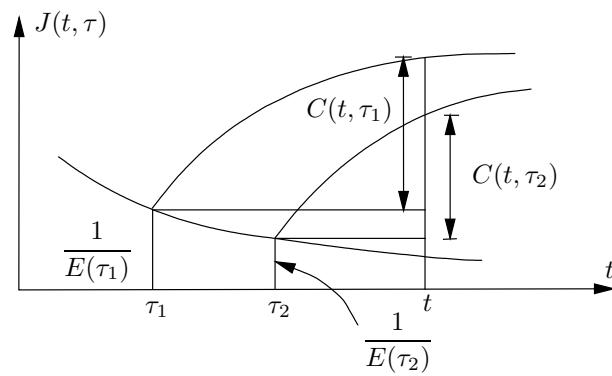
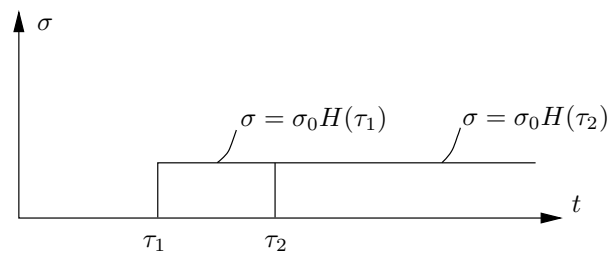


Viskoelastisuusteoria

luentomoniste

Koonnut M Tuomala



Sisältö

1 Johdanto	1
2 Viskoelastiset materiaalmallit	5
2.1 Yksinkertaiset reologiset mallit	5
2.1.1 Kimmoinen jousi ja nestesylinteri	5
2.1.2 Kelvinin aine	5
2.1.3 Yleistetty Kelvinin aine	8
2.1.4 Lineaarinen standardiaine	9
2.1.5 Yleistetty lineaarinen standardiaine	11
2.1.6 Maxwellin aine (neste)	12
2.1.7 Yleistetty viskoelastinen neste	13
2.1.8 Yleistetty viskoelastinen aine A	13
2.1.9 Yleistetty viskoelastinen aine B	14
2.2 Differentiaalimuotoinen materiaaliyhtälö	15
2.3 Integraalimuotoinen materiaaliyhtälö	16
2.4 Kompleksimuotoinen esitystapa	18
2.5 Betonin virumismalli	24
3 Kolmiulotteiset viskoelastiset materiaalmallit	27
3.1 Kimmoinen aine ja viskoosi neste	27
3.1.1 Yleistetty Hooken laki	27
3.1.2 Newtonin neste	28
3.2 Viskoelastinen aine	28
3.2.1 Integraalimuotoinen materiaalmalli	28
3.2.2 Differentiaalimuotoinen materiaalmalli	30
3.2.3 Vaihtoehtoinen esitystapa isotrooppiselle aineelle	31
4 Viskoelastisten reuna-arvotekävien ratkaisu	35
4.1 Jatkuvan aineen mekaniikan perusyhtälöt	35
4.2 Muuttujien erottaminen	37
4.2.1 Reunan jännitykset annettu	38
4.2.2 Reunan siirtymät tunnetaan	40
4.2.3 Harmoninen värähtely	41
4.2.4 Integraalimuunnosmenetelmä	42

5	Viskoelastisten ainevakioiden kokeellinen määrittäminen	55
5.1	Virumiskoe	55
5.2	Relaksaatiokoe	57
5.3	Dynaamiset kokeet	58
5.3.1	Pakkovärähtelykoe	58
5.3.2	Resonanssimenetelmä	59
5.3.3	Vapaa värähtely	60
	Liitteet	62
A	Laplace–muunnos	63

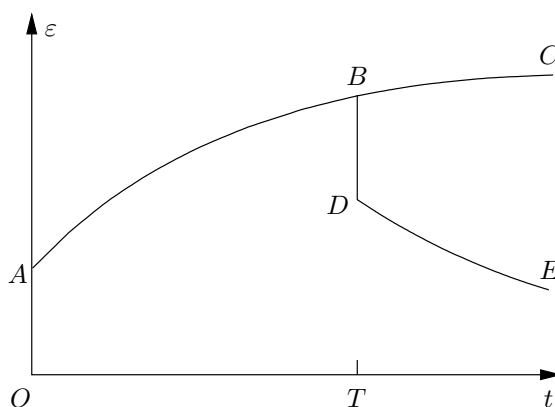
Luku 1

Johdanto

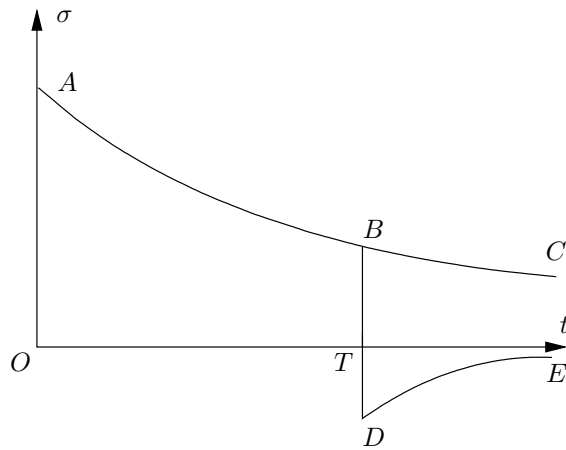
Viskoelastisilla aineilla on sekä kimmoisen kappaleen että viskoosin nesteen ominaisuuksia. Viskoelastisen aineen virtausominaisuutta nimitetään virumiseksi, ja sitä voidaan tutkia virumiskokeessa, esimerkiksi veto- tai leikkauskokeessa. Tarkastellaan sauvaa, jota kuormittaa vetovoima $F(t)$. Sauvan jännitys on $\sigma(t)$. Otaksutaan, että voima $F(t)$ on nolla, kun $t < 0$, ja sitten ajanhetkellä $t = 0$ voima saa vakioarvon $F(t) = F_0$. Kimmoisen aineen tapauksessa sauvan pään siirtymä ja sauvan venymä ovat myös vakioita, $u(t) = u_0$ ja $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$, ajanhetken $t = 0$ jälkeen. Äkillisen kuorman muutoksen dynaamisia vaikutuksia ei oteta huomioon tai otaksutaan koelaitteiston vaimentavan värähtelyt.

Viskoelastisen aineen venymä muuttuu hetkellä nolla kuvan 1.1 pistettä A vastaavaan arvoon, ja sen jälkeen venymä kasvaa käyrän ABC mukaisesti. Kiinteän aineen tapauksessa vakiokuorman aiheuttama venymän aikahistoriaa kuvaavan käyrän tangentti lähenee arvoa nolla ja itse venymä lähestyy äärettömyyteen mentäessä vakioarvoa. Sen sijaan nesteen tapauksessa virtaus jatkuu loputtomiin. Eroa kiinteisiin aineisiin ja nesteisiin on kuitenkin vaikea tehdä kokeellisesti, koska kokeen äärellisen keston perusteella ei välttämättä voi arvioida saavuttaako venymä raja- tai tasapainoarvon.

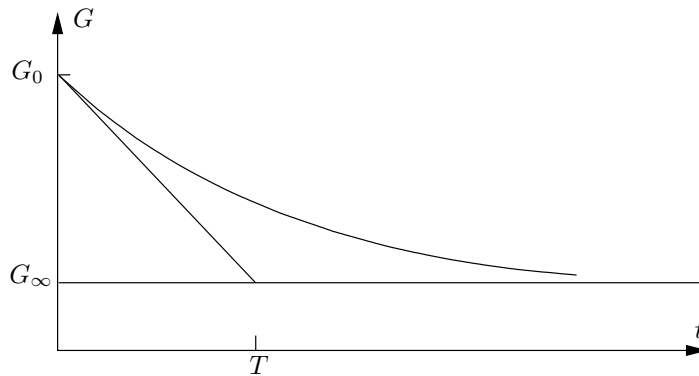
Jos kuorma poistetaan tietyllä ajanhetkellä $t = T$, niin kimmoisen aineen tapauksessa venymä palautuu välittömästi nolliin, ja myös koesauvan pituus palautuu entiselleen. Viskoelastisen aineen tapauksessa osa venymää, muutos BD , palautuu välittömästi. Piste



Kuva 1.1 Virumiskoe.



Kuva 1.2 Relaksaatiokoe.



Kuva 1.3 Relaksaatiodisfunktio.

D jälkeen loppuosa venymää palautuu hitaasti käyrän DE mukaisesti. Kiinteän aineen tapauksessa käyrä DE lähestyy nollaa, mutta nesteen tapauksessa koeaineeseen jää pysyvää venymää jäljelle.

Aineen viskoelastisia ominaisuuksia voidaan tutkia myös virumiskokeelle rinnakkaisen relaksaatiokokeen avulla. Relaksaatiokokeessa koesauvaan vedetään kokeen alussa ajanhetkellä $t = 0$ venymä ε_0 , ja sen jälkeen venymä pidetään vakiona. Kimmoisen aineen tapauksessa jälleen vakiovenymää vastaa vakiona pysyvä jännitys, tai vakiovenymän ylläpitämiseen tarvitaan vakiovoima. Viskoelastisen aineen jännitys pienenee eli relaksoituu, tai vakiovenymän ylläpitämiseen tarvitaan ajan mukana pienenevä vetovoima ja jännitys. Kiinteän aineen relaksaatiokäyrä lähenee asymptoottisesti vakio- tai tasapainoarvoa. Sen sijaan nesteen jännitys relaksoituu nollaan.

Kimmoisen aineen venymä palautuu nollaan ajanhetkellä $t = T$, jos kuormitus poistetaan. Viskoelastisen aineen tapauksessa tarvitaan kuvan 1.2 kuormitushistoria BDE muodonmuutoksen palauttamiseen nollaan. Jos jännitys on ollut välillä $0 \leq t < T$ positiivinen, niin sen on oltava negatiivinen, kun $t \geq T$. Jännityksen arvo relaksoituu nollaan käyrän DE mukaisesti, kun aine unohtaa välillä $0 \leq t < T$ vallinneen vakiovenymänsä.

Relaksaatiokoe tehdään antamalla esim. vetokoesauvalle vakiovenymä $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ ja mit-

taamalla sen jännitys $\sigma(t)$ ajan funktiona, jolloin saadaan samalla määritettyä relaksaatiofunktio

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}. \quad (1.1)$$

Merkitään, että relaksaatiofunktion alkuarvo on $G_0 \equiv G(0)$ ja G_∞ on arvo, jota $G(t)$ lähestyy asymptoottisesti. Relaksaatioajaksi nimitetään aikaa $\tau = \Delta t$, jonka kuluessa relaksoituminen tapahtuisi kokonaan alkunopeudella $\dot{G}(0) \equiv \frac{dG(0)}{dt}$. Kaavan muodossa

$$\tau = \frac{G_\infty - G_0}{\dot{G}(0)}. \quad (1.2)$$

Jos relaksaatiofunktio on esim. muotoa

$$G(t) = E_\infty + E e^{-\frac{t}{\tau_1}}, \quad (1.3)$$

niin relaksaatioajaksi tulee

$$\tau = \frac{E_\infty - (E_\infty + E)}{-E/\tau_1} = \tau_1. \quad (1.4)$$

Luku 2

Viskoelastiset materiaalmallit

2.1 Yksinkertaiset reologiset mallit

2.1.1 Kimmoinen jousi ja nestesyylinteri

Tarkastellaan kimmoisista jousista ja viskooseista nestesyylintereistä koottuja malleja. Jousen konstitutiivinen kimmainen yhtälö on

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.1)$$

Sylinterin viskoosinen laki on yleisessä tapauksessa

$$\sigma = f(\dot{\varepsilon}), \quad (2.2)$$

missä venymän $\varepsilon(t)$ aikaderivaatta on

$$\dot{\varepsilon} \equiv \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Newtonin nesteen tapauksessa on voimassa lineaarinen riippuvaisuus

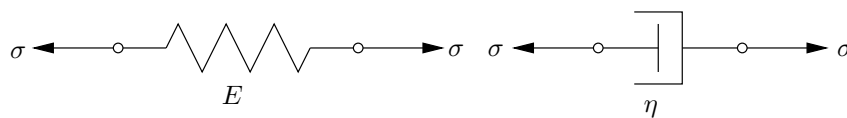
$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}. \quad (2.4)$$

missä η on viskoosisuuskerroin.

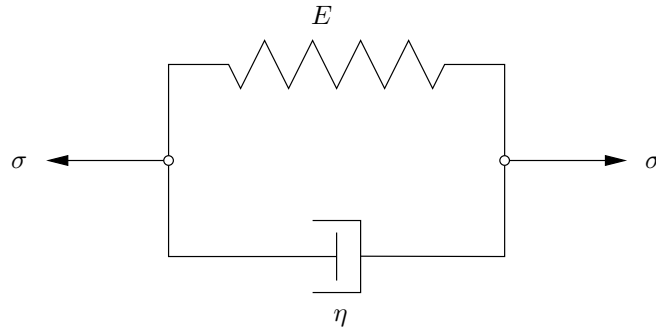
2.1.2 Kelvinin aine

Kelvinin mallissa jousi ja sylinteri on kytketty rinnakkain, kuva 2.2. Mallin konstitutiivinen yhtälö on

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}. \quad (2.5)$$



Kuva 2.1 Lineaarinen jousi ja nestesyylinteri.



Kuva 2.2 Kelvinin aine.

Differentiaaliyhtälö (2.5) voidaan saattaa standardimuotoon

$$\dot{y}(t) + \lambda y(t) = f(t), \quad (2.6)$$

jonka ratkaisu on

$$y(t) = y(0)e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Kaavan (2.7) perusteella differentiaaliyhtälön (2.5) ratkaisu alkuehdoilla

$$\sigma(0) = 0, \quad \varepsilon(0) = 0 \quad (2.8)$$

venymän suhteen on

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau, \quad (2.9)$$

josta saadaan osittaisintegroimalla muoto

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{1}{E} \left[\sigma(t) - \int_0^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} d\sigma(\tau) \right] \\ &= \frac{1}{E} \int_0^t \left[1 - e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \right] d\sigma(\tau). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Derivoimalla ajan t suhteen tulee

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} d\sigma(\tau). \quad (2.11)$$

Reologisen materiaalmallin, esimerkkinä Kelvinin malli, differentiaaliyhtälön ratkaisu on yleistä muotoa

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau, \quad (2.12)$$

missä $J(t)$ on *virumisfunktio*.

Differentiaaliyhtälön (2.5) ratkaisu löydetään myös esimerkiksi Laplace-muunnoksen avulla seuraavasti.

Funktion $f(t)$ Laplace-muunnos määritellään kaavalla

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (2.13)$$

Muuntamalla differentiaaliyhtälö (2.5) tulee

$$\tilde{\sigma}(s) = E\tilde{\varepsilon}(s) + \eta[s\tilde{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0)]. \quad (2.14)$$

Ottamalla huomioon alkuehto $\varepsilon(0) = 0$ saadaan ratkaisu

$$\tilde{\varepsilon}(s) = \frac{1}{E + \eta s} \tilde{\sigma}(s) \equiv \frac{1}{s} \frac{1}{E + \eta s} s\tilde{\sigma}(s) \quad (2.15)$$

Laplace-muunnosavaruuteen parametrin s funktiona. Takaisinmuunnos lasketaan konvoluutiotulon määritelmän

$$f * g = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau \quad (2.16)$$

ja sen muunnoskaavan

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau\right\} = \tilde{f}\tilde{g} \quad (2.17)$$

avulla asettamalla vastaavuudet

$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{E + \eta s}, \quad \tilde{g}(s) = s\tilde{\sigma}(s). \quad (2.18)$$

Termin $s\tilde{\sigma}(s)$ takaisinmuunnos on valituilla alkuarvoilla $\dot{\sigma}(t)$. Termiin $\tilde{f}(s)$ voidaan soveltaa liitteen A kaavaa (A.7) tai muunnoskaavaa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right\} = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}, \quad (2.19)$$

eli

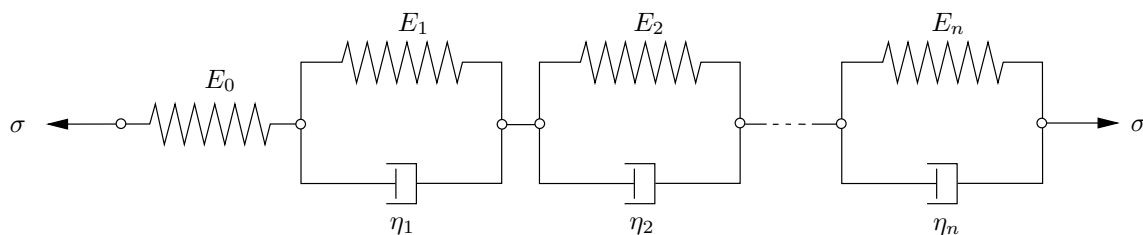
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-0)\left(s - \left(-\frac{E}{\eta}\right)\right)}\right\} \frac{1}{\eta} = \frac{e^{0t} - e^{-\frac{E}{\eta}t}}{0 - \frac{E}{\eta}} = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right). \quad (2.20)$$

Soveltamalla lopuksi konvoluutiointegraalin kaavaa saadaan sama tulos kuin edellä kaavassa (2.10)

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{1}{E} \left[1 - e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)}\right] \dot{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (2.21)$$

Jos kuormitus on porraskäyrän (yksikköaskel- tai yksikköfunktion) muotoinen

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t), \quad (2.22)$$



Kuva 2.3 Yleistetty Kelvinin aine.

missä Heavisiden porrasmallin määrittää kaavalla

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0, \\ 1, & \text{kun } t \geq 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

niin kaavasta (2.10) seuraa Kelvinin mallin virumisfunktio

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right), \quad (2.24)$$

missä $\tau_1 = \frac{\eta}{E}$ on *relaksaatioaika*.

Kelvinin mallilla voidaan kuvata viivästynyttä kimmoisuutta. Kuorman poistamisen jälkeen jännitys ja muodonmuutos palaavat nolnaan, mutta eivät välittömästi kuten kimmoisella aineella.

Esimerkki 2.1 Ratkaistaan Kelvinin mallin differentiaaliyhtälö siinä tapauksessa, että parametrit E ja η riippuvat ajasta ja alkuehto on $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0$.

Jos $E = E(t)$ ja $\eta = \eta(t)$, $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0$ ja integrointi aloitetaan hetkellä t_0 , niin differentiaaliyhtälön (2.5) ratkaisuksi tulee

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-\int_{t_0}^t \frac{E}{\eta} d\tau} + \int_{t_0}^t \frac{\sigma}{\eta} e^{-\int_{\tau}^t \frac{E}{\eta} d\zeta} d\tau. \quad (2.25)$$

2.1.3 Yleistetty Kelvinin aine

Kytkemällä jousi ja Kelvinin elementtejä peräkkäin saadaan kuvan 2.3 malli. Yhden elementin mallin virumisfunktion perusteella kirjoitetaan n elementtiä sisältävän mallin virumisfunktio

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = J_0 + \sum_{i=1}^n J_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right), \quad (2.26)$$

missä

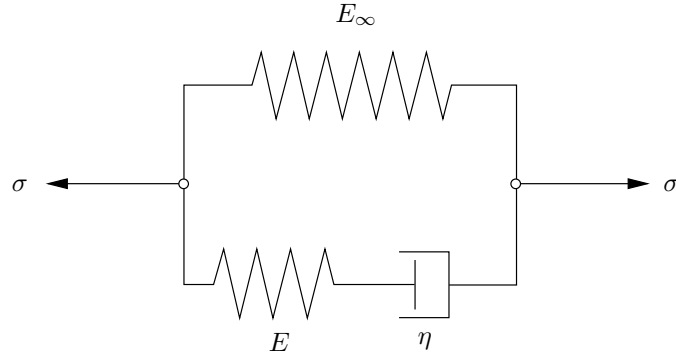
$$J_0 = \frac{1}{E_0}, \quad J_i = \frac{1}{E_i}, \quad \tau_i = \frac{\eta}{E_i} \quad (2.27)$$

ja τ_i ovat relaksaatioajat.

Yleistetyllä Kelvinin mallilla voidaan myös kuvata viivästynyttä kimmoisuutta.

Määrittelemällä *virumisspektri*

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{i=1}^n J_i \delta(t - \tau_i) \quad (2.28)$$



Kuva 2.4 Lineaarisen standardiaineen malli.

ja käyttämällä hyväksi Dirac'in δ -funktion ominaisuutta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \tau_i) f(\tau) d\tau = f(\tau_i) \quad (2.29)$$

voidaan virumisfunktio lausua muodossa

$$J(t) = J_0 + \int_0^{\infty} \mathcal{L}(\tau) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) d\tau. \quad (2.30)$$

2.1.4 Lineaarinen standardiaine

Tarkastellaan seuraavaksi kuvan 2.4 kahdesta jousesta ja nestesyylinteristä koostuvaa mallia. Jousien jäykkyydet ovat E_{∞} ja E , ja sylinterin viskoosisuuskerroin on η . Jousien konstitutiiviset kimmoiset yhtälöt ovat

$$\sigma_e = E\varepsilon_e, \quad \sigma_v = E(\varepsilon - \varepsilon_v). \quad (2.31)$$

Sylinterin viskoosinen laki on

$$\sigma_v = \eta \dot{\varepsilon}_v. \quad (2.32)$$

Jousen E_{∞} jännitys on $(\sigma - \sigma_v)$ ja venymä on ε . Koko mallin jännitys on

$$\sigma = E_{\infty}\varepsilon + \sigma_v. \quad (2.33)$$

Jousen E ja sylinterin η jännitys on σ_v , ja jousen E venymä on $(\varepsilon - \varepsilon_v)$. Koska sylinterin jännitys on $\sigma_v = \eta \dot{\varepsilon}_v$, saadaan

$$\sigma_v = \eta \dot{\varepsilon}_v = E(\varepsilon - \varepsilon_v). \quad (2.34)$$

Määritellään alkukimmokerroin ja relaksaatioaika kaavoilla

$$E_0 = E_{\infty} + E, \quad \tau_1 = \frac{\eta}{E}. \quad (2.35)$$

Sijoittamalla σ_v jännityksen σ kaavaan tulee

$$\sigma = E_0\varepsilon - E\varepsilon_v. \quad (2.36)$$

Muodonmuutos ε_v toteuttaa yhtälön

$$\dot{\varepsilon}_v + \frac{1}{\tau_1}\varepsilon_v = \frac{1}{\tau_1}\varepsilon, \quad (2.37)$$

ja lisäksi

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varepsilon_v(t) = 0. \quad (2.38)$$

Sisäisen muuttujan ε_v differentiaaliyhtälö (2.37) voidaan ratkaista ajan suhteen Laplace-muunnosta käyttäen tai esimerkiksi huomaamalla, että

$$\frac{d}{dt} \left[e^{\frac{t}{\tau_1}} \varepsilon_v(t) \right] = \frac{1}{\tau_1} e^{\frac{t}{\tau_1}} \varepsilon(t), \quad (2.39)$$

saadaan integroimalla yhtälöstä (2.37)

$$\varepsilon_v(t) = \frac{1}{\tau_1} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-\tau}{\tau_1}} \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (2.40)$$

Integroimalla osittain voidaan ε_v :n kaava muuntaa muotoon

$$\varepsilon_v(t) = \varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-\tau}{\tau_1}} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau, \quad (2.41)$$

missä on otettu huomioon, että $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow -\infty$.

Sijoittamalla $\varepsilon_v(t)$ kaavaan $\sigma = E_0\varepsilon - E\varepsilon_v$ tulee

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau, \quad (2.42)$$

missä

$$G(t) = E_\infty + Ee^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad (2.43)$$

on *relaksaatiofunktio*.

Relaksaatiokokeessa venymän annettu aikahistoria on porraskäyrän muotoinen eli

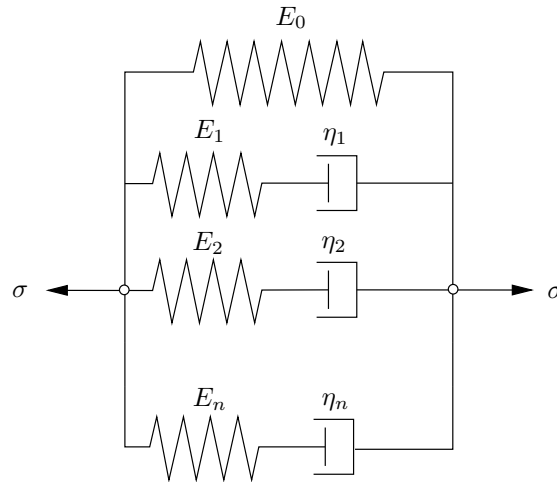
$$\varepsilon(t) = H(t)\varepsilon_0. \quad (2.44)$$

Koska Heavisiden porraskäyrän derivaatta on Dirac'in δ -funktio, venymänopeus on

$$\dot{\varepsilon}(t) = \delta(t)\varepsilon_0. \quad (2.45)$$

Jännitys on tällöin

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \left[\int_{-\infty}^t G(t-\tau) \delta(\tau) d\tau \right] \varepsilon_0 \\ &= G(t)\varepsilon_0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$



Kuva 2.5 Yleistetyn lineaarisen standardiaineen malli.

Lineaarisen standardiaineen käännteinen esitys on

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau, \quad (2.47)$$

missä

$$J(t) = \frac{1}{E_\infty} \left[1 - \frac{E}{E_0} e^{-\frac{E_\infty}{\tau_1 E_0} t} \right] \quad (2.48)$$

on virumisfunktio.

2.1.5 Yleistetty lineaarinen standardiaine

Kuvan 2.5 yleistetyn lineaarisen standardiaineen mallin jännitys on

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) - \sum_{i=1}^N E_i \varepsilon_v^i(t), \quad (2.49)$$

missä

$$E_0 = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \quad (2.50)$$

on alkukimmokerroin. Relaksaatioajat ovat

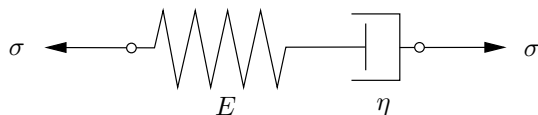
$$\tau_i = \frac{\eta}{E_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.51)$$

Muodonmuutokset eli sisäiset muuttujat ε_v^i toteuttavat yhtälöt

$$\dot{\varepsilon}_v^i(t) + \frac{1}{\tau_i} \varepsilon_v^i(t) = \frac{1}{\tau_i} \varepsilon(t), \quad (2.52)$$

ja lisäksi

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varepsilon_v^i(t) = 0. \quad (2.53)$$



Kuva 2.6 Maxwellin malli.

Yleistetyin mallin relaksaatiofunktio on

$$G(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}. \quad (2.54)$$

2.1.6 Maxwellin aine (neste)

Maxwellin mallissa jousi ja sylinteri on kytketty sarjaan. Maxwellin materiaalmalli kuvaa viskoelastista nestettä. Se on lineaarisen standardiaineen erikoistapaus, kun $E_\infty = 0$. Jousen ja sylinterin venymänopeuden summasta saadaan differentiaaliyhtälö

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{E}. \quad (2.55)$$

Alkuehdoilla $\sigma(0) = 0$, $\varepsilon(0) = 0$ saadaan integroimalla suoraan

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau. \quad (2.56)$$

Maxwellin aineen mallin ratkaisua ei voida kirjoittaa konvoluutiointegraalin

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (2.57)$$

muotoon, koska virumisfunktio on nyt määrittelemätön. Tämä nähdään esimerkiksi asettamalla E_∞ nolaksi lineaarisen standardiaineen mallissa. Antamalla vakio jännityshistoria Maxwellin aineen viruma ja venymä kasvaa rajatta.

Maxwellin aineen mallin ratkaisu jännityksen suhteen on

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau, \quad (2.58)$$

missä relaksaatiofunktio on

$$G(t) = E e^{-\frac{Et}{\eta}} = E e^{-\frac{t}{\tau_1}}, \quad \tau_1 = \frac{\eta}{E}. \quad (2.59)$$

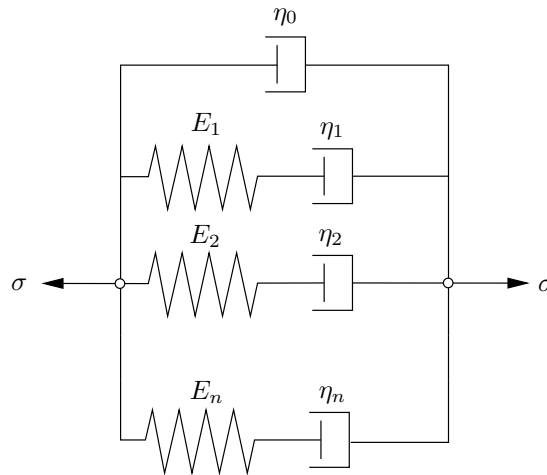
Jos venymä on porraskäyrän muotoinen eli

$$\varepsilon(t) = H(t) \varepsilon_0, \quad (2.60)$$

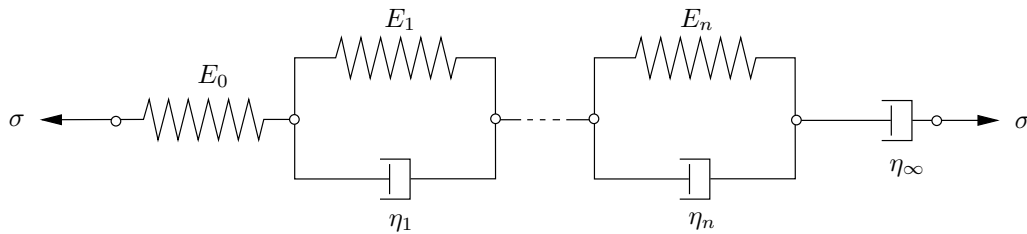
niin tällöin

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E e^{-\frac{t}{\tau_1}}, \quad (2.61)$$

missä $\tau_1 = \eta/E$ on jälleen relaksaatioaika.



Kuva 2.7 Yleistetty Maxwellin malli.



Kuva 2.8 Yleistetty viskoelastinen aine A.

2.1.7 Yleistetty viskoelastinen neste

Yleistetyn viskoelastisen nesteen malli saadaan kytkemällä rinnakkain Maxwellin elementtejä ja sylinteri, kuva 2.7. Mallin relaksaatiofunktio on Maxwellin mallin perusteella

$$G(t) = \eta_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^n E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}, \quad (2.62)$$

missä $\tau_i = \frac{\eta_i}{E_i}$ ovat Maxwellin elementtien relaksaatioajat.

Yleistetyn viskoelastisen nesteen relaksaatiospektri on

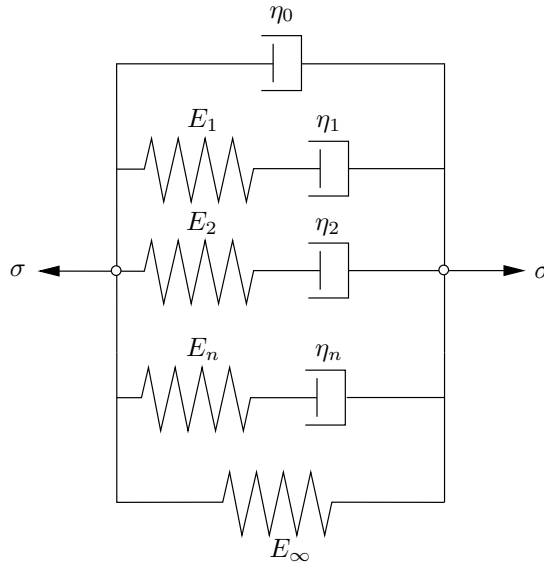
$$\mathcal{H}(t) = \sum_{i=1}^n E_i \delta(t - \tau_i), \quad (2.63)$$

ja relaksaatiofunktio voidaan nyt lausua muodossa

$$G(t) = \eta_0 \delta(t) + \int_0^{\infty} \mathcal{H}(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau. \quad (2.64)$$

2.1.8 Yleistetty viskoelastinen aine A

Kytkemällä yleistettyyn Kelvinin malliin sarjaan Maxwellin mallin tapaan vielä sylinteri, jonka viskoosisuuskertoimen on η_{∞} , saadaan kuvan 2.8 malli. Yleistetyn Kelvinin mallin ja



Kuva 2.9 Yleistetty viskoelastinen aine B.

Maxwellin mallin virumisfunktioiden perusteella kirjoitetaan virumisfunktio

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = J_0 + \sum_{i=1}^n J_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) + \frac{t}{\eta_\infty}, \quad (2.65)$$

missä

$$J_0 = \frac{1}{E_0}, \quad J_i = \frac{1}{E_i}, \quad \tau_i = \frac{\eta_i}{E_i}. \quad (2.66)$$

Virumisspektrin

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{i=1}^n J_i \delta(t - \tau_i) \quad (2.67)$$

avulla (kuten yleistetyllä Kelvinin mallilla) lausuttu virumisfunktio on

$$J(t) = J_0 + \int_0^\infty \mathcal{L}(\tau) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) d\tau + \frac{t}{\eta_\infty}. \quad (2.68)$$

2.1.9 Yleistetty viskoelastinen aine B

Kytkemällä yleistetyn viskoelastisen nesteen malliin rinnakkain vielä jousi E_∞ kuten Kelvinin elementissä saadaan kuvan 2.9 malli.

Mallin relaksaatiofunktioksi päätellään yleisen viskoelastisen nesteen mallin perusteella

$$G(t) = \eta_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^n E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} + E_\infty, \quad (2.69)$$

missä $\tau_i = \frac{\eta_i}{E_i}$ ovat jälleen Maxwellin elementtien relaksaatioajat.

Relaksaatiospektrin

$$\mathcal{H}(t) = \sum_{i=1}^n E_i \delta(t - \tau_i) \quad (2.70)$$

avulla relaksaatiofunktio voidaan nyt lausua muodossa

$$G(t) = \eta_0 \delta(t) + \int_0^{\infty} \mathcal{H}(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau + E_{\infty}. \quad (2.71)$$

2.2 Differentiaalimuotoinen materiaaliyhtälö

Reologisten mallien viskoelastiset konstitutiiviset yhtälöt ovat erikoistapauksia yleisemmästä differentiaalimuotoisesta esityksestä

$$p_0 \sigma(t) + p_1 \frac{d\sigma(t)}{dt} + p_2 \frac{d^2\sigma(t)}{dt^2} + \dots = q_0 \varepsilon(t) + q_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + q_2 \frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2} + \dots, \quad (2.72)$$

eli

$$P(D)\sigma(t) = Q(D)\varepsilon(t), \quad (2.73)$$

missä on merkitty (K on sarjan termien lukumäärä)

$$P(D) = \sum_{k=0}^K p_k D^k, \quad Q(D) = \sum_{k=0}^K q_k D^k, \quad D(\bullet) = \frac{d(\bullet)}{dt}. \quad (2.74)$$

Kaavasta (2.73) seuraa Laplace-muunnoksella

$$P(s)\tilde{\sigma}(s) - \frac{1}{s} \sum_{k=1}^K p_k \sum_{r=1}^k s^r \sigma^{(k-r)}(0) = Q(s)\tilde{\varepsilon}(s) - \frac{1}{s} \sum_{k=1}^K q_k \sum_{r=1}^k s^r \varepsilon^{(k-r)}(0), \quad (2.75)$$

missä

$$P(s) = \sum_{k=0}^K p_k s^k, \quad Q(s) = \sum_{k=0}^K q_k s^k, \quad (2.76)$$

$$\sigma^{(k-r)}(0) = \left. \frac{d^{(k-r)}\sigma(t)}{dt^{(k-r)}} \right|_{t=0}, \quad \varepsilon^{(k-r)}(0) = \left. \frac{d^{(k-r)}\varepsilon(t)}{dt^{(k-r)}} \right|_{t=0}.$$

Jos alkuehdot toteuttavat yhtälön

$$\sum_{r=k}^K p_r \sigma^{(r-k)}(0) = \sum_{r=k}^K q_r \varepsilon^{(r-k)}(0), \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.77)$$

(eli s :n samankorkuisten potenssien kertoimet ovat samat kaavan (2.76) alkuarvotermeissä), niin jännityksen ja muodonmuutoksen Laplace-muunnosten yhteys on

$$\tilde{\sigma}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \tilde{\varepsilon}(s). \quad (2.78)$$

Käänteismuunnoksen avulla saadaan yhteys

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (2.79)$$

venymähistorialle $\varepsilon(t) = 0$, kun $t < 0$.

Koska

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(s) &= s\tilde{G}\tilde{\varepsilon} \\ &= \frac{Q(s)}{P(s)}\tilde{\varepsilon}(s), \end{aligned} \quad (2.80)$$

saadaan yhteys

$$s\tilde{G}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}. \quad (2.81)$$

2.3 Integraalimuotoinen materiaaliyhtälö

Kokeellisten havaintojen perusteella lineaarisen viskoelastisen aineen jännitys $\sigma(X, t)$ riippuu muodonmuutoshistoriasta $\varepsilon(X, \tau)$. Riippuvaisuus voidaan yleisesti esittää kaavan muodossa

$$\sigma(X, t) = \int_{\tau=-\infty}^t \mathcal{F} \varepsilon(X, \tau), \quad (2.82)$$

missä \mathcal{F} on kokeellisesti määritettävä funktionaali. Tutkitaan seuraavassa edelleen homogeenista deformaatiota, jolloin riippuvaisuus koordinaatista X voidaan jättää pois yhtälöistä.

Lineaarisen viskoelastisen aineen tapauksessa \mathcal{F} on lineaarinen funktionaali, joten se voidaan esittää muodossa

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t f(t, \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau. \quad (2.83)$$

Tämä lineaarinen funktionaali sisältää materiaalin vanhenemisen. Jos

$$\varepsilon_1(t) = g(t), \quad \varepsilon_2(t) = g(t - k) \quad (2.84)$$

ovat kaksi venymähistoriaa, niin niiden tuottamiseen tarvittavat jännitykset eivät ole yleensä samat, eli

$$\sigma_2(t) \neq \sigma_1(t - k). \quad (2.85)$$

Erikoistapauksessa

$$f(t, \tau) = G(t - \tau) \quad (2.86)$$

saadaan materiaaliyhtälö

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau, \quad (2.87)$$

ja tällöin

$$\sigma_2(t) = \sigma_1(t - k). \quad (2.88)$$

Venymä $\varepsilon(t)$, $-\infty < t$ on edellä otaksuttu jatkuvaksi ajan funktioksi. Jos $\varepsilon(t) = 0$, kun $t < 0$ ja venymän arvossa on epäjatkuvuus $\varepsilon(0)$ hetkellä $t = 0$, niin kaava (2.87) muuntuu muotoon

$$\sigma(t) = G(t)\varepsilon(0) + \int_0^t G(t - \tau)\dot{\varepsilon}(\tau) d\tau. \quad (2.89)$$

Venymän epäjatkuvuus aiheuttaa termin $\varepsilon(0)\delta(t)$ venymän derivaatan $\dot{\varepsilon}(t)$ kaavaan, ja integroitaessa siitä tulee oikean puolen ensimmäinen termi.

$G(t)$ on materiaalin relaksaatiofunktio, joka voidaan määrittää kokeellisesti. Jos $G(t) = E$ on vakio ja materiaali on deformoitumattomassa tilassa ajanhetkellä $\tau = -\infty$, niin kaavasta (2.87) saadaan integroimalla kimmoisen aineen jännityksen ja muodonmuutoksen välinen yhteys $\sigma = E\varepsilon$. Newtonin lineaarisen viskoosin nesteen tapauksessa

$$G(t) = \eta\delta(t), \quad (2.90)$$

missä η on viskoosisuuskerroin ja $\delta(t)$ on Dirac'in δ -funktio. Integroimalla (2.87) tulee nyt $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$.

Integraalimuotoisen jännityksen ja muodonmuutoksen välisen materiaalimallin käännteinen esitysmuoto on

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau)\dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (2.91)$$

tai kaavaa (2.89) vastaten

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma(0) + \int_0^t J(t - \tau)\dot{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (2.92)$$

Laplace-muunnoksella muunnetut materiaalimallit (2.87) ja (2.91) ovat

$$\tilde{\sigma}(s) = s\tilde{G}(s)\tilde{\varepsilon}(s), \quad \tilde{\varepsilon}(s) = s\tilde{J}(s)\tilde{\sigma}(s). \quad (2.93)$$

Huomataan, että virumis- ja relaksaatiofunktioiden muunnokset toteuttavat yhtälön

$$\tilde{J}(s) = \frac{1}{s^2\tilde{G}(s)}. \quad (2.94)$$

Kun aika lähestyy nollaa tai ääretöntä, niin relaksaatio- ja virumisfunktioiden välillä ovat rajoilla yhteydet

$$\lim_{t \rightarrow 0} J(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{G(t)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} J(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{G(t)}. \quad (2.95)$$

Muuttujan vaihdoksella ja osittaisintegroimalla konstitutiivinen yhtälö (2.89) muuntuu muotoon

$$\sigma(t) = G(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \varepsilon(t - \tau) \frac{dG(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (2.96)$$

Lineaarille viskoelastiselle aineelle pätevän häipyvän muistin periaatteen mukaan venymän aikahistorian $\varepsilon(\tau)$, $-\infty < \tau \leq t$ viimeaikaisilla arvoilla on suurempi vaikutus jännityksen nykyarvoon $\sigma(t)$ kuin venymän varhaisemmalla aikahistorialla. Tästä seuraa relaksaatiofunktiolle ehto

$$\left| \frac{dG(t)}{dt} \right|_{t=t_1} \leq \left| \frac{dG(t)}{dt} \right|_{t=t_2}, \quad t_1 > t_2 > 0. \quad (2.97)$$

Vastaavasti virumisfunktiolle pätee

$$\left| \frac{dJ(t)}{dt} \right|_{t=t_1} \leq \left| \frac{dJ(t)}{dt} \right|_{t=t_2}, \quad t_1 > t_2 > 0. \quad (2.98)$$

2.4 Kompleksimuotoinen esitystapa

Otaksutaan, että muodonmuutoshistoria on ajan harmoninen funktio

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}, \quad (2.99)$$

missä ε_0 on amplitudi ja ω on kulmanopeus.

Sijoitetaan muodonmuutoksen lauseke integraalimuotoiseen materiaaliyhtälöön

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_{-\infty}^t G(t-\zeta) \frac{d\varepsilon(\zeta)}{d\zeta} d\zeta \\ &= \int_0^{\infty} G(\tau) \frac{d\varepsilon(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Jaetaan relaksaatiofunktio kahteen osaan

$$G(t) = G_{\infty} + (G(t) - G_{\infty}) \equiv G_{\infty} + \hat{G}(t), \quad (2.101)$$

missä

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{G}(t) = 0 \quad \text{eli} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = G_{\infty}. \quad (2.102)$$

G_{∞} on moduulin $G(t)$ tasapainoarvo, jota se lähestyy äärettömyyteen mentäessä. Nesteelle $G_{\infty} = 0$.

Sijoittamalla muodonmuutos $\varepsilon(t)$ (2.99) ja relaksaatiomoduuli $G(t)$ (2.101) kaavaan (2.100) tulee

$$\sigma(t) = G_{\infty} \varepsilon_0 e^{i\omega t} + i\omega \varepsilon_0 \int_0^{\infty} \hat{G}(\tau) e^{i\omega t} e^{-i\omega \tau} d\tau. \quad (2.103)$$

Ottamalla huomioon yhteys

$$e^{i\omega \tau} = \cos \omega \tau + i \sin \omega \tau \quad (2.104)$$

saadaan edelleen

$$\sigma(t) = \left[G_{\infty} + \omega \int_0^{\infty} \hat{G}(\tau) \sin \omega \tau d\tau + i\omega \int_0^{\infty} \hat{G}(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right] \varepsilon_0 e^{i\omega t}. \quad (2.105)$$

Merkitsemällä

$$\begin{aligned} G^*(i\omega) &\equiv G_\infty + \omega \int_0^\infty \hat{G}(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau + i\omega \int_0^\infty \hat{G}(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau \\ &\equiv G_1(\omega) + iG_2(\omega), \end{aligned} \quad (2.106)$$

missä on lisäksi otettu käyttöön merkinnät

$$G_1(\omega) = G_\infty + \omega \int_0^\infty \hat{G}(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau, \quad (2.107)$$

$$G_2(\omega) = \omega \int_0^\infty \hat{G}(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau, \quad (2.108)$$

saadaan kompleksimuotoinen viskoelastinen materiaaliyhtälö

$$\sigma(t) = G^*(i\omega)\varepsilon_0 e^{i\omega t}, \quad (2.109)$$

missä $G^*(i\omega)$ on *kompleksimoduuli*. Materiaaliyhtälö (2.109) voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\sigma(t) = |G^*(i\omega)|\varepsilon_0 e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad (2.110)$$

missä

$$|G^*(i\omega)| = \sqrt{G_1^2 + G_2^2}, \quad (2.111)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{G_2(\omega)}{G_1(\omega)}. \quad (2.112)$$

Kaavan (2.110) mukaan harmonisessa värähdysliikkeessä on kulman $\varphi(\omega)$ suuruinen vaihesiirto venymän ja jännityksen välillä, eli ε on kulman φ verran jäljessä jännityksestä σ , ja tämä voidaan mitata kokeellisesti.

Funktion $f(t)$ Fourier-muunnos määritellään kaavalla

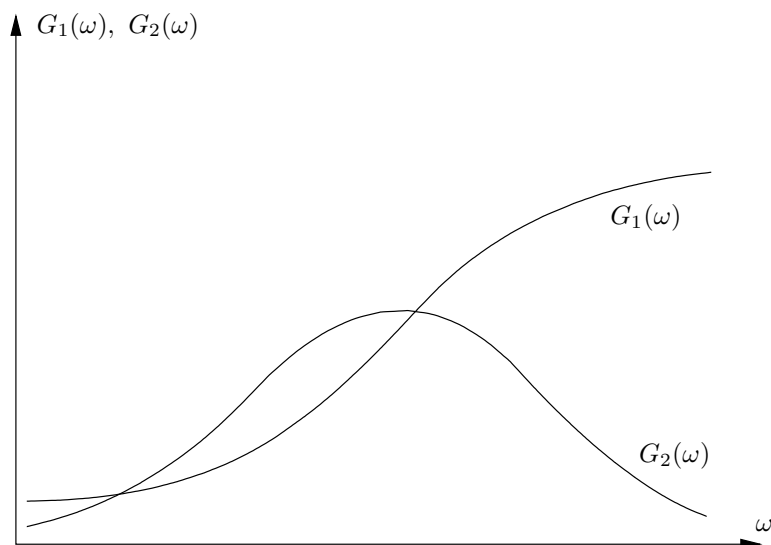
$$\bar{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} \, dt, \quad (2.113)$$

ja funktion $\bar{f}(\omega)$ käänteismuunnos on

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\omega)e^{i\omega t} \, d\omega. \quad (2.114)$$

Integraalimuotoisen materiaalimallin

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} \, d\tau \quad (2.115)$$



Kuva 2.10 Relaksaatiofunktio $G_1(\omega)$ ja $G_2(\omega)$.

Fourier-muunnos on

$$\bar{\sigma}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau e^{-i\omega t} dt \quad (2.116)$$

eli

$$\bar{\sigma}(\omega) = G^*(i\omega) \bar{\varepsilon}(\omega). \quad (2.117)$$

Funktion $f(t)$ sini- ja kosinimuunnokset voidaan vastaavasti määrittää kaavapareina

$$\bar{f}(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad (2.118)$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{f}(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

$$\bar{f}(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (2.119)$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{f}(\omega) \cos \omega t d\omega.$$

Huomataan, että kaavat (2.107) ja (2.108) ovat funktion \hat{G} sini- ja kosinimuunnokset, ja ne voidaan muuntaa takaisin kaavoilla

$$\hat{G}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G_1(\omega) - G_{\infty}}{\omega} \sin \omega t d\omega, \quad (2.120)$$

$$\hat{G}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G_2(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega.$$

Koska $G(t) = G_\infty + \hat{G}(t)$, saadaan edellisestä käänteismuunnoksen kaavasta (2.120)

$$G(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{G_1(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (2.121)$$

Jälkimmäisen käänteismuunnoskaavan (2.120) ja kaavan (2.108) avulla saadaan johdettua yhteys

$$G_1(\omega) - G_\infty = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{G_2(\alpha)\omega^2}{\alpha(\omega^2 - \alpha^2)} d\alpha. \quad (2.122)$$

Tutkitaan moduuleiden $G_1(\omega)$ ja $G_2(\omega)$ käyttäytymistä, kun $t \rightarrow 0$ ja $t \rightarrow \infty$. Kaavoista (2.107) ja (2.108) seuraa osittaisintegroimalla

$$G_1(\omega) = G_\infty + \hat{G}(0) + \int_0^\infty \frac{d\hat{G}(\tau)}{d\tau} \cos \omega\tau d\tau, \quad (2.123)$$

ja

$$G_2(\omega) = - \int_0^\infty \frac{d\hat{G}(\tau)}{d\tau} \sin \omega\tau d\tau. \quad (2.124)$$

Ekspontiaalisesti vaimeneville relaksaatiofunktioille ω :n arvolla 0

$$G_1(0) = G_\infty + \lim_{t \rightarrow \infty} G(t), \quad G_2(0) = 0, \quad (2.125)$$

ja materiaali käyttäytyy kuten kimmoinen aine tai kuten viskoosi neste.

Kun ω lähestyy arvoa ∞ ,

$$G_1(\infty) = G_\infty + \hat{G}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} G(t), \quad G_2(\infty) = 0, \quad (2.126)$$

kompleksimuodun imaginaarinen osa menee kohti nollaa, ja materiaali käyttäytyy kimmoisesti.

Fourier-muunnettu viskoelastinen materiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa myös käänteiseen muotoon

$$\bar{\varepsilon}(\omega) = J^*(i\omega)\bar{\sigma}(\omega), \quad (2.127)$$

missä

$$J^*(i\omega) = J_1(\omega) - iJ_2(\omega) \quad (2.128)$$

on kompleksinen virumismoduuli.

Kompleksisten relaksaatio- ja virumismoduulien välillä on yhteys

$$G^*(i\omega) = \frac{1}{J^*(i\omega)}, \quad (2.129)$$

joten

$$1 + \omega^2 \bar{G} \bar{J} = 0, \quad (2.130)$$

ja

$$G_1(\omega) = \frac{J_1(\omega)}{J_1^2(\omega) + J_2^2(\omega)}, \quad G_2(\omega) = \frac{J_2(\omega)}{J_1^2(\omega) + J_2^2(\omega)}. \quad (2.131)$$

Derivaatan Fourier-muunnos on Laplace-muunnoksen tapaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(t)}{dt^n} e^{-i\omega t} dt = (i\omega)^n \bar{f}(\omega), \quad (2.132)$$

jos funktion $f(t)$ arvo ja derivaattojen arvot $(n-1)$:een derivaattaan asti ovat nollia $-\infty$:ssä eli $f(-\infty) = \dots = f^{(n-1)}(-\infty) = 0$.

Fourier-muuntamalla differentiaalimuotoinen materiaaliyhtälö

$$P(D)\sigma(t) = Q(D)\varepsilon(t), \quad (2.133)$$

tulee

$$P(i\omega)\bar{\sigma}(\omega) = Q(i\omega)\bar{\varepsilon}(\omega) \Rightarrow \bar{\sigma}(\omega) = G^*(i\omega)\bar{\varepsilon}(\omega), \quad (2.134)$$

missä

$$G^*(i\omega) = \frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)} \quad (2.135)$$

on kompleksimuotoinen relaksaatiomoduuli.

Esimerkki 2.2 Määritetään Maxwellin ja Kelvinin mallien kompleksimuotoiset relaksaatio- ja virumismoduulit.

Maxwellin mallin differentiaalimuotoisen konstitutiivisen yhtälön nollassa eriävät ker-
toimet ovat

$$p_0 = \frac{1}{\eta}, \quad p_1 = \frac{1}{E}, \quad q_1 = 1, \quad (2.136)$$

joten kaavasta (2.135) seuraa

$$G^*(i\omega) = \frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)} = \frac{i\omega}{\frac{1}{\eta} + \frac{i\omega}{E}} = G_1(\omega) + iG_2(\omega), \quad (2.137)$$

missä

$$G_1 = \omega^2 \frac{1}{E} \frac{1}{\frac{1}{\eta^2} + \frac{\omega^2}{E^2}}, \quad G_2 = \omega \frac{1}{\eta} \frac{1}{\frac{1}{\eta^2} + \frac{\omega^2}{E^2}}, \quad (2.138)$$

ja

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{G_2(\omega)}{G_1(\omega)} = \frac{E}{\omega\eta}. \quad (2.139)$$

Kaavojen

$$J_1(\omega) = \frac{G_1(\omega)}{G_1^2(\omega) + G_2^2(\omega)}, \quad J_2(\omega) = \frac{G_2(\omega)}{G_1^2(\omega) + G_2^2(\omega)} \quad (2.140)$$

avulla saadaan

$$J_1(\omega) = \frac{1}{E}, \quad J_2(\omega) = \frac{1}{\eta\omega}. \quad (2.141)$$

Muuntamalla Kelvinin aineen relaksaatiofunktio

$$G(t) = Eh(t) + \eta\delta(t) \quad (2.142)$$

tulee

$$G^*(i\omega) = E + i\omega\eta, \quad (2.143)$$

$$G_1(\omega) = E, \quad G_2(\omega) = i\omega\eta, \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{\eta}{E}\omega. \quad (2.144)$$

Kelvinin aineen kompleksimuotoinen virumismoduuli

$$J^*(i\omega) = J_1 + iJ_2 \quad (2.145)$$

saadaan kaavasta (2.140) tai muuntamalla Kelvinin aineen virumisfunktio

$$J(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right) h(t), \quad (2.146)$$

jolloin tulee

$$J^*(i\omega) = \frac{1}{E + i\omega\eta} = \frac{E}{E^2 + \omega^2\eta^2} - \frac{i\omega\eta}{E^2 + \omega^2\eta^2}, \quad (2.147)$$

missä

$$J_1(\omega) = \frac{E}{E^2 + \omega^2\eta^2}, \quad J_2(\omega) = \frac{\omega\eta}{E^2 + \omega^2\eta^2}. \quad (2.148)$$

Esimerkki 2.3 Määritetään kuvan 2.8 yleistetyn viskoelastisen aineen kompleksimuotoinen virumismoduuli.

Virumisfunktion

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) + \frac{t}{\eta_\infty} \quad (2.149)$$

Fourier-muunnos on $\bar{J}(\omega)$, ja kompleksimuotoinen virumismoduuli on

$$J^*(i\omega) = i\omega\bar{J}(\omega) = J_1 - iJ_2, \quad (2.150)$$

missä

$$J^*(i\omega) = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} \frac{1}{1 + i\omega\tau_i} + \frac{1}{i\omega\eta_\infty}. \quad (2.151)$$

Virumisspektrin

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{i=1}^n J_i \delta(t - \tau_i) \quad (2.152)$$

avulla lausuttu virumismoduulin reaalin ja imaginaarinen osa ovat

$$J_1(\omega) = \frac{1}{E_0} + \int_0^\infty \frac{\mathcal{L}(\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} d\tau, \quad (2.153)$$

$$J_2(\omega) = \int_0^\infty \frac{\omega\tau\mathcal{L}(\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} d\tau + \frac{1}{\omega\eta_\infty}.$$

Esimerkki 2.4 Määritetään kuvan 2.9 yleistetyn viskoelastisen aineen kompleksimuotoinen relaksaatiomoduuli.

Kuvan 2.9 mallin relaksaatiofunktion

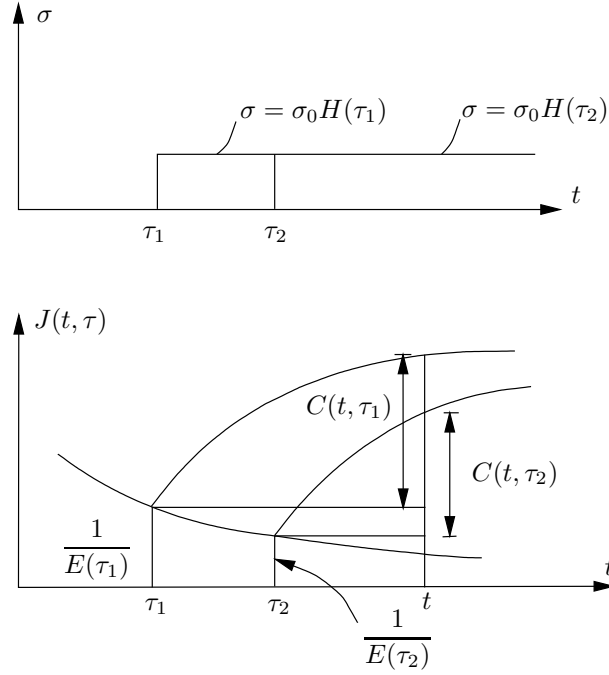
$$G(t) = \eta_0\delta(t) + \sum_{i=1}^n E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} + E_\infty \quad (2.154)$$

Fourier-muunnos on $\bar{G}(\omega)$, ja kompleksimuotoinen relaksaatiomoduuli on

$$G^*(i\omega) = i\omega\bar{G}(\omega) = G_1 + iG_2, \quad (2.155)$$

missä

$$G^*(i\omega) = i\omega\eta_0 + \sum_{i=1}^n E_i \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega\tau_i}} + E_\infty. \quad (2.156)$$



Kuva 2.11 Betonin viruminen Arutyunyanin mallin mukaan.

Relaksaatiospektrin

$$\mathcal{H}(t) = \sum_{i=1}^n E_i \delta(t - \tau_i) \quad (2.157)$$

avulla lausuttu relaksaatiomoduulin reaalinen ja imaginaarinen osa ovat

$$G_1(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 \tau^2 \mathcal{H}(\tau)}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau + E_{\infty}, \quad (2.158)$$

$$G_2(\omega) = \omega \eta_0 + \int_0^{\infty} \frac{\omega \tau \mathcal{H}(\tau)}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau.$$

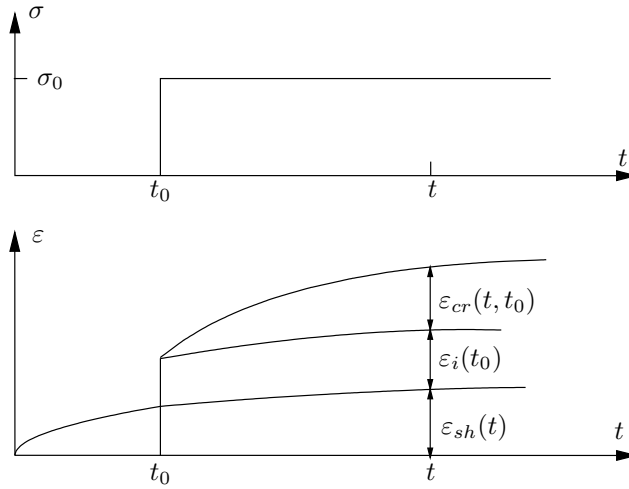
2.5 Betonin virumismalli

Betonin ominaisuuksien muuttuminen ajan mukana voidaan ottaa huomioon integraalimuotoisen materiaalmallin ydinfunktiossa korvaamalla virumisfunktio $J(t - \tau)$ funktiolla $h(\tau)J(t - \tau)$. Tällöin saadaan

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) J(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (2.159)$$

Osittaisintegroimalla saadaan, kun $\sigma(-\infty) = 0$,

$$\varepsilon(t) = h(t)J(0)\sigma(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} [h(\tau)J(t - \tau)] \sigma(\tau) d\tau. \quad (2.160)$$



Kuva 2.12 Betonin venymä ajan funktiona.

Arutyunyanin mukaan betonille venymän kaava voidaan esittää muodossa

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(\tau, t - \tau) \right] \sigma(\tau) d\tau, \quad (2.161)$$

jossa τ_1 on ainevakio, (aika, jolloin materiaali on riittävän kovettunut), ja Arutyunyanin mukaan betonille sopivat funktiot

$$C(\tau, t - \tau) = \phi(\tau) \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right], \quad (2.162)$$

$$\phi(\tau) = C_0 + \frac{C_1}{\tau}, \quad (2.163)$$

$$E(\tau) = E_\infty(1 - \beta e^{-\alpha\tau}), \quad (2.164)$$

joissa γ , C_0 , C_1 , β ja α ovat materiaalivakioita.

Suunnitteluohjeissa tyydytään usein yksinkertaisempiin malleihin. Betonin kokonaismuodonmuutos voidaan jakaa osiin

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_i(t_0) + \varepsilon_{cr}(t, t_0) + \varepsilon_{sh}(t), \quad (2.165)$$

missä t_0 on kuormituksen ajankohta, cr tarkoittaa virumista (creep), sh kutistumista (shrinkage) ja i viittaa välittömään muodonmuutokseen (instantaneous). Välitön kimmainen muodonmuutos on

$$\varepsilon_i(t_0) = \frac{\sigma}{E_c(t_0)}, \quad (2.166)$$

missä esim. ACI:n normien mukaan

$$E_c(t_0) = E_{c,28} \sqrt{\frac{t_0}{A + Bt_0}}, \quad (2.167)$$

A ja B ovat materiaalivakioita, ja $E_{c,28}$ on 28 vuorokauden kimmokerroin. Vakiojännityksen alainen virumismuodonmuutos on

$$\varepsilon_{cr}(t, t_0) = \phi(t, t_0) \varepsilon_i(t_0), \quad (2.168)$$

missä ϕ on virumiskerroin (virumisluku). ACI:n normien mukaan

$$\phi(t, t_0) = \frac{C(t - t_0)^F}{D + (t - t_0)^F}. \quad (2.169)$$

Kutistumismuodonmuutos voidaan esittää muodossa

$$\varepsilon_{sh}(t) = \varepsilon_{sh}^* \frac{t}{d + t}, \quad (2.170)$$

missä d aika, esim. $d = 35$ vuorokautta ja ε_{sh}^* on normeista saatava suunnitteluarvo.

Luku 3

Kolmiulotteiset viskoelastiset materiaalmallit

3.1 Kimmoinen aine ja viskoosi neste

Siirtymävektorin komponentit suorakulmaisessa $\{x, y, z\} \equiv \{x_1, x_2, x_3\}$ -avaruudessa ovat $\{u_1, u_2, u_3\}$. Geometrisesti lineaarisessa teoriassa muodonmuutoskomponentit lasketaan siirtymävektorin komponenttien derivaattojen avulla kaavalla

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \equiv \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

3.1.1 Yleistetty Hooken laki

Kimmoteoriassa jännityskomponenttien ja muodonmuutoskomponenttien välillä on lineaarinen riippuvaisuus

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \equiv c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3.2)$$

missä lyhyiden vuoksi sovitaan summeeraus toistuvan indeksin suhteen. Kimmoisten materiaaliyhtälöiden kertoimet c_{ijkl} eli kimmomoduulit toteuttavat symmetriaehdot

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}. \quad (3.3)$$

Riippumattomia kertoimia c_{ijkl} on 21.

Isotrooppisen kimmoisen materiaalin konstitutiiviset yhtälöt ovat

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (3.4)$$

missä

$$\theta = \varepsilon_{kk} \quad (3.5)$$

on suhteellinen tilavuudenmuutos ja

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.6)$$

ovat Lamén vakiot. Liukumoduuli $G = \mu$. Kimmokerroin E ja Poissonin luku ν ovat Lamén vakioiden avulla lausuttuina

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (3.7)$$

Suhteellisen tilavuudenmuutoksen ja hydrostaattisen paineen välinen kimmoinen yhteys on

$$p = -K\theta \quad \text{eli} \quad \sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk}, \quad (3.8)$$

missä

$$p = -\frac{\sigma_{kk}}{3}, \quad \theta = \varepsilon_{kk}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (3.9)$$

K on tilavuudenmuutoskerroin ja p on hydrostaattinen paine.

Yleistetty Hooken laki voidaan kirjoittaa matriisimerkinnöin

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda\theta\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \theta = \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.10)$$

missä

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ij}], \quad \mathbf{I} = [\delta_{ij}], \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}], \quad \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{kk}. \quad (3.11)$$

Kokoonpuristumattoman kimmoisen aineen tapauksessa

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.12)$$

missä p on hydrostaattinen paine.

3.1.2 Newtonin neste

Newtonin viskoosin nesteen tapauksessa jännityksen $\boldsymbol{\sigma}$ ja muodonmuutosnopeuden \mathbf{D} , komponenttimuodossa

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (3.13)$$

missä $\{v_1, v_2, v_3\}$ ovat nopeusvektorin komponentit, välillä on kolmiulotteisessa tapauksessa lineaarinen yhteys

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D}, \quad (3.14)$$

η on viskoosisuuskerroin.

3.2 Viskoelastinen aine

3.2.1 Integraalimuotoinen materiaalimalli

Viskoelastisen aineen kolmiulotteinen konstitutiivinen yhtälö voidaan yleisessä tapauksessa kirjoittaa integraalimuodossa

$$\sigma_{ij}(\mathbf{X}, t) = \int_{\tau=-\infty}^t \mathcal{F}_{ij} \varepsilon_{kl}(\mathbf{X}, \tau). \quad (3.15)$$

Homogeenisen aineen tapauksessa voidaan jättää pois riippuvaisuus paikkakoordinaatista \mathbf{X} , ja yksiulotteisen materiaalilain yleistyksenä

$$\sigma_{ij}(t) = G_{ijkl}(t)\varepsilon_{kl}(0) + \int_0^t G_{ijkl}(t-\tau)\dot{\varepsilon}_{kl}(\tau) d\tau. \quad (3.16)$$

3D-tapauksessa G_{ijkl} ovat relaksaatiofunktioita. Jännitys- ja muodonmuutostensorin symmetriaominaisuuksien perusteella relaksaatiofunktiot toteuttavat ehdot

$$G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{ijlk}. \quad (3.17)$$

Materiaaliyhtälöiden vaihtoehtoinen esitysmuoto on

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t J_{ijkl}(t-\tau)\dot{\sigma}_{kl}(\tau) d\tau, \quad (3.18)$$

tai

$$\varepsilon_{ij}(t) = J_{ijkl}(t)\sigma_{ij}(0) + \int_0^t J_{ijkl}(t-\tau)\dot{\sigma}_{kl}(\tau) d\tau, \quad (3.19)$$

missä J_{ijkl} ovat virumisfunktioita. Virumisfunktiot toteuttavat myös symmetriaehdot

$$J_{ijkl} = J_{jikl} = J_{ijlk}. \quad (3.20)$$

Isotrooppiselle aineelle relaksaatiofunktiot voidaan lausua muodossa

$$G_{ijkl} = \frac{1}{3} [G^h(t) - G^d(t)] \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}G^d(t)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (3.21)$$

missä $G^d(t)$ ja $G^h(t)$ ovat riippumattomat relaksaatiofunktiot, indeksi d viittaa deviatoriseen osaan ja h hydrostaattiseen tai tilavuuden muutokseen liittyvään osaan relaksaatiomoduulissa ja δ_{ij} on Kroneckerin δ -symboli: $\delta_{ij} = 1$, jos $i = j$ ja $\delta_{ij} = 0$, jos $i \neq j$.

Vastaavasti isotrooppisen aineen virumisfunktiot voidaan lausua muodossa

$$J_{ijkl} = \frac{1}{3} [J^h(t) - J^d(t)] \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}J^d(t)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (3.22)$$

Ottamalla käyttöön jännitys- ja muodonmuutosdeviaattorit

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}, \quad s_{ii} = 0, \quad (3.23)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \quad e_{ii} = 0$$

voidaan isotrooppisen viskoelastisen aineen materiaaliyhtälöt jakaa osiin

$$s_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t G^d(t-\tau) \frac{de_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.24)$$

ja

$$\sigma_{kk}(t) = \int_{-\infty}^t G^h(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.25)$$

Isotrooppisen aineen käänteiset materiaaliyhtälöt ovat

$$e_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t J^d(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.26)$$

ja

$$\varepsilon_{kk}(t) = \int_{-\infty}^t J^h(t-\tau) \frac{d\sigma_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.27)$$

$J^d(t)$ ja $J^h(t)$ ovat deviatoriseen ja hydrostaattiseen deformaatioon liittyvät virumisfunktioit.

3.2.2 Differentiaalimuotoinen materiaalmalli

Differentiaalimuotoiset materiaaliyhtälöt ovat kolmiulotteisessa tapauksessa yksiulotteisen tapauksen kaavan (2.73) yleistykseenä

$$P_{ijkl}(D)\sigma_{kl}(t) = Q_{ijkl}(D)\varepsilon_{kl}(t), \quad (3.28)$$

missä

$$P_{ijkl}(D) = \sum_{h=0}^N (p_h)_{ijkl} D^h, \quad Q_{ijkl}(D) = \sum_{h=0}^N (q_h)_{ijkl} D^h, \quad \text{ja} \quad D(\bullet) = \frac{d(\bullet)}{dt}. \quad (3.29)$$

Isotrooppisen aineen erikoistapauksessa

$$\begin{aligned} P^d(D)s_{ij}(t) &= Q^d(D)e_{ij}(t), \\ P^h(D)\sigma_{kk}(t) &= Q^h(D)\varepsilon_{kk}(t), \end{aligned} \quad (3.30)$$

missä P^d , Q^d , P^h ja Q^h ovat lineaariset differentiaalioperaattorit.

Kaavasta (3.28) seuraa Laplace-muunnoksella

$$\begin{aligned} P_{ijkl}(s)\tilde{\sigma}_{kl}(s) - \frac{1}{s} \sum_{h=1}^N (p_h)_{ijkl} \sum_{r=1}^h s^r \sigma_{kl}^{(h-r)}(0) \\ = Q_{ijkl}(s)\tilde{\varepsilon}_{ijkl}(s) - \frac{1}{s} \sum_{h=1}^N (q_h)_{ijkl} \sum_{r=1}^h s^r \varepsilon_{kl}^{(h-r)}(0), \end{aligned} \quad (3.31)$$

missä

$$P_{ijkl}(s) = \sum_{h=0}^N (p_h)_{ijkl} s^h, \quad Q_{ijkl}(s) = \sum_{h=0}^N (q_h)_{ijkl} s^h. \quad (3.32)$$

Jos alkuehdot toteuttavat yhtälön

$$\sum_{r=h}^N p_r \sigma_{ij}^{(r-h)}(0) = \sum_{r=h}^N q_r \varepsilon_{ij}^{(r-h)}(0), \quad h = 1, 2, \dots, N, \quad (3.33)$$

niin jännityksen ja muodonmuutoksen Laplace–muunnosten yhteys on

$$\tilde{\sigma}_{ij}(s) = P_{ijkl}^{-1}(s) Q_{ijkl}(s) \tilde{\varepsilon}_{kl}(s). \quad (3.34)$$

Käänteismuunnoksen avulla saadaan integraalimuotoinen esitys

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t - \tau) d\varepsilon_{kl}(\tau) d\tau \quad (3.35)$$

venymähistorialle $\varepsilon_{ij}(t) = 0$, kun $t < 0$.

Isotrooppisessa tapauksessa saadaan vastaavasti

$$P^d(s) \tilde{s}_{ij}(s) = Q^d(D) \tilde{\varepsilon}_{ij}(s), \quad (3.36)$$

$$P^h(s) \tilde{\sigma}_{kk}(s) = Q^h(s) \tilde{\varepsilon}_{kk}(s),$$

missä

$$\begin{aligned} P^d(s) &= \sum_{k=0}^N p_k s^k, & Q^d(s) &= \sum_{k=0}^N q_k s^k, \\ P^h(s) &= \sum_{k=0}^N p_k s^k, & Q^h(s) &= \sum_{k=0}^N q_k s^k. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Toisin kirjoitettuna Laplace–muunnosten välillä ovat yhteydet

$$\tilde{s}_{ij}(s) = \frac{Q^d(s)}{P^d(s)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(s), \quad \tilde{\sigma}_{kk}(s) = \frac{Q^h(s)}{P^h(s)} \tilde{\varepsilon}_{kk}(s). \quad (3.38)$$

Muuntamalla isotrooppisen aineen integraalimuotoiset konstitutiiviset yhtälöt saadaan

$$\tilde{\sigma}_{ij}(s) = s \tilde{G}^d \tilde{\varepsilon}_{ij} \quad (3.39)$$

$$\tilde{\sigma}_{kk}(s) = s \tilde{G}^d \tilde{\varepsilon}_{kk},$$

ja päätellään, että

$$s \tilde{G}^d(s) = \frac{Q^d(s)}{P^d(s)}, \quad s \tilde{G}^h(s) = \frac{Q^h(s)}{P^h(s)}. \quad (3.40)$$

3.2.3 Vaihtoehtoinen esitystapa isotrooppiselle aineelle

Ottamalla käyttöön isotrooppisen kimmoisen aineen tapaan nyt ajasta riippuvat materiaalfunktiot

$$\mu(t) = \frac{G^d(t)}{2}, \quad K(t) = \frac{G^h(t)}{3} \quad (3.41)$$

voidaan isotrooppiset viskoelastiset materiaaliyhtälöt kirjoittaa muodossa

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \lambda(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau + 2 \int_{-\infty}^t \mu(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (3.42)$$

missä $\lambda(t)$ ja $\mu(t)$ ovat relaksaatiofunktioita. Nämä materiaaliyhtälöt voidaan edellä esitetyllä tavalla jakaa deviatoriseen osaan

$$s_{ij}(t) = 2 \int_{-\infty}^t \mu(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.43)$$

ja hydrostaattiseen osaan

$$\sigma_{kk}(t) = 3 \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (3.44)$$

missä

$$K(t) = \lambda(t) + \frac{2}{3}\mu(t) \quad (3.45)$$

on dilataatioon liittyvä relaksaatiofunktio.

Joissain tapauksissa voidaan tilavuuden muutoksen ja keskimääräisen jännityksen välille otaksua kimmoinen yhteys

$$\sigma_{kk}(s) = 3K\varepsilon_{kk} \quad (3.46)$$

myös viskoelastiselle aineelle.

Kokoonpuristumattomalle aineelle saadaan konstitutiiviset yhtälöt

$$\sigma_{ij}(t) = -\delta_{ij}p + 2 \int_{-\infty}^t \mu(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.47)$$

Isotrooppisen viskoelastisen aineen käänteiset yhtälöt ovat

$$\varepsilon_{ij}(t) = \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \kappa(t - \tau) \frac{d\sigma_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau + 2 \int_{-\infty}^t \rho(t - \tau) \frac{d\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (3.48)$$

missä $\kappa(t)$ ja $\rho(t)$ ovat virumisfunktioita, tai jaettuna deviatoriseen osaan

$$e_{ij}(t) = 2 \int_{-\infty}^t \rho(t - \tau) \frac{d\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.49)$$

ja dilataatio-osaan

$$\varepsilon_{kk}(t) = \int_{-\infty}^t [3\kappa(t - \tau) + 2\rho(t - \tau)] \frac{d\sigma_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.50)$$

Fourier-muunnetut kompleksimuotoiset konstitutiiviset yhtälöt ovat

$$\bar{\sigma}_{ij}(i\omega) = \delta_{ij}i\omega\bar{\lambda}(i\omega)\bar{\varepsilon}_{kk}(i\omega) + 2i\omega\bar{\mu}(i\omega)\bar{\varepsilon}_{ij}(i\omega) \quad (3.51)$$

tai käänteisessä muodossa

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(i\omega) = \delta_{ij}i\omega\bar{\kappa}(i\omega)\bar{\sigma}_{kk}(i\omega) + 2i\omega\bar{\rho}(i\omega)\bar{\sigma}_{ij}(i\omega). \quad (3.52)$$

Esimerkki 3.1 Tutkitaan hydrostaattista jännitystilaa.

Hydrostaattisessa jännitystilassa

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} \equiv \varepsilon \quad (3.53)$$

ja

$$\sigma_{kk}(t) = -3p(t), \quad \varepsilon_{kk}(t) = 3\varepsilon(t). \quad (3.54)$$

Kompleksisten relaksaatio- ja virumismoduulien välisen yhteyden

$$G^*(i\omega) = \frac{1}{J^*(i\omega)} \quad (3.55)$$

perusteella

$$1 + \omega^2 \bar{G}(\omega) \bar{J}(\omega) = 0, \quad (3.56)$$

missä $\bar{G}(\omega)$ ja $\bar{J}(\omega)$ ovat kyseisten funktioiden Fourier-muunnokset. Moduulien $3\lambda + 2\mu$ ja $3\kappa + 2\rho$ tapauksessa on voimassa yhtälö

$$1 + \omega^2 [3\bar{\lambda}(\omega) + 2\bar{\mu}(\omega)] [3\bar{\kappa}(\omega) + 2\bar{\rho}(\omega)] = 0. \quad (3.57)$$

Kimmoisen aineen tilavuudenmuutoskerrointa $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ vastaa viskoelastisen aineen tilavuuden muutokseen liittyvä relaksaatiofunktio $K(t) = \lambda(t) + \frac{2}{3}\mu(t)$. Jos $K(t)$ tunnetaan, niin kaavasta (3.57) voidaan ratkaista tilavuudenmuutokseen liittyvä virumismoduuli $\kappa(t - \tau) + \frac{2}{3}\rho(t - \tau)$. Vastaavasti, jos $\lambda(t)$ ja $\mu(t)$ tunnetaan, niin $\rho(t)$ ja $\kappa(t)$ saadaan yhtälöstä

$$1 + 4\omega^2 \bar{\mu}(\omega) \bar{\rho}(\omega) = 0, \quad (3.58)$$

ja kaavasta (3.57).

Esimerkki 3.2 Tutkitaan yksiulotteista jännitystilaa.

Esimerkiksi x -akselin suuntaisessa vedetyssä tai puristetussa sauvassa vallitsevassa jännitystilassa vain σ_{11} on nollasta eriävä. Nollasta eriävät muodonmuutoskomponentit ovat ε_{11} ja $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$.

Fourier-muunnetuista konstitutiivisista yhtälöistä (3.51) saadaan nollasta eriävälle komponenteille

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= i\omega [\bar{\lambda}(\bar{\varepsilon}_{11} + 2\bar{\varepsilon}_{22}) + 2\bar{\mu}\bar{\varepsilon}_{11}], \\ 0 &= i\omega [\bar{\lambda}(\bar{\varepsilon}_{11} + 2\bar{\varepsilon}_{22}) + 2\bar{\mu}\bar{\varepsilon}_{22}], \end{aligned} \quad (3.59)$$

ja näistä ratkaistaan

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= i\omega \frac{(3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\bar{\mu}}{\bar{\lambda} + \bar{\mu}} \bar{\varepsilon}_{11} \\ &= E^*(i\omega) \bar{\varepsilon}_{11}, \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= -\frac{\bar{\lambda}}{2(\bar{\lambda} + \bar{\mu})} \bar{\varepsilon}_{11} \\ &= -\nu^*(i\omega) \bar{\varepsilon}_{11}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

$E^*(i\omega)$ ja $\nu^*(i\omega)$ ovat kompleksinen kimmokerroin ja Poissonin luku. Vastaavasti $i\omega\bar{\mu}$ ja $i\omega(\bar{\lambda} + \frac{2}{3}\bar{\mu})$ ovat kompleksinen liukumoduuli ja tilavuudenmuutoskerroin.

Merkitsemällä

$$\mu^*(i\omega) = i\omega\bar{\mu}(\omega), \quad K^*(i\omega) = (i\omega)\bar{K}(\omega) \quad (3.61)$$

saadaan edellisen esimerkin perusteella kompleksiselle kimmokertoimelle esitys

$$\begin{aligned} \bar{E}^*(i\omega) &= i\omega \frac{[3\bar{\lambda}(\omega) + 2\bar{\mu}(\omega)]\bar{\mu}(\omega)}{\bar{\lambda}(\omega) + \bar{\mu}(\omega)} \\ &= \frac{9\mu^*(i\omega)K^*(i\omega)}{\mu^*(i\omega) + 3K^*(i\omega)}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Laplace-muunnettujen konstitutiivisten yhtälöiden ja vastaavien kimmoisten yhtälöiden samankaltaisuuden perusteella johdetaan yksiulotteiselle jännitystilalle yhtälöt

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11}(s) &= s \frac{[3\tilde{\lambda}(s) + 2\tilde{\mu}(s)]\tilde{\mu}(s)}{\tilde{\lambda}(s) + \tilde{\mu}(s)} \tilde{\varepsilon}_{11}(s), \\ \tilde{\varepsilon}_{22}(s) &= -\frac{\tilde{\lambda}(s)}{2[\tilde{\lambda}(s) + \tilde{\mu}(s)]} \tilde{\varepsilon}_{11}(s), \end{aligned} \quad (3.63)$$

tai vaihtoehtoisesti

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11}(s) &= s \frac{3\tilde{G}^d(s)\tilde{G}^h(s)}{\tilde{G}^d(s) + 2\tilde{G}^h(s)} \tilde{\varepsilon}_{11}(s) = s \frac{9\tilde{\mu}(s)\tilde{K}(s)}{\tilde{\mu}(s) + 3\tilde{K}(s)} \tilde{\varepsilon}_{11}(s), \\ \tilde{\varepsilon}_{22}(s) &= -\frac{\tilde{G}^h(s) - \tilde{G}^d(s)}{\tilde{G}^d(s) + 2\tilde{G}^h(s)} \tilde{\varepsilon}_{11} = -\frac{3\tilde{K}(s) - 2\tilde{\mu}(s)}{2[\tilde{\mu}(s) + 3\tilde{K}(s)]} \tilde{\varepsilon}_{11}(s), \end{aligned} \quad (3.64)$$

missä on käytetty hyväksi yhteyttä

$$\tilde{\lambda}(s) = \frac{1}{3}[\tilde{G}^h(s) - \tilde{G}^d(s)] = \tilde{K}(s) - \frac{2}{3}\tilde{\mu}(s). \quad (3.65)$$

Luku 4

Viskoelastisten reuna-arvotekhtävien ratkaisu

4.1 Jatkuvan aineen mekaniikan perusyhtälöt

Tarkastellaan viskoelastista kappaletta suorakulmaisessa koordinaatistossa $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$. Kiinteän aineen tapauksessa otetaan referenssikonfiguraatioksi tai referenssitilaksi alkutila, jossa tarkasteltavan mielivaltaisen pisteen P koordinaatit ovat (X_1, X_2, X_3) eli X_i . Tietyllä hetkellä t materiaalipiste X_i on paikassa $x_i(t)$ eli

$$x_i(t) = x_i(X_i, t). \quad (4.1)$$

Materiaalipisteen liikehistoria esittää kaava

$$x_i(\tau) = x_i(X_i, \tau), \quad -\infty < \tau \leq t, \quad (4.2)$$

missä t on nykyhetki.

Siirtymävektorin komponentit ovat

$$u_i(\tau) = x_i(\tau) - X_i. \quad (4.3)$$

Deformaatiota mittaava siirtymägradientti määritellään kaavalla

$$\frac{\partial u_i(\tau)}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i(\tau)}{\partial X_j} - \delta_{ij}, \quad (4.4)$$

missä

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{jos } i \neq j \end{cases} \quad (4.5)$$

on Kroneckerin δ . Merkitään seuraavassa osittaisderivaattaa pilkulla eli

$$u_{i,j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial X_j}. \quad (4.6)$$

Jos

$$\sup_{\tau} |u_{i,j}(\tau)| \ll 1, \quad -\infty < \tau < t, \quad (4.7)$$

niin deformaatio on infinitesimaalinen, ja tällöin voidaan käyttää lineaarista pienten siirtymien teorian muodonmuutosta

$$\varepsilon_{ij}(\tau) = \frac{1}{2}[u_{i,j}(\tau) + u_{j,i}(\tau)]. \quad (4.8)$$

Nopeusvektorin \mathbf{v} komponentit (v_1, v_2, v_3) ovat

$$v_i \equiv \dot{u}_i = \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{X_j = \text{vakio}}. \quad (4.9)$$

Merkitään, että jännitystensorin komponentit ovat σ_{ij} . Pinnalla, jonka normaalivektori on \mathbf{n} , vaikuttava jännitysvektori ¹

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta S}, \quad (4.10)$$

missä $\Delta \mathbf{R}$ on alkioon ΔS vaikuttava voima, voidaan jakaa komponentteihin ²

$$t_i = \sigma_{ij}n_j. \quad (4.11)$$

Liikemäärän ja kulmaliikemäärän säilymisen periaatteiden nojalla johdetaan liikeyhtälöt

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (4.12)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (4.13)$$

missä f_i ovat tilavuusvoimavektorin komponentit ja ρ on aineen tiheys.

Kokoonpuristuvan aineen tapauksessa massan säilymisen periaatteesta seuraa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_j)_{,j} = 0, \quad (4.14)$$

ja

$$\rho_0 = \rho \det \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|, \quad (4.15)$$

missä ρ_0 on tiheys referenssitilassa. Kokoonpuristumattoman aineen tapauksessa tiheys ρ pysyy vakiona.

Isotrooppisen viskoelastisen aineen materiaaliyhtälöt ovat

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \lambda(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + 2 \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.16)$$

missä $\lambda(t)$ ja $\mu(t)$ ovat relaksaatiofunktioita. Nämä materiaaliyhtälöt voidaan aiemmin esitetyllä tavalla jakaa deviatoriseen osaan

$$s_{ij}(t) = 2 \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.17)$$

¹Vektori \mathbf{t} ja sen komponentit riippuvat materiaalipisteen läpi kulkemaan valitusta pinnasta S eli vektorista \mathbf{n} .

²Seuraavassa noudatetaan summaussopimusta $a_{ij}b_j \equiv \sum_{j=1}^3 a_{ij}b_j$, eli summeerataan toistuvan indeksin suhteen.

ja hydrostaattiseen osaan

$$\sigma_{kk}(t) = 3 \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.18)$$

missä

$$K(t) = \lambda(t) + \frac{2}{3}\mu(t) \quad (4.19)$$

on dilataatioon liittyvä relaksaatiofunktio ja

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}, & s_{ii} &= 0, \\ e_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, & e_{ii} &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

ovat jännitys- ja muodonmuutosdeviaattorit.

Lausumalla konstitutiivisten yhtälöiden muodonmuutokset siirtymien avulla ja sijoittamalla jännitykset liikeyhtälöihin tulee

$$\int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial u_{i,jj}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{-\infty}^t [\lambda(t-\tau) + \mu(t-\tau)] \frac{\partial u_{k,ki}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (4.21)$$

jotka vastaavat kimmoteorian Lamén yhtälöitä.

4.2 Muuttujien erottaminen

Staattisen (tai kvasistaattisen) viskoelastisen tehtävän ratkaisu saadaan tietyn edellytyksin erottamalla ajasta ja paikasta riippuvat muuttujat kaavoilla

$$\begin{aligned} u_i(x_i, t) &= u_i^0(x_i)u(t), \\ \varepsilon_{ij}(x_i, t) &= \varepsilon_{ij}^0(x_i)u(t), \\ \sigma_{ij}(x_i, t) &= \sigma_{ij}^0(x_i)f(t). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Jotta muuttujien erottaminen (4.22) olisi mahdollista, täytyy Poissonin luvun olla vakio. Sijoittamalla $u_i(x_i, t)$ homogeenisiin staattisiin tasapainoehtoihin

$$\int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial u_{i,jj}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{-\infty}^t [\lambda(t-\tau) + \mu(t-\tau)] \frac{\partial u_{k,ki}(\tau)}{\partial \tau} d\tau = 0 \quad (4.23)$$

tulee

$$u_{i,jj}^0 \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau + u_{k,ki}^0 \int_{-\infty}^t [\lambda(t-\tau) + \mu(t-\tau)] \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau = 0. \quad (4.24)$$

Jos relaksaatiofunktio toteuttavat ehdon

$$\lambda(t) + \mu(t) = k\mu(t), \quad (4.25)$$

missä k on vakio, niin tasapainoehdot voidaan jakaa osiin

$$\begin{aligned} u_{i,jj}^0 + ku_{k,ki}^0 &= 0, \\ \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau &= 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Käyttämällä hyväksi kaavasta (3.64) saatavaa Poissonin luvun Laplace-muunnosta

$$\tilde{\nu} = \frac{3\tilde{K}(s) - 2\tilde{\mu}(s)}{s2[\tilde{\mu}(s) + 3\tilde{K}(s)]} \quad (4.27)$$

ja eliminoimalla $\tilde{K}(s)$ kaavan

$$\tilde{\lambda}(s) = \frac{1}{3}[\tilde{G}^h(s) - \tilde{G}^d(s)] = \tilde{K}(s) - \frac{2}{3}\tilde{\mu}(s) \quad (4.28)$$

jälkimmäisen osan avulla saadaan

$$\tilde{\nu}(s) = \frac{1}{s} \frac{k-1}{2k}, \quad (4.29)$$

joten

$$\nu = \frac{k-1}{2k} = \text{vakio}. \quad (4.30)$$

Erikoistapauksessa $u_{i,jj}^0 \equiv 0$ ja $u_{k,k}^0 = \text{vakio}$ Poissonin luvun ei kuitenkaan tarvitse olla vakio muuttujien erottamista (4.22) varten, kuten kaavasta (4.24) nähdään.

Jos Poissonin luku on vakio, niin myös dilataatioon liittyvän relaksaatiofunktion ja deviatorisen relaksaatiofunktion suhde on vakio. Kaavojen (4.30) ja (4.28) perusteella on tällöin

$$\frac{G^h(t)}{G^d(t)} = \frac{3K(t)}{2\mu(t)} = \frac{1+\nu}{1-2\nu}. \quad (4.31)$$

Samalla tavalla vastaavat virumisfunktiot toteuttavat ehdon

$$\frac{J^h(t)}{J^d(t)} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} = \frac{G^d(t)}{G^h(t)}. \quad (4.32)$$

4.2.1 Reunan jännitykset annettu

Otaksutaan, että kappaleen B reunalla $S = \partial B$ tunnetaan reuna-jännitykset

$$\sigma_{ij}(x_i, t)n_j(x_i) = s_i^0(x_i)f(t) \quad (4.33)$$

ja tilavuusvoimavektori on muotoa

$$f_i(x_i, t) = f_i^0(x_i)f(t). \quad (4.34)$$

Lausumalla yhteensopivuusehdoissa

$$\varepsilon_{ij,kl}(t) + \varepsilon_{kl,ij}(t) = \varepsilon_{ik,jl}(t) + \varepsilon_{jl,ik}(t) \quad (4.35)$$

muodonmuutokset jännitysten avulla kaavoilla

$$e_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t J^d(t-\tau) \frac{\partial s_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.36)$$

ja

$$\varepsilon_{kk}(t) = \int_{-\infty}^t J^h(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.37)$$

ottamalla huomioon tasapainoehdot

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (4.38)$$

ja Poissonin luvun vakioarvosta seuraava yhtälö

$$J^h(t) = \frac{1-2\nu}{1+\nu} J^d(t) \quad (4.39)$$

saadaan

$$\int_{-\infty}^t J^d(t-\tau) \frac{\partial \beta_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.40)$$

missä on merkitty

$$\beta_{ij}(t) = \sigma_{ij,kk}(t) + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij}(t) + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} f_{k,k}(t) + f_{j,i}(t). \quad (4.41)$$

Jotta yhtälö toteutuisi, täytyy olla

$$\beta_{ij}(t) = 0. \quad (4.42)$$

Jännityskomponenttien

$$\sigma_{ij}(x_i, t) = \sigma_{ij}^0(x_i) f(t) \quad (4.43)$$

aikariippuvuus $f(t)$ tunnetaan reunaehtojen perusteella. Paikasta riippuvat komponentit σ_{ij}^0 saadaan ratkaistua tasapainoehtojen, yhteensopivuusehtojen ja reunaehtojen avulla kuten kimmoteoriassa.

Jännityskomponenttien avulla saadaan siirtymät ja muodonmuutokset

$$\begin{aligned} u_i(x_i, t) &= u_i^0(x_i) u(t), \\ \varepsilon_{ij}(x_i, t) &= \varepsilon_{ij}^0(x_i) u(t). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Pienten siirtymien teoriassa

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2} [u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0]. \quad (4.45)$$

Sijoittamalla jännityksen ja muodonmuutoksen kehittämät isotrooppisen viskoelastisen aineen materiaaliyhtälöihin tulee

$$e_{ij}^0(x_i)u(t) = s_{ij}^0(x_i) \int_0^t J^d(t-\tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.46)$$

ja

$$\varepsilon_{kk}^0(x_i)u(t) = \sigma_{kk}^0(x_i) \frac{1-2\nu}{1+\nu} \int_0^t J^d(t-\tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.47)$$

missä $J^h(t)$ on eliminoitu funktion $J^d(t)$ avulla. Siirtymän aikariippuvuudeksi saadaan

$$u(t) = \int_0^t \frac{J^d(t-\tau)}{J^d(0)} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.48)$$

ja muodonmuutosten paikasta riippuvat osuudet separoiduissa kehitelmissä ovat

$$e_{ij}^0(x_i) = J^d(0)s_{ij}^0(x_i), \quad (4.49)$$

$$\varepsilon_{kk}^0(x_i) = \frac{1-2\nu}{1+\nu} J^d(0)\sigma_{kk}^0(x_i). \quad (4.50)$$

Paikasta riippuvien muodonmuutossuureiden kaavoista integroidaan $u_i^0(x_i)$.

4.2.2 Reunan siirtymät tunnetaan

Otaksutaan reunan $S = \partial B$ siirtymät tunnetuiksi

$$u_i(x_i, t) = \hat{u}_i^0(x_i)u(t) \quad \text{reunalla } \partial B, \quad (4.51)$$

ja tilavuusvoimavektori otaksutaan nolaksi eli $f_i(t) = 0$. Sijoittamalla siirtymien otaksutusta separoituvasta kehitelmästä

$$u_i(x_i, t) = u_i^0(x_i)u(t) \quad (4.52)$$

seuraavat muodonmuutokset

$$\varepsilon_{ij}(x_i, t) = \varepsilon_{ij}^0(x_i)u(t), \quad (4.53)$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2}[u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0]$$

isotrooppisen viskoelastisen aineen jännitysten ja muodonmuutosten välisiin relaksaatiofunktioiden avulla lausuttuihin yhtälöihin tulee

$$s_{ij}(x_i, t) = 2e_{ij}^0(x_i) \int_0^t \mu(t-\tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.54)$$

ja

$$\sigma_{kk}(x_i, t) = \varepsilon_{kk}^0(x_i) \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \int_0^t \mu(t-\tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (4.55)$$

Sijoittamalla jännitykset edelleen homogeenisiin tasapainoehtoihin

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (4.56)$$

saadaan siirtymien $u_i^0(x_i)$ avulla lausutut tasapainoehdot

$$u_{i,kk}^0(x_i) + \frac{1}{1-2\nu} u_{k,ki}^0(x_i) = 0 \quad (4.57)$$

kuten kimmoteoriassa. Ratkaisemalla yhtälöistä (4.57) siirtymät saadaan jännitykset

$$\sigma_{ij}(x_i, t) = \sigma_{ij}^0(x_i) f(t) \quad (4.58)$$

muodonmuutosten ja konstitutiivisten yhtälöiden avulla.

4.2.3 Harmoninen värähtely

Otaksutaan viskoelastisen kappaleen reunaehdot ja tilavuusvoimat ajan harmonisiksi funktioiksi. Tällöin myös kenttäsuureet ovat samaa muotoa

$$s_{ij}^0(x_i) e^{i\omega t} = 2\mu^*(i\omega) \varepsilon_{ij}^0(x_i) e^{i\omega t} \quad (4.59)$$

ja

$$\sigma_{kk}^0(x_i) e^{i\omega t} = 2K^*(i\omega) \varepsilon_{kk}^0(x_i) e^{i\omega t}, \quad (4.60)$$

missä ω on kulmanopeus. Tekijää $\exp(i\omega t)$ vaille yhtälöt ovat samaa muotoa kuin kimmoteoriassa; nyt vain kimmoteorian reaalisten materiaalimoduulien tilalla ovat kompleksimoduulit.

Kenttäsuureiden $\sigma_{ij}^0(x_i)$, $\varepsilon_{ij}^0(x_i)$, $u_i^0(x_i)$ ratkaisu saadaan samalla tavalla kuin edellä käsitellyissä tapauksissa. Nyt ei vaadita, että deviatorisen ja tilavuuden muutokseen liittyvän materiaalfunktion suhde on vakio.

Esimerkki 4.1 Tutkitaan viskoelastisen paksuseinäisen ympyräsylinterin vääntöväärähtelyä.

Otaksutaan vääntökulmalle esitys

$$\varphi(z, t) = f(z) e^{i\omega t}, \quad (4.61)$$

missä ω on värähtelyn kulmanopeus ja $f(z)$ on toistaiseksi tuntematon funktio. Sijoitetaan vääntökulman lauseke vääntöväärähtelyn kenttäyhtälöön

$$GJ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (4.62)$$

missä J on vääntöjäyhyys ja I kiertoaitaus. Paksuseinäisen sylinterin tapauksessa $J = I = \frac{\pi}{2}(b^4 - a^4)$, missä a on sisäsäde ja b on sylinterin ulkosäde. Saadaan tavallinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \frac{\rho \omega^2}{G} f(z) = 0. \quad (4.63)$$

Sen ratkaisu on

$$f(z) = A \sin\left(\frac{\Omega z}{L}\right) + B \cos\left(\frac{\Omega z}{L}\right), \quad (4.64)$$

missä on merkitty

$$\Omega = \frac{\rho\omega^2 L^2}{G}, \quad G = \mu. \quad (4.65)$$

Jos reuna $z = L$ on kiinnitetty, niin

$$\varphi(L) = 0 \quad (4.66)$$

ja

$$A \sin \Omega + B \cos \Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{B} = -\cot \Omega. \quad (4.67)$$

Vääntömomentti on

$$M(z, t) = GJ \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} = GJ \frac{df}{dz} e^{i\omega t} = \frac{\Omega}{L} \left[A \cos\left(\frac{\Omega z}{L}\right) - B \sin\left(\frac{\Omega z}{L}\right) \right] e^{i\omega t}. \quad (4.68)$$

Reunalla $z = 0$ on annettu vääntömomentti $M(0, t) = \hat{M} e^{i\omega t}$. Sylinterin pään $z = 0$ momentin ja vääntökulman suhde on

$$\frac{M(0, t)}{\varphi(0, t)} = \frac{\hat{M}}{f(0)} = \frac{GJ\Omega}{L} \frac{A}{B} = J\rho\omega^2 L \frac{\cot \Omega}{\Omega} \quad (4.69)$$

kimmoisessa tapauksessa.

Muunnetaan kimmainen ratkaisu harmonisessa värähdysliikkeessä olevalle viskoelastiselle sylinterille korvaamalla $G = \mu$ kompleksisella moduulilla $\mu^*(i\omega)$. Tällöin saadaan

$$\frac{\hat{M}}{f(0)} = J\rho\omega^2 L \frac{\cot \Omega^*}{\Omega^*}, \quad (4.70)$$

missä

$$\Omega^*(i\omega) = \sqrt{\frac{\rho\omega^2 h^2}{\mu^*(i\omega)}}. \quad (4.71)$$

Jos $\mu^*(i\omega)$ tunnetaan, niin kaavasta (4.70) saadaan vääntökulma $f(0)$ sylinterin päässä $z = 0$. Yhtälön perusteella voidaan määrittää kokeellisesti kompleksinen leikkausmoduuli. Jos \hat{M} on reaalinen, niin $f(0)$ on kompleksiluku, jonka määrittää kompleksitason vektorin pituus $|\varphi(0, t)|$ ja vaihekulma, jonka vääntökulma jää jälkeen kuormasta $M(0, t)$.

4.2.4 Integraalimuunnosmenetelmä

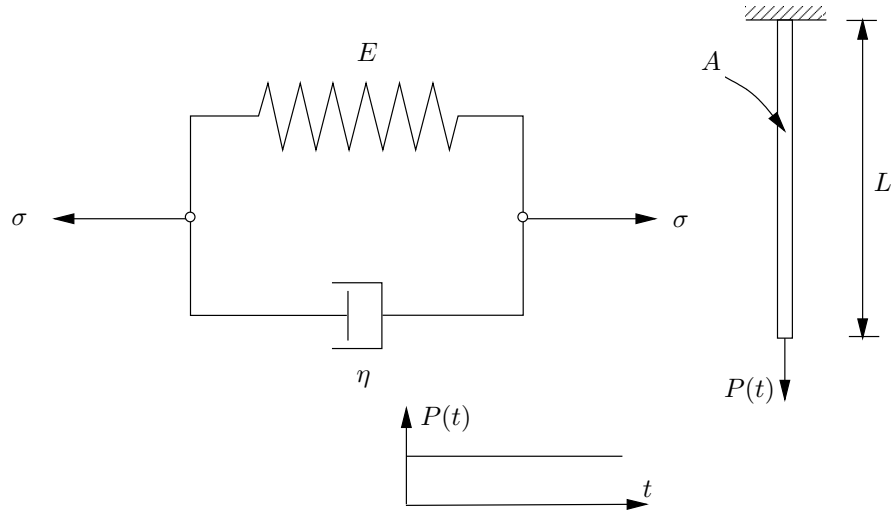
Integraalimuunnosmenetelmässä muunnetaan kaikki kenttäsuureet ja kenttäyhtälöt. Laplace-muunnetyt muodonmuutokset ovat

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}), \quad (4.72)$$

ja muunnetyt konstitutiiviset yhtälöt ovat

$$\tilde{s}_{ij} = 2s\tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad (4.73)$$

$$\tilde{\sigma}_{kk} = 2s\tilde{K}\tilde{\varepsilon}_{kk}, \quad (4.74)$$



Kuva 4.1 Viskoelastinen vedetty sauva.

missä

$$\tilde{s}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tilde{\sigma}_{kk}, \quad \tilde{s}_{ii} = 0, \quad (4.75)$$

$$\tilde{e}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tilde{\varepsilon}_{kk}, \quad \tilde{e}_{ii} = 0 \quad (4.76)$$

ovat muunnetut deviatoriset jännitykset ja muodonmuutokset. Tasapainoehtojen ja reunaehtoien muunnokset ovat

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + \tilde{f}_i = 0, \quad (4.77)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}n_j = \tilde{t}_i = 0 \quad \text{reunan osalla } S_t, \quad (4.78)$$

$$\tilde{u}_i = \tilde{u} \quad \text{reunan osalla } S_u. \quad (4.79)$$

Yhtälöt ovat samaa muotoa kuin kimmoteoriassa, kun otetaan huomioon, että kimmomoduuleiden μ ja K tilalla ovat $s\tilde{\mu}(s)$ ja $s\tilde{K}(s)$. Staattisen (kvasistaattisen) viskoelastisen tehtävän Laplace–muunnettu ratkaisu saadaan siten vastaavan kimmoisen tehtävän ratkaisun perusteella. Lopuksi suoritetaan käänteismuunnos.

Esimerkki 4.2 Tutkitaan Kelvinin aineesta tehtyä sauvaa, jota kuormittaa sauvan päässä sauvan akselin suuntainen voima $P(t)$. Määritetään sauvan pään siirtymä ja jännitys.

Sauvan tasapainoehto on $P = \sigma A$, missä A poikkileikkauksen pinta-ala. Kimmoisen sauvan jännitys ja pään siirtymä ovat

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \text{ja} \quad u(L) = \frac{PL}{EA}. \quad (4.80)$$

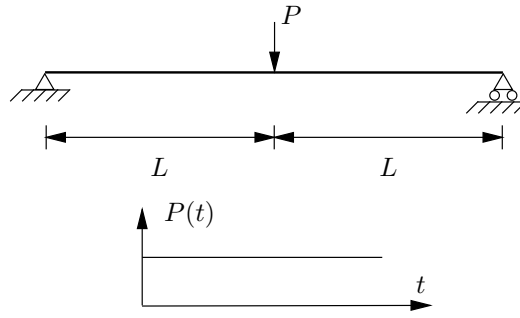
Viskoelastiselle Kelvinin aineelle

$$\tilde{\sigma}(s) = E\tilde{\varepsilon}(s) + \eta s\tilde{\varepsilon}(s) = s\tilde{G}(s)\tilde{\varepsilon}(s), \quad (4.81)$$

missä on merkitty

$$s\tilde{G}(s) = E + \eta s. \quad (4.82)$$

$\tilde{G}(s)$ on relaksaatiomoduulin $G(t)$ Laplace–muunnos.



Kuva 4.2 Pistekuorman kuormittama viskoelastinen palkki.

Vastaavuusperiaatteen mukaan voidaan kimmoisen ratkaisun perusteella kirjoittaa muunnettu yhtälö

$$\tilde{u}(L, s) = \frac{\tilde{P}(s)L}{s\tilde{G}(s)A}. \quad (4.83)$$

Otaksutaan voiman $P(t)$ aikariippuvuus porraskäyrän muotoiseksi eli

$$P(t) = P_0 H(t). \quad (4.84)$$

Tällöin

$$\tilde{P}(s) = \frac{P_0}{s} \quad (4.85)$$

ja

$$\tilde{u}(L, s) = \frac{P_0 L}{EA} \frac{1}{s \left(1 + \frac{\eta}{E}s\right)}, \quad (4.86)$$

jonka käännteismuunnos on

$$u(L, t) = \frac{P_0 L}{EA} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right). \quad (4.87)$$

Viskoelastisen sauvan jännitys on tarkasteltavassa kuormitustapauksessa

$$\sigma(t) = \frac{P(t)}{A} = \frac{P_0}{A} H(t). \quad (4.88)$$

Esimerkki 4.3 Tutkitaan viskoelastista taivutettua palkkia, joka sijaitsee välillä $x \in [-L, L]$ ja jota kuormittaa ajasta riippuva voima $P(t)$ pisteessä $x = 0$.

Kimmoisen palkin staattiset tasapainoyhtälöt ovat

$$\frac{dQ(x)}{dx} + q(x) = 0, \quad \frac{dM(x)}{dx} - Q(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 M(x)}{dx^2} + q(x) = 0, \quad (4.89)$$

missä $Q(x)$ on leikkausvoima ja $M(x)$ on taivutusmomentti. Navierin-Bernoullin otaksujen mukaan palkin venymä on

$$\varepsilon(x, z) = -z \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad (4.90)$$

missä $w(x)$ on palkin taipuma. Kimmoisen palkin tapauksessa

$$\sigma(x, z) = E\varepsilon(x, z) = -E \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad (4.91)$$

$$M(x) = \int_A z\sigma dA = -EI \frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad (4.92)$$

E on kimmokerroin, $I = \int_A z^2 dA$ taivutusjäyhyys.

Tasapainoehto lausuttuna taipuman avulla tulee muotoon

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = q(x). \quad (4.93)$$

Viskoelastisen aineen tapauksessa soveltamalla integraaliyhtälömuotoista yksiulotteista konstitutiivista yhtälöä

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.94)$$

missä $G(t)$ on yksiulotteinen relaksaatiofunktio, saadaan samanlaisella johdolla kuin yllä tehtiin kimmoiselle palkille tasapainoyhtälö

$$\int_0^t G(t-\tau) I \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) d\tau = q(x, t), \quad (4.95)$$

missä I on vakio (taivutusjäyhyys). Palkin symmetrisellä puoliskolla $x \in [0, L]$ tasapainoehton toteuttaa polynomin muotoinen taipuman lauseke

$$w(x, t) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3, \quad x > 0, \quad (4.96)$$

missä $C_i = C_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ ovat (paikan suhteen) integroimisvakioita.

Palkin leikkausvoima

$$Q(x, t) = -I \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right] d\tau \quad (4.97)$$

palkin päässä $x = L$ on keskeisen pistekuorman tapauksessa $Q(L, t) = -\frac{1}{2}P(t)$ eli

$$2Q(L, t) = 12I \int_0^t G(t-\tau) \frac{dC_4(\tau)}{d\tau} = P(t). \quad (4.98)$$

Palkin reunaehdoista

$$w(L, t) = M(L, t) = \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.99)$$

seuraa

$$\begin{aligned} C_1 + C_2L + C_3L^2 + C_4L^3 &= 0, \\ 2C_3 + 6C_4L &= 0. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Symmetriaehdon nojalla

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2(t) = 0. \quad (4.101)$$

Jos voiman $P(t)$ aikahistoria tunnetaan, niin funktio $C_4(t)$ voidaan ratkaista tasapainoehdosta (4.98). Laplace-muunnoksella ratkaistaan

$$\tilde{C}_4(s) = \frac{\tilde{P}(s)}{12Is\tilde{G}(s)}, \quad (4.102)$$

jonka käänteismuunnos on

$$C_4(t) = \frac{1}{12I} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tilde{P}(s)}{s\tilde{G}(s)} \right] \equiv \frac{1}{12I} f(t). \quad (4.103)$$

Reunaehtoien perusteella saadaan rekursiivisesti muut funktiot $C_i(t)$:

$$C_3(t) = -\frac{L}{4I} f(t), \quad (4.104)$$

$$C_1(t) = -\frac{L}{12I} f(t).$$

Palkin taipuma ajan funktiona on

$$w(x, t) = \left(\frac{1}{6}L^3 - \frac{1}{4}Lx^2 + \frac{1}{12}x^3 \right) \frac{f(t)}{I}. \quad (4.105)$$

Jos $P(t) = P_0H(t)$ ja palkki on Kelvinin ainetta, jolle $sG(s) = E + \eta s$, niin

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tilde{P}(s)}{s\tilde{G}(s)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P_0}{s(E + \eta s)} \right] = \frac{P_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right), \quad (4.106)$$

ja palkin taipuma on

$$w(x, t) = \frac{P_0}{EI} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right) \left(\frac{1}{6}L^3 - \frac{1}{4}Lx^2 + \frac{1}{12}x^3 \right). \quad (4.107)$$

Vaihtoehtoisesti voidaan staattisesti määrätyn palkin tapauksessa käyttää yhtälöä

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{M(x, t)}{EI}, \quad (4.108)$$

jossa pistekuorman tapauksessa

$$M(x, t) = P(t) \left(\frac{L-x}{2} \right). \quad (4.109)$$

Kimmoisen ja viskoelastisen ratkaisun vastaavuusperiaatteen nojalla (tai Laplace-muuntamalla) tulee

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}(x, s)}{\partial x^2} = -\frac{\tilde{M}(x, s)}{Is\tilde{G}(s)} = -\frac{1}{I} \frac{\tilde{P}(s)}{s\tilde{G}(s)} \left(\frac{L}{2} - \frac{x}{2} \right). \quad (4.110)$$

Integroimalla kaksi kertaa x :n suhteen tulee

$$\tilde{w}(x, s) = \frac{1}{I} \frac{\tilde{P}(s)}{s\tilde{G}(s)} \left(-\frac{1}{4}Lx^2 + \frac{1}{12}x^3 + D_1x + D_2 \right). \quad (4.111)$$

Symmetriaehdon nojalla

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_1 = 0, \quad (4.112)$$

ja reunaehdosta $w(L, t) = 0$ seuraa

$$D_2 = \frac{1}{6}L^3, \quad (4.113)$$

jolloin taipumalle on saatu sama lauseke kuin yllä.

Esimerkki 4.4 Tutkitaan viskoelastista paksuseinäistä ympyräsylinteriä hitaassa vääntöliikkeessä, (hitausvoimat voidaan tällöin jättää huomioonottamatta).

Tarkastellaan edelleen onttoa sylinteriä, jonka pää $z = L$ on kiinnitetty, ja pään $z = 0$ vääntökulma ajan funktiona on

$$\begin{aligned}\varphi(0, t) &= 0, & \text{kun } t \leq 0, \\ \varphi(0, t) &= \hat{\varphi} \sin \omega t, & \text{kun } 0 < t < \infty,\end{aligned}\tag{4.114}$$

missä $\hat{\varphi}$ on värähtelyn amplitudi.

Ulokkeen päästä $z = 0$ vääntömomentilla $M(0)$ kuormitetun sylinterin vääntökulma on staattisessa tapauksessa

$$\varphi(z) = -\varphi(0) \left(1 - \frac{z}{L}\right),\tag{4.115}$$

ja vääntömomentin kaavan $M(z) = GJ\varphi'(z)$ perusteella saadaan yhteys

$$\frac{M(0, t)}{\varphi(0, t)} = \frac{GJ}{L}.\tag{4.116}$$

Integraalimuunnosmenetelmässä $G = \mu$ korvataan muunnosparametrilla s kerrotulla μ :n Laplace-muunnoksella $s\tilde{\mu}(s)$, vääntömomentti $M(0, t)$ muunnoksella $\tilde{M}(0, s)$ ja $\varphi(0, t)$ muunnoksella $\tilde{\varphi}(0, s)$. Reunan $z = 0$ vääntökulman aikariippuvuutta kuvaavan termin $\sin \omega t$ muunnos on $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$. Muunnettujen suureiden yhteys on staattisen ratkaisun perusteella, kun hitausvoimat jätetään huomioonottamatta,

$$\tilde{M}(0, s) = \hat{\varphi} \frac{J}{L} \frac{s\tilde{\mu}(s)\omega}{s^2 + \omega^2}.\tag{4.117}$$

Otaksutaan, että liukumoduuli on muotoa

$$\mu(t) = G_0 + \sum_{j=1}^N G_j e^{-\frac{t}{\tau_j}},\tag{4.118}$$

missä $G_0, G_j, \tau_j, j = 1, \dots, N$ ovat materiaaliparametreja. Tässä tapauksessa $s\tilde{\mu}(s)$ on muotoa

$$s\tilde{\mu}(s) = \frac{A(s)}{\prod_{j=1}^N \left(s + \frac{1}{\tau_j}\right)},\tag{4.119}$$

missä $A(s)$ on N :nnen asteen polynomi. Liitteen A kaavalla (A.10) laskettu momentin käänteismuunnos on

$$\begin{aligned}M(t) &= \hat{\varphi} \frac{J\omega}{L} \left\{ \frac{-e^{-i\omega t} A(-i\omega)}{2i\omega \prod_{j=1}^N \left(-i\omega + \frac{1}{\tau_j}\right)} + \frac{e^{i\omega t} A(i\omega)}{2i\omega \prod_{j=1}^N \left(i\omega + \frac{1}{\tau_j}\right)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{\tau_n}} \left[\frac{A(s) \left(s + \frac{1}{\tau_n}\right)}{\prod_{j=1}^N \left(s + \frac{1}{\tau_j}\right)} \right] \frac{e^{-\frac{t}{\tau_n}}}{\left(\frac{1}{\tau_n^2} + \omega^2\right)} \right\}.\end{aligned}\tag{4.120}$$

Esimerkki 4.5 Tutkitaan paineen $p(t)$ kuormittamaa kokoonpuristumattomasta viskoelastisesta ainesta tehtyä paksuseinäistä ympyräsylinteriä, jonka ympärille on asennettu kimmoinen ohutseinäinen sylinteri.

Otaksutaan, että sylinteri on riittävän pitkä, jotta siinä vallitsee pyörähdyssymmetrisen tasomuodonmuutostila. Sylinterikoordinaatistossa (r, φ, z) muodonmuutokset ovat

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad (4.121)$$

missä $u(r, t)$ on säteen suuntainen siirtymä. Kokoonpuristumattomuusehdon $e = 0$ mukaan

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0. \quad (4.122)$$

Kokoonpuristumattomuusehdon toteuttaa lauseke

$$u = \frac{C}{r}, \quad (4.123)$$

missä $C(t)$ on (paikan suhteen) vakio. Kokoonpuristumattoman kimmoisen aineen jännitykset ovat

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} + S, \\ \sigma_\varphi &= 2\mu \frac{u}{r} + S, \\ \sigma_z &= S, \end{aligned} \quad (4.124)$$

missä S on keskimääräinen jännitys ($p(t)$ on sisäinen paine). Jännityskomponenttien Laplace-muunnokset ovat

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_r(r, s) &= 2s\tilde{\mu}(s) \frac{\partial \tilde{u}(r, s)}{\partial r} + \tilde{S}(r, s), \\ \tilde{\sigma}_\varphi(r, s) &= 2s\tilde{\mu}(s) \frac{\tilde{u}(r, s)}{r} + \tilde{S}(r, s), \\ \tilde{\sigma}_z(r, s) &= \tilde{S}(r, s). \end{aligned} \quad (4.125)$$

Muuntamalla tasapainoehto

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4.126)$$

ja sijoittamalla siihen jännityskomponenttien muunnokset saadaan yhtälö

$$\frac{\partial \tilde{S}(r, s)}{\partial r} = \rho s^2 \frac{\tilde{C}(s)}{r}, \quad (4.127)$$

jonka ratkaisu on

$$\tilde{S}(r, s) = \rho s^2 \tilde{C}(s) \ln r + \tilde{D}(s), \quad (4.128)$$

missä $\tilde{D}(s)$ on integroimisvakio (riippumaton koordinaatista r).

Ratkaisun perusteella jännityskomponenttien muunnokset tulevat muotoon

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_r(r, s) &= -2s\tilde{\mu}(s) \frac{\tilde{C}(s)}{r^2} + \rho s^2 \tilde{C}(s) \ln r + \tilde{D}(s), \\ \tilde{\sigma}_\varphi(r, s) &= 2s\tilde{\mu}(s) \frac{\tilde{C}(s)}{r^2} + \rho s^2 \tilde{C}(s) + \tilde{D}(s), \\ \tilde{\sigma}_z(r, s) &= \rho s^2 \tilde{C}(s) \ln r + \tilde{D}(s). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Jännitysten ja siirtymien reunaehdot sisäreunalla ja kimmoisen ja viskoelastisen sylinterin rajalla ovat

$$\begin{aligned}\sigma_r(a, t) &= -p(t), \\ \sigma_\varphi(b, t) &= -q(t), \\ u_r(b, t) &= u_e(t),\end{aligned}\tag{4.130}$$

missä u_e on kimmoisen kuoren siirtymä ja $q(t)$ on tukipaine kimmoisen kuoren ja viskoelastisen sylinterin saumassa. Kimmoisen sylinterikuoren kalvotilan ratkaisun perusteella

$$u_e(t) = \frac{(1 - \nu_e^2)b^2}{E_e h} q(t),\tag{4.131}$$

missä ν_e ja E_e ovat kimmoisen kuoren kimmovakiot, h on kuoren paksuus ja b on ulkokuoren säde. Otaksutaan, että $s\tilde{\mu}(s)$ on yleistä muotoa

$$s\tilde{\mu}(s) = \frac{A(s)}{B(s)},\tag{4.132}$$

missä $A(s)$ ja $B(s)$ ovat polynomeja.

Reunaehtojen ja kimmoisen kuoren ja viskoelastisen sylinterin jatkuvuusehtojen (4.130) avulla ratkaistaan $\tilde{C}(s)$ ja $\tilde{D}(s)$

$$\begin{aligned}\tilde{C}(s) &= -s\tilde{p}(s) \frac{B(s)}{F(s)}, \\ \tilde{D}(s) &= -s\tilde{p}(s) \frac{E(s)}{F(s)},\end{aligned}\tag{4.133}$$

missä on merkitty

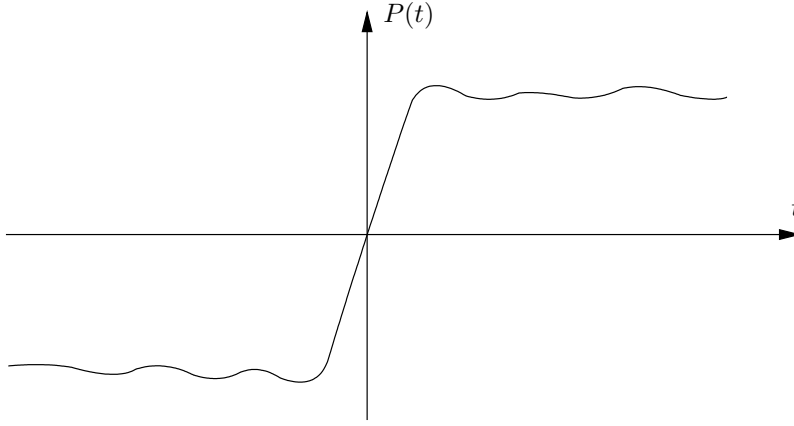
$$\begin{aligned}F(s) &= -2sA(s) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) + \rho s^3 B(s) \ln \frac{a}{b} - \frac{sE_e h}{b^3(1 - \nu_e^2)}, \\ E(s) &= \frac{A(s)}{b^2} - \rho s^2 B(s) \ln b - \frac{B(s)E_e h}{b^3(1 - \nu_e^2)}.\end{aligned}\tag{4.134}$$

Jännitysten lausekkeiden käänteismuunnokset voidaan laskea otaksumalla paineen $p(t)$ jakauma ajan funktiona ja moduuli $\mu(t)$. Otaksutaan, että paine $p(t)$ on Heavisiden porraskfunktion muotoinen

$$p(t) = p_0 H(t).\tag{4.135}$$

Jos funktio $F(s)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$F(s) = f(s - a_1)(s - a_2) \cdots (s - a_m),\tag{4.136}$$



Kuva 4.3 Viskoelastisessa väliaineessa olevan pallon muotoisen onkalon paine ajan funktiona.

missä f on vakio ja m on kokonaisluku, niin jännitysten käänneismuunnokset ovat

$$\begin{aligned}\sigma_r(r, t) &= -p_0 \sum_{j=1}^m \frac{e^{a_j t}}{\lim_{s \rightarrow a_j} \left[\frac{F(s)}{s - a_j} \right]} \left[-\frac{2}{r^2} A(a_j) + \rho \ln r a_j^2 B(a_j) + E(a_j) \right], \\ \sigma_\varphi(r, t) &= -p_0 \sum_{j=1}^m \frac{e^{a_j t}}{\lim_{s \rightarrow a_j} \left[\frac{F(s)}{s - a_j} \right]} \left[\frac{2}{r^2} A(a_j) + \rho \ln r a_j^2 B(a_j) + E(a_j) \right], \\ \sigma_z(r, t) &= -p_0 \sum_{j=1}^m \frac{e^{a_j t}}{\lim_{s \rightarrow a_j} \left[\frac{F(s)}{s - a_j} \right]} \left[\rho \ln r a_j^2 B(a_j) + E(a_j) \right].\end{aligned}\quad (4.137)$$

Esimerkki 4.6 Viskoelastisessa aineessa on pallonmuotoinen onkalo, jossa vaikuttaa paine $p(t)$. Tutkitaan väliaineen muodonmuutoksia ja jännityksiä integraalimuunnosmenetelmällä käyttäen Fourier-muunnosta.

Pallokoordinaateissa (r, θ, φ) siirtymien avulla lausuttu ainoa jäljelle jäävä liikeyhtälö on kimmosen aineen tapauksessa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4.138)$$

missä $u = u(r, t)$ on säteen suuntainen siirtymä ja λ, μ ovat Lamén vakiot. Fouriermuuntamalla ja korvaamalla kimmomoduulit kompleksisilla moduuleilla $\lambda^*(i\omega)$ ja $\mu^*(i\omega)$ liikeyhtälö muuntuu muotoon

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{2\bar{u}}{r^2} = \frac{\rho}{\lambda^*(i\omega) + 2\mu^*(i\omega)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}. \quad (4.139)$$

Merkitsemällä

$$\Omega^2 = \frac{\rho}{\lambda^*(i\omega) + 2\mu^*(i\omega)} \quad (4.140)$$

differentiaaliyhtälön (4.139) ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$\bar{u} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{C(\omega)e^{i\Omega\omega r} + D(\omega)e^{-i\Omega\omega r}}{r} \right], \quad (4.141)$$

missä $C(\omega)$ ja $D(\omega)$ ovat integroimisvakion luonteisia suureita.

Äärettömyyksiin jatkuvassa väliaineessa ei ole takaisinheijastuvia aaltoja, ja fysikaalisten syiden nojalla etenevät aallot vaimenevat viskoelastisessa väliaineessa, joten täytyy olla

$$C(\omega) = 0, \quad (4.142)$$

ja tällöin

$$\bar{u} = -\frac{D(\omega)}{r^2}(1 + i\Omega\omega r)e^{-i\Omega\omega r}. \quad (4.143)$$

Radiaalisen siirtymän muunnoksen perusteella lasketaan pallosymmetrisen tilan muodonmuutokset ja konstitutiivisten yhtälöiden avulla jännityksien muunnokset

$$\bar{\sigma}_r = \frac{D(\omega)}{r^3}[4\mu^*(1 + i\Omega\omega r) - \rho\omega^2 r^2]e^{-i\Omega\omega r}, \quad (4.144)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = -\frac{D(\omega)}{r^3}[2\mu^*(1 + i\Omega\omega r) + \Omega^2\omega^2 r^2 \lambda^*]e^{-i\Omega\omega r}. \quad (4.145)$$

Ontelon reunalla $r = a$ on reunaehdon perusteella

$$\bar{\sigma}_r(a, \omega) = \bar{p}(\omega), \quad (4.146)$$

missä $\bar{p}(\omega)$ on paineen $p(t)$ Fourier-muunnos. Reunaehdon avulla ratkaistaan

$$D(\omega) = \frac{a^3 \bar{p}(\omega) e^{i\Omega\omega a}}{4\mu^*(1 + i\Omega\omega a) - \rho\omega^2 a^2}. \quad (4.147)$$

Käänteismuunnos voidaan laskea kaavalla ³

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \frac{1}{\pi} \Re \int_0^\infty \bar{u}(a, \omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= -\frac{a}{\pi} \Re \int_0^\infty \frac{(1 + i\Omega\omega a) \bar{p}(\omega) e^{i\omega t}}{4\mu^*(1 + i\Omega\omega a) - \rho\omega^2 a^2} d\omega. \end{aligned} \quad (4.148)$$

Käänteismuunnoksen integraali voidaan laskea numeerisesti, kun $p(t)$ ja materiaali-funktiot $\mu^*(i\omega) = \mu_1(\omega) + i\mu_2(\omega)$ ja $\lambda^*(i\omega) = \lambda_1(\omega) + i\lambda_2(\omega)$ tunnetaan kulmanopeuden ω funktiona.

Jos paineen $p(t)$ Fourier-muunnos on

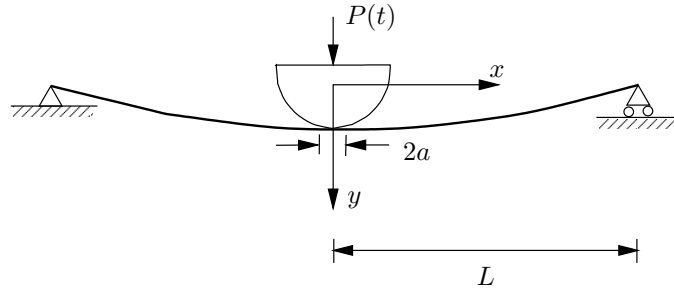
$$\bar{p}(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega < \omega_1, \\ \frac{p_0}{i\omega}, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0, & \omega_2 < \omega < \infty, \end{cases} \quad (4.149)$$

niin

$$u(a, t) = -\frac{p_0 a}{\pi} \Re \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1 + i\Omega\omega a) i e^{i\omega t}}{\omega [4\mu^*(1 + i\Omega\omega a) - \rho\omega^2 a^2]} d\omega. \quad (4.150)$$

Muunnosta (4.149) vastaava paine on

$$p(t) = \frac{p_0}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (4.151)$$



Kuva 4.4 Viskoelastisen palkin ja äärettömän jäykän painimen kontakti.

Esimerkki 4.7 Tutkitaan viskoelastista palkkia jota painaa voima $P(t)$ kaarevakärkisen painimen välityksellä.

Vapaasti tuetun viskoelastisen palkin ja äärettömän jäykän painimen kontaktipituus on $2a(t)$ ajan funktiona, kuva 4.4. Painimen profiili on annettu kaavalla

$$y = d(t) - c|x|^3, \quad (4.152)$$

missä $d(t)$ on painimen siirtymä ja c on vakio.

Kimmoisen palkin tasapainoyhtälö taipuman avulla lausuttuna on

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x). \quad (4.153)$$

Viskoelastisen aineen tapauksessa soveltamalla integraaliyhtälömuotoista yksiulotteista konstitutiivista yhtälöä

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.154)$$

missä $G(t)$ on yksiulotteinen relaksaatiofunktio, saadaan viskoelastiselle palkille tasapainoyhtälö

$$\int_0^t G(t-\tau) I \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) d\tau = q(x, t), \quad (4.155)$$

missä I on vakio (taivutusjäykyys).

Koska palkin ja painimen välillä on kontakti, täytyy toteutua yhteensopivuusyhtälö

$$w(x, t) = d(t) - cx^3, \quad \text{kun } x < a(t), \quad t \geq 0. \quad (4.156)$$

Kontaktialueen ulkopuolella tasapainoehdon toteuttaa polynomien muotoinen taipuman lauseke

$$w(x, t) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3, \quad x > a(t), \quad (4.157)$$

missä $C_i = C_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ ovat jälleen (paikan suhteen) integroimisvakioita.

Leikkausvoima

$$Q(x, t) = -I \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right] d\tau \quad (4.158)$$

³ $\Re f$ on kompleksifunktion f reaali osa.

palkin päässä on nyt $Q(L, t) = -\frac{1}{2}P(t)$ eli

$$2Q(L, t) = 12I \int_0^t G(t - \tau) \frac{dC_4(\tau)}{d\tau} = P(t). \quad (4.159)$$

Palkin reunaehdoista

$$w(L, t) = M(L, t) = \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.160)$$

seuraa

$$\begin{aligned} C_1 + C_2L + C_3L^2 + C_4L^3 &= 0, \\ 2C_3 + 6C_4L &= 0. \end{aligned} \quad (4.161)$$

Kontaktialueen reunalla täytyy puolestaan toteutua yhteensopivuusehtojen

$$\begin{aligned} w(a-, t) &= w(a+, t), \\ \frac{\partial w(a-, t)}{\partial x} &= \frac{\partial w(a+, t)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.162)$$

$$\frac{\partial^2 w(a-, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(a+, t)}{\partial x^2},$$

joista seuraa

$$\begin{aligned} C_1 + C_2a + C_3a^2 + C_4a^3 &= d - ca^3, \\ C_2 + 2C_3a + 3C_4a^2 &= -3ca^2, \\ 2C_3 + 6C_4a &= -6ca. \end{aligned} \quad (4.163)$$

Voima $P(t)$ annettu

Jos voima $P(t)$ tunnetaan, niin funktio $C_4(t)$ voidaan ratkaista tasapainoehdosta (4.159) Laplace-muunnoksella

$$C_4(t) = \frac{f(t)}{12I}, \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tilde{P}(s)}{s\tilde{G}(s)} \right]. \quad (4.164)$$

Kuorman $P(t)$ avulla määritettyjen tunnettujen funktioiden $C_4(t)$, $f(t)$ avulla voidaan ratkaista yhtälöistä (4.161) ja (4.163) muut tuntemattomat funktiot

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{L^3 f(t) [24Ic - f(t)]}{12I [12Ic + f(t)]}, \\ C_2(t) &= \frac{L^2 f^2(t)}{4I [12Ic + f(t)]}, \\ C_3(t) &= -\frac{Lf(t)}{4I}, \\ a(t) &= \frac{Lf(t)}{12Ic + f(t)}, \\ d(t) &= \frac{cL^3 f(t) [24Ic - f(t)]}{[12Ic + f(t)]^2}. \end{aligned} \quad (4.165)$$

Painimen siirtymä $d(t)$ annettu

Jos painimen siirtymä $d(t)$ on annettu, niin yhtälöistä (4.161) ja (4.163) ratkaistaan

$$\begin{aligned}
 C_1(t) &= cL^3 \left[-3\gamma(t) - \frac{1}{\gamma(t)} + 4 \right], \\
 C_2(t) &= 3cL^2 \left[\gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)} - 2 \right], \\
 C_3(t) &= 3cL \left[-\frac{1}{\gamma(t)} + 1 \right], \\
 C_4(t) &= c \left[\frac{1}{\gamma(t)} - 1 \right], \\
 C_4(t) &= c \left[\frac{1}{\gamma(t)} - 1 \right], \\
 a(t) &= L[1 - \gamma(t)],
 \end{aligned} \tag{4.166}$$

missä

$$\gamma(t) = \sqrt{1 - \frac{d(t)}{cL^3a}}. \tag{4.167}$$

Siirtymän $d(t)$ aikaansaamiseen tarvittava painimen voima $P(t)$ ratkaistaan tasapainoehdosta (4.159), ja saadaan osittaisintegroinnin jälkeen

$$\frac{P(t)}{12cI} = G(0) \left[\frac{1}{\gamma(t)} - 1 \right] - \int_0^t \frac{dG(t-\tau)}{d\tau} \left[\frac{1}{\gamma(\tau)} - 1 \right] d\tau. \tag{4.168}$$

Luku 5

Viskoelastisten ainevakioiden kokeellinen määrittäminen

5.1 Virumiskoe

Virumiskokeessa koekappaleeseen aiheutetaan mahdollisimman nopeasti tasainen jännitys-tila, joka pidetään vakiona kokeen ajan. Dynaamiset vaikutukset jätetään huomioonotta-matta. Venymä mitataan ajan funktiona. Jos kuormitushetkeksi otetaan ajan hetki nolla, niin jännityksen aikahistoria on

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t), \quad (5.1)$$

missä $H(t)$ on Heavisiden yksikköaskelfunktio

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0, \\ 1, & \text{kun } t \geq 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Koska funktion $H(t)$ derivaatta ajan suhteen on Dirac'in δ -funktio, joka toteuttaa ehdon

$$\int_a^b f(t)\delta(t-c) dt = f(c), \quad a \leq c \leq b, \quad (5.3)$$

saadaan sijoittamalla jännityksen aikahistoria konstitutiiviseen yhtälöön

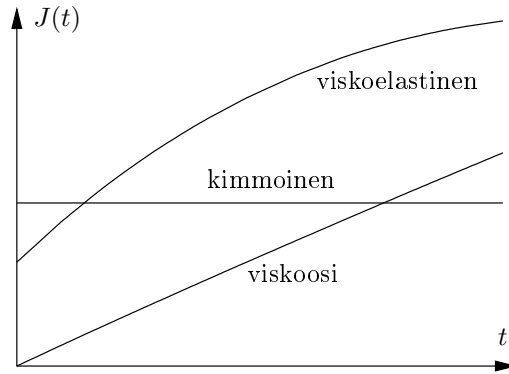
$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau) d\tau, \quad (5.4)$$

missä $J(t)$ on virumisfunktio, kaava

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t). \quad (5.5)$$

Virumisfunktio saadaan siten jakamalla kokeesta mitattu venymä jännityksen vakioarvolla σ_0 .

Kuvassa 5.1 on esitetty kimmoisen aineen, viskoosin nesteen ja viskoelastisen aineen virumisfunktiot kaavamaisesti.



Kuva 5.1 Virumisfunktiot kimmoiselle aineelle, viskoosille nesteelle ja viskoelastiselle aineelle.

Kimmoisen aineen venymä saa heti lopullisen arvonsa, ja $J(t) = \frac{1}{E}$ (jos kuormituksen dynaamiset vaikutukset ovat merkityksettömän pieniä). Viskoosi neste virtaa vakionopeudella, ja viruma kasvaa verrannollisena aikaan t , jolloin $J(t) = \frac{t}{\eta}$, η on viskoosisuuskerroin. Viskoelastisen aineen viruma ja virumisfunktio $J(t)$ kasvaa alussa kuorman asettamisen jälkeen nopeasti sisältäen mahdollisesti äkillisen kimmoisen venymän lisäyksen. Ajan mukana virumisfunktiota esittävän käyrän tangentin kulmakerroin pienenee ja lähestyy nollaa tai äärellistä arvoa, esim. erityyppisille muoveille.

Virumiskokeesta määritettyä käyrää voidaan approksimoida sopivalla funktiolla. Esimerkiksi lineaarista standardiainetta vastaten valitaan funktio

$$\tilde{J}(t) = a_0 - a_1 e^{-\alpha t}, \quad (5.6)$$

missä a_0 , a_1 ja α ovat määritettäviä parametreja. Parametreille voidaan hakea mahdollisimman hyvin koetuloksiin sopivat arvot esim. pienimmän neliösumman keinolla minimoimalla lauseke

$$F = \sum_{i=1}^n [J(t_i) - \tilde{J}(t_i)]^2 = \min. \quad (5.7)$$

Minimin välttämättömät ehdot ovat

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0. \quad (5.8)$$

Minimointiehdoista seuraava yhtälöryhmä on epälineaarinen, ja se voidaan ratkaista esim. Newtonin menetelmällä. Vakioiden a_0 , a_1 ja α avulla saadaan määritettyä myös

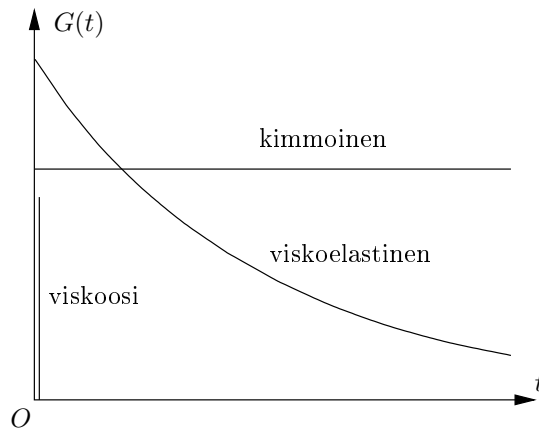
$$E(0) = \frac{1}{a_0 - a_1}, \quad E(\infty) = \frac{1}{a_0}, \quad \tau_1 = \frac{1}{\alpha}. \quad (5.9)$$

Vaihtoehtoisesti voidaan tehdä virumiskoe, jossa jännitys kasvaa vakionopeudella eli

$$\dot{\sigma}(t) = kH(t), \quad (5.10)$$

missä k on vakio. Kaavasta (5.4) seuraa tässä tapauksessa

$$\varepsilon(t) = k \int_{-\infty}^t J(t - \tau) d\tau, \quad (5.11)$$



Kuva 5.2 Relaksaatiofunktio kimmoiselle aineelle, viskoosille nesteelle ja viskoelastiselle aineelle.

ja

$$J(t) = \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{k}. \quad (5.12)$$

Kolmiulotteisen teorian ainevakiot lineaariselle isotrooppiselle aineelle voidaan määrittää kokeista, jotka ovat luonteeltaan yksiulotteisia. Määrittämällä liukumoduuli ja tilavuudenmuutosmoduuli saadaan funktiot $\mu(t)$ ja $\lambda(t) + \frac{2}{3}\mu(t)$.

5.2 Relaksaatiokoe

Relaksaatiokokeessa koekappaleelle annetaan äkillisesti hetkellä $t = 0$ venymä, joka pidetään vakiona ajan mukana eli

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t), \quad (5.13)$$

missä ε_0 vakio, ja muodonmuutoksen vakioarvon pitämiseen tarvittava jännitys on

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 G(t). \quad (5.14)$$

Kokeesta saadaan relaksaatiofunktio $G(t)$ mittaamalla jännitys $\sigma(t)$ ajan funktiona. $G(t)$ on siis jännitys, joka tarvitaan pitämään muodonmuutos yksikön suuruisena. Viskoelastisen aineen relaksaatioprosessin takia $G(t)$ on ajan mukana pienenevä funktio.

Kuvassa 5.2 on esitetty kaavamaisesti kimmoisen aineen, viskoosin nesteen ja viskoelastisen aineen relaksaatiofunktio. Kimmoisen aineen jännitys pysyy vakiona. Viskoosin nesteen relaksaatiofunktio on

$$G(t) = \eta \delta(t), \quad (5.15)$$

joten kokeessa tarvitaan hetkellisesti jännitys, mutta se relaksoituu välittömästi nolnaan.

Viskoelastisessa aineessa kimmoisen mekanismin estää välittömän relaksaation. Tietyt muovit käyttäytyvät pitkällä aikavälillä kimmoisesti, jolloin $G(t)$ lähenee äärellistä arvoa, kun aika lähenee ääretöntä. Sen sijaan joillain muoveilla relaksaatio jatkuu kunnes jännitys on palautunut nolnaan.

Samalla tavalla kuin edellä virumiskokeen yhteydessä voidaan tehdä vaihtoehtoinen relaksaatiokoe, jossa muodonmuutosnopeus on vakio eli

$$\dot{\varepsilon}(t) = \bar{k}H(t). \quad (5.16)$$

Tässä tapauksessa integraalimuotoisesta konstitutiivisesta yhtälöstä

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \tau)\dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (5.17)$$

seuraa

$$\sigma(t) = \bar{k} \int_0^t G(t - \tau) d\tau, \quad (5.18)$$

jolloin

$$G(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{\bar{k}}. \quad (5.19)$$

Vakiomuodonmuutosnopeudella tehtävä koe voi olla edullinen, vaikka kaavan (5.19) jännityksen aikaderivaatan kokeellinen määrittäminen tuo mukanaan vaikeuksia.

5.3 Dynaamiset kokeet

Dynaamisilla kokeilla voidaan määrittää kompleksimuuleja, ja niiden avulla saadaan sitten määritettyä virumis- ja relaksaatiomoduulit, kuten edellä on esitetty.

5.3.1 Pakkovärähtelykoe

Koekappale pakotetaan homogeeniseen värähtelyyn antamalla joko jännitykselle tai muodonmuutokselle ajan suhteen riippuvuus, $\propto e^{i\omega t}$, ja mittaamalla toinen suure. Viskoelastisen aineen tapauksessa jännitys ja venymä joutuvat värähtelyssä eri vaiheeseen. Antamalla esimerkiksi koekappaleelle ajan mukana muuttuva voima $P(t) = P_0 e^{i\omega t}$ sen jännitys ja muodonmuutos ovat

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}, \quad (5.20)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \varphi)}. \quad (5.21)$$

Sijoittamalla $\sigma(t)$ ja $\varepsilon(t)$ differentiaalimuotoiseen konstitutiiviseen yhtälöön tulee

$$\sigma(t) = P(i\omega)\sigma_0 e^{i\omega t} = Q(i\omega)\varepsilon_0 e^{i(\omega t - \varphi)}, \quad (5.22)$$

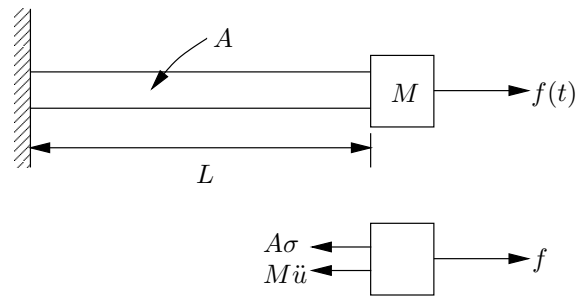
mistä ratkaistaan

$$G^*(i\omega) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\varphi}. \quad (5.23)$$

Kompleksinen relaksaatiomoduuli G^* jaetaan osiin

$$G_1(\omega) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \varphi, \quad G_2(\omega) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \varphi. \quad (5.24)$$

Parametrissa ω riippuva $\tan \varphi$ on nimeltään häviötangentti.



Kuva 5.3 Resonanssikoe vedetyllä koekappaleella.

Suorittamalla kokeita ω :n eri arvoilla voidaan määrittää funktio $\varphi(\omega)$ ω :n funktiona ja G_1 ja G_2 ω :n funktiona.

Vastaavalla tavalla voidaan määrittää

$$J^*(i\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} e^{i\varphi}. \quad (5.25)$$

ja

$$J_1(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \cos \varphi, \quad J_2(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \sin \varphi. \quad (5.26)$$

5.3.2 Resonanssimenetelmä

Kuvan 5.3 koekappaleen vasen pää on jäykästi kiinnitetty, ja oikeaan päähän on kiinnitetty massa M . Koekappaleen pituus on L ja sen poikkileikkauksen pinta-ala on A . Kuormana on ajan mukana taajuudella ω muuttuva harmoninen voima $f(t)$

$$f(t) = f_0 e^{(i\omega t + i\varphi)}, \quad (5.27)$$

missä φ on vaihekulma. Vetokoekappaleen kuormitetun pään siirtymä on

$$u(t) = u_0 e^{i\omega t}. \quad (5.28)$$

Jos koekappaleen massa on pieni massan M rinnalla, niin koesauva toimii viskoelastisena jousena ja massan M liikeyhtälö on

$$M\ddot{u}(t) + A\sigma(t) = f(t). \quad (5.29)$$

Koesauvan venymä on

$$\varepsilon(t) = \frac{u(t)}{L} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}, \quad (5.30)$$

missä

$$\varepsilon_0 = \frac{u_0}{L}. \quad (5.31)$$

Sijoittamalla siirtymän $u(t)$ kaava ja yhteys $\sigma_0 = G^*(i\omega)\varepsilon_0$, missä $G^*(i\omega) = G_1(\omega) + iG_2(\omega)$ on kompleksimoduuli, liikeyhtälöön saadaan yhteistä tekijää $e^{i\omega t}$ vaille yhtälö

$$-\omega^2 M u_0 + G^*(i\omega) A \frac{u_0}{L} = f_0 e^{i\theta}. \quad (5.32)$$

Kaavasta (5.32) ratkaistaan

$$u_0 = \frac{f_0 L}{\sqrt{(AG_1 - ML\omega^2)^2 + A^2 G_2^2}}. \quad (5.33)$$

Jättämällä moduuleiden $G_1(\omega)$ ja $G_2(\omega)$ paikallinen vaihtelu ω :n funktiona huomioonottamatta amplitudi u_0 saa maksimiarvon

$$(u_0)_{\max} = \frac{f_0 L}{AG_2}, \quad (5.34)$$

joka saavutetaan, kun ω saa resonanssiarvon

$$\omega_R = \sqrt{\frac{G_1 A}{ML}}. \quad (5.35)$$

Resonanssikokeessa vaihdellaan voiman f kulmataajuutta ω , kunnes siirtymän amplitudi u_0 saa maksimiarvon. Kun ω_R on saatu kokeellisesti selville, sen avulla määritetään G_1 kaavasta (5.35). Moduulin $G_2(\omega)$ määrittämiseksi suoritetaan mittaukset sellaisilla ω :n arvoilla ω_1 ja ω_2 , joilla siirtymän amplitudi on esim. puolet resonanssikohdan amplitudista, eli

$$(u_0) = \frac{f_0 L}{2AG_2}. \quad (5.36)$$

Kaavasta (5.33) seuraa tällöin

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_R} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}G_2}{G_1}} - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}G_2}{G_1}}, \quad (5.37)$$

jossa $\omega_1 > \omega_2$.

Jos $\frac{G_2}{G_1} \ll 1$, niin likimäärin

$$G_2 \approx \frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{3}\omega_R} G_1. \quad (5.38)$$

Edellä on otaksuttu, että G_1 ja G_2 ovat tarkasteluvälillä $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ riippumattomia ω :sta. Moduuleiden $G_1(\omega)$ ja $G_2(\omega)$ määrittämiseksi muilla ω :n arvoilla voidaan muuttaa massaa M tai koekappaleen dimensioita. Jos massa M on pieni, niin koisauvan hitausvoima täytyy ottaa huomioon systeemin liikeyhtälössä.

5.3.3 Vapaa värähtely

Kuvan 5.3 koekappaleen voima $f(t) \equiv 0$ vapaan värähtelyn tapauksessa. Viskoelastinen koisauva vaimentaa värähtelyä, ja massan M siirtymän lauseke on

$$u(t) = u_0 e^{(i\omega_v t - \beta t)}, \quad (5.39)$$

missä β on liikkeen vaimenemiseen liittyvä vakio. Massan liikeyhtälöstä seuraa vapaan värähtelyn tapauksessa

$$(i\omega_v - \beta)^2 = -\frac{G^*(i\omega_v)A}{ML}, \quad (5.40)$$

josta saadaan moduulin G^* reaali- ja imaginaariosat

$$G_1(\omega_v) = \frac{(\omega_v^2 - \beta^2)ML}{A}, \quad G_2(\omega_v) = \frac{2\omega_v\beta^2 ML}{A}. \quad (5.41)$$

Määrittelemällä logaritminen dekrementti

$$\Delta = \log \frac{u(t)}{u(t+T)} = \frac{2\beta\pi}{\omega_v}, \quad (5.42)$$

missä $T = \frac{2\pi}{\omega_v}$ on jakson pituus, saadaan lausekkeet

$$G_1(\omega_v) = \frac{ML\omega_v^2(1 - \Delta^2/4\pi^2)}{A}, \quad G_2(\omega_v) = \frac{ML\omega_v^2\Delta}{A\pi}. \quad (5.43)$$

Mittaamalla systeemin värähdysluku ω_v ja vaimeneminen Δ saadaan määritetyksi moduulit G_1 ja G_2 .

G_1 ja G_2 voidaan määrittää myös aallonenemiskokeesta. Nämä mittaukset voidaan suorittaa myös suurista koekappaleista.

Liite A

Laplace–muunnos

Funktion $f(t)$ Laplace–muunnos määritellään kaavalla

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (\text{A.1})$$

missä s on muunnosparametri. Jotta muunnos olisi olemassa, funktion $f(t)$ täytyy olla paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä välillä. Lisäksi funktion $f(t)$ täytyy toteuttaa ehto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} f(t) = 0, \quad (\text{A.2})$$

missä α on vakio, eli $f(t)$ ei saa kasvaa nopeammin kuin eksponenttifunktio, kun $t \rightarrow \infty$.

Jos funktio $f(t)$ on $(n - 1)$ kertaa jatkuvasti derivoituva, niin sen n :nnen derivaatan muunnos on

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} &= s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) \\ &\quad - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Funktioiden f ja g konvoluutio määritellään kaavalla

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau. \quad (\text{A.4})$$

Konvoluutiointegraalin Laplace–muunnos on

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau\right\} = \tilde{f}\tilde{g}. \quad (\text{A.5})$$

Koska

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{g * f\}, \text{ eli } \tilde{f}(s)\tilde{g}(s) = \tilde{g}(s)\tilde{f}(s), \quad (\text{A.6})$$

konvoluutiointegraali on vaihdannainen.

Käänteismuunnos

Jos $\tilde{f}(s)$ on kompleksimuuttujan s analyyttinen funktio lukuunottamatta singulaarisia pisteitä, niin funktion $\tilde{f}(s)$ käänteismuunnos on

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \tilde{f}(s) ds, \quad (\text{A.7})$$

missä $i = \sqrt{-1}$ on imaginaariyksikkö ja viiva $\Re(s) = \gamma$ on funktion $\tilde{f}(s)$ kaikkien singulaaristen pisteiden oikealla puolella. Käänteismuunnoskaavassa integroidaan imaginaariakselin suuntaista viivaa pitkin.

Jos funktion $f(t)$ muunnos on esimerkiksi muotoa

$$\tilde{f}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad (\text{A.8})$$

ja funktion $\tilde{f}(s)$ yksittäiset singulaarisuudet aiheutuvat nimittäjän $Q(s)$ yksinkertaisista nollakohdista $s = a_j$, niin funktion $\tilde{f}(s)e^{st}$ ns. residyt singulaarisissa pisteissä $s = a_j$ ovat

$$\frac{P(a_j)e^{a_j t}}{\lim_{s \rightarrow a_j} \left[\frac{Q(s)}{(s - a_j)} \right]}. \quad (\text{A.9})$$

Kaavan (A.7) viivaintegraali suljetaan ympyränkaarella, jonka säde $R \rightarrow \infty$. Suljetua käyrää pitkin lasketun integraalin arvo on $2\pi i$ kertaa käyrän sisään jäävien residyjen summa. Jos $|\tilde{f}(s)| < cR^{-k}$ kaarella $s = Re^{i\theta}$, missä $k > 0$ ja c ovat vakioita, niin ympyränkaarta pitkin laskettu integraali häviää ja suljettu viivaintegraali on sama kuin kaavan (A.7) integraali. Ns. residylaskennan teorian perusteella integraalin (A.7) arvo on

$$f(t) = \sum_{j=1}^N \frac{P(a_j)e^{a_j t}}{\lim_{s \rightarrow a_j} \left[\frac{Q(s)}{(s - a_j)} \right]}, \quad (\text{A.10})$$

missä N on yksinkertaisten napojen (singulaaristen pisteiden) lukumäärä. Kun $P(s)$ ja $Q(s)$ ovat polynomeja, voidaan murtolausekkeelle (A.9) tehdä osamurtokehitemä ja johtaa käänteismuunnos suoraan sen perusteella.

Alkuarvoteoreema

Funktion $f(t)$ alkuarvo $f(0)$ voidaan johtaa muunnoksesta $\tilde{f}(s)$ kaavalla

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{f}(s). \quad (\text{A.11})$$

Kaavan perusteella voidaan johtaa funktiolle $f(t)$ arvoja pienillä t :n arvoilla kehittämällä $\tilde{f}(s)$ potenssisarjaksi.

Vastaavasti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{f}(s). \quad (\text{A.12})$$

Siirtolause

Jos funktion $\tilde{f}(s)$ käänteismuunnos on $f(t)$, niin funktion $e^{as}\tilde{f}(s)$ käänteismuunnos on

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\tilde{f}(s)\} = f(t-a)H(t-a), \quad (\text{A.13})$$

missä $H(t-a)$ on Heavisiden yksikköaskelfunktio

$$H(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < a, \\ 1, & \text{kun } t > a. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Merkitsemällä

$$g(t) = f(t-a)H(t-a), \quad (\text{A.15})$$

saadaan

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt = e^{-as}\tilde{f}(s). \quad (\text{A.16})$$

Askelfunktio ja δ -funktio

Heavisiden funktio tai yksikköaskelfunktio määritellään kaavalla

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0, \\ 1, & \text{kun } t > 0. \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Dirac'in δ -funktio $\delta(t-a)$ määritellään kaavoilla

$$\begin{aligned} \delta(t-a) &= 0, \quad \text{kun } t \neq a, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) dt &= 1. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Jos $f(t)$ on jatkuva funktio, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a) dt = f(a). \quad (\text{A.19})$$

Yksikköaskelfunktio voidaan määritellä jatkuvan funktion $H_{\epsilon}(t)$ raja-arvona

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_{\epsilon}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & \text{kun } t \leq 0, \\ \frac{t}{\epsilon}, & \text{kun } 0 \leq t \leq \epsilon, \\ 1, & \text{kun } t > \epsilon. \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

δ -funktion ja funktion $H_{\epsilon}(t)$ ominaisuuksien perusteella voidaan muodollisesti johtaa kaava

$$\frac{dH(t)}{dt} = \delta(t), \quad (\text{A.21})$$

eli Heavisiden funktion derivaatta on δ -funktio.

Laplace'n muunnoksen sääntöjä ja kaavoja

Taulukko A.1 Laplacen muunnoksen sääntöjä

df/dt	$s\tilde{f}(s) - f(0)$
d^2f/dt^2	$s[s\tilde{f}(s) - f(0)] - f'(0)$
$\int_0^t f dt$	\tilde{f}/s
tf	$-d\tilde{f}/ds$
$f(t-T)$	$\tilde{f}e^{-sT}, T > 0$
$e^{at}f$	$\tilde{f}(s-a)$
$f(kt)$	$k^{-1}\tilde{f}(s/k)$
$g * f$	$\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)$

Taulukko A.2 Laplacen muunnoksen kaavoja

$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
δ	1
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$t^n e^{at}$	$n!/(s-a)^{n+1}$
$\cos \omega t$	$s/(s^2 + \omega^2)$
$\sin \omega t$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$