

# PAKSUUDELTAAN MUUTTUVA ULOKELAATTA

Rakenteiden Mekaniikka  
6 (1973) 1, s. 15...35  
Rakenteiden Mekaniikan  
Seura, Helsinki

MARTTI MIKKOLA, SEPPO DRIVUORI ja PENTTI VARPASUO

---

## YHTEENVETO

Artikkelissa käsitellään paksuudeltaan muuttuvaa ulokelaattakaistaa, jonka reuna on vahvistettu palkilla. Kuormana on pistekuorma reunapalkilla. Ratkaisu on suoritettu Fourier-integraalimuunnoksen avulla. Tulokset pätevät tarkasti paksuuden muuttuessa eksponentiaalisesti, mutta niitä voidaan käyttää myös esim. lineaarisesti ohenevalle laatalle. Numeerisesti on laskettu tulokset kiinnitysmomentille, reunapalkin momentille ja reunapalkin taipumalle. Taulukkoparametreina ovat  $\kappa = B/D_1 a$  ja  $\epsilon = \ln (h_0/h_1)$ .

1. Tarkastellaan paksuudeltaan muuttuvaa ulokelaattakaistaa, jonka vapaa reuna on vahvistettu reunapalkilla (kuva 1). Laatan paksuus  $h = h(x)$  otaksutaan muuttuvaksi vain x-akselin suunnassa. Paksuudeltaan muuttuvan laatan differentiaaliyhtälö, joka on johdettu mm. teoksessa [1] s. 173-174, saa tällöin muodon

$$D\Delta\Delta w + 2 \frac{dD}{dx} \frac{\partial\Delta w}{\partial x} + \frac{d^2D}{dx^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = q, \quad (1)$$

jossa  $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ .

Yhtälön (1) ratkaiseminen tuottaa yleensä vaikeuksia, mutta jos laatan paksuus  $h(x)$  muuttuu sopivalla tavalla, on mahdollista löytää analyttinen ratkaisu suhteellisen vähällä työllä. Conwayn [2] mukaan tarkastellaan laattaa, jonka paksuus muuttuu eksponentiaalisesti

$$h(x) = h_0 \exp(-\epsilon x/a). \quad (2)$$

Laatan jäykkyyden muuttuminen noudattaa silloin lakia

$$D(x) = D_0 \exp(-3\epsilon x/a), \quad D_0 = Eh_0^3/12(1 - \nu^2), \quad D_1 = D_0 e^{-3\epsilon}. \quad (3)$$

Mikäli paksuuden muutos ei ole kovin jyrkkä, lauseke (3) kuvaa hyvällä tarkkuudella myös lineaarisesti ohenevan laatan jäykkyyttä. Esim. paksuuksien suhteen ollessa  $h(a)/h_0 = 0,7$ , jolloin  $\epsilon \approx 0,357$ , kaavan (3) antama arvo on enintään 4,6 % lineaarisesti ohenevan laatan jäykkyyttä pienempi. Arvoilla  $0,7 \leq h(a)/h_0 \leq 1$  poikkeama on luonnollisesti vielä pienempi.

Käyttämällä jäykkyydelle lauseketta (3) yhtälö (1) saadaan muotoon

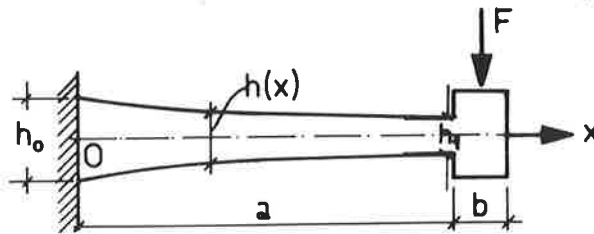
$$\Delta\Delta w - 6(\epsilon/a)\partial\Delta w/\partial x + 9(\epsilon/a)^2(\partial^2 w/\partial x^2 + \nu\partial^2 w/\partial y^2) = (q/D_0)\exp(3\epsilon x/a). \quad (4)$$

Sen ratkaisemista varten tarvitaan laatan tukemista ja laatan ja palkin yhteensopivuutta vastaavat reunaehdot. Laatan tyven jäykästä kiinnityksestä saadaan kaksi ehtoa

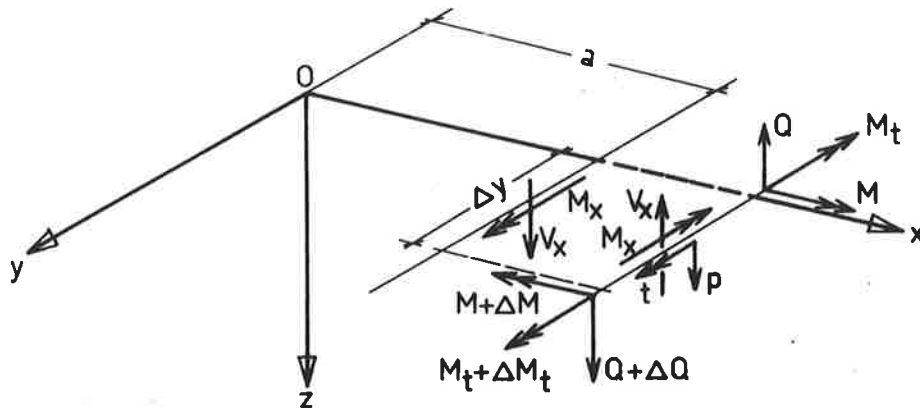
$$w(0,y) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0,y) = 0. \quad (5)$$

Laatan ja palkin yhteensopivuudesta saadaan samoin kaksi ehtoa (kuva 2)

$$w(a,y) = w_p(y) + (b/2)\phi_p(y), \quad \frac{\partial w}{\partial x}(a,y) = -\phi_p(y). \quad (6a)$$



Kuva 1. Paksuudeltaan muuttuva ulokelaatta.



Kuva 2. Laatan ja reunapalkin liittyminen.

Reunapalkin tasapainotarkastelusta seuraavat edelleen ehdot

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dy}(y) + p(y) &= V_x(a, y), & \frac{dM_t}{dy}(y) + t(y) &= M_x(a, y) + \\ &+ (b/2)V_x(a, y), \end{aligned} \quad (6b)$$

joissa esiintyvät laatan ja palkin voimasuureet lausutaan siirtymien avulla seuraavasti

$$\begin{aligned} V_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\ M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ Q &= -B \frac{d^3 w}{dy^3} \\ M_t &= C \frac{d\phi}{dy} \end{aligned} \quad (6c)$$

Eliminoimalla yhtälöistä (6a), (6b) ja (6c) reunapalkin siirtymät  $w_p$  ja  $\phi_p$  saadaan reunaehdot

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\}_{x=a} - B \frac{d^4}{dy^4} [w(a,y) + \frac{b}{2} \frac{\partial w}{\partial x}(a,y)] = -p \quad (7)$$

$$\left\{ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{b}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) + 2D(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \right\}_{x=a} - C \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}(a,y) = -t$$

Yhtälön (4) ratkaisu on siis määritettävä reunaehtojen (5) ja (7) alaisena.

Numeerisia laskelmia varten on edullista ottaa käyttöön dimensiottomat muuttujat

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/a \quad (8)$$

jolloin yhtälö (4) ja reunaehdot (5) ja (7) saavat muodon

$$\Delta \bar{w} - 6\epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{w} + 9\epsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right) = \frac{\bar{q}a^3}{D_0} \exp(3\epsilon\xi) \quad (4')$$

$$\bar{w}(0,\eta) = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}(0,\eta) = 0 \quad (5')$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{D}{D_0} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right) \right] + 2 \frac{D(1-\nu)}{D_0} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta^2} \right\}_{\xi=1} - \kappa e^{-3\epsilon} \frac{d^4}{d\eta^4} [\bar{w}(1,\eta) + \frac{b}{2a} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}(1,\eta)] = -\bar{p}a^2/D_0 \quad (7')$$

$$\left\{ \frac{D}{D_0} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right) + \frac{b}{2a} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{D}{D_0} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right) \right) + 2 \frac{D(1-\nu)}{D_0} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta^2} \right] \right\}_{\xi=1} - \omega e^{-3\epsilon} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta^2}(1,\eta) = -\bar{t}a/D_0$$

Näissä yhtälöissä esiintyvät dimensiottomat suureet

$$\bar{w}(\xi,\eta) = w(a\xi, a\eta)/a$$

$$\kappa = B/D_1 a \quad (9)$$

$$\omega = C/D_1 a$$

ja  $\bar{q}(\xi, \eta) = q(a\xi, a\eta)$ ,  $\bar{p}(\eta) = p(a\eta)$ ,  $\bar{t}(\eta) = t(a\eta)$ . Yksinkertaistetaan vielä reunaehdoja (7') ottamalla huomioon, että tavallisesti suhde  $b/a \ll 1$ , jolloin saadaan

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{D}{D_0} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right) \right] + 2(1-\nu) \frac{D}{D_0} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta^2} - \kappa e^{-3\epsilon} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \eta^4} \right\}_{\xi=1} = -\bar{p}a^2/D_0 \quad (7'')$$

$$\left\{ \frac{D}{D_0} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right) - \omega e^{-3\epsilon} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta^2} \right\}_{\xi=1} = -\bar{t}a/D_0$$

2. Yhtälön (4') ratkaiseminen voidaan suorittaa Fourier-integraalimuunnoksen avulla. Tarkastellaan x-akselin suhteen symmetristä kuormitustapausta, jolloin käytetään kosinimuunnosta

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\eta) \cos \alpha \eta d\eta, \quad f(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha \eta d\alpha \quad (10)$$

Differentiaaliyhtälön (4') muunnos on

$$W^{(4)} - 6\epsilon W''' - (2\alpha^2 - 9\epsilon^2)W'' + 6\epsilon\alpha^2 W' + (\alpha^2 - 9\nu\epsilon^2)\alpha^2 W = \frac{a^3}{D_0} e^{3\epsilon\xi} \bar{q} \quad (11)$$

missä  $W(\xi, \alpha) = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} \bar{w}(\xi, \eta) \cos \alpha \eta d\eta$ ,  $W' = dW/d\xi$ , jne. Reunaehtojen (5') ja (7'') muunnokset ovat

$$\begin{aligned} W(0, \alpha) &= 0 \\ W'(0, \alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} W'''(1, \alpha) - 3\epsilon W''(1, \alpha) - (2 - \nu)\alpha^2 W'(1, \alpha) + (3\nu\epsilon - \kappa\alpha^2)\alpha^2 W(1, \alpha) &= -Pa^2/D_1 \\ &= -Pa^2/D_1 \end{aligned} \quad (13)$$

$$W''(1, \alpha) + \omega\alpha^2 W'(1, \alpha) - \nu\alpha^2 W(1, \alpha) = -Ta/D_1$$

Tehtävä on palautettu tavallisen differentiaaliyhtälön (11) ratkaisemiseen reunaehdoin (12) ja (13).

Yhtälön (11) determinoiva yhtälö on

$$r^4 - 6\epsilon r^3 - (2\alpha^2 - 9\epsilon^2)r^2 + 6\epsilon\alpha^2 r + (\alpha^2 - 9\nu\epsilon^2)\alpha^2 = 0 \quad (14)$$

jonka juuret ovat

$$r_{1,2,3,4} = (3\epsilon \pm \sqrt{9\epsilon^2 + 4\alpha^2 \mp 12\sqrt{\nu}\epsilon\alpha})/2$$

Yhtälön (11) ratkaisu on homogeenisen ratkaisun

$$W(\xi, \alpha) = A_1 e^{r_1 \xi} + A_2 e^{r_2 \xi} + A_3 e^{r_3 \xi} + A_4 e^{r_4 \xi} \quad (15)$$

ja kuormitusta  $\bar{Q}$  vastaavan yksityisratkaisun summa.  $A_1, \dots, A_4$  ovat reunaehdoista (12) ja (13) määräytyviä integroimisvakioita.

3. Tarkastellaan tapausta, jossa kuormana on pistekuorma  $F$  reuna-palkilla pisteessä  $y = 0$ . Tällöin  $p = F\delta(y)$ ,  $\bar{p} = F\delta(\eta)$  ja  $P = F/\sqrt{2\pi}$ , ja muut kuormitukset häviävät. Yhtälön (11) ratkaisuksi riittää pelkkä homogeeninen ratkaisu (15). Reunaehdot (12) ja (13) antavat integroimisvakioiden määrittämiseksi yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 A_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^4 r_i A_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^4 [r_i^3 - 3\epsilon r_i^2 - (2 - \nu)\alpha^2 r_i + (3\nu\epsilon - \kappa\alpha^2)\alpha^2] e^{r_i} A_i &= -Fa^2/\sqrt{2\pi} D_1 \\ \sum_{i=1}^4 (r_i^2 + \omega\alpha^2 r_i - \nu\alpha^2) e^{r_i} A_i &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$A_i = \frac{Fa^2}{D_1 \sqrt{2\pi}} B_i \quad (17)$$

(jatkuu)

$$\begin{aligned} B_1 &= (-\theta_2 + \rho_{24}\theta_3 + \rho_{32}\theta_4)/d \\ B_2 &= (-\theta_1 + \rho_{14}\theta_3 + \rho_{31}\theta_4)/d \end{aligned} \quad (17)$$

$$B_3 = -\rho_{14}B_1 - \rho_{24}B_2$$

$$B_4 = -\rho_{31}B_1 - \rho_{32}B_2$$

$$\text{missä } d = (-\theta_1 + \rho_{14}\theta_3 + \rho_{31}\theta_4)(-\phi_2 + \rho_{24}\phi_3 + \rho_{32}\phi_4) - (-\theta_2 + \rho_{24}\theta_3 + \rho_{32}\theta_4)(-\phi_1 + \rho_{14}\phi_3 + \rho_{31}\phi_4)$$

$$\text{ja } \theta_i = (r_i^2 + \omega\alpha^2 r_i - \nu\alpha^2)e^{r_i}$$

$$\phi_i = [r_i^3 - 3\epsilon r_i^2 - (2 - \nu)\alpha^2 r_i + (3\nu\epsilon - \kappa\alpha^2)\alpha^2]e^{r_i}$$

$$\rho_{ij} = (r_i - r_j)/(r_3 - r_4)$$

Lopullinen ratkaisu saadaan suorittamalla käänteismuunnos (10):n mukaisesti. Taipuman lauseke on

$$\bar{w} = \frac{Fa^2}{\pi D_1} \int_0^\infty \left( \sum_{i=1}^4 B_i e^{r_i \xi} \right) \cos \alpha \eta d\alpha, \quad (18)$$

tukimomentti

$$\bar{M}_x(0, \eta) = -\frac{D_1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2}(0, \eta) = -\frac{FD_1}{\pi D_1} \int_0^\infty \left( \sum_{i=1}^4 B_i r_i^2 \right) \cos \alpha \eta d\alpha, \quad (19)$$

ja reunapalkin taivutusmomentti

$$\bar{M}_p = -\frac{B}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2}(1, \eta) = \frac{\kappa Fa}{\pi} \int_0^\infty \left( \sum_{i=1}^4 B_i e^{r_i} \right) \alpha^2 \cos \alpha \eta d\alpha \quad (20)$$

4. Kaavoissa (18), (19) ja (20) esiintyvien integraalien arvot laskettiin numeerisesti. Integroiminen suoritettiin äärellisen välin  $[0, \alpha_y]$  yli käyttäen Simpsonin kaavaa. Virhettä aiheutuu numeerisen integroinnin epätarkkuudesta (Simpsonin kaavaa käytettäessä virhe  $R_n = -\frac{\Delta^5}{90} nf^{(4)}(\xi)$ ,  $\Delta = (b - a)/2n$ ) ja katkaisuvirheestä ts. ylärajan  $\alpha_y$  valinnasta. Simpsonin kaavan tarkkuutta arvioitaessa laskettiin integrandin neljännen derivaatan likiarvo differenssi-

lausekkeen avulla. Askelpituudeksi valittiin 0,1 välillä  $[0,1]$  ja 1 arvosta  $\alpha = 1$  eteenpäin. Tällöin numeerisen integroinnin virhe on esim. taipumaa  $w(a,0)$  laskettaessa noin  $0,005 Fa^2/D_0$ . Myös muita suureita laskettaessa virhe on samaa suuruusluokkaa ts. numeerisen kertoimen 5 tuhannesosaa. Katkaisuvirhettä arvioitiin muodostamalla integrandin asymptoottinen lauseke, joka siis kuvaa integrandin käyttäytymistä yhä tarkemmin  $\alpha$ :n rajatta kasvaessa, ja integroimalla se välillä  $[\alpha_y, \infty)$ . Tämä antaa arvion katkaisuvirheelle ja kriteerin ylärajan  $\alpha_y$  valitsemiseksi. Valitsemalla  $\alpha_y = 16$  saatiin katkaisuvirheeksi kaikissa lasketuissa tapauksissa enintään 0,0005 (numeerisen kertoimen arvosta). Tuloksina saadut numeeriset kertoimet sisältävät siis vähintään kaksi oikeata desimaalia (alunperin pyrittiin saamaan kolmen desimaalin tarkkuus, mutta Simpsonin kaavaa varten valittu askelpituus ei riittänyt siihen pääsemiseksi). Virhearviota on tarkasteltu tarkemmin liitteessä.

5. Kaavojen (18), (19) ja (20) edellyttämät numeeriset laskelmat suoritettiin Elliott 503 -tietokoneella. Laskelmissa rajoituttiin neljöpoikkileikkauksen omaaviin reunapalkkeihin, ts.  $\kappa = 1,38\omega$ . Kullekin suureelle: tukimomentti, reunapalkin taipuma, reunapalkin momentti, laskettiin arvot  $\eta$ :n arvoilla 0, 0,25, 0,50, 1,0, 1,5 ja 2,0. Paksuuden muutosta kuvaavalle parametrille  $\epsilon$  annettiin arvot  $\epsilon = 0,1, 0,2, 0,3$  ja  $0,4$ . Lisäksi muunneltiin  $\kappa$ :n arvoa seuraavasti:  $\kappa = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1,5$  ja  $10$ .

Tulokset taulukoitiin siten, että kutakin  $\kappa$ :n arvoa kohden muodostettiin taulukko, jossa  $\epsilon$  muuttuu vaakasuunnassa ja  $\eta$  pystysuunnassa, kuten liitteenä olevista taulukoista käy ilmi.

Tukimomenttitaulukossa on taulukon numeerisen arvon kertoimena kuormittavan pistevoiman suuruus  $F$  miinusmerkillä varustettu. Reu-



napalkin taipuman yhteydessä kerroin on  $Fa^2/D_0$ . Reunapalkin momentti saadaan, kun taulukossa oleva arvo kerrotaan  $Fa$ :lla. Kutakin  $\kappa$ :n arvoa kohden kului tietokoneaikaa noin 1,5 minuuttia. Taulukoissa olevat luvut ovat virhearvioiden (vrt. liite) perusteella kahden desimaalin tarkkuudella oikeita.

6. Esimerkki taulukkojen käytöstä.

Tarkastellaan tapausta (kuva 3)

$$a = 200 \text{ cm}$$

$$h_0 = 24 \text{ cm}$$

$$h_1 = 20 \text{ cm}$$

$$I = (20 \cdot 30^3 / 12) \text{ cm}^4$$

$$\nu = 1/6$$

Saadaan  $h_0/h_1 = 1,2 = e^{\epsilon} \therefore \epsilon = 0,182$

$$\kappa = EI/D_1 a = (20 \cdot 30^3 / 12) / (20^3 / 12 (1 - 1/6^2)) 200 = 0,328$$

Taulukoista 2 ja 3 saadaan interpoloimalla

$$M_t = M_x(0,0) = -0,466 F$$

$$w_p(0) = 0,166 Fa^2/D_0$$

$$M(0) = 0,078 Fa$$

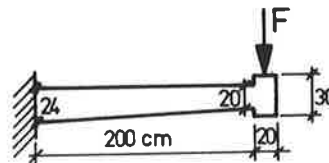
Bygg IV:ssä [3] esitetyllä likimääräisellä tavalla, jossa reunapalkkia käsitellään ulokepalkkien muodostamalla kimmoisella alustalla olevana palkkina, saadaan

$$M_t = -\frac{Fh_1}{4} \sqrt[4]{\frac{a}{Ch_1 I}} = -0,67 F$$

$$M = \frac{Fa}{2h_1} \sqrt[4]{C \frac{h_1 I}{a}} = 0,187 Fa$$

$C$  on laatan viisteellisyyteen liittyvä vakio, joka tässä saa arvon 0,67.

Kuva 3. Esimerkkitapaus.



LIITE

Virhearviointi (neliöpoikkileikkaus:  $\kappa = 1,38\omega$ )

Tarkastelemalla ratkaisussa tarvittavia lausekkeitä voidaan todeta, tosin varsin työläiden laskelmien jälkeen, että suureet  $B_i$  käyttäytyvät suurilla  $\alpha$ :n arvoilla seuraavasti:

$$B_1 \approx k_1 \exp(-\alpha)/\alpha^3$$

$$B_2 \approx k_2 \exp(-\alpha)/\alpha^2,$$

$$B_3 \approx k_3 \exp(-\alpha)/\alpha^3 \text{ ja}$$

$$B_4 \approx k_4 \exp(-\alpha)/\alpha^2,$$

$$\text{missä } k_1 = \exp(3\epsilon(\sqrt{\nu} - 1)/2)/3\epsilon\sqrt{\nu}\kappa$$

$$k_2 = - \exp(-3\epsilon/2)\sinh(3\epsilon\sqrt{\nu}/2)/9\epsilon^2\nu\kappa$$

$$k_3 = - k_1 - 3\epsilon\sqrt{\nu} k_2/2$$

$$k_4 = - k_2$$

Valitaan tyypilliseksi tapaukseksi  $\epsilon = 0,2$  ja  $\kappa = 0,5$  sekä käytetään Poissonin vakiolle arvoa  $1/6$ . Tällöin  $k_i$ -suureille saadaan numeeriset arvot:

$$k_1 = 6,83$$

$$k_2 = - 12,1$$

$$k_3 = - 5,35$$

$$k_4 = 12,1$$

Käyttämällä edellisiä asymptoottisia lausekkeitä saadaan, kun  $\alpha$  on kyllin suuri

$$\sum_{i=1}^4 B_i \exp(r_i) \approx - 0,0037 \frac{1}{\alpha^3}$$

$$\sum_{i=1}^4 B_i r_i^2 \approx 1,48 \exp(-\alpha)/\alpha$$

$$\sum_{i=1}^4 B_i \exp(r_i)\alpha^2 \cos \alpha r_i \approx - 0,0037 \cos \alpha / \alpha.$$

Reunapalkin taipuman virhearvio

Virhe koostuu kahdesta eri komponentista: äärettömän integrointivälin äärellistämisen = katkaisuvirhe sekä numeerisen integroinnin virhe.

Taipuman katkaisuvirheelle saadaan arvio ( $\eta = 0$ ,  $\epsilon = 0,2$ )

$$\begin{aligned} \epsilon_{w_p} \text{ katkaisu} &\approx \frac{Fa^2}{D_1} \int_0^\infty \sum_{i=1}^4 B_i \exp(r_i) d\alpha = \\ &= - \frac{Fa^2}{D_0 \pi e^{-3\epsilon}} 0,0037 \int_{16}^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^3} = 4,3 \cdot 10^{-6} \frac{Fa^2}{D_0} \end{aligned}$$

Integroimisvirheelle pätee, kun  $\eta = 0$

$$\epsilon_{w_p} \text{ integrointi} \approx - \frac{\Delta^5}{90} n f^{(4)}(\xi)$$

missä  $\Delta = \frac{b-a}{2n}$  ja  $\xi \in (a,b)$

Numeerinen integrointi suoritettiin kahdessa osassa:

1.  $a = 0$ ,  $b = 1$  ja  $\Delta = 0,1$
2.  $a = 1$ ,  $b = 16$  ja  $\Delta = 1,0$ . Tällöin lasketaan integrointivirheen arvio osaintegrointien summana. Tulokseksi saadaan

$$\epsilon_{w_p} \text{ integrointi} = 0,005 \frac{Fa^2}{D_0}$$

Edellisessä tarvittavat 4. derivaatat on laskettu  $\alpha$ :n arvoilla 0,5 sekä 3,0 korvaamalla derivaatta differenssillä käyttäen  $\alpha$ :n differenssiä 0,1 sekä 1,0. Edustakoon yllä oleva yleisesti taipuman virhettä kaikilla  $\eta$ :n arvoilla. Todetaan, että tarkkuutta olisi voitu parantaa huomattavasti pienentämällä integroimisaskelen pituutta.

Tukimomentin virhearvio

Suoritetaan tämäkin kahdessa osassa. Katkaisuvirhe ( $\eta = 0$ ,  $\epsilon = 0,2$ )

$$\begin{aligned}\epsilon_{M_t} \text{ katkaisu} &\approx - \frac{FD_0}{\pi D_1} \int_{16}^{\infty} \sum_{i=1}^4 B_i r_i^2 d\alpha = \\ &= - \frac{1,48}{\pi e^{-3\epsilon}} \int_{16}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha)}{\alpha} d\alpha < 10^{-7} F\end{aligned}$$

Numeerisen integroinnin virhe on samaa suuruusluokkaa kuin taipumalla.

Reunapalkin momentin virheelle saadaan edellä käsitellyssä tyypillisessä tapauksessa arvio

$$\text{virhe} < 5 \cdot 10^{-3}.$$

Edellä olevat virhearviot pätevät myös muilla  $\epsilon$ :n,  $\kappa$ :n ja  $\eta$ :n arvoilla kuin  $\epsilon = 0,2$ ,  $\kappa = 0,5$  ja  $\eta = 0$ .

## TAULUKOT

$\kappa = 0$

1.1 Ulokelaatan tukimomentti  $M_t = -k \cdot F$ 

$\eta$	$\epsilon=0.10$	0.20	0.30	0.40
0.00	0.506	0.526	0.547	0.567
0.25	0.470	0.487	0.504	0.520
0.50	0.383	0.392	0.401	0.410
1.00	0.200	0.197	0.193	0.189
1.50	0.092	0.085	0.079	0.072
2.00	0.048	0.043	0.038	0.033

1.2 Ulokelaatan reunapalkin taipuma  $w_p = k \cdot Fa^2 / D_o$ 

	0.10	0.20	0.30	0.40
0.00	0.177	0.203	0.233	0.268
0.25	0.159	0.179	0.204	0.232
0.50	0.128	0.143	0.159	0.177
1.00	0.073	0.078	0.083	0.088
1.50	0.038	0.038	0.039	0.039
2.00	0.021	0.021	0.020	0.020

1.3 Ulokelaatan reunapalkin momentti  $M = k \cdot Fa$ 

	0.10	0.20	0.30	0.40
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000
0.25	0.000	0.000	0.000	0.000
0.50	0.000	0.000	0.000	0.000
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000
1.50	0.000	0.000	0.000	0.000
2.00	0.000	0.000	0.000	0.000

$$\kappa = 0.25$$

2.1 Ulokelaatan tukimomentti

$\eta$	$\epsilon=0.10$	0.20	0.30	0.40
0.00	0.458	0.479	0.499	0.520
0.25	0.431	0.449	0.466	0.484
0.50	0.364	0.375	0.385	0.395
1.00	0.211	0.209	0.206	0.203
1.50	0.108	0.102	0.095	0.088
2.00	0.060	0.055	0.049	0.043

2.2 Ulokelaatan reunapalkin taipuma

	0.10	0.20	0.30	0.40
0.00	0.153	0.175	0.201	0.231
0.25	0.142	0.162	0.184	0.211
0.50	0.121	0.136	0.152	0.171
1.00	0.077	0.082	0.089	0.095
1.50	0.044	0.045	0.047	0.047
2.00	0.026	0.026	0.026	0.025

2.3 Ulokelaatan reunapalkin momentti

	0.10	0.20	0.30	0.40
0.00	0.072	0.067	0.063	0.060
0.25	0.027	0.024	0.021	0.018
0.50	0.007	0.005	0.004	0.002
1.00	-0.010	-0.010	-0.010	-0.009
1.50	-0.011	-0.010	-0.009	-0.008
2.00	-0.008	-0.007	-0.006	-0.005

$$\kappa = 0.50$$

## 3.1 Ulokelaatan tukimomentti

$\eta$	$\epsilon=0.10$	0.20	0.30	0.40
0.00	0.429	0.450	0.470	0.491
0.25	0.407	0.424	0.442	0.460
0.50	0.350	0.361	0.372	0.383
1.00	0.214	0.214	0.212	0.210
1.50	0.118	0.112	0.105	0.099
2.00	0.068	0.063	0.057	0.051

## 3.2 Ulokelaatan reunapalkin taipuma

	0.10	0.20	0.30	0.40
0.00	0.140	0.160	0.184	0.212
0.25	0.132	0.150	0.172	0.197
0.50	0.115	0.130	0.146	0.165
1.00	0.077	0.084	0.091	0.099
1.50	0.047	0.049	0.051	0.053
2.00	0.029	0.030	0.030	0.030

## 3.3 Ulokelaatan reunapalkin momentti

	0.10	0.20	0.30	0.40
0.00	0.105	0.099	0.094	0.088
0.25	0.048	0.043	0.038	0.034
0.50	0.016	0.013	0.010	0.007
1.00	-0.014	-0.014	-0.014	-0.014
1.50	-0.019	-0.017	-0.016	-0.014
2.00	-0.014	-0.012	-0.011	-0.010

$$\kappa = 0.75$$

4.1 Ulokelaatan tukimomentti

$\eta$	$\epsilon=0.10$	0.20	0.30	0.40
0.00	0.408	0.428	0.449	0.469
0.25	0.389	0.406	0.424	0.442
0.50	0.338	0.350	0.362	0.373
1.00	0.215	0.216	0.215	0.214
1.50	0.124	0.119	0.113	0.106
2.00	0.074	0.068	0.063	0.057

4.2 Ulokelaatan reunapalkin taipuma

	0.10	0.20	0.30	0.40
0.00	0.131	0.150	0.173	0.199
0.25	0.125	0.142	0.163	0.186
0.50	0.110	0.125	0.141	0.159
1.00	0.077	0.084	0.092	0.100
1.50	0.049	0.052	0.054	0.057
2.00	0.031	0.032	0.033	0.033

4.3 Ulokelaatan reunapalkin momentti

	0.10	0.20	0.30	0.40
0.00	0.128	0.121	0.114	0.108
0.25	0.064	0.058	0.052	0.047
0.50	0.024	0.020	0.016	0.013
1.00	-0.016	-0.016	-0.017	-0.017
1.50	-0.023	-0.022	-0.020	-0.019
2.00	-0.018	-0.017	-0.015	-0.013



$$\kappa = 1$$

## 5.1 Ulokelaatan tukimomentti

$\eta$	$\epsilon=0.10$	0.20	0.30	0.40
0.00	0.392	0.412	0.432	0.452
0.25	0.374	0.392	0.410	0.427
0.50	0.329	0.341	0.353	0.365
1.00	0.215	0.217	0.217	0.216
1.50	0.128	0.123	0.118	0.112
2.00	0.078	0.073	0.067	0.062

## 5.2 Ulokelaatan reunapalkin taipuma

	0.10	0.20	0.30	0.40
0.00	0.124	0.143	0.164	0.190
0.25	0.119	0.136	0.156	0.178
0.50	0.106	0.120	0.136	0.154
1.00	0.076	0.084	0.092	0.100
1.50	0.050	0.053	0.056	0.059
2.00	0.033	0.034	0.035	0.035

## 5.3 Ulokelaatan reunapalkin momentti

	0.10	0.20	0.30	0.40
0.00	0.146	0.138	0.130	0.123
0.25	0.077	0.070	0.063	0.057
0.50	0.032	0.026	0.022	0.018
1.00	-0.016	-0.017	-0.018	-0.018
1.50	-0.027	-0.025	-0.024	-0.022
2.00	-0.022	-0.020	-0.018	-0.016

$$\kappa = 1.5$$

6.1 Ulokelaatan tukimomentti

$\eta$	$\epsilon=0.10$	0.20	0.30	0.40
0.00	0.368	0.387	0.406	0.426
0.25	0.353	0.370	0.387	0.405
0.50	0.314	0.327	0.339	0.351
1.00	0.214	0.216	0.218	0.218
1.50	0.133	0.130	0.125	0.120
2.00	0.084	0.079	0.074	0.069

6.2 Ulokelaatan reunapalkin taipuma

	0.10	0.20	0.30	0.40
0.00	0.115	0.132	0.152	0.175
0.25	0.110	0.126	0.145	0.166
0.50	0.100	0.113	0.129	0.147
1.00	0.074	0.082	0.091	0.100
1.50	0.051	0.055	0.059	0.062
2.00	0.035	0.036	0.038	0.039

6.3 Ulokelaatan reunapalkin momentti

	0.10	0.20	0.30	0.40
0.00	0.172	0.163	0.154	0.146
0.25	0.097	0.089	0.081	0.074
0.50	0.044	0.038	0.032	0.027
1.00	-0.015	-0.017	-0.018	-0.019
1.50	-0.031	-0.030	-0.029	-0.027
2.00	-0.027	-0.025	-0.023	-0.021

$$\kappa = 10$$

## 7.1 Ulokelaatan tukimomentti

$\eta$	$\epsilon=0.10$	0.20	0.30	0.40
0.00	0.248	0.263	0.279	0.295
0.25	0.242	0.257	0.272	0.287
0.50	0.228	0.240	0.253	0.266
1.00	0.185	0.192	0.198	0.204
1.50	0.139	0.142	0.143	0.144
2.00	0.101	0.101	0.099	0.098

## 7.2 Ulokelaatan reunapalkin taipuma

	0.10	0.20	0.30	0.40
0.00	0.070	0.081	0.095	0.110
0.25	0.069	0.080	0.093	0.107
0.50	0.066	0.076	0.087	0.101
1.00	0.056	0.064	0.073	0.082
1.50	0.046	0.051	0.057	0.063
2.00	0.036	0.039	0.043	0.047

## 7.3 Ulokelaatan reunapalkin momentti

	0.10	0.20	0.30	0.40
0.00	0.317	0.302	0.287	0.273
0.25	0.225	0.210	0.196	0.183
0.50	0.144	0.131	0.118	0.106
1.00	0.028	0.019	0.011	0.004
1.50	-0.028	-0.033	-0.036	-0.039
2.00	-0.044	-0.045	-0.045	-0.045

KÄYTETTYJÄ MERKINTÖJÄ

B	= EI	reunapalkin taivutusjäykkyys
C	= $GI_t$	reunapalkin vääntöjäykkyys
D	= $Eh^3/12(1 - \nu^2)$	laatan taivutusjäykkyys
$D_0$	= $Eh_0^3/12(1 - \nu^2)$	
$D_1$	= $D_0 e^{-3\varepsilon}$	
E		kimmokerroin
G		liukukerroin $E/2(1 + \nu)$
I		palkin taivutusjäyhyys
$M, M_x, M_y$		taivutusmomentti
$M_t$		vääntömomentti
Q		reunapalkin leikkausvoima
$V_x$		laatan korvikeleikkausvoima
a		laatan leveys
b		reunapalkin leveys
h		laatan paksuus
p		reunapalkin z-suuntainen kuorma
t		reunapalkin vääntökuorma
w		laatan taipuma
$w_p$		reunapalkin taipuma
$\phi_p$		reunapalkin vääntökulma
$\xi$	= $x/a$ , $\eta = y/a$	dimensiottomat koordinaatit
$\varepsilon$		laatan paksuuden muutokseen liittyvä parametri
$\kappa$	= $B/D_1 a$	
$\omega$	= $C/D_1 a$	
$\delta(x)$		Diracin deltafunktio

KIRJALLISUUTTA

- 1 Timoshenko S. & Woinowsky - Krieger S., Theory of plates and shells. 2. painos. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1959.
- 2 Conway H., The flexure of infinite rectangular plates of varying thickness. Ingenieur-Archiv 26, 1958, s. 143.
- 3 Bygg IV, 822:611 s. 200. Stockholm 1949.

Martti Mikkola, professori, teknillinen korkeakoulu, Otaniemi

Seppo Orivuori, dipl.ins., Imatran Voima Oy, Helsinki

Pentti Varpasuo, dipl.ins. Imatran Voima Oy, Helsinki