), g_i(s))$ ja pistekuormat $F_i = (F_{xi}, F_{yi})$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

Alkuolettamukset ovat samat kuin kohdassa 1.1.



Kuva 2. Köysi, kuormituksen jatkuvana kuorma ja pistekuormat.

Siirtymien reunaehdot kuten edellä.

Voimien "reunaehdot": $q_i(s) = (p_i(s), g_i(s))$

$F_i = (F_{xi}, F_{yi})$ pisteissä c_i , $i = 2, 3, \dots, n$

Merkitään 0-tilassa määrättyjen pisteiden c_i ja c_{i+1} välistä köyden osaa koskevat suureet alaindeksillä i ja otetaan käyttöön lyhennysmerkinnät

$$X_{1, F_i} = X_1 - \sum_{k=2}^i F_{xk} \quad (14a)$$

$$Y_{1, F_i} = Y_1 - \sum_{k=2}^i F_{yk}, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (14b)$$

jolloin saadaan

$$H_i(s) = X_{1, F_i} - \int_0^s p(s) ds \quad (15a)$$

$$V_i(s) = Y_{1, F_i} - \int_0^s g(s) ds \quad (15b)$$

ja $S_i(s)$, $\tan \alpha_i(s)$ ja $\epsilon_i(s)$ vastaavasti kuten kohdassa 1.1.

Komplementaarienergian lauseke on muodossa $\pi_c = \sum_{i=1}^n \pi_{c_i}$ ja variaatiotehtävän tuloksena saadaan samaan tapaan kuin edellä köysiyhtälöt

$$\sum_{i=1}^n \int_{s_i}^{s_{i+1}} (1 + \epsilon_i) \cos \alpha_i ds - (a_{n+1} - a_1) = 0 \quad (16a)$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{s_i}^{s_{i+1}} (1 + \epsilon_i) \sin \alpha_i ds - (b_{n+1} - b_1) = 0 \quad (16b)$$

Näistä ratkaistaan tuntemattomat voimasuureet X_1 ja Y_1 , jolloin köysikäyrän yhtälöt parametrin s avulla ovat

$$x_j = a_1 + \sum_{i=1}^{j-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (1 + \epsilon_i) \cos \alpha_i ds + \int_{s_j}^s (1 + \epsilon_j) \cos \alpha_j ds \quad (17a)$$

$$y_j = b_1 + \sum_{i=1}^{j-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (1 + \epsilon_i) \sin \alpha_i ds + \int_{s_j}^s (1 + \epsilon_j) \sin \alpha_j ds \quad (17b)$$

Kun oletetaan, että köyden materiaali on lineaarisesti kimmoista (kimmokerroin on E) ja köyden poikkileikkausala A on vakio, saadaan yhtälöissä (16) ja (17) olevat integraalit samalla tavoin kuin (11) muotoon

$$I_{1i} = \int \frac{X_{1,F_i} - p_i s}{\sqrt{P_{2i}(s)}} ds + \frac{1}{EA} \int (X_{1,F_i} - p_i s) ds \quad (18a)$$

$$I_{2i} = \int \frac{Y_{1,F_i} - g_i s}{\sqrt{P_{2i}(s)}} ds + \frac{1}{EA} \int (Y_{1,F_i} - g_i s) ds \quad (18b)$$

joissa, samoin kuin yhtälöissä (20)

$$\begin{aligned} P_{2i}(s) &= a_i s^2 + b_i s + c_i \\ a_i &= p_i^2 + g_i^2 > 0 \\ b_i &= -2(p_i X_{1,F_i} + g_i Y_{1,F_i}) \\ c_i &= X_{1,F_i}^2 + Y_{1,F_i}^2 \\ \Delta_i &= 4a_i c_i - b_i^2 = (2g_i X_{1,F_i} - 2p_i Y_{1,F_i})^2 > 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Suorittamalla integraannit ja merkitsemällä sijoitukset $\frac{s_{i+1}}{s_i}$ saadaan

yhtälöistä (18) määrättyt integraalit

$$I_{1i}(s_i, s_{i+1}) = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a_i}} \left(X_{1, F_i} + \frac{p_i b_i}{2a_i} \right) \sinh^{-1} \left(\frac{2a_i s + b_i}{\sqrt{\Delta_i}} \right) - \frac{p_i}{a_i} \sqrt{P_{2i}(s)} + \frac{s}{EA} \left(X_{1, F_i} - p_i \frac{s}{2} \right) \right\} ds \quad (20a)$$

$$I_{2i}(s_i, s_{i+1}) = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a_i}} \left(Y_{1, F_i} + \frac{g_i b_i}{2a_i} \right) \sinh^{-1} \left(\frac{2a_i s + b_i}{\sqrt{\Delta_i}} \right) - \frac{g_i}{a_i} \sqrt{P_{2i}(s)} + \frac{s}{EA} \left(Y_{1, F_i} - g_i \frac{s}{2} \right) \right\} ds \quad (20b)$$

Yhtälöissä (17) viimeisissä integraaleissa on sijoitus $\int_{s_j}^s$. Sijoittamalla nämä integraalit köysiyhtälöihin (16) saadaan s_j niistä ratkaistuksi tuntemattomat voimasuureet X_1 ja Y_1 . Tämän jälkeen köysikäyrä saadaan yhtälöistä (17) sijoittamalla niihin yhtälöistä (20) määrättyt integraalit $I_{1i}(s_i, s_{i+1})$ ja $I_{2i}(s_i, s_{i+1})$ ja viimeiseksi $I_{1j}(s_j, s)$ ja $I_{2j}(s_j, s)$.

Jos valitaan $p_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, ja pystysuunnassa vaikuttaa koko köyden pituudella vakiokuorma g (esim. tasapaksun köyden oma paino) sekä pistekuormat F_i kuten edellä (kuva 2), saadaan köysikäyrän yhtälöksi

$$x_j(s) = a_1 + \sum_{i=1}^{j-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\{ \frac{X_{1, F_i}}{g} \sinh^{-1} \left(\frac{gs - Y_{1, F_i}}{X_{1, F_i}} \right) + \frac{s}{EA} X_{1, F_i} \right\} ds + \int_{s_j}^s \{sama\} ds \quad (21a)$$

$$y_j(s) = b_1 + \sum_{i=1}^{j-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\{ \frac{1}{g} \sqrt{X_{1, F_i}^2 + (Y_{1, F_i} - gs)^2} + \frac{s}{EA} \left(Y_{1, F_i} - \frac{1}{2} gs \right) \right\} ds + \int_{s_j}^s \{sama\} ds \quad (21b)$$

mitkä vastaavat yhtälöitä (13), joissa pistekuormat eivät ole mukana. Yhtälöistä (20) ja (21) ei voida suoraan muodostaa pelkkien piste-kuormien yhtälöitä asettamalla $p_i = g_i = 0$ tai $q = \vec{0}$. Sen sijaan niistä voidaan muodostaa yhtälöt (12) ja (13) asettamalla $F_{xi} = F_{yi} = 0$, $i = 2, 3, \dots, n$.

2. YLEISTÄMINEN 3-DIMENSIOISEEN AVARUUTEEN

Yleistäminen tasosta 3-dimensioiseen avaruuteen ei sisällä olennaisesti uutta, mikä on jo todettu I osassa [9 s. 148]. Variaatio-
tehtävässä on huomioitava köysialkion suuntalukuja sitova yhtälö silloin, kun varioitavina suureina esiintyvät myös suuntakulmat. Köysiyhtälöitä (6) tai (16) vastaavat yhtälöt 3-dimensioisessa avaruudessa saadaan kirjoittamalla kolmas yhtälö lisää. Samoin saadaan köysikäyrän yhtälöitä (7) tai (17) sekä yhtälöitä (11) tai (18) ja (12) tai (20) ja (13) tai (21) vastaavat yhtälöt. Lausekkeisiin (10) tai (19) tulee kolmas termi lisää ja edelleen on $a, a_i > 0$ ja $\Delta, \Delta_i > 0$.

3. MUUT KUORMITUSTAPAUKSET $q(s)$

Jos jatkuvat kuormat $p(s)$ ja $g(s)$ eivät molemmat ole vakioita, ei integraaleja I_1 , I_2 (ja I_3) useimmiten voida lausua alkeisfunktioiden avulla. Tällöin voidaan käyttää integrandien tasaisesti suppenevia sarjakehitelmiä tai integraalin pinta-alatulkitintaan perustuvia likimääräiskaavoja, mutta numerolaskut pitenevät huomattavasti. Jos oletetaan erikoisesti, että kuormitus on muotoa

$$p(s) = p_1 + p_2 s \quad (22a)$$

$$g(s) = g_1 + g_2 s \quad (22b)$$

tulevat integraalit (9) muotoon

$$I_1 = \int \frac{[1 + f(\sqrt{P_4(s)}/A(s))](X_1 - p_1s - \frac{1}{2} p_2s^2)}{\sqrt{P_4(s)}} ds \quad (23a)$$

$$I_2 = \int \frac{[1 + f(\sqrt{P_4(s)}/A(s))](Y_1 - g_1s - \frac{1}{2} g_2s^2)}{\sqrt{P_4(s)}} ds \quad (23b)$$

jotka voidaan lausua elliptisinä integraaleina ja rationaalifunktion integraalina aina, kun funktiot f ja A ovat rationaalisia. Elliptisten integraalien sarjakehitelmien suppenevuutta voidaan tehokkaasti parantaa ns. Landenin muunnosta soveltamalla. Siitä huolimatta, vaikka oletettaisiin f lineaariseksi (Hooken laki) ja A vakioksi, muodostuu integraalien I_1 , I_2 (ja I_3) numeerinen laskeminen, osittain osoittajissa olevan s^2 -termin takia, melko pitkäksi. Pistekuormien F_i ($i = 2, 3, \dots, n$) mukanaolo ei tässä mielessä vaikuttaisi tilanteeseen, mutta numerolaskut lisääntyisivät saman laskualgoritmin toistamisen takia n -kertaiseksi. Köyden jatkuva kuorma voidaan koota paloittain erilaisista kuormitustyypeistä suorittamalla integroinnit vastaavissa osissa. Kun köyden pituus s_0 ja kuormitus $q(s)$, F_i on annettu, voi köyden muoto 0-tilassa olla mielivaltainen.

4. VARIATIOTEHTÄVÄSTÄ

Edellä ovat varioitavina suureina esiintyneet yksinomaan voimasuureet X_1 ja Y_1 . Varioitaviksi suureiksi voitaisiin valita kuten osassa I [9, s. 141, 149] S , ϵ , α , mikä voidaan osoittaa sidottujen ääriarvojen teoriaan nojautuen Lagrangen kertoimia λ_i käyttäen muuttujia X_1 , Y_1 , $S(s)$, $\epsilon(s)$, $\alpha(s)$ sitovien yhtälöiden ollessa (kohdassa 1.1) yhtälöt (2), (3) ja (4). Tällöin todettaisiin, että Lagrangen kertoimet häviävät. Variaatiotehtävän tuloksena saataisiin köysiyhtälöt (6) sekä ottaen huomioon, että varioitavat suureet $S(s)$, $\epsilon(s)$

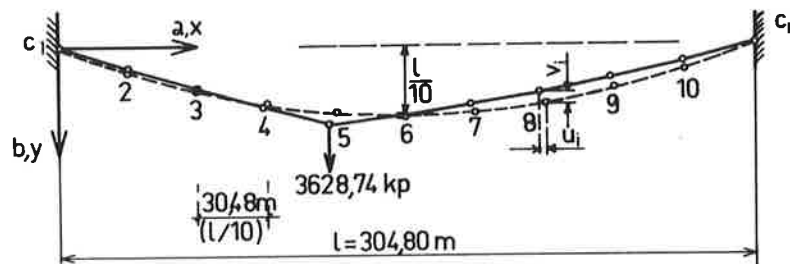
ja $\alpha(s)$ ovat integraalimerkin alla, tunnettuun variaatiolaskennan apulauseeseen nojautuen materiaalin perusyhtälö (4) epäsuorasti muodossa $\partial\bar{U}/\partial S - \epsilon = 0$, köysialkion projektiotasapainoyhtälö (3) ja momenttitasapainoyhtälö (2).

Kun köyden kuormitus tapahtuu kahdessa vaiheessa, voidaan variaatiotehtävä ja sen tuloksena saadut yhtälöt esittää jatkuvan kuorman tapauksessa periaatteessa samalla tavalla kuin osassa I [9 s. 153...155] on diskreetissä tapauksessa esitetty.

LASKUESIMERKKI

Tasapaksu köysi on ripustettu kahdesta 304,80 m:n päässä toisistaan yhtä korkealla olevasta pisteestä C_I ja C_{II} riippuman f ollessa $l/10 = 30,48$ m (kuva 3). Köyden poikkileikkausala $A = 5,4839$ cm², oma paino 4,7026 kp/m ja kimmokerroin $E = 1\,335\,831$ kp/cm². Määrätään köyden siirtymät, kun köyteen vaikuttaa pistekuorma 3628,74 kp $4l/10 = 121,92$ m:n etäisyydelle vasemmasta tukilinjasta.

Tämän tehtävän ovat laskeneet Michalos ja Birnstiel [8] keskitämällä köyden painon pistekuormiksi $l/10$ -pisteisiin (kuva 3). Köyden pituus s oman painon g vaikuttaessa on määrätty yhtälöstä $y = -\frac{Hg}{g} (\cosh \frac{Hg}{g} - 1)$ (origo köyden alimmassa pisteessä s_6) määräämällä ensin Hg ehdosta $y(l/2) = -f$. Köyden pituutta sg määrättäessä köy-



Kuva 3. Köysi, kuormituksena oma paino ja pistekuormat.

s_i on oletettu suoraksi kuormituspisteiden s_i, s_{i+1} välillä ($i = 1, 2, \dots, 10$). Tärkeimmät tulokset tämän laskuesimerkin kannalta on esitetty taulukoissa 1 ja 2. Mittayksiköt on muunnettu metrijärjestelmään seuraavasti: 1 lb = 0,453592 kp, 1 kip = 1000 lb, 1 in = 2,54 cm, 1 ft = 12 in, 1 psi = lb/in² = 0,00703070 kp/cm².

Tässä sama tehtävä on laskettu kohdassa 1.2 johdettuja yhtälöitä käyttäen, jolloin köyden oma paino g on huomioitu jatkuvana kuormana. Köyden osien pituudet on määrätty kuten edellä olettaen a) köysi suoraksi välillä s_i, s_{i+1} (taulukko 3) ja b) ottaen huomioon köyden todellinen muoto pisteiden s_i, s_{i+1} välillä ($i = 1, 2, \dots, 10$) (taulukko 4).

Kun kuormitus on otettu jatkuvana, pisteiden s_i painumat ovat hieman pienentyneet. Kun köyden osien pituudet s_{i0} on laskettu todellista käyrää pitkin, köyden koko pituus on kasvanut 7,8 cm ja painuma pisteessä s_5 16,4 cm.

Kun köyden muoto on toisen asteen paraabeli ja köyden kiinnityspisteet ovat yhtä korkealla, riippuma keskellä on $f = l/10$ ja köyden pituus saa hyvin pienen muutoksen Δs , aiheutuu tästä riippuman f muutos $\Delta f \approx 1,97 \Delta s$ Bohnyn mukaan. Jos taas köyden muoto on tasaviuinen kolmio kantana kiinnityspisteiden väli l (pistekuorma painottoman köyden keskipisteessä) ja riippuma on $f = l/10$, voidaan helposti todeta virtuaalisen siirtymätyön yhtälön avulla, että $\Delta f \approx 5,1 \Delta s$ kun Δs on hyvin pieni.

Edellisen perusteella voidaan todeta, että mikäli köyden pituus on laskettu likimäärin murtoviivan mukaan, siitä voi aiheutua siirtymiä laskettaessa merkittävää virhettä mikäli murtoviivan jakoväli ei ole hyvin tiheä. Edelleen edellistä esimerkkiä laskettaessa on todettu, että yhtälöt (21) soveltuvat hyvin tuntemattomien voimasuureiden X_1 ja Y_1 numeeriseen määräämiseen. Yhtälöt voidaan ratkais-

Taulukko 1. Köyden muoto omasta painosta $g = 4,70260 \text{ kp/m}$ ($3,16 \text{ lb/ft}$) [θ]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i^g	0	30,480	60,960	91,440	121,920	152,400	182,880	213,360	243,840	274,320	304,800
y_i^g	0	11,064	19,598	25,656	29,276	30,480	29,276	25,656	19,598	11,064	0,000
Δs_i^g	32,426	31,652	31,076	30,694	30,504	30,504	30,694	31,076	31,652	32,426	$\Sigma s_i^g = 312,704 \text{ m}$

Taulukko 2. Pisteiden s_i siirtymät u_i ja v_i kuormasta $P = 3628,74 \text{ kp}$ (8 kip) $X_1 = 9160,30 \text{ kp}$,
 $Y_1 = 2849,32 \text{ kp}$ [θ]

u_i	0	0,515	0,429	-0,083	-0,845	-1,124	-1,476	-1,719	-1,674	-1,161
v_i		-1,423	-1,003	1,285	5,472	-0,237	-3,998	-5,837	-5,772	-3,822

Taulukko 3. X_1 , Y_1 ja u_i , v_i yhtäiäiden (16) ja (21) mukaan kun Δs_i^g :t kuten edellä. $X_1 = 9164,73 \text{ kp}$,
 $Y_1 = 2925,74 \text{ kp}$

Δs_i^g	32,417	31,644	31,068	30,686	30,496	30,496	30,686	31,068	31,644	32,417	$\Sigma s_{i0} = 312,622 \text{ m}$
u_i		0,516	0,430	-0,082	-0,843	-1,123	-1,474	-1,718	-1,673	-1,160	+6,10352 E-04
v_i		-1,427	-1,011	1,274	5,457	-0,250	-4,009	-5,845	-5,778	-3,825	-4,01497 E-04

Taulukko 4. X_1 , Y_1 ja u_i , v_i yhtäiäiden (16) ja (21) mukaan kun Δs_i^g :t mitattu kaarevana. $X_1 = 9121,65 \text{ kp}$,
 $Y_1 = 2926,14 \text{ kp}$

Δs_{i0}	32,424	31,652	31,076	30,694	30,504	30,504	30,694	31,076	31,652	32,424	$\Sigma s_{i0} = 312,700 \text{ m}$
u_i		0,509	0,419	-0,095	-0,859	-1,134	-1,482	-1,722	-1,675	-1,160	-3,05176 E-04
v_i		-1,382	-0,924	1,397	5,621	-0,107	-3,890	-5,751	-5,713	-3,793	-1,79291 E-04

ta tavallisella Newtonin menetelmällä ja iterointi suppenee (3-6 iterointikierrosta) suunnilleen yhtä nopeasti kuin pelkkien piste-kuormien (osa I) tapauksessa.

Edellä oleva esimerkki on laskettu Helsingin teknillisen korkeakoulun osituskäyttötietokoneella Hewlett Packard 2000 B.

KÄYTETYT MERKINNÄT

$A, A(s)$	pinta-ala
E	kimmokerroin
F	pistekuorma
$H(s), V(s)$	köysivoiman $S(s)$ komponentit
I_1, I_2	integraaleja, jotka esittävät köyden päätepisteiden välisen etäisyyden projektioita koordinaattiakseleille käyttä pitkin integroituna
I_{1i}, I_{2i}	Integraaleja, jotka esittävät pistekuormien välisen köyden osan päätepisteiden välisen etäisyyden projektioita koordinaattiakseleille käyttä pitkin integroituna
$P_2(s), P_4(s)$	s :n polynomeja
$S(s)$	köysivoima
U	muodonmuutosenergia
\bar{U}	komplementaarienergia
X_1, Y_1	staattisesti määräämättömät suureet
$X_{1,Fi}, Y_{1,Fi}$	lyhennysmerkinnät, jotka on esitetty kaavoilla (14)
a, b	suorakulmaiset koordinaatit
c	$= (a, b)$
a, b, c, Δ	lyhennusmerkintöjä yhtälöissä (10) ja (12)
a_i, b_i, c_i, Δ_i	lyhennusmerkintöjä yhtälöissä (19) ja (20)
f	funktio

i, j, k	indeksejä
n	pistekuormien F_i välisten köydenosien lukumäärä
$p(s), g(s)$	köyden kuormituksen $q(s)$ komponentit
$q(s)$	köyden kuormitus
s	integroimisuujuja köyttä pitkin integroitaessa
Δs_i	$s_{i+1} - s_i$
s_0	köyden pituus 0-tilassa
u, v	siirtymän komponentit
π_c	komplementaarienergia
α, β	köysialkion suuntakulmat
ϵ	suhteellinen venymä

KIRJALLISUUTTA

- 1 W. Terence O'Brien and Arthur J. Francis, Cable movements under two-dimensional loads. Journal of the Structural Division, ASCE, 90 (1964) ST3, Part 1.
 - 2 O'Brien, W.T., General solution of suspended cable problems. Journal of the Structural Division, ASCE, 93 (1967) ST1.
 - 3 Møllmann, H., The analysis of shallow cables. Bygningsstatistiske meddelelser, XLI (1970) 3.
 - 4 Ylinen, A., Kimmo- ja lujuusoppi I ja II. Porvoo 1948, 1950.
 - 5 Lindelöf, E., Differentiaali- ja integraalilasku ja sen sovellutukset I. Porvoo 1950.
 - 6 Byrd, P.F., Friedman, M.D., Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists, second edition. 1971.
 - 7 Dwight, H.B., Tables of integrals and other mathematical data. Fourth edition, New York 1961.
 - 8 Michalos, J. and Birnstiel, C., Movements of a cable due to changes in loading. Journal of the Structural Division ASCE, 86 (1960) ST 12, Part 1.
 - 9 Holopainen, P., Riippuköyden yleinen teoria I. Rakenteiden Mekaniikka 4 (1971) 3-4, s. 127...163.
- Pertti Holopainen, dipl.ins., Teknillinen korkeakoulu, Otaniemi