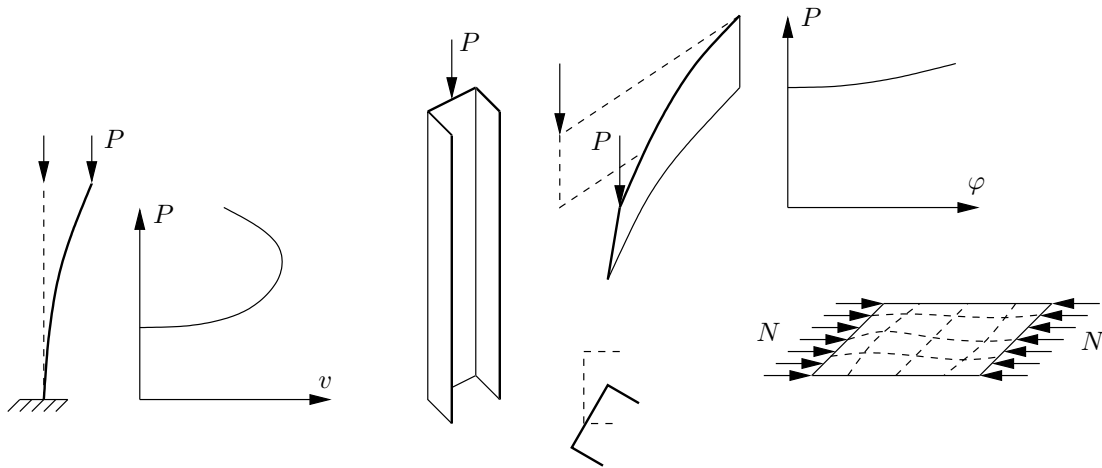


Rakenteiden stabiilisuusteoria

luentomoniste

Markku Tuomala



Sisältö

1	Johdanto	1
1.1	Peruskäsitteitä	1
1.2	Yksinkertaiset rakennemallit	2
1.2.1	Jousella tuettu pilari	3
1.2.2	Kahden vapausasteen malli.	8
1.2.3	Jousella tuetun pilarin äärellinen kiertymä	10
1.2.4	Ristikön läpilyöntimalli	12
2	Tasapainopolut, jälkikriittinen tila ja muotovirheet	17
2.1	Yhden vapausasteen systeemi, stabiili jälkikriittinen tila	17
2.1.1	Muotovirheen vaikutus	19
2.2	Yhden vapausasteen systeemi, epästabiili jälkikriittinen tila	20
2.2.1	Muotovirheen vaikutus	22
2.3	Yhden vapausasteen systeemi, epäsymmetrinen jälkikriittinen tila	24
2.3.1	Muotovirheen vaikutus	26
3	Puristettu ja taivutettu sauva	29
3.1	Puristetun ja taivutetun sauvan differentiaaliyhtälö	29
3.2	Tasapainomenetelmä	30
3.3	Epäkeskisyysmenetelmä	34
3.4	Energiamenetelmä	35
3.4.1	Ritz'in menetelmä	39
3.4.2	Energiakriteerin muunnos	43
3.5	Differenssimenetelmä	45
3.5.1	Reunaehdot	46
3.6	Elementtimenetelmä	49
3.7	Peräkkäisten approksimaatioiden menetelmä	52
4	Leikkausmuodonmuutoksen vaikutus nurjahduskuormaan	55
4.1	Taipuman differentiaaliyhtälö	55
5	Kimmoton nurjahdus	63
5.1	Tangenttimoduuliteoria	63
5.2	Kaksoismoduuliteoria	65
5.3	Shanleyn teoria	69

5.3.1	Shanleyn malli	69
5.4	Puristussauvojen mitoitus	74
5.5	Puristetun sauvan plastinen mekanismi	76
5.6	Alkujännitysten vaikutus nurjahduskuormaan	79
5.6.1	I-poikkileikkaus	79
6	Kimmoisesti tuettu sauva	87
6.1	Jousilla tuettu sauva	89
6.2	Kimmoisella alustalla oleva palkki	93
6.2.1	Yleinen tapaus	96
7	Jatkuvan palkin ja kehän nurjahdus	105
7.1	Momenttimenetelmä	105
7.2	Siirtymämenetelmä	115
7.3	Elementtimenetelmä	119
8	Siirtymien vaikutus kehän plastiseen rajakuormaan	127
9	Vääntönurjahdus	133
9.1	Keskeisesti puristettu sauva	133
9.1.1	Kaksoissymmetrinen poikkileikkaus	137
9.1.2	Yleinen poikkileikkaus	138
9.1.3	Yhden akselin suhteen symmetrinen poikkileikkaus	141
9.2	Puristettu ja taivutettu sauva	142
9.2.1	Epäkeskeinen puristus	145
9.3	Vääntönurjahdustehtävän ratkaisu energiamenetelmällä	146
10	Kiepahdus	151
10.1	Kiepahduksen differentiaaliyhtälöt	151
10.2	Energiamenetelmä	163
10.2.1	Potentiaalienergia	165
10.2.2	Yhdistetty vääntönurjahdus ja kiepahdus	173
11	Laatan lommahdus	177
11.1	Laatan tasapainoyhtälö ja sen ratkaisu	177
11.1.1	Laatan reunaehdot	180
11.1.2	Tasaisesti puristetun laatan tasapainoyhtälön ratkaisuja erilaisille reunaehdoille	183
11.2	Lommahdustehtävän ratkaisu differenssimenetelmällä	186
11.3	Energiamenetelmä	190
11.4	Jäykistetyin laatan lommahdus	201
11.4.1	Yksi keskeinen jäykiste	201
11.4.2	Kaksi symmetristä jäykistettä	204
11.4.3	Jäykisteitä kolme tai useampia	204
11.4.4	Poikittaiset ja pitkittävät jäykisteet	206

12 Laatan epälineaarinen analyysi	211
13 Sylinterikuoren lommahdus	225
13.1 Sylinterikuoren pyörähdyssymmetrinen lommahdus	225
13.1.1 Energiamenetelmä	227
13.2 Laakean sylinterikuoren tasapainoyhtälöt	228
13.3 Sylinterikuoren potentiaalienergia	235
13.3.1 Potentiaalienergian toinen variaatio	237
13.4 Sylinterikuoren yleiset tasapainoehdot	241
13.4.1 Paine kuorman potentiaalin toinen variaatio	244
13.5 Sylinterikuoren lommahdus erilaisissa kuormitustapauksissa	246
13.6 Sylinterikuoren ylikriittinen tila	256

Luku 1

Johdanto

1.1 Peruskäsitteitä

Stabiilisuusteoriassa selvitetään, milloin liiketila tai tasapainotila on stabiili eli vakaa tai labiili eli epävakaa. Rakennesuunnittelussa tutkitaan erityisesti hoikkien rakenteiden staattista stabiiliutta. Lento- ja avaruustekniikassa ja säätötekniikassa tarkastellaan liikkeen tai systeemin dynaamista stabiiliutta. Seuraavassa esityksessä keskitytään hoikkien rakenteiden staattisen stabiiliuden analysointiin.

Rakenteen tyypistä ja stabiiliuden menetystavasta riippuen määritellään ilmiöt:

- nurjahdus,
- kiepahdus,
- vääntönurjahdus,
- lommahdus,

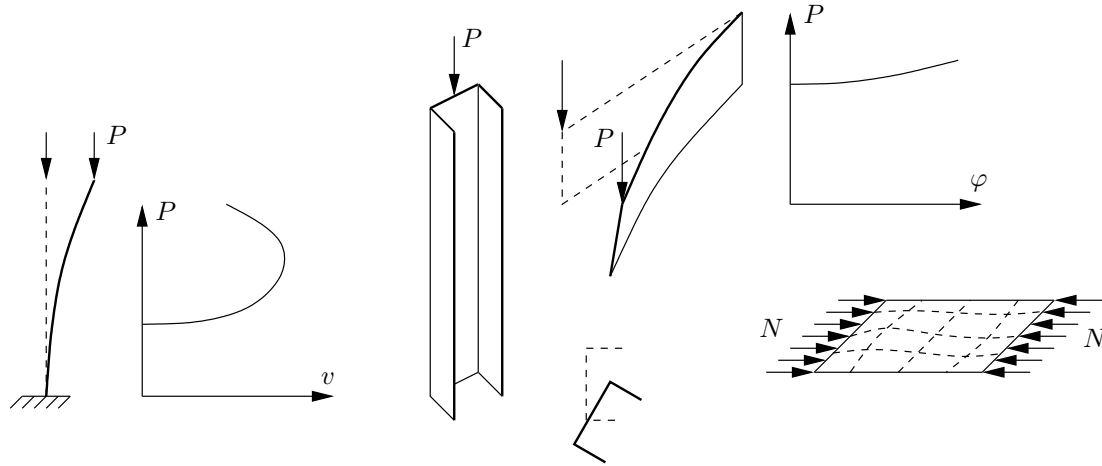
kuva 1.1.

Tasapainotilan luonne voi olla stabiili, labiili (epästabiili) tai indifferentti. Asiaa on havainnollistettu kuvan 1.2 pallon ja alustan muodostaman systeemin avulla. Kuvan 1.2a tapauksessa tasapainotila on stabiili, ja pallo palaa siirtyneestä asemasta kupin pohjalle. Kuvan 1.2b tapauksessa tasapainotila on puolestaan labiili, ja pienikin häiriö aiheuttaa pallon äärellisen poikkeaman tasapainotilasta. Kuvan 1.2c pallon tasapainoasema on indifferentti, eli se on välinpitämätön pienelle häiriölle.

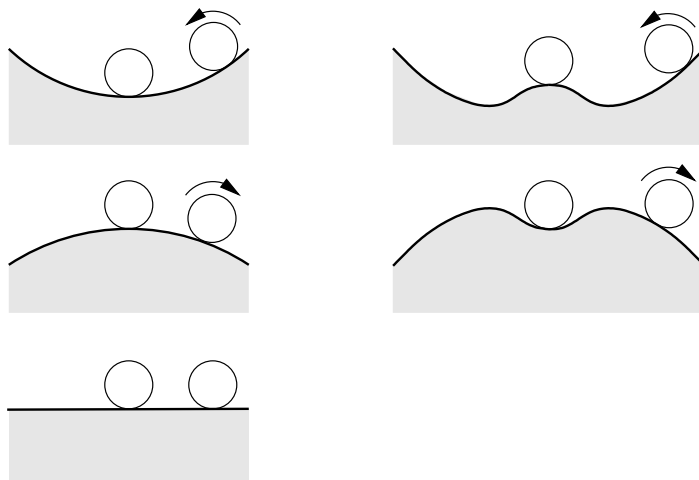
Stabiilisuusteoriassa käytetään usein seuraavia käsitteitä:

- Perustila on järjestelmän alkuperäinen tasapainotila.
- Häiritty tila on järjestelmän tila häiriön aiheuttaman muutoksen jälkeen.
- Häiriö on ulkoinen impulssi, kuorman muutos tai rakenteen epätäydellisyys (muotovirhe).
- Poikkeama on on häirityn tilan ja perustilan ero.

Rakenteen stabiiliuden tutkimiseen voidaan käyttää mm. seuraavia menetelmiä:



Kuva 1.1 Stabiiliudenmenetysilmiöitä.

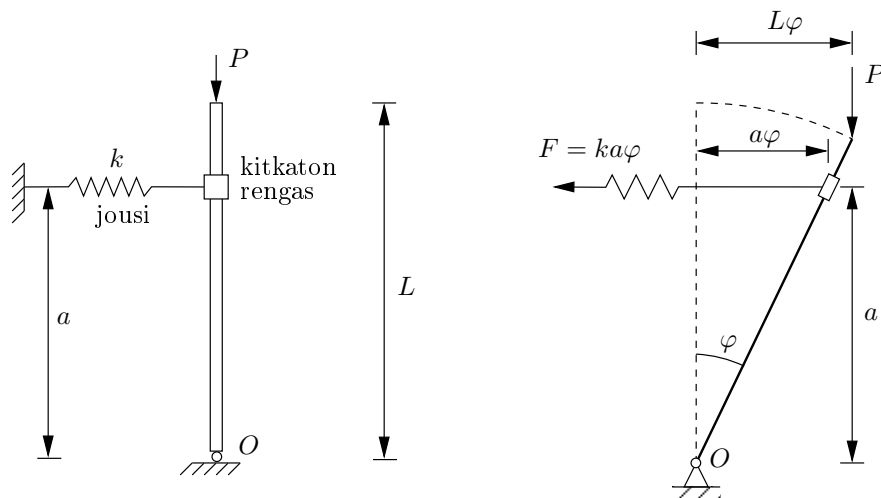


Kuva 1.2 Tasapainotilan luonne.

- tasapainomenetelmä,
- energiamenetelmä,
- epäkeskisyysmenetelmä,
- kineettinen menetelmä.

1.2 Yksinkertaiset rakennemallit

Tutkitaan seuraavassa rakenteiden stabiiliuden analysoinnin menetelmiä yksinkertaisten rakennemallien avulla.



Kuva 1.3 Jousella tuettu pilari.

1.2.1 Jousella tuettu pilari

Tutkitaan kuvan 1.3 jousella tuetun äärettömän jäykän sauvan stabiiliutta tasapainomenetelmällä, energiamenetelmällä, epäkeskisyysmenetelmällä ja kineettisellä menetelmällä. Jousi on kiinnitetty sauvaan kitkattoman renkaan avulla.

Tasapainomenetelmä

Tasapainomenetelmässä muodostetaan momentin tasapainoyhtälö tukipisteen O suhteen ja saadaan

$$P\varphi L - ka\varphi a = 0, \quad (1.1)$$

mistä seuraa homogeeninen yhtälö

$$(PL - ka^2)\varphi = 0. \quad (1.2)$$

Kysymyksessä on ominaisarvotehtävä. Homogeenisella yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu (eri kuin nollaratkaisu), jos kerroinmatriisin determinantti on nolla. Nyt yhtälösystemissä on vain yksi yhtälö, ja determinantin nollaehdosta seuraa ratkaisu

$$PL = ka^2 \quad (1.3)$$

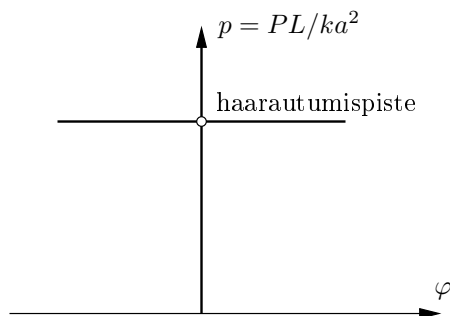
eli

$$P = \frac{ka^2}{L}. \quad (1.4)$$

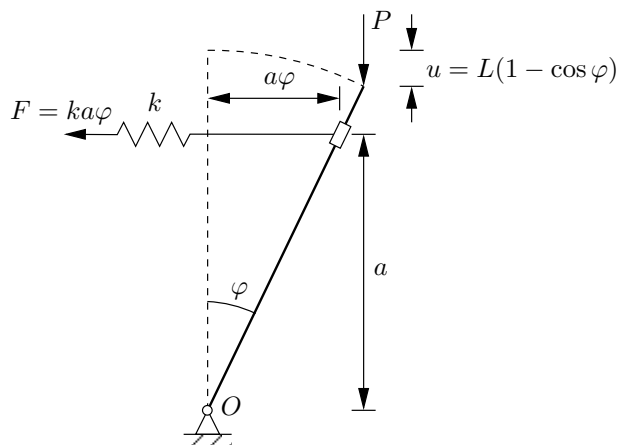
Energiamenetelmä

Energiamenetelmässä muodostetaan ensin rakenteen kokonaispotentiaalienergia

$$\Pi = U + V, \quad (1.5)$$



Kuva 1.4 Tasapainopolut ja haarautumispiste.



Kuva 1.5 Siirtynyt tila.

missä

$$U = \frac{1}{2} k(a\varphi)^2 \quad (1.6)$$

on muodonmuutosenergia ja

$$V = -Pu = -PL(1 - \cos \varphi) \quad (1.7)$$

on ulkoisen kuorman potentiaali. Pienen kulman φ tapauksessa on likimäärin

$$V = -\frac{1}{2} PL\varphi^2. \quad (1.8)$$

Tasapainotilassa potentiaalienergia saa stationaarisen arvon, jonka välttämätön ehto on, että

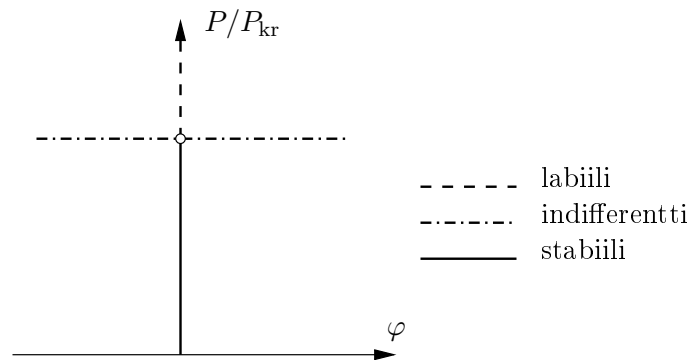
$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = ka^2\varphi - PL\varphi = 0, \quad (1.9)$$

eli

$$(ka^2 - PL)\varphi = 0. \quad (1.10)$$

Tasapainotilan laatu saadaan selville tutkimalla potentiaalifunktion toista derivaattaa tai yleisemmin toista variaatiota. Yhden vapausasteen systeemin tapauksessa toinen variaatio on

$$\delta^2\Pi = \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}(d\varphi)^2, \quad (1.11)$$



Kuva 1.6 Stabiilit, labiilit ja indifferentit pisteet tasapainopoluilla.

ja useamman vapausasteen systeemin potentiaalienergian toinen variaatio on

$$\delta^2\Pi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j} \delta\varphi_i\delta\varphi_j. \quad (1.12)$$

Jos $\delta^2\Pi$ on positiivisesti definiitti, niin tasapainotila on stabiili. Jos $\delta^2\Pi$ on negatiivisesti definiitti, niin tasapainotila on labiili. Tapauksessa $\delta^2\Pi = 0$ tasapainotila on indifferentti.

Esimerkin tapauksessa saadaan

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = ka^2 - PL > 0, \quad (1.13)$$

joten tasapainotila on stabiili, kun

$$P < \frac{ka^2}{L}, \quad (1.14)$$

ja rakenteen kriittinen kuorma P_{kr} on

$$P_{kr} = \frac{ka^2}{L}. \quad (1.15)$$

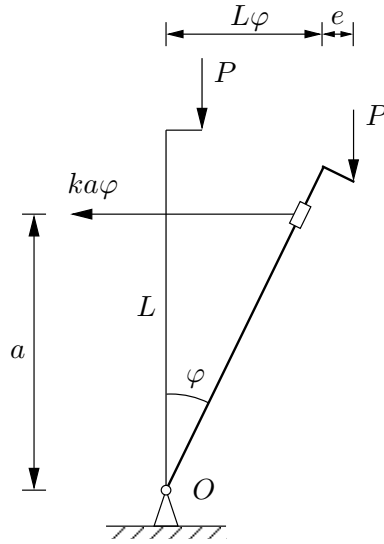
Varioimalla potentiaalienergian lausekkeessa kiertymää

$$\varphi = \theta + \varepsilon\hat{\varphi} \quad (1.16)$$

tulee

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi + \varepsilon\hat{\varphi}) &= \frac{1}{2}ka^2(\theta + \varepsilon\hat{\varphi})^2 - \frac{1}{2}PL(\theta + \varepsilon\hat{\varphi})^2 \\ &= \frac{1}{2}ka^2\theta^2 - \frac{1}{2}PL\theta^2 \\ &\quad + \varepsilon(ka^2\theta - PL\theta)\hat{\varphi} \\ &\quad + \frac{1}{2}\varepsilon^2(ka^2 - PL)\hat{\varphi}^2, \end{aligned} \quad (1.17)$$

jossa viimeistä edellinen termi on potentiaalienergian 1. variaatio ja viimeinen termi on 2. variaatio.



Kuva 1.7 Epäkeskinen kuorma.

Epäkeskisyysmenetelmä

Epäkeskisyysmenetelmässä tutkitaan epätäydellistä, muotovirheellistä rakennetta. Kuvan 1.7 esittämän rakenteen häirityssä tilassa muodostettu tasapainoyhtälö on

$$-P(L\varphi + e) + ka\varphi a = 0, \quad (1.18)$$

josta saadaan ratkaisu

$$\varphi = \frac{\frac{Pe}{L}}{\frac{ka^2}{L} - P}. \quad (1.19)$$

Kiertymä φ lähestyy ääretöntä, kun $P \rightarrow \frac{ka^2}{L}$, joten

$$P_{kr} = \frac{ka^2}{L}. \quad (1.20)$$

Kirjoitetaan ratkaisu muodossa

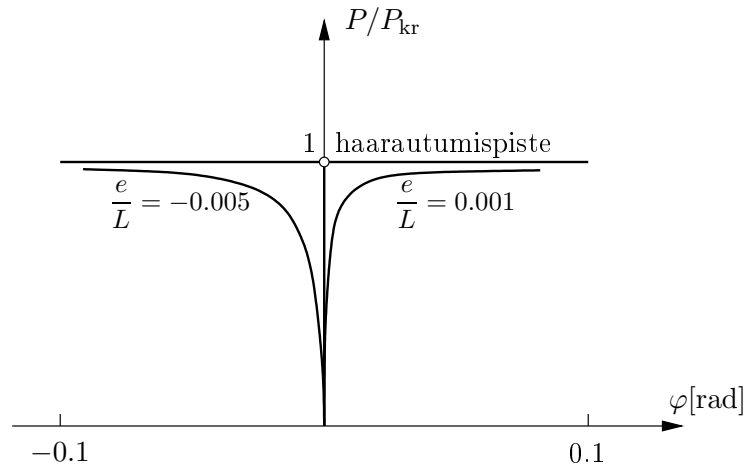
$$\frac{P}{P_{kr}} = \frac{\varphi}{\varphi + \frac{e}{L}}, \quad (1.21)$$

ja piirretään ratkaisuja eri epäkeskisyyden e arvoilla.

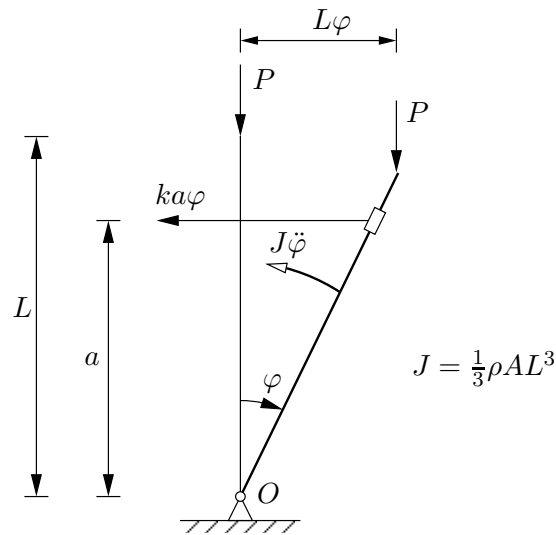
Kinemaattinen menetelmä

Kinemaattisessa menetelmässä tutkitaan rakenteen värähtelyjä perustilan suhteen. Kuor-
maparametrin arvo, jolla amplitudi kasvaa rajatta, on kriittinen. Menetelmä soveltuu myös epäkonservatiivisiin tapauksiin. Tarkasteltavan rakenteen liikeyhtälö on

$$J\ddot{\varphi} + ka\varphi \cdot a - PL\varphi = 0, \quad (1.22)$$



Kuva 1.8 Epäkeskisen kuorman ratkaisuja.



Kuva 1.9 Värähtelevä rakenne.

eli

$$\ddot{\varphi} + \lambda^2 \varphi = 0, \quad (1.23)$$

missä

$$\lambda^2 = \frac{ka^2 - PL}{J} \quad (1.24)$$

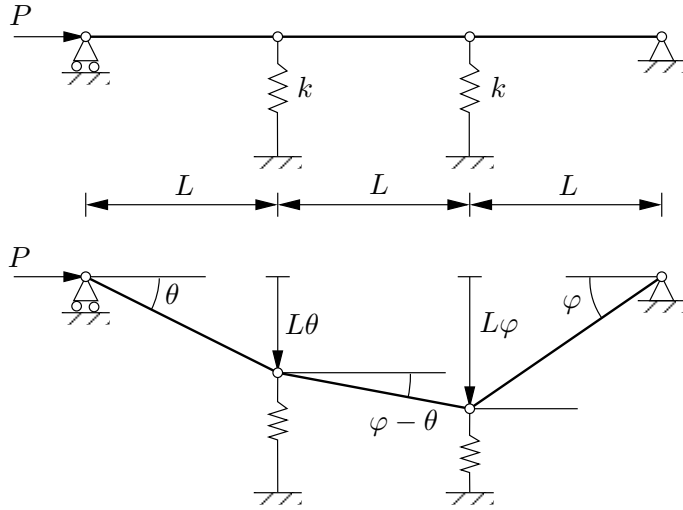
ja J on kiertohtausmomentti

$$J = \int_0^L x^2 \rho A dx = \frac{\rho A L^3}{3}, \quad (1.25)$$

missä ρ on tiheys, A on poikkileikkauksen pinta-ala ja L on sauvan pituus.

Liikkeyhtälön ratkaisu riippuu parametrin λ arvosta. Jos $\lambda^2 > 0$, niin ratkaisu on

$$\varphi = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t, \quad (1.26)$$



Kuva 1.10 Kahden vapausasteen systeemi.

ja värähtelyn amplitudi on äärellinen. Tapauksessa $\lambda^2 < 0$ ratkaisu on

$$\varphi = A \cosh \lambda t + B \sinh \lambda t. \quad (1.27)$$

Alkuehdoilla $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ saadaan ratkaisu

$$\varphi = \varphi_0 \cosh \lambda t. \quad (1.28)$$

Kulma φ menee jälkimmäisen ratkaisun mukaan äärettömäksi ajan mukana. Kriittinen kuorma saadaan siten ehdosta $\lambda^2 = 0$, ja se on

$$P_{kr} = \frac{ka^2}{L}. \quad (1.29)$$

1.2.2 Kahden vapausasteen malli.

Tutkitaan kahden vapausasteen systeemin stabiiliutta energiamenetelmällä.

Kuvan 1.10 systeemin potentiaalienergia on

$$\begin{aligned} \Pi &= U + V \\ &= \frac{1}{2}k(L\theta)^2 + \frac{1}{2}k(L\varphi)^2 \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$-PL[(1 - \cos \theta) + (1 - \cos \varphi) + (1 - \cos(\varphi - \theta))].$$

Kun kulmat φ ja θ ovat pieniä, niin

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad \cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \quad (1.31)$$

ja potentiaalienergian lausekkeeksi tulee

$$\Pi = \frac{1}{2}kL^2\theta^2 + \frac{1}{2}kL^2\varphi^2 - PL(\theta^2 + \varphi^2 - \theta\varphi). \quad (1.32)$$

Stationaarisuusehdosta $\delta\Pi = 0$ saadaan

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = 0, \quad (1.33)$$

joista seuraa kahden tuntemattoman ja kahden yhtälön homogeeninen yhtälöryhmä

$$(kL^2 - 2PL)\theta + PL\varphi = 0, \quad (1.34)$$

$$PL\theta + (kL^2 - 2PL)\varphi = 0. \quad (1.35)$$

Matriisimuodossa kirjoitettuna yhtälöt ovat

$$\begin{bmatrix} kL^2 - 2PL & PL \\ PL & kL^2 - 2PL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.36)$$

tai lyhyemmin merkittynä

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (1.37)$$

Ehdosta

$$\det \mathbf{K} = 0 \quad (1.38)$$

saadaan toisen asteen yhtälö, jonka juuret ovat $P_1 = \frac{1}{3}kL$ ja $P_2 = kL$.

Ominaisvektorit ratkaistaan yhtälöryhmästä (1.36) sijoittamalla P :n paikalle vuoronperään ominaisarvot P_1 ja P_2 . Ominaisarvoa P_1 vastaa ominaisvektori $\mathbf{q}_1$, joka ratkaistaan yhtälöryhmästä

$$kL^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

Tuloksena saadaan

$$\varphi_1 = -\theta_1. \quad (1.40)$$

Ominaisarvoa P_2 vastaava ominaisvektori $\mathbf{q}_2$ ratkaistaan yhtälöryhmästä

$$kL^2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.41)$$

josta saadaan

$$\varphi_2 = \theta_2. \quad (1.42)$$

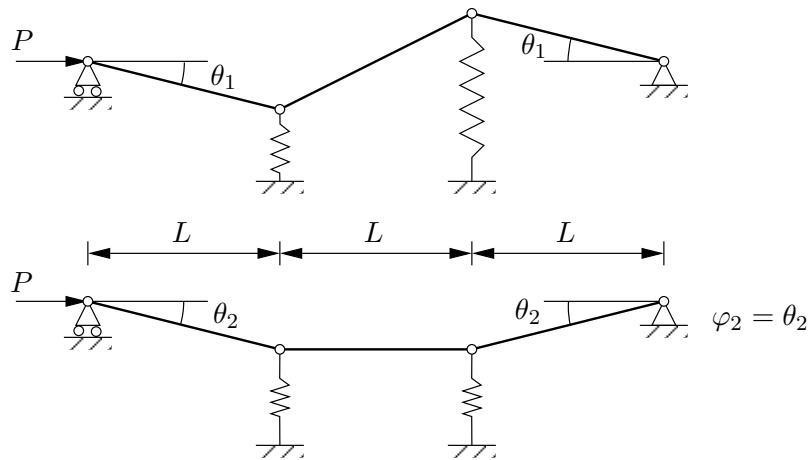
Ominaisvektorit on esitetty kuvassa 1.11.

Yleisessä tapauksessa, n -vapausasteiselle systeemille ominaisvektorit ratkaistaan yhtälöryhmistä

$$\mathbf{K}(P_i)\mathbf{q}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.43)$$

Tutkitaan tasapainotilojen laatua muodostamalla potentiaalfunktion Π toisen variaation

$$\delta^2\Pi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j} \delta\varphi_i\delta\varphi_j \quad (1.44)$$



Kuva 1.11 Kahden vapausasteen systeemin ominaisvektorit.

tai toisen neliömuodon kerroinmatriisi

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial \theta} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kL^2 - 2PL & PL \\ PL & kL^2 - 2PL \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

Kerroinmatriisi on positiivisesti definiitti, jos sen päädeterminantit ovat positiivisia, eli

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} > 0 \quad (1.46)$$

ja

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta \partial \varphi} \right)^2 > 0, \quad (1.47)$$

joista seuraavat ehdot

$$P < \frac{kL}{2} \quad (1.48)$$

ja

$$(kL^2 - 2PL)^2 - (PL)^2 > 0 \quad (1.49)$$

eli

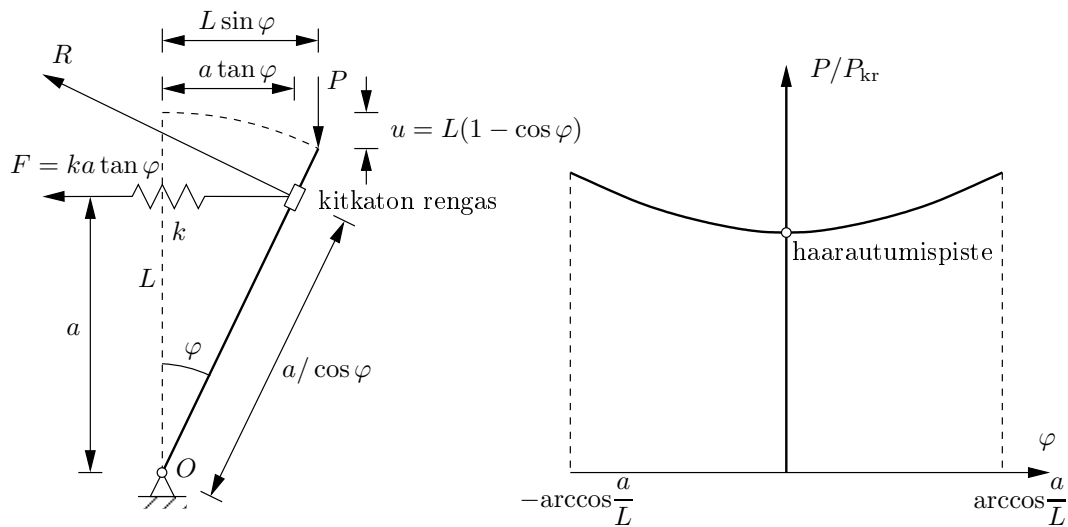
$$(kL - P)(\frac{1}{3}kL - P) > 0. \quad (1.50)$$

Ehdoista päätellään, että tasapainotila on stabiili, kun $P < \frac{1}{3}kL$, ja kriittinen kuorma on

$$P_{kr} = \frac{1}{3}kL. \quad (1.51)$$

1.2.3 Jousella tuetun pilarin äärellinen kiertymä

Tavanomaisissa rakenteissa stabiiliuden menetys tapahtuu yleensä pienten siirtymien jälkeen, mutta joskus on käytettävä tarkempaa, geometrian muutoksen huomioonottavaa teoriaa. Tutkitaan tätä asiaa kuvan 1.12 pilari-jousi -mallin avulla. Ratkaistaan tehtävä ensin tasapainomenetelmällä ja sitten energiamenetelmällä.



Kuva 1.12 Jousella tuetun pilarin äärellinen kiertymä.

Tasapainomenetelmä

Tasapainomenetelmässä muodostetaan tasapainoehto

$$PL \sin \varphi - \frac{a}{\cos \varphi} R = 0, \quad (1.52)$$

missä sauvaa vastaan kohtisuora tukireaktio on kitkattoman renkaan tapauksessa

$$R = \frac{ka \tan \varphi}{\cos \varphi}. \quad (1.53)$$

Sijoittamalla tukireaktio tasapainoehtoon tulee

$$PL \sin \varphi - \frac{a}{\cos \varphi} \frac{ka \tan \varphi}{\cos \varphi} = 0, \quad (1.54)$$

eli

$$(PL - \frac{ka^2}{\cos^3 \varphi}) \sin \varphi = 0. \quad (1.55)$$

Yhtälöllä on triviaaliratkaisu $\varphi = 0$ tai ratkaisu

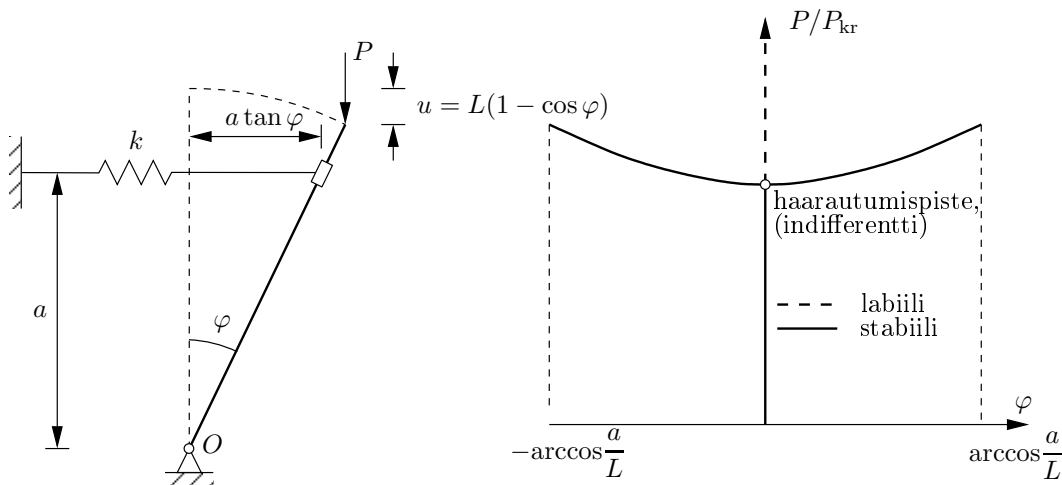
$$\frac{PL}{ka^2} = \frac{1}{\cos^3 \varphi}. \quad (1.56)$$

Ei-triviaali ratkaisu voi olla olemassa, kun $\frac{PL}{ka^2} > 1$.

Energiamenetelmä

Energiamenetelmän potentiaalfunktio on

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2}k(a \tan \varphi)^2 - PL(1 - \cos \varphi). \quad (1.57)$$



Kuva 1.13 Pilarin ratkaisu energiamenetelmällä.

Rakenteen tasapainoehto on

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad ka^2 \frac{\tan \varphi}{\cos^2 \varphi} - PL \sin \varphi = 0, \quad (1.58)$$

eli

$$\left(PL - \frac{ka^2}{\cos^3 \varphi} \right) \sin \varphi = 0, \quad (1.59)$$

kuten tasapainomenetelmässä. Ei-triviaali ratkaisu on

$$\frac{P}{P_{kr}} = \frac{1}{\cos^3 \varphi}, \quad (1.60)$$

missä P_{kr} on pilarin kriittinen kuorma pienen kiertymän φ tapauksessa.

Tasapainotilojen laadun selvittämiseksi muodostetaan potentiaalifunktion toinen derivaatta

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \left(\frac{ka^2}{\cos^3 \varphi} - PL \right) \cos \varphi + \frac{3ka^2}{\cos^4 \varphi} \sin^2 \varphi. \quad (1.61)$$

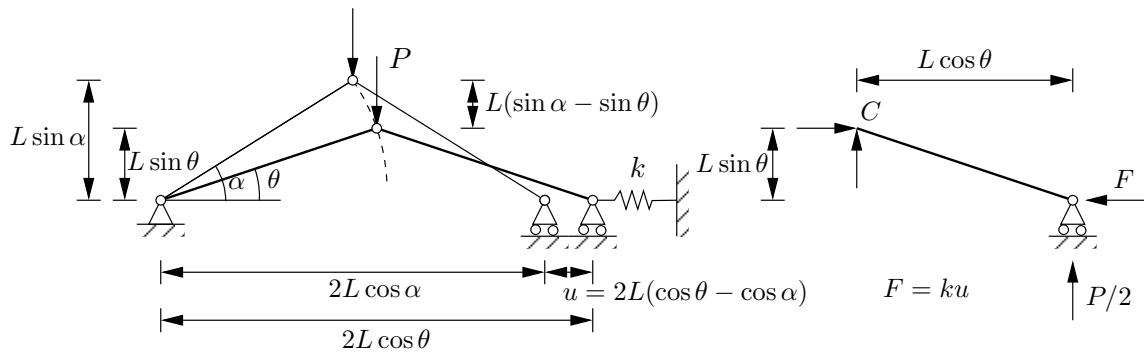
Tasapainopoluilla $\varphi \neq 0$ toinen derivaatta on positiivinen,

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \frac{3ka^2}{\cos^4 \varphi} \sin^2 \varphi > 0, \quad (1.62)$$

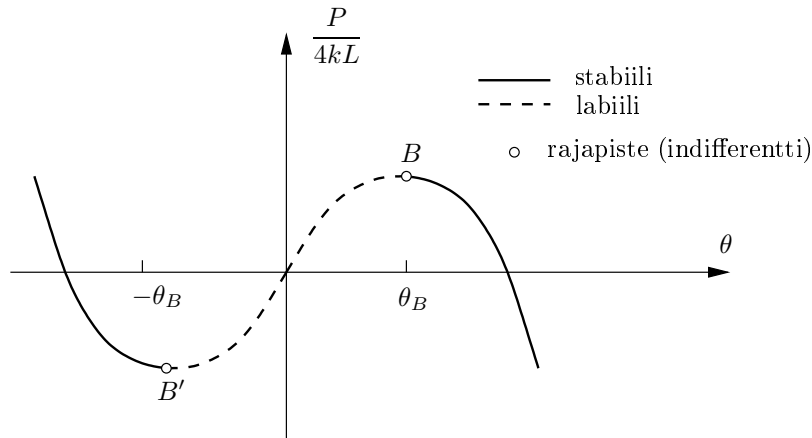
joten päätellään, että tasapainoasemat $\varphi \neq 0$ ovat stabiileja. Sensijaan tasapainoasemat $\varphi = 0$ ja $PL > ka^2$ ovat epästabiileja.

1.2.4 Ristikön läpilyöntimalli

Tarkastellaan kahdesta sauvasta koottua, jousella tuettua ristikköä, jota kuormittaa kuorma P , kuva 1.14. Ratkaistaan tehtävä ensin tasapainomenetelmällä ja sitten energiamenetelmällä.



Kuva 1.14 Ristikon läpilyönti.



Kuva 1.15 Jousella tuetun ristikon tasapainopolku.

Tasapainomenetelmä

Muodostetaan tasapainoehto $M_C = 0$, eli

$$\frac{P}{2}L \cos \theta - k2L(\cos \theta - \cos \alpha)L \sin \theta = 0, \quad (1.63)$$

josta ratkaistaan

$$\frac{P}{4kL} = \sin \theta - \tan \theta \cos \alpha, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \alpha < \frac{\pi}{2}. \quad (1.64)$$

Kuorma-siirtymä -käyrän pisteessä B , kuvassa 1.15 tangentti on vaakasuora ja

$$\frac{dP}{d\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta - \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \theta} = 0, \quad (1.65)$$

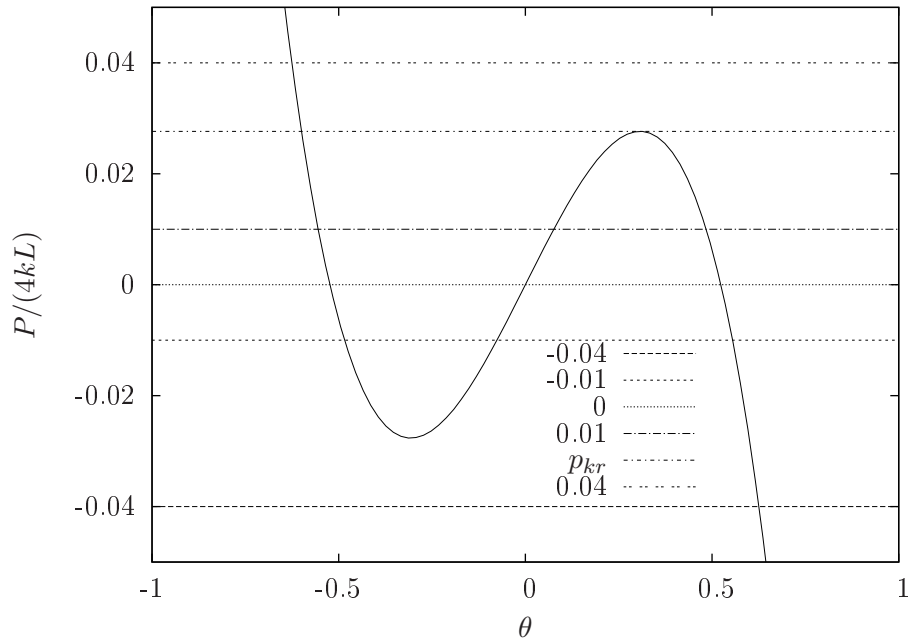
mistä ratkaistaan

$$\cos^3 \theta = \cos \alpha, \quad \text{ja} \quad \theta_B = \pm \arccos[(\cos \alpha)^{\frac{1}{3}}]. \quad (1.66)$$

Kriittinen kuorma on

$$\frac{P_{kr}}{4kL} = \sin \theta_B - \tan \theta_B \cos \alpha. \quad (1.67)$$

Esimerkiksi, kun $\alpha = 30^\circ$, $\theta_B = \pm 17.60^\circ$ tai $\theta_B \approx \pm 0.30719903$ rad ja $P/(4kL) \approx \pm 0.02765045$.



Kuva 1.16 Ristikon tasapainopolku, $p = P/(4kL)$, $\alpha = 30^\circ$, $\theta_B = \pm 0.30719903$ rad.

Energiamenetelmä

Systeemin kokonaispotentiaalienergia on

$$\begin{aligned}\Pi &= U + V \\ &= \frac{1}{2}k(2L)^2(\cos \theta - \cos \alpha)^2 \\ &\quad - PL(\sin \alpha - \sin \theta).\end{aligned}\tag{1.68}$$

Tasapainoehdosta $\frac{d\Pi}{d\theta} = 0$ seuraa yhtälö

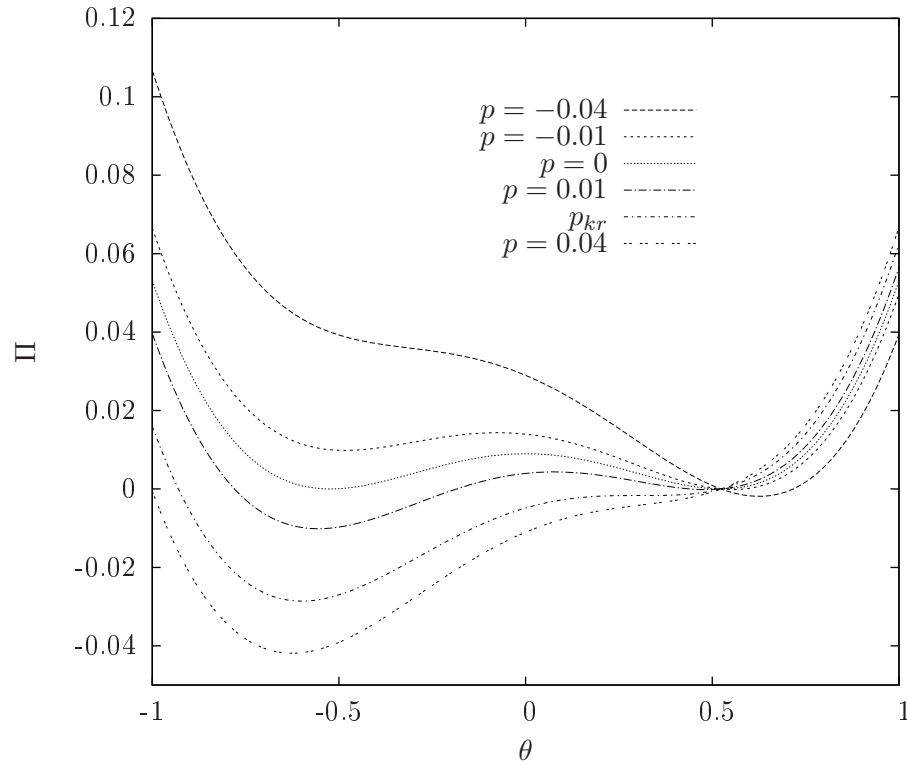
$$\frac{P}{4kL} = \sin \theta - \tan \theta \cos \alpha = \sin \theta \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\cos \theta}\right).\tag{1.69}$$

Tasapainon laadun tutkimista varten lasketaan toinen derivaatta

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} &= 4kL^2(\cos \theta - \cos \alpha)(-\cos \theta) + 4kL^2 \sin^2 \theta - PL \sin \theta \\ &= 4kL^2\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \theta} - \cos^2 \theta\right).\end{aligned}\tag{1.70}$$

Toinen derivaatta on nolla, eli

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta^2} = 0, \quad \text{kun } \theta = \pm \arccos[(\cos \alpha)^{\frac{1}{3}}] \equiv \pm\theta_B,\tag{1.71}$$



Kuva 1.17 Ristikon potentiaalienergia, $k = 0.25$, $L = 1$, $\alpha = 30^\circ$, $\theta_B = \pm 0.30719903$ rad.

ja tasapainoaseman laatu on indifferentti.

Toinen derivaatta on positiivinen eli

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} > 0, \quad \text{kun } \theta < -\theta_B \quad \text{ja } \theta > \theta_B, \quad (1.72)$$

ja tasapainotilan laatu on stabiili.

Toisen derivaatan negatiivisilla arvoilla, eli

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} < 0, \quad \text{kun } -\theta_B < \theta < \theta_B, \quad (1.73)$$

tasapainotila on labiili.

Kuvassa 1.16 on ristikon tasapainopolkuja eri kuormaparametrin $p = P/(4kL)$ arvoilla. Kriittinen kuorma p_{kr} on noin 0.02765045. Kuvassa 1.17 on esitetty vastaavat potentiaalienergian arvot.

Luku 2

Tasapainopolut, jälkikriittinen tila ja muotovirheet

2.1 Yhden vapausasteen systeemi, stabiili jälkikriittinen tila

Määritetään kuvan 2.1 jousella tuetun sauvan tasapainopolut otaksuen ensin, että rakenne on virheetön, eli siinä ei ole kuorman epäkeskisyyttä tai muuta alkuhäiriötä.

Rakenteen potentiaalienergia on

$$\Pi = \frac{1}{2}k\varphi^2 - PL(1 - \cos \varphi). \quad (2.1)$$

Sauvan tasapainoasema ja tasapainopolut voidaan määrittää asettamalla

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.2)$$

tai yleisemmin asettamalla potentiaalienergian Π ensimmäinen variaatio nolaksi eli

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \delta \varphi = 0. \quad (2.3)$$

Jos systeemillä on n riippumatonta vapausastetta, niin

$$\delta \Pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i = 0 \quad (2.4)$$

tasapainoasemassa.

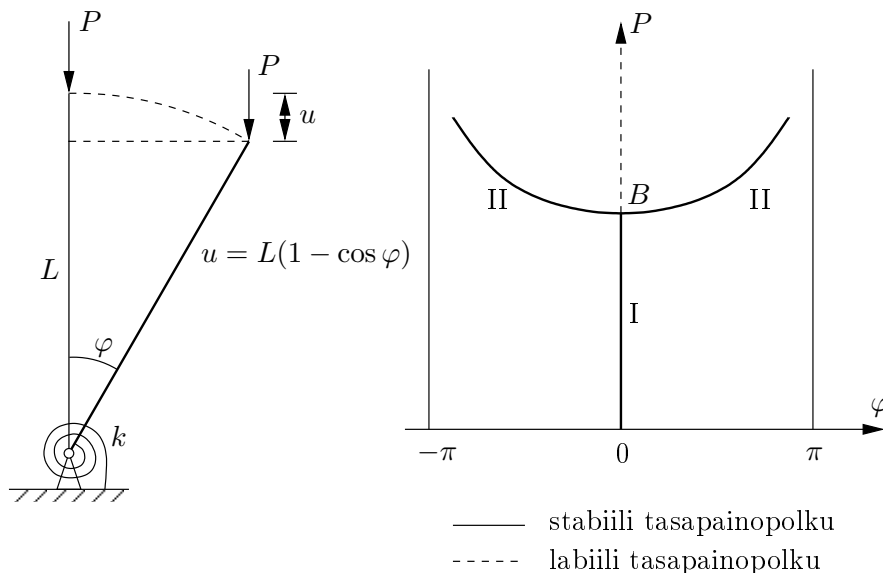
Kaavasta (2.3) seuraa esimerkin tapauksessa

$$\delta \Pi(\varphi) = (k\varphi - PL \sin \varphi) \delta \varphi = 0, \quad \forall \delta \varphi. \quad (2.5)$$

Koska $\delta \varphi$ on mielivaltainen variaatio, on sen kertoimen 1. variaation kaavassa oltava nolla, josta seuraa

$$P = \frac{k}{L} \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \quad (2.6)$$

Jos $\varphi = 0$, niin tasapainoehto (2.6) toteutuu kaikilla kuorman P arvoilla eli suoralla $\varphi = 0$. Kuvan 2.1 suora I on tasapainopolku. Kaavan (2.6) avulla määritetään toinen



Kuva 2.1 Kierrejousella tuettu pilari.

tasapainopolku, jota merkitään symbolilla II . Käyrä II leikkaa tasapainopolun I ($\varphi = 0$) pisteessä B , missä

$$P_{kr} = \frac{k}{L}. \quad (2.7)$$

Polku I on primaarinen eli fundamentaalinen polku, ja polku II on sekundaarinen tasapainopolku. Piste B kuvassa 2.1 on bifurkaatiopiste (haarautumispiste). Pistettä B vastaavaa kuorman arvoa nimitetään kriittiseksi kuormaksi P_{kr} .

Tarkan potentiaalifunktion lausekkeen (2.1) sijasta voidaan muodostaa likimääräinen lauseke korvaamalla trigonometrinen funktio $\cos \varphi$ sarjakehitelmällä

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + \dots \quad (2.8)$$

ja ottamalla huomioon sen kolme ensimmäistä termiä, jolloin saadaan

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}(k - PL)\varphi^2 + \frac{1}{24}PL\varphi^4. \quad (2.9)$$

Asettamalla $\delta\Pi = 0$ tulee

$$[(k - PL)\varphi + \frac{1}{6}PL\varphi^3]\delta\varphi = 0, \quad \forall \delta\varphi, \quad (2.10)$$

josta saadaan ratkaistua tasapainopolut

$$\varphi = 0, \quad \forall P, \quad (2.11)$$

ja

$$P = \frac{k}{L} \frac{1}{1 - \frac{1}{6}\varphi^2} \approx \frac{k}{L} \left(1 + \frac{1}{6}\varphi^2\right). \quad (2.12)$$

Kaavaan (2.12) päädytään myös sekundaarisen tasapainopolun kaavasta (2.6). Asettamalla $\varphi = 0$ saadaan likimääräisestä kaavasta (2.12) tarkka haarautumispiste $P_{kr} = \frac{k}{L}$.

Tutkitaan seuraavaksi tasapainotilojen laatua likimääräisen potentiaalin kaavan (2.9) avulla. Bifurkaatiopisteessä $P = \frac{k}{L}$, joten termin φ^2 kerroin kaavassa (2.9) on nolla. Jälkimmäisen, 4. asteen termin perusteella Π kaavassa (2.9) on positiivisesti definiitti, joten pisteen B tasapainotila on stabiili.

Tasapainopolkuihin I ja II liittyvien tilojen stabiiliutta tutkitaan Π :n toisen variaation tai nyt toisen derivaatan

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = k - PL + \frac{1}{2}PL\varphi^2 \quad (2.13)$$

avulla. Primaarisella polulla $\varphi = 0$

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = k - PL, \quad (2.14)$$

joten potentiaalienergian toinen variaatio on positiivinen, kun $P < \frac{k}{L}$, ja negatiivinen, kun $P > \frac{k}{L}$. Edellisessä tapauksessa tasapainotila on stabiili ja jälkimmäisessä epästabiili.

Sijoittamalla sekundaarisen polun II kaava (2.12) potentiaalienergian toisen derivaatan kaavaan tulee

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \frac{1}{3}k(\varphi^2 + \frac{1}{4}\varphi^4), \quad (2.15)$$

joka on positiivinen, ja polun II tasapainotilat ovat siten stabiileja, kuva 2.1. Tasapainopolku II on symmetrinen ja stabiili.

2.1.1 Muotovirheen vaikutus

Tarkastellaan edelleen samaa kierrejousen tukemaa ulokesauvaa kuin edellä, mutta tällä kertaa rakenteeseen otaksutaan muotovirhe: sauvan kaltevuuskulma alkutilassa on φ_0 .

Muotovirheellisen sauvan potentiaalienergian lauseke on

$$\Pi(\varphi; \varphi_0) = \frac{1}{2}k(\varphi - \varphi_0)^2 - PL(1 - \cos \varphi) + PL(1 - \cos \varphi_0). \quad (2.16)$$

Kehittämällä $\cos \varphi_0$ sarjaksi ja ottamalla mukaan termit 4. asteeseen asti saadaan

$$\Pi(\varphi; \varphi_0) = \frac{1}{2}k(\varphi^2 + \varphi_0^2 - 2\varphi\varphi_0) - PL(1 - \cos \varphi) + PL(\frac{1}{2}\varphi_0^2 - \frac{1}{24}\varphi_0^4). \quad (2.17)$$

Otaksutaan, että kulma φ_0 on pieni, jolloin termin $\varphi\varphi_0$ rinnalla φ_0 :n korkeampia potensseja sisältävät termit voidaan jättää pois. Pienen muotovirheen tapauksessa kaavasta (2.17) seuraa

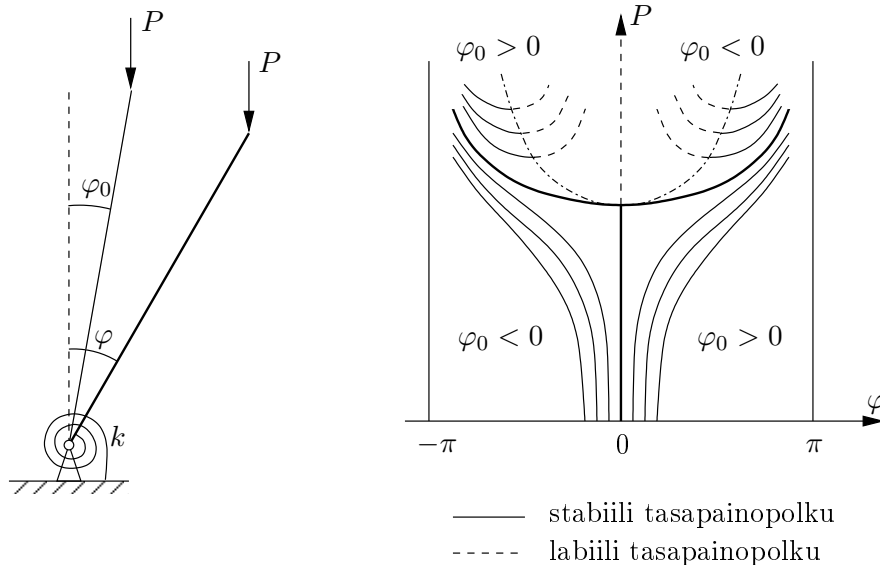
$$\Pi(\varphi; \varphi_0) = \frac{1}{2}k(\varphi^2 - 2\varphi\varphi_0) - PL(1 - \cos \varphi). \quad (2.18)$$

Tasapainotilat määritetään jälleen ehdosta $\delta\Pi = 0$ eli

$$[k(\varphi - \varphi_0) - PL \sin \varphi] \delta\varphi = 0, \quad \forall \delta\varphi, \quad (2.19)$$

josta seuraa tasapainopoluille kaava

$$P = \frac{k}{L} \frac{\varphi}{\sin \varphi} - \frac{k}{L} \frac{\varphi_0}{\sin \varphi}. \quad (2.20)$$



Kuva 2.2 Kierrejousella tuettu pilari; alkukiertymän vaikutus.

Kaavan (2.20) ensimmäinen termi on sama kuin virheettömän rakenteen tasapainoyhtälössä (2.12). Toinen termi on muotovirheestä aiheutuva korjaustermi. Kaava (2.20) on piirretty kuvaan 2.2.

Polut, jotka leikkaavat φ -akselin ovat luonnollisia; muut ovat epäluonnollisia (haamupolkuja). Jokaista arvoa φ_0 vastaa luonnollinen ja epäluonnollinen polku. Polut muodostavat käyräparvia, joissa on ääretön määrä käyriä, (kuten on φ_0 :n arvojakin). Kuvan 2.2 pistekatkoviivalla piirretty käyrä esittää kaavaa

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = k - PL \cos \varphi = 0. \quad (2.21)$$

(P, φ) -tasossa pistekatkoviivan sisäpuolella potentiaalienergian lausekkeen toinen derivaatta $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}$ on negatiivinen, ja tasapainotilat ovat epästabiileja. Vastaavasti pistekatkoviivan ulkopuolella toinen derivaatta on positiivinen, ja tasapainoasemat ovat stabiileja.

2.2 Yhden vapausasteen systeemi, epästabiili jälkikriittinen tila

Kuvan 2.3 vaakajousella tuetun äärettömän jäykän pilarin potentiaalienergian lauseke on

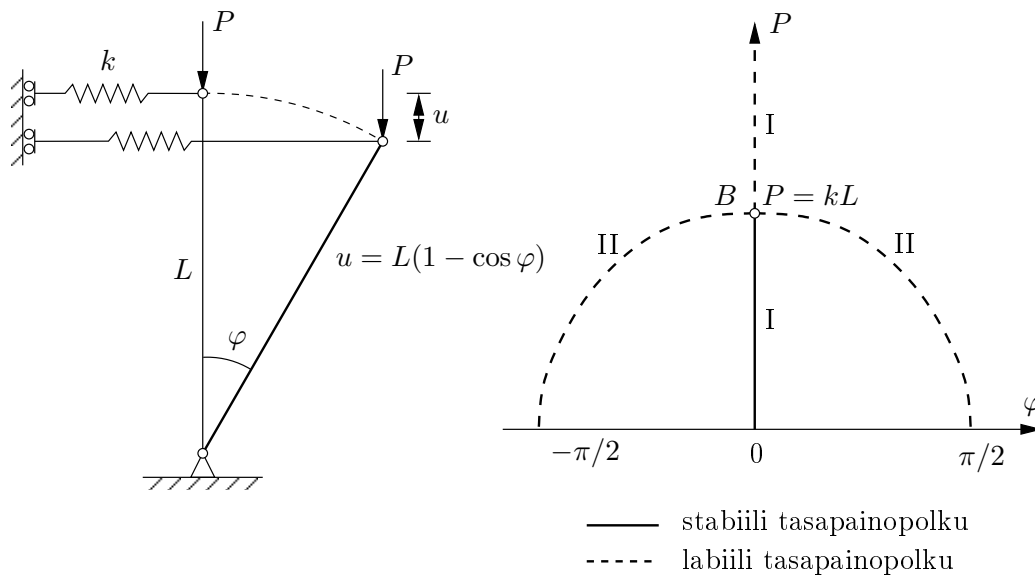
$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}kL^2 \sin^2 \varphi - PL(1 - \cos \varphi). \quad (2.22)$$

Tasapainotilassa $\frac{d\Pi}{d\varphi} = 0$, eli

$$L \sin \varphi (kL \cos \varphi - P) = 0, \quad (2.23)$$

jolla on ratkaisut (tasapainopolut)

$$\varphi = 0 \quad \text{ja} \quad P = kL \cos \varphi. \quad (2.24)$$



Kuva 2.3 Jousella tuettu pilari.

Haarautumispisteessä B

$$P \equiv P_{kr} = kL. \quad (2.25)$$

Tasapainotilojen laatu selvitetään Π :n toisen derivaatan

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = kL^2(2\cos^2\varphi - 1) - PL\cos\varphi \quad (2.26)$$

avulla. Polulla I $\varphi = 0$ ja Π :n toinen derivaatta on

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = L(kL - P), \quad (2.27)$$

joten primaarisella polulla tasapainotilat ovat stabiileja, kun $P < kL$ ja epästabiileja, kun $P > kL$. Sekundaarisella polulla II $P = kL \cos \varphi$ ja

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \frac{1}{k}[P^2 - (kL)^2], \quad (2.28)$$

joten $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} < 0$, koska $P < kL$. Polulla II tasapainotilat ovat epästabiileja.

Bifurkaatiopisteessä B $P = kL$, $\varphi = 0$ ja $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = 0$. Pisteessä B tasapainotilan laadun selvittämiseksi on tutkittava lisää potentiaalia $\Pi(\varphi)$. Merkitsemällä $\varphi = 2\theta$ ja käyttämällä trigonometrisia yhteyksiä $\sin^2 2\theta = 4\sin^2 \theta \cos^2 \theta$ ja $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ saadaan

$$\Pi(\theta) = 2kL^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \theta - 1), \quad (2.29)$$

joka on negatiivisesti definiitti. Pisteessä B tasapainotila on siten epästabiili. Esimerkin tapauksessa sekundaarinen tasapainopolku on symmetrinen ja epästabiili.

Korvaamalla sini- ja kosinifunktiot sarjakehitelmillä ja säilyttämällä termit φ :n neljännen potenssiin asti saadaan likimääräinen lauseke

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}kL^2(\varphi^2 - \frac{1}{3}\varphi^4) - PL(\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{24}\varphi^4). \quad (2.30)$$

Tasapainoehdosta $\delta\Pi = 0$ saadaan tasapainopolut

$$\varphi = 0 \quad \text{ja} \quad P = kL(1 - \frac{1}{2}\varphi^2). \quad (2.31)$$

Edellinen ratkaisu on sama kuin tarkan ratkaisun primaarisen polun kaava, ja jälkimmäinen ratkaisu on likimääräisen sekundaarisen polun kaava. Bifurkaatiopisteessä $P \equiv P_{kr} = kL$ ja $\varphi = 0$, kuten tarkassa ratkaisussa.

Likiratkaisun Π :n toinen derivaatta on

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = kL^2(1 - 2\varphi^2) - PL(1 - \frac{1}{2}\varphi^2). \quad (2.32)$$

Primaarisella polulla

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = L(kL - P) \quad (2.33)$$

kuten tarkassa ratkaisussa. Sekundaarisella polulla II

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = kL^2(-3 + \frac{4P}{kL}) - \frac{P^2}{k}. \quad (2.34)$$

Merkitään $P = \alpha kL$, $0 \leq \alpha < 1$. Tällöin

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = kL^2(-3 + 4\alpha - \alpha^2) \equiv kL^2 f(\alpha). \quad (2.35)$$

Koska funktio $f(\alpha) < 0$ tarkasteluvälillä, on $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} < 0$, ja sekundaarisen polun tasapainotilat ovat epästabiileja.

Bifurkaatiopisteessä B $P \equiv P_{kr} = kL$ ja $\alpha = 1$, joten $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = 0$ ja tasapainotilan laatu jää epäselväksi. Potentiaalifunktion kaavan perusteella bifurkaatiopisteen ympäristössä saadaan sijoittamalla $P = kL$ potentiaalin kaavaan (2.30)

$$\Pi(\varphi) = -\frac{1}{8}kL^2\varphi^4, \quad (2.36)$$

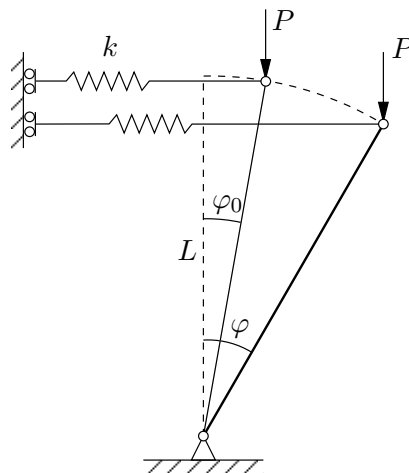
joten pisteen B tasapainotila on epästabiili.

2.2.1 Muotovirheen vaikutus

Otaksutaan, että sauva on kulman φ_0 verran kallellaan jo alkutilassa, ja tarkastellaan asiaa likimääräisen potentiaalienergian lausekkeen avulla.

Tarkka potentiaalin lauseke

$$\Pi(\varphi; \varphi_0) = \frac{1}{2}kL^2(\sin \varphi - \sin \varphi_0)^2 - PL(1 - \cos \varphi) + PL(1 - \cos \varphi_0) \quad (2.37)$$



Kuva 2.4 Jousella tuettu alkuaan kalteva pilari.

muuntuu korvaamalla trigonometriset funktiot sopivasti katkaistuilla sarjakehitelmillä muotoon

$$\Pi(\varphi; \varphi_0) = \frac{1}{2}kL^2(\varphi^2 - \frac{1}{3}\varphi^4 - 2\varphi\varphi_0) - PL(\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{24}\varphi^4) \quad (2.38)$$

(otaksuen, että φ_0 on pieni, jolloin termin $\varphi\varphi_0$ rinnalla φ_0 :n korkeampia potensseja sisältävät termit voidaan jättää pois).

Tasapainotilassa $\delta\Pi = 0$, ja likimääräisen potentiaalin kaavasta seuraa tasapainoyhtälö

$$P = kL \left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{\varphi_0}{\varphi} \right), \quad (2.39)$$

(missä kertaluokkaa $O(\varphi^4)$ ja $O(\varphi\varphi_0)$ olevat termit on jätetty pois termien φ^2 ja $\frac{\varphi}{\varphi_0}$ rinnalla).

Ratkaisut (2.39) on esitetty kuvassa 2.5. Jokaista arvoa φ_0 vastaa jälleen luonnollinen ja epäluonnollinen tasapainopolku. Tasapainopolkujen muodostamia käyräparvia tai perheitä on nyt neljä kappaletta: kaksi φ_0 :n positiivisilla arvoilla ja kaksi φ_0 :n negatiivisilla arvoilla.

Kun $\varphi_0 \rightarrow 0$, niin muotovirheellisen rakenteen tasapainopolut lähestyvät täydellisen rakenteen tasapainopolkuja. Luonnollisilla poluilla esimerkin tapauksessa kuormalla P on maksimiarvot P_m . Derivoimalla kaava (2.39) tulee

$$\frac{dP}{d\varphi} = kL(-\varphi + \frac{\varphi_0}{\varphi^2}) = 0, \quad (2.40)$$

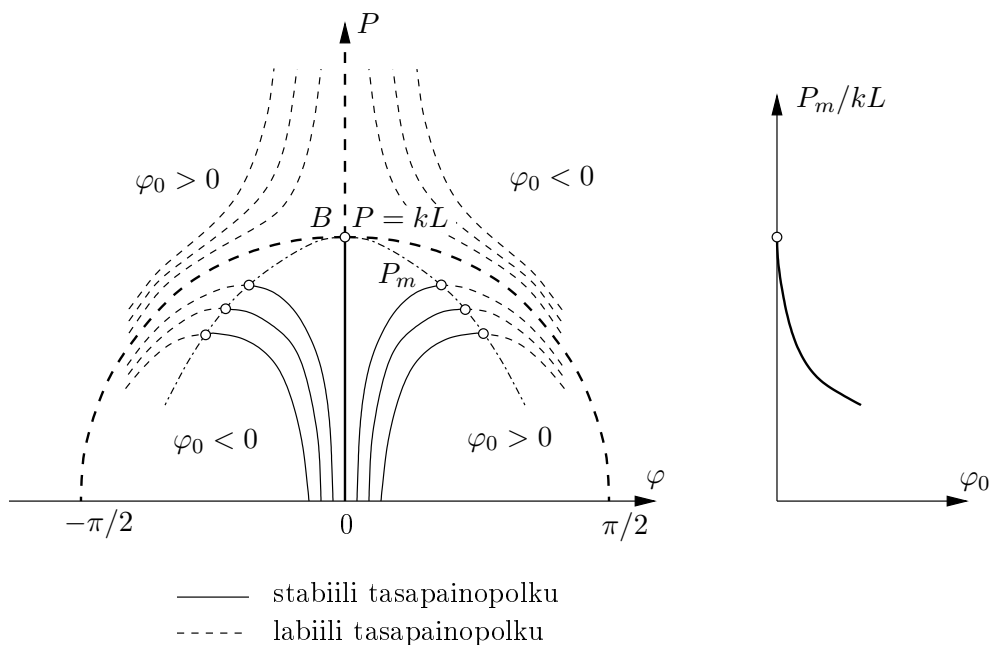
mistä seuraa yhteys

$$\varphi = \varphi_0^{\frac{1}{3}}. \quad (2.41)$$

Sijoittamalla (2.41) kaavaan (2.39) tulee

$$P_m = kL(1 - \frac{3}{2}\varphi_0^{\frac{2}{3}}), \quad (2.42)$$

eli P :n maksimiarvon riippuvuus alkuvirheestä φ_0 , kuva 2.5. Maksimiarvoa P_m vastaava piste on nimeltään rajapiste.



Kuva 2.5 Jousella tuettu pilari; alkukiertymän vaikutus.

Käyrän (2.42) ja kuvan 2.5 avulla päätellään, että pienikin φ_0 :n arvo aiheuttaa suuren (negatiivisen) muutoksen P_m :n arvossa ja esimerkin rakenne on hyvin herkkä muotovirheelle.

Kaava (2.42) voidaan johtaa vaihtoehtoisesti eliminoimalla φ tasapainoyhtälön (2.39) avulla kaavasta

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = kL(1 - 2\varphi^2) - PL(1 - \frac{1}{2}\varphi^2) = 0. \quad (2.43)$$

Kaava (2.43) on esitetty kuvassa 2.5 pistekatkoviivalla. Pistekatkoviivan alapuolella

$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} > 0$, ja tasapainotilat ovat stabiileja. Vastaavasti pistekatkoviivan yläpuolella $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} < 0$, ja tasapainotilat ovat epästabiileja.

2.3 Yhden vapausasteen systeemi, epäsymmetrinen jälkikriittinen tila

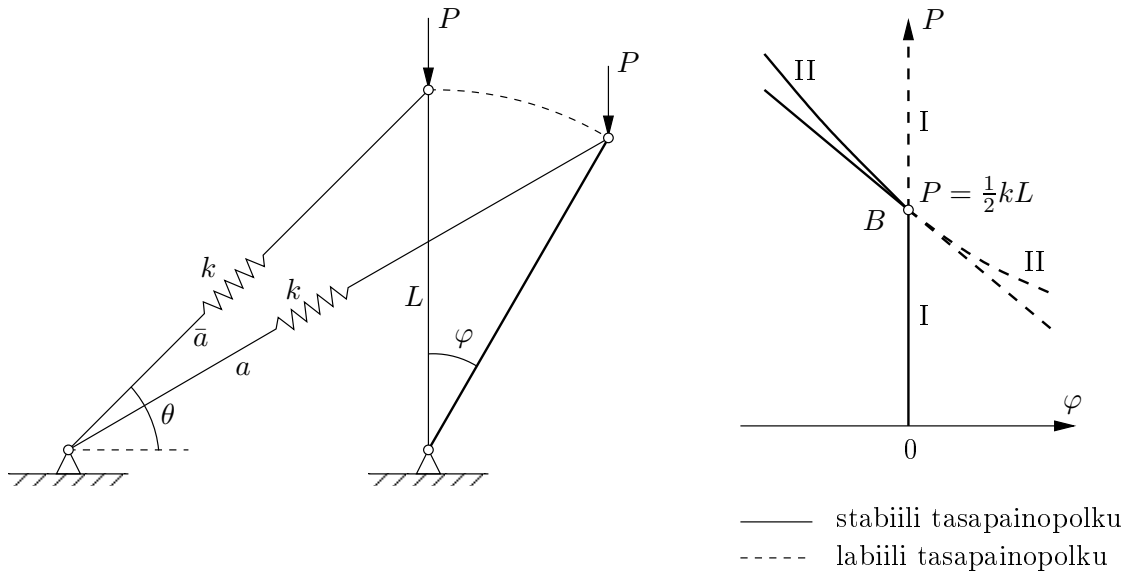
Tutkitaan jäykän ulokesauvan ja vinon jousen muodostamaa systeemiä. Jousen pituus on alkutilassa $\bar{a}$ ja deformatuneessa tilassa a . Systeemin potentiaalienergia on

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}k(a - \bar{a})^2 - PL(1 - \cos \varphi), \quad (2.44)$$

missä

$$\bar{a} = \frac{L}{\sin \theta}, \quad (2.45)$$

$$a = L\sqrt{1 + \frac{1}{\tan \theta} \left(\frac{1}{\tan \theta} + 2 \sin \varphi \right)}. \quad (2.46)$$



Kuva 2.6 Vinolla jousella tuettu pilari.

Kulmien φ ja θ funktiona

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}kL^2 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{\tan \theta} \left(\frac{1}{\tan \theta} + 2 \sin \varphi \right)} - \frac{1}{\sin \theta} \right]^2 - PL(1 - \cos \varphi). \quad (2.47)$$

Asetetaan seuraavassa $\theta = \frac{\pi}{4}$, ja kehitetään kulman φ trigonometriset funktiot sarjoiksi. Tällöin saadaan

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{4}kL^2(\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi^3 - \frac{1}{48}\varphi^4) - PL(\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{24}\varphi^4). \quad (2.48)$$

Ehdosta $\delta\Pi = 0$ seuraa

$$\varphi = 0 \quad \text{ja} \quad P = \frac{1}{2}kL(1 - \frac{3}{4}\varphi + \frac{1}{8}\varphi^2), \quad (2.49)$$

jotka esittävät jälleen primaarista ja sekundaarista tasapainopolkua, kuva 2.6.

Kun $\varphi = 0$, niin kaavasta (2.49) seuraa

$$P_{kr} = \frac{1}{2}kL. \quad (2.50)$$

Tutkitaan tasapainotilan laatua bifurkaatiopisteessä sijoittamalla kriittisen kuorman arvo (2.50) potentiaalin kaavaan (2.48) ja saadaan

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{8}kL^2(-\varphi^3 + \frac{1}{2}\varphi^4), \quad (2.51)$$

jossa kuubinen termi dominoi 4. asteen termiä. Bifurkaatiopisteen tasapainotila on siten epästabiili.

Primaarisen ja sekundaarisen polun tasapainopisteiden tutkimiseksi muodostetaan potentiaalin toinen derivaatta

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \frac{1}{4}kL^2(2 - 3\varphi - \frac{1}{4}\varphi^2) - PL(1 - \frac{1}{2}\varphi^2). \quad (2.52)$$

Primaarisella polulla I ($\varphi = 0$)

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = L\left(\frac{1}{2}kL - P\right), \quad (2.53)$$

joten tasapainotilat ovat stabiileja, kun $P < \frac{1}{2}kL$ ja epästabiileja, kun $P > \frac{1}{2}kL$. Sekundarisella polulla II

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \frac{1}{8}kL^2(-3\varphi + \varphi^2 - \frac{3}{2}\varphi^3 + \frac{1}{4}\varphi^4). \quad (2.54)$$

Kaavassa (2.54) lineaarinen termi -3φ on hallitseva pienillä φ :n arvoilla, joten polun II tasapainoasemat tilan $\varphi = 0$ ympäristössä ovat stabiileja, kun $\varphi < 0$ ja epästabiileja, kun $\varphi > 0$.

Tehtävän käsittelyä voidaan yksinkertaistaa katkaisemalla Π :n kehitelmä kolmannen asteen termiin:

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{4}kL^2(\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi^3) - \frac{1}{2}PL\varphi^2. \quad (2.55)$$

Tällöin saadaan tasapainopolkujen yhtälöiksi

$$\varphi = 0 \quad \text{ja} \quad P = \frac{1}{2}kL(1 - \frac{3}{4}\varphi). \quad (2.56)$$

Suora (2.56) on käyrän (2.49) tangentti bifurkaatiopisteessä B , jossa $\varphi = 0$, kuva 2.6. Polut I ja II ovat nyt suoria, mutta bifurkaatiopiste on sama kuin täydellisemmällä potentiaalin kaavalla määritetty piste B : $(\frac{1}{2}kL, 0)$. Bifurkaatiopisteen B ympäristössä sijoittamalla katkaistun potentiaalin kaavaan (2.55) $P = \frac{1}{2}kL$ saadaan

$$\Pi(\varphi) = -\frac{1}{8}kL^2\varphi^3, \quad (2.57)$$

joten piste B on epästabiili. Sekundarisella polulla saadaan kaavan (2.54) sijasta nyt (sijoittamalla sekundaarisen polun kaava (2.56) katkaistun potentiaalin kaavan (2.55) avulla laskettuun toisen derivaatan lausekkeeseen)

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = -\frac{3}{8}kL^2\varphi \quad (2.58)$$

ja $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} > 0$, kun $\varphi < 0$ (stabiili), $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} < 0$, kun $\varphi > 0$ (epästabiili).

Esimerkin rakenteen jälkikriittinen tila on epäsymmetrinen.

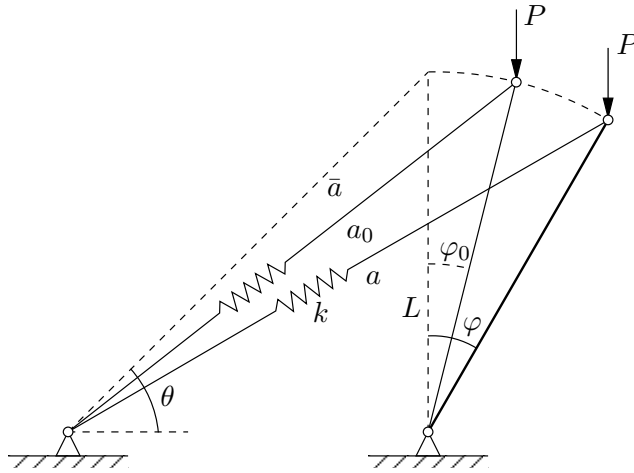
2.3.1 Muotovirheen vaikutus

Otaksutaan ulokesauvan kaltevuudeksi alkutilassa φ_0 . Jännityksettömän jousen pituus on a_0 . Potentiaalienergian lausekkeeksi saadaan

$$\Pi(\varphi; \varphi_0) = \frac{1}{2}k(a - a_0)^2 - PL(1 - \cos \varphi) + PL(1 - \cos \varphi_0). \quad (2.59)$$

missä, otaksumalla $\theta = \frac{\pi}{4}$,

$$a = \sqrt{2}L\sqrt{1 + \sin \varphi}, \quad (2.60)$$



Kuva 2.7 Vinolla jousella tuettu alkuaan vino pilari.

ja

$$a_0 = \sqrt{2}L\sqrt{1 + \sin \varphi_0}. \quad (2.61)$$

Sijoittamalla kaavat (2.60) ja (2.61) potentiaalin kaavaan (2.59) ja kehittämällä trigonometriset funktiot sarjoiksi kehityskeskuksina $\varphi = 0$ ja $\varphi_0 = 0$ saadaan

$$\Pi(\varphi; \varphi_0) = \frac{1}{2}kL^2\left(\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{4}\varphi^3 - \varphi\varphi_0\right) - \frac{1}{2}PL\varphi^2, \quad (2.62)$$

(kun potentiaalin kaavaa johdettaessa on jälleen otaksuttu, että muotovirheparametri φ_0 on pieni ja φ_0 :n korkeampia potensseja sisältävät termit voidaan jättää pois termin $\varphi\varphi_0$ rinnalla). Koska potentiaalin kaavassa (2.62) on termi φ^3 , voidaan neljännen asteen termi jättää pois.

Stationaarisuusehdosta $\delta\Pi = 0$ seuraa tasapainoehto

$$P = \frac{1}{2}kL\left(1 - \frac{3}{4}\varphi - \frac{\varphi_0}{\varphi}\right), \quad (2.63)$$

jonka esittämät käyrät on piirretty kuvaan 2.8.

Jokaista φ_0 :n arvoa vastaa jälleen luonnollinen ja epäluonnollinen tasapainopolku. Kuvassa 2.7 on neljä käyräparvea. Niistä kaksi vastaa φ_0 :n positiivisia arvoja ja kaksi φ_0 :n negatiivisia arvoja. Muotovirheellisen rakenteen tasapainopolut lähestyvät virheettömän rakenteen tasapainopolkuja, kun $\varphi_0 \rightarrow 0$.

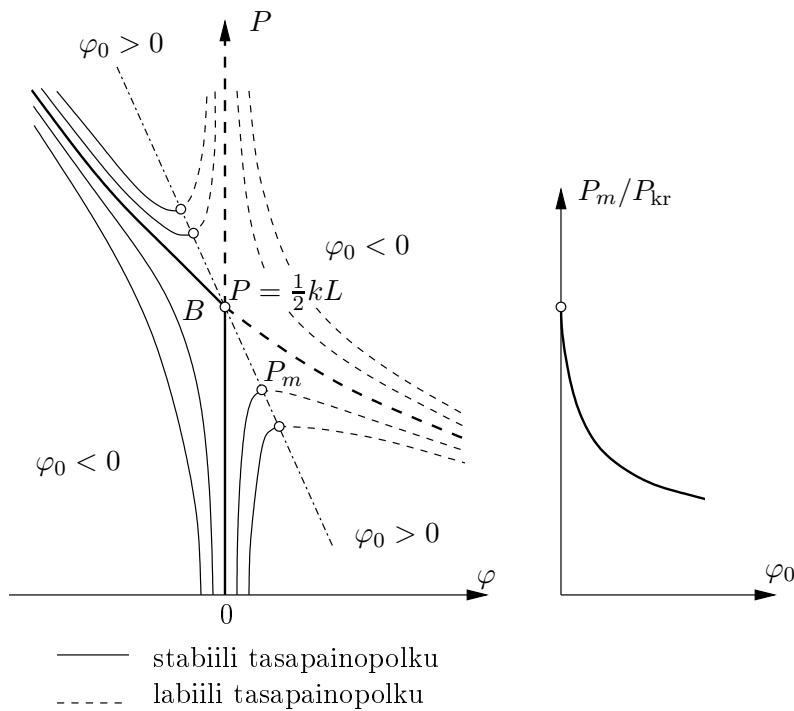
Luonnollisilla tasapainopoluilla, kun $\varphi > 0$, kuorma P saavuttaa maksimiarvon P_m , kun taas poluilla, jotka liittyvät alkukaltevuuksiin $\varphi_0 < 0$, kuormalla P ei ole maksimipistettä.

Eliminoimalla φ tasapainoehdosta (2.63) ja yhtälöstä

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \frac{1}{2}kL\left(1 - \frac{3}{2}\varphi\right) - P = 0 \quad (2.64)$$

seuraa

$$P_m = \frac{1}{2}kL(1 - \sqrt{3\varphi_0}), \quad (2.65)$$



Kuva 2.8 Vinolla jousella tuettu pilari; alkutaipuman vaikutus.

kuva 2.8.

Suoran yhtälö (2.64) puolittaa primaarisen ja sekundaarisen polun välisen kulman. Käyrä (2.65) sivuaa suoraa $\varphi_0 = 0$ tangentiaalisesti. Voidaan päätellä, (ks. myös kuvaa (2.8)), että pienikin kaltevuuskulma φ_0 aiheuttaa huomattavan pienenemisen rajakuormaan P_m , eli rakenne on herkkä muotovirheelle.

Rakenteilla, joilla jälkikriittinen käyttäytyminen (sekundaarinen tasapainopolku) on epäsymmetrinen, muotovirheen vaikutus on suurempi kuin rakenteilla, joiden jälkikriittinen polku on symmetrinen.

Kaavassa (2.65) $P_m(\varphi_0)$ -riippuvuus on tyyppiä $\sim \varphi_0^{\frac{1}{2}}$, kun taas vaakasuoran jousen tukeman pilarin tapauksessa, kaavassa (2.42), vastaava rajakuorman riippuvaisuus alkukaltevuuskulmasta on tyyppiä $\sim \varphi_0^{\frac{2}{3}}$.

Kuvassa 2.8 suoran (2.64) (pistekatkoviiva) vasemmalla puolella $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} > 0$, ja tasapainotilat ovat stabiileja. Vastaavasti suoran (2.64) oikealla puolella $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} < 0$, ja tasapainotilat ovat epästabiileja.

Luku 3

Puristettu ja taivutettu sauva

3.1 Puristetun ja taivutetun sauvan differentiaaliyhtälö

Puristetun ja taivutetun sauvan alkion Δx akselin y suuntainen tasapainoehto, kun puristava voima P on vakio, on

$$-Q + Q + \Delta Q + Pv' - P(v' + \Delta v') + q\Delta x = 0, \quad (3.1)$$

josta seuraa

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} - P \frac{\Delta v'}{\Delta x} + q = 0. \quad (3.2)$$

Rajalla $\Delta x \rightarrow 0$ saadaan differentiaaliyhtälö

$$Q' - Pv'' + q = 0, \quad (3.3)$$

missä on merkitty $(\bullet)' \equiv \frac{d(\bullet)}{dx}$.

Samanlaisella tarkastelulla johdetaan momentin tasapainoyhtälö

$$M' = Q. \quad (3.4)$$

Tasapainoehtojen (3.3) ja (3.4) avulla saadaan puristetun ja taivutetun sauvan differentiaaliyhtälö

$$M'' - Pv'' + q = 0. \quad (3.5)$$

Ottamalla huomioon kimmoisen sauvan momentin ja käyristymän välinen yhteys

$$M = EI\kappa = -EIv'' \quad (3.6)$$

tulee

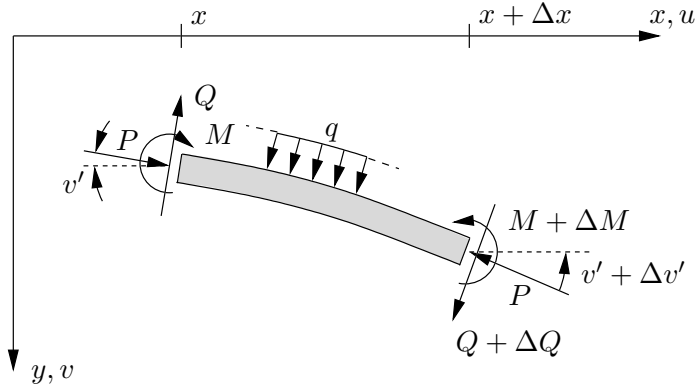
$$(EIv'')'' + Pv'' = q. \quad (3.7)$$

Tapauksessa $EI =$ vakio taipuman differentiaaliyhtälö on

$$v^{(4)} + k^2 v'' = \frac{q}{EI}, \quad (3.8)$$

missä on merkitty

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (3.9)$$



Kuva 3.1 Sauvan alkio.

Neljannen kertaluvun tavallisen differentiaaliyhtälön (3.8) ratkaisu on

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D + v_p, \quad (3.10)$$

missä v_p on poikittaiskuormasta $q(x)$ riippuva yksityisratkaisu.

3.2 Tasapainomenetelmä

Tarkastellaan esimerkkinä molemmista päistä jäykästi tuettua sauvaa. Sauvan reunaehdot ovat

$$v(0) = v'(0) = v(L) = v'(L) = 0. \quad (3.11)$$

Taipuman lausekkeen derivaatta on

$$v'(x) = Ak \cos kx - Bk \sin kx + C. \quad (3.12)$$

Sijoittamalla taipuman ja sen derivaatan lausekkeet reunaehtoihin (3.11) saadaan yhtälöryhmä

$$B + D = 0, \quad (3.13a)$$

$$kA + C = 0, \quad (3.13b)$$

$$A \sin kL + B \cos kL + CL + D = 0, \quad (3.13c)$$

$$kA \cos kL - kB \sin kL + C = 0. \quad (3.13d)$$

Kootaan reunaehdot matriisiyhtälöksi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin kL & \cos kL & L & 1 \\ k \cos kL & -k \sin kL & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Jotta yhtälöryhmällä (3.14) olisi ei-triviaali ratkaisu, on sen kerroinmatriisin determinantin oltava nolla, eli

$$4k \sin \frac{kL}{2} \left(\sin \frac{kL}{2} - \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} \right) = 0. \quad (3.15)$$

Epälineaarilla yhtälöllä (3.15) on ratkaisu, jos

$$\sin \frac{kL}{2} = 0 \quad (3.16)$$

eli

$$\frac{kL}{2} = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.17)$$

tai

$$\tan \frac{kL}{2} = \frac{kL}{2}, \quad (3.18)$$

jonka ratkaisu on

$$\frac{kL}{2} \approx 4.493. \quad (3.19)$$

Sauvan nurjahduskuormaa vastaa pienin ominaisarvo

$$k_1 = \frac{2\pi}{L}, \quad (n = 1), \quad (3.20)$$

ja nurjahduskuorma on

$$P_1 \equiv P_{kr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}. \quad (3.21)$$

Pienintä ominaisarvoa vastaava ominaismuoto (nurjahdusmuoto) saadaan sijoittamalla $k = k_1 = \frac{2\pi}{L}$ reunaehtoihin:

$$B + D = 0, \quad (3.22a)$$

$$k_1 A + C = 0, \quad (3.22b)$$

$$A \sin k_1 L + B \cos k_1 L + CL + D = 0, \quad (3.22c)$$

$$k_1 A \cos k_1 L - k_1 B \sin k_1 L + C = 0, \quad (3.22d)$$

joiden ratkaisu on

$$A = C = 0, \quad D = -B, \quad (3.23)$$

ja nurjahdusmuoto on

$$v(x) = B(\cos \frac{2\pi x}{L} - 1). \quad (3.24)$$

Toista ominaisarvoa $k_2 = \frac{8.986}{L}$, ($P_2 = \frac{80.75 EI}{L^2}$), vastaa ominaismuoto

$$v(x) = B(-0.2227 \sin 8.986 \frac{x}{L} + \cos 8.986 \frac{x}{L} + 2.001 \frac{x}{L} - 1) \quad (3.25)$$

Eri tavoin tuettujen pilarien nurjahduskuorma voidaan esittää kaavoilla

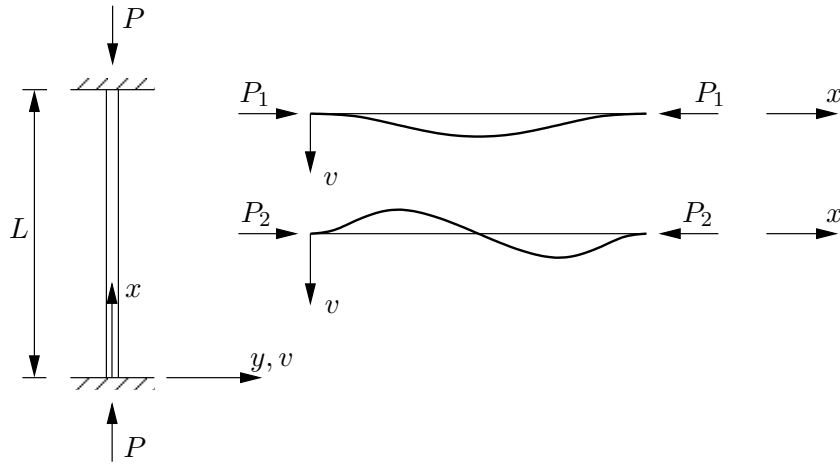
$$P_{kr} = \frac{\alpha \pi^2 EI}{L^2} \quad (3.26)$$

tai

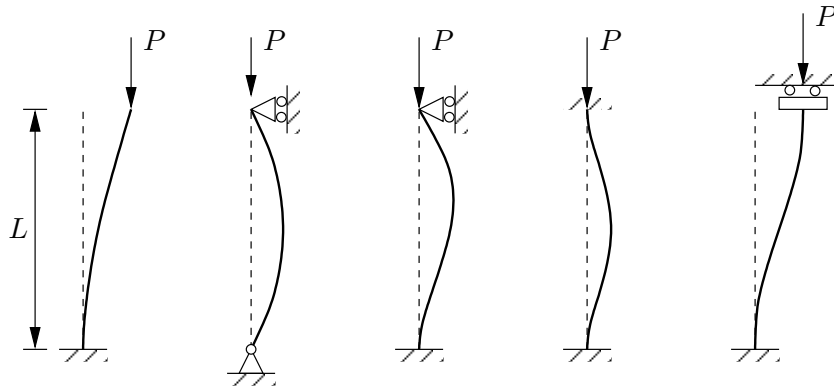
$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_n^2}, \quad (3.27)$$

missä

$$L_n = \beta L \quad (3.28)$$



Kuva 3.2 Jäykästi tuettu pilari.



Kuva 3.3 Eulerin nurjahdustapaukset.

on nurjahduspituus ja $\beta = 1/\sqrt{\alpha}$.

Nurjahdusjännitys on

$$\sigma_n = \frac{P_{kr}}{A} = \pi^2 E \left(\frac{i}{L_n} \right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\lambda_n^2}, \quad (3.29)$$

missä

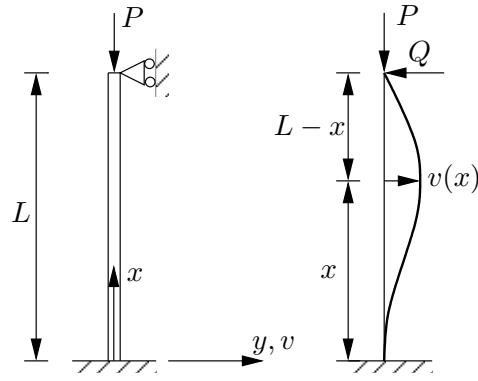
$$i = \sqrt{I/A}, \quad \lambda_n = L_n/i \quad (3.30)$$

ovat jäyhyysäde ja hoikkuusluku. Eulerin nurjahdustapaukset on koottu taulukkoon 3.1.

Esimerkki 3.1 Määritetään Eulerin nurjahdustapauksen numero 3 nurjahduskuorma.

Taulukko 3.1 Eulerin nurjahdustapaukset.

no.	1	2	3	4	5
α	1/4	1	2.046	4	1
β	2	1	0.698	0.5	1



Kuva 3.4 Eulerin nurjahdustapaus 3.

Kuvan 3.4 perusteella johdetaan tasapainoyhtälö

$$M(x) = Pv(x) + Q(L - x). \quad (3.31)$$

Momentin ja käyristymän välisen yhteyden $M(x) = -EIv''(x)$ avulla saadaan

$$EIv'' + Pv = -Q(L - x), \quad (3.32)$$

jonka ratkaisu on

$$v(x) = A \cos kx + B \sin kx - \frac{Q}{P}(L - x). \quad (3.33)$$

Sauvan reunaehdot ovat:

$$v(0) = v'(0) = v(L) = 0. \quad (3.34)$$

Reunaehtojen perusteella saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{L}{P} \\ 0 & k & \frac{1}{P} \\ \cos kL & \sin kL & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Asettamalla kerroinmatriisin determinantti nolaksi tulee

$$\frac{1}{P}(kL \cos kL - \sin kL) = 0, \quad (3.36)$$

eli

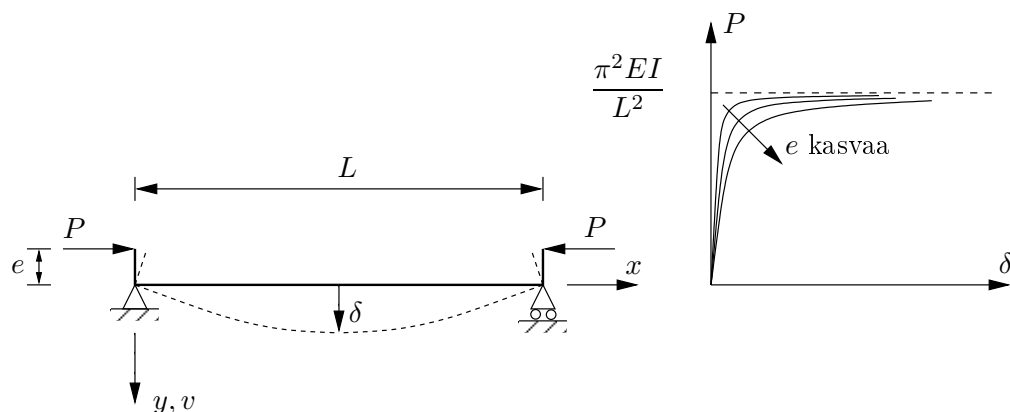
$$\tan kL = kL, \quad (3.37)$$

jonka ratkaisu on

$$kL \approx 4.493. \quad (3.38)$$

Kriittinen puristava voima eli nurjahduskuorma on

$$P_{kr} = \frac{4.493^2 EI}{L^2}. \quad (3.39)$$



Kuva 3.5 Epäkeskisesti kuormitettu nivelsauva.

3.3 Epäkeskisyysmenetelmä

Menetelmässä kuormitetaan sauva epäkeskeisesti, tai sauvalle voidaan otaksua alkutaipuma. Alkuhäiriön vaikutuksesta ratkaistava yhtälöryhmä tulee epähomogeeniseksi, ja tiettyä kuorman arvoa vastaava sirtymä saadaan määritetyksi. Tarkastellaan esimerkkinä kuvan 3.5 vapaasti tuettua sauva, jota kuormittaa symmetrisesti epäkeskeinen kuorma P .

Taipuman differentiaaliyhtälö on

$$v^{(4)} + k^2 v'' = 0, \quad (3.40)$$

ja sen reunaehdot ovat

$$v(0) = v(L) = 0, \quad (3.41)$$

$$-EIv''(0) = -EIv''(L) = Pe \Rightarrow -v''(0) = -v''(L) = k^2 e. \quad (3.42)$$

Reunaehtojen perusteella muodostetaan yhtälöt

$$B + D = 0, \quad (3.43a)$$

$$A \sin kL + B \cos kL + CL + D = 0, \quad (3.43b)$$

$$Bk^2 = k^2 e, \quad (3.43c)$$

$$Ak^2 \sin kL + Bk^2 \cos kL = k^2 e. \quad (3.43d)$$

Reunaehtoryhmän ratkaisu on

$$A = -e \frac{\cos kL - 1}{\sin kL}, \quad (3.44a)$$

$$B = e, \quad (3.44b)$$

$$C = 0, \quad (3.44c)$$

$$D = -e, \quad (3.44d)$$

ja taipuman lauseke on

$$v(x) = -e \left[\frac{\cos kL - 1}{\sin kL} \sin kx - \cos kx + 1 \right], \quad (3.45)$$

tai

$$v(x) = -e[1 - \cos kx - \tan \frac{kL}{2} \sin kx]. \quad (3.46)$$

Kun kuorma lähenee nivelsauvan nurjahduskuorman arvoa $P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L}$ eli $k \rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}}$ ja $\frac{kL}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, niin $\tan \frac{kL}{2} \rightarrow \infty$ ja taipuma $v(x)$ kasvaa rajatta. Keskipisteen taipumalle $v\left(\frac{L}{2}\right) \equiv \delta$ saadaan lauseke

$$\delta = -e \left[1 - \cos \frac{kL}{2} - \tan \frac{kL}{2} \sin \frac{kL}{2} \right], \quad (3.47)$$

joka voidaan myös kirjoittaa muodossa

$$\delta = e \left[\frac{1}{\cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right)} - 1 \right]. \quad (3.48)$$

Jos kuorman P epäkeskeisyydet ovat e ja $-e$, niin taipumalle johdetaan lauseke

$$v(x) = e \left[1 - \frac{2x}{L} - \cos kx + \cot \frac{kL}{2} \sin kx \right]. \quad (3.49)$$

Tässä tapauksessa taipuma tulee äärettömän suureksi, kun kuorma P lähestyy arvoa $P = 4\pi^2 \frac{EI}{L^2}$. Keskipisteen taipuma $v\left(\frac{L}{2}\right) = 0$, ja

$$v\left(\frac{L}{4}\right) = -\frac{e}{2} \left[\frac{1}{\cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{4} \right)} - 1 \right]. \quad (3.50)$$

3.4 Energiamenetelmä

Sauvan geometrisen epälineaarisuuden huomioonottava Greenin-Lagrangen muodonmuutoskomponentti (sauvan akselin suuntainen venymä) määritellään kaavalla

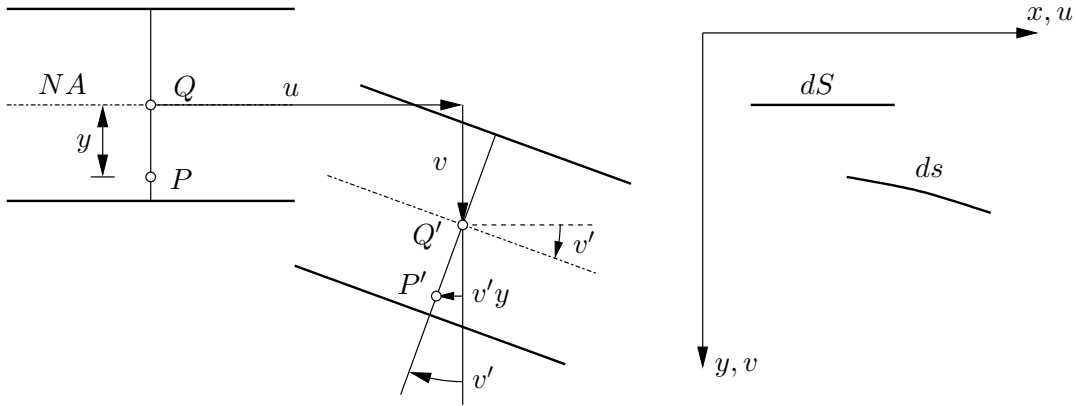
$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}, \quad (3.51)$$

missä dS on viiva-alkion pituus alkutilassa, ja

$$ds^2 = [(1 + u')^2 + (v')^2] dS^2 \quad (3.52)$$

on viiva-alkion neliö deformatuneessa tilassa. Venymän kaavaksi tulee

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}(v')^2. \quad (3.53)$$



Kuva 3.6 Sauvan siirtymät ja venymä.

Sauvan poikkileikkauksen mielivaltaisen pisteen siirtymät ovat Bernoullin otaksuman perusteella

$$\bar{u} = u - yv', \quad (3.54)$$

$$\bar{v} = v, \quad (3.55)$$

missä u ja v ovat sauvan akselin siirtymät, kuva 3.6.

Sijoittamalla siirtymien kaavat venymän lausekkeeseen tulee

$$\bar{\varepsilon} = \bar{u}' + \frac{1}{2}(\bar{u}')^2 + \frac{1}{2}(\bar{v}')^2. \quad (3.56)$$

Yksinkertaistetaan venymän kaava vielä muotoon

$$\bar{\varepsilon} = \bar{u}' + \frac{1}{2}(\bar{v}')^2, \quad (3.57)$$

eli

$$\bar{\varepsilon} = u' - yv'' + \frac{1}{2}(v')^2, \quad (3.58)$$

joka on vielä lyhyemmin kirjoitettuna

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon + y\kappa, \quad (3.59)$$

missä

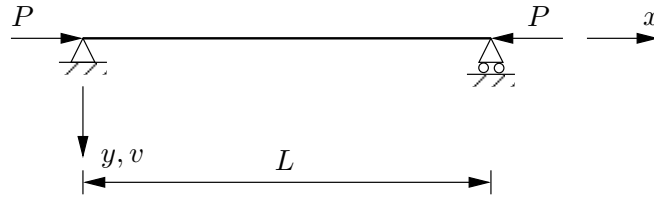
$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}(v')^2 \quad (3.60)$$

on sauvan akselin venymä ja sauvan käyristymä on

$$\kappa = -v''. \quad (3.61)$$

Sauvan muodonmuutosenergian lauseke on

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E \bar{\varepsilon}^2 dV \quad (3.62)$$



Kuva 3.7 Puristettu nivelöity sauva, energiamenetelmässä käytetty koordinaatisto.

eli

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int_A (\varepsilon^2 + 2\varepsilon\kappa y + y^2\kappa^2) dA \right] dx. \quad (3.63)$$

Ottamalla huomioon, että

$$\int_A y dA = 0, \quad (3.64)$$

saadaan lopulta muodonmuutosenergian lausekkeeksi

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA\varepsilon^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI\kappa^2 dx. \quad (3.65)$$

Sauvan kokonaispotentiaalienergia on

$$\Pi = U + V, \quad (3.66)$$

missä

$$V = Pu(L) \quad (3.67)$$

on ulkoisen kuorman potentiaali kuvan 3.7 tapauksessa.

Perustilan siirtymiä u, v vastaa potentiaalienergia $\Pi(u, v)$. Häirityn tilan siirtymät ovat

$$u_1(x) = u(x) + \varepsilon_1 \delta(x), \quad (3.68a)$$

$$v_1(x) = v(x) + \varepsilon_2 \eta(x), \quad (3.68b)$$

missä ε_1 ja ε_2 ovat pieniä kertoimia (lukuja).

Siirtymiä vastaava häirityn tilan potentiaalienergia on $\Pi_1 = \Pi(u_1, v_1)$,

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2} \int_0^L EA[u' + \varepsilon_1 \delta' + \frac{1}{2}(v' + \varepsilon_2 \eta')^2] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L EI(v'' + \varepsilon_2 \eta'')^2 dx + P[u(L) + \varepsilon_1 \delta(L)] \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2} \int_0^L EA[(u' + \frac{1}{2}(v')^2) + \varepsilon_1 \delta' + \varepsilon_2 v' \eta' + \varepsilon_2^2 \frac{1}{2}(\eta')^2] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L EI[(v'')^2 + \varepsilon_2 2v'' \eta'' + \varepsilon_2^2 (\eta'')^2] dx + P[u(L) + \varepsilon_1 \delta(L)]. \end{aligned}$$

Kehitetään potentiaalin kaava kertoimien ε_i kasvavien potenssien mukaan sarjaksi ¹

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 = & \frac{1}{2} \int_0^L \{EA[u' + \frac{1}{2}(v')^2]^2 + EI(v'')^2\} dx + Pu(L) \\
 & + \varepsilon_1 \left\{ \int_0^L EA[u' + \frac{1}{2}(v')^2] \delta' dx + P\delta(L) \right\} \\
 & + \varepsilon_2 \int_0^L \{EA[u' + \frac{1}{2}(v')^2] v' \eta' + EI v'' \eta''\} dx \\
 & + \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 \int_0^L EA(\delta')^2 dx + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \int_0^L EA v' \delta' \eta' dx \\
 & + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 \int_0^L \{EA(v')^2 (\eta')^2 + EA[u' + \frac{1}{2}(v')^2] (\eta')^2 + EI(\eta'')^2\} dx \\
 & + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \int_0^L EA \delta' (\eta')^2 dx + \frac{1}{2} \varepsilon_2^3 \int_0^L EA v' (\eta')^3 dx + \frac{1}{8} \varepsilon_2^4 \int_0^L EA (\eta')^4 dx.
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Häirityn tilan ja perustilan potentiaalienergioiden erotus on

$$\Delta\Pi = \delta\Pi + \frac{1}{2!} \delta^2\Pi + \frac{1}{3!} \delta^3\Pi + \frac{1}{4!} \delta^4\Pi. \tag{3.70}$$

Tutkitaan suoran tasapainotilan $v = 0$ stabiiliutta. Potentiaalienergian kehittelyn (3.69) perusteella, kun $v = 0$,

$$\delta\Pi = \varepsilon_1 \left[\int_0^L N \delta' dx + P\delta(L) \right] \tag{3.71}$$

ja

$$\frac{1}{2} \delta^2\Pi = \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 \int_0^L EA(\delta')^2 dx + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 \int_0^L [N(\eta')^2 + EI(\eta'')^2] dx, \tag{3.72}$$

missä on käytetty hyväksi yhteyttä

$$N = EAu'. \tag{3.73}$$

Suorassa tasapainotilassa ehdosta $\delta\Pi = 0$ seuraa osittaisintegroimalla ²

$$\left[N\delta - \int_0^L N' \delta dx + P\delta(L) \right] = 0, \tag{3.74}$$

¹ $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

² $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$

eli

$$\int_0^L N' \delta \, dx = 0, \quad (3.75)$$

josta seuraa $N' = 0$ ja N on vakio.

Suora tasapainotila (perustila) on stabiili, kun $\frac{1}{2}\delta^2\Pi$ on positiivinen kaikille funktioille $\delta(x)$ ja $\eta(x)$. Kriittinen kuorma määritetään ehdosta

$$\bar{\delta}(\frac{1}{2}\delta^2\Pi) = 0 \quad (3.76)$$

eli

$$\bar{\delta}(\frac{1}{2} \int_0^L [N(\eta')^2 + EI(\eta'')^2] \, dx) = 0 \quad (3.77)$$

(kaavan (3.72) oikean puolen ensimmäinen termi on positiivinen, jos $\delta' \neq 0$). Sijoittamalla $N = -P$ tulee

$$\bar{\delta}(\frac{1}{2} \int_0^L [-P(\eta')^2 + EI(\eta'')^2] \, dx) = 0. \quad (3.78)$$

Kaava $\bar{\delta}(\frac{1}{2}\delta^2\Pi) = 0$ on nimeltään Trefftz'in ehto.

3.4.1 Ritz'in menetelmä

Taipumalle η valitaan kehitelmä

$$\eta(x) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x), \quad (3.79)$$

missä funktiot $\varphi_k(x)$ ovat kantafunktiot ja vakiot a_k ovat toistaiseksi määräämättömiä kertoimia. Sarjaan on valittu N termiä. Antamalla $N \rightarrow \infty$ saadaan tehtävän ratkaisu mielivaltaisella tarkkuudella.

Sijoitetaan derivaattojen kehitelmät

$$\eta'(x) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi'_k(x), \quad \eta''(x) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi''_k(x) \quad (3.80)$$

Trefftz'in ehtoon ja saadaan

$$\frac{1}{2}\bar{\delta} \left[\int_0^L EI \sum_{m=1}^N a_m \varphi''_m(x) \sum_{n=1}^N a_n \varphi''_n(x) \, dx - P \int_0^L \sum_{m=1}^N a_m \varphi'_m(x) \sum_{n=1}^N a_n \varphi'_n(x) \, dx \right] = 0, \quad (3.81)$$

eli

$$\bar{\delta} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} a_m a_n \left[\int_0^L EI \varphi''_m(x) \varphi''_n(x) \, dx - P \int_0^L \varphi'_m(x) \varphi'_n(x) \, dx \right] = 0, \quad (3.82)$$

joka on lyhyemmin merkittynä

$$\bar{\delta} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} (C_{mn} - PB_{mn}) a_m a_n = 0, \quad (3.83)$$

missä

$$C_{mn} = C_{nm} = \int_0^L EI \varphi''_m(x) \varphi''_n(x) dx, \quad (3.84)$$

$$B_{mn} = B_{nm} = \int_0^L \varphi'_m(x) \varphi'_n(x) dx. \quad (3.85)$$

Matriisimuodossa Trefftz'in ehto on

$$\bar{\delta} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} - PB_{11} & \cdots & C_{1N} - PB_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} - PB_{N1} & \cdots & C_{NN} - PB_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (3.86)$$

eli

$$\bar{\delta} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} \right) = 0. \quad (3.87)$$

Pienin kuorman P arvo, jolla neliömuoto $\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a}$ tulee semidefiniitiksi, saadaan ehdosta

$$\det(\mathbf{K}) = 0. \quad (3.88)$$

Pienin ominaisarvo P_1 on nurjahduskuorman yläliikiarvo.

Esimerkki 3.2 Määritetään nivelsauvan nurjahduskuorma Ritz'in menetelmällä.

Kantafunktiot

$$\varphi_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.89)$$

toteuttavat reunaehdot. Kantafunktioiden tarvittavat derivaatat ovat

$$\varphi'_k(x) = \frac{k\pi}{L} \cos \frac{k\pi x}{L}, \quad (3.90)$$

$$\varphi''_k(x) = -\frac{k\pi^2}{L} \sin \frac{k\pi x}{L}. \quad (3.91)$$

Lasketaan sitten kertoimet

$$\begin{aligned} B_{mn} &= \int_0^L \varphi'_m(x) \varphi'_n(x) dx \\ &= \frac{m\pi}{L} \frac{n\pi}{L} \int_0^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{m\pi}{L} \frac{n\pi}{L} \frac{L}{2} \delta_{mn}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned}
C_{mn} &= \int_0^L EI \varphi''_m(x) \varphi''_n(x) dx \\
&= EI \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= EI \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{L}{2} \delta_{mn}.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Toiseen variaatioon liittyvän neliömuodon kerroinmatriisi on

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} C_{11} - PB_{11} & \cdots & C_{1N} - PB_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} - PB_{N1} & \cdots & C_{NN} - PB_{NN} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left[EI \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 - P \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right] \frac{L}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \left[EI \left(\frac{N\pi}{L} \right)^4 - P \left(\frac{N\pi}{L} \right)^2 \right] \frac{L}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Asettamalla determinantti nolaksi tulee

$$\prod_{k=1}^N \left[EI \left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 - P \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \right] \frac{L}{2} = 0, \tag{3.95}$$

josta saadaan pienin ominaisarvo

$$P_1 = P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \tag{3.96}$$

Esimerkki 3.3 Lasketaan ulokepilarin nurjahduskuorma energiamenetelmällä.

Tutkitaan ulokkeen stabiiliutta suoran perustilan suhteen. Merkitään tästä lähtien, että läsiäsiirtymä suoran perustilan suhteen on $v(x)$ (aiemmin käytetyn $\eta(x)$:n sijasta). Kriittinen kuorma määritetään uuden merkintätavan mukaisesti ehdosta

$$\bar{\delta}(\tfrac{1}{2}\delta^2\Pi) = \bar{\delta} \left(\tfrac{1}{2} \int_0^L [EI(v'')^2 - P(v')^2] dx \right) = 0. \tag{3.97}$$

Otaksutaan taipumalle muoto

$$v(x) = A(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}), \tag{3.98}$$

missä A on vakio. Taipumafunktio (3.98) toteuttaa kinemaattiset reunaehdot pisteessä $x = 0$. Sijoittamalla taipumafunktio ehtoon (3.97) tulee

$$\bar{\delta}(\tfrac{1}{2}\delta^2\Pi) = \bar{\delta} \left(\frac{\pi^4 EI}{64L^3} A^2 - \frac{\pi^2 P}{16L} A^2 \right) = 0, \tag{3.99}$$

josta seuraa ratkaisu

$$P_{kr} = \frac{1}{4} \pi^2 \frac{EI}{L^2}. \tag{3.100}$$

Tulos on tarkka, koska taipumafunktio on tarkka ulokkeen nurjahdusmuoto. Valitsemalla

$$v(x) = Ax^2 \quad (3.101)$$

saadaan

$$P_{kr} = 3 \frac{EI}{L^2}, \quad (3.102)$$

joka on 21.3% tarkkaa tulosta suurempi.

Ottamalla taipumafunktioksi ulokkeen päässä vaikuttavan poikittaisen pistekuorman aiheuttama taipuma

$$v(x) = Ax^2(3L - x) \quad (3.103)$$

saadaan

$$P_{kr} = 2.5 \frac{EI}{L^2}, \quad (3.104)$$

joka on 1.3% tarkkaa arvoa suurempi. Otaksuttu taipuman lauseke toteuttaa pisteessä $x = L$ luonnollisen reunaehdon

$$M(L) = -EIv''(L), \quad (3.105)$$

ja tästä syystä se (jälkimmäinen taipuman lauseke) antaa paremman tuloksen kuin funktio $v = Ax^2$, joka ei toteuta ehtoa $M(L) = 0$.

Esimerkki 3.4 Määritetään vapaasti tuetun pilarin (palkin) nurjahduskuorma energiakriteerin avulla.

Valitaan taipumafunktio

$$v(x) = A(L - x)x. \quad (3.106)$$

Ehdosta (3.97) saadaan tuloksena

$$P_{kr} = 12 \frac{EI}{L^2}, \quad (3.107)$$

joka on 21.3% tarkkaa tulosta suurempi.

Valitsemalla luonnolliset reunaehdot

$$M(0) = M(L) = 0 \quad (3.108)$$

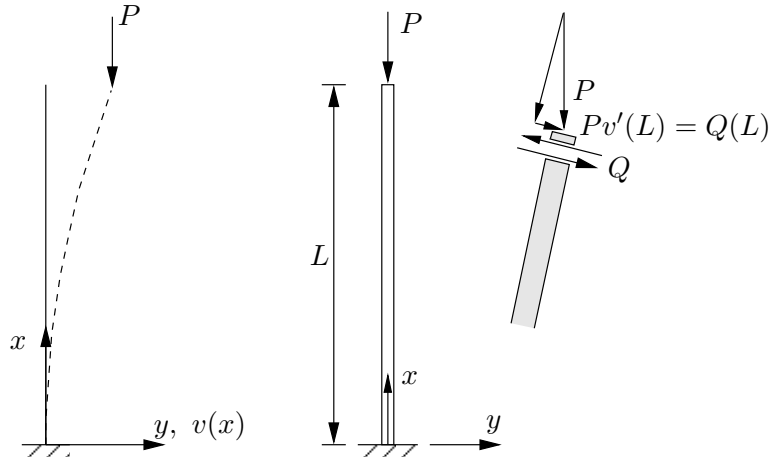
toteuttava taipumafunktio

$$v(x) = A(L^3x - 2Lx^3 + x^4) \quad (3.109)$$

saadaan nurjahduskuorma

$$P_{kr} \approx 9.88 \frac{EI}{L^2}, \quad (3.110)$$

joka on vain 0.13% tarkkaa arvoa suurempi.



Kuva 3.8 Ulokepilari.

3.4.2 Energiakriteerin muunnos

Ottamalla huomioon, että

$$M = -EIv'', \quad (3.111)$$

tulee toiseen variaatioon perustuva stabiilisuuskriteeri muotoon

$$\bar{\delta}(\frac{1}{2}\delta^2\Pi) = \bar{\delta} \left(\frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{M^2}{EI} - P(v')^2 \right] dx \right) = 0. \quad (3.112)$$

Jos momentti M toteuttaa mekaaniset reunaehdot ja taipuma v kinemaattiset reunaehdot sekä M :n ja v :n välillä on yhteys

$$M'' = Pv'', \quad (3.113)$$

niin nurjahduskuorma voidaan määrittää ehdosta (3.112).

Esimerkki 3.5 Määritetään kuvan 3.8 ulokepilarin nurjahduskuorma ehdon (3.112) avulla.

Sauvan kinemaattiset reunaehdot ovat

$$v(0) = v'(0) = 0, \quad (3.114)$$

ja mekaaniset reunaehdot ovat

$$M(L) = 0, \quad Q(L) = M'(L) = Pv'(L). \quad (3.115)$$

Valitaan taipumafunktio

$$v(x) = Ax^2. \quad (3.116)$$

Tasapainoehdosta

$$M'' - Pv'' = 0 \quad (3.117)$$

seuraa integroimalla

$$M' = Pv' + B \quad (3.118)$$

ja sitten toiseen kertaan integroimalla

$$M = Pv + Bx + C, \quad (3.119)$$

jossa B ja C ovat integroimisvakioita. Mekaanisten reunaehtojen perusteella saadaan

$$B = 0, \quad C = -Pv(L). \quad (3.120)$$

Momentin lauseke on

$$M = P[v(x) - v(L)] = AP(x^2 - L^2). \quad (3.121)$$

Π :n toiseksi variaatioksi tulee laskutoimitusten jälkeen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi &= \frac{1}{2}\frac{P^2}{EI}A^2 \int_0^L (x^2 - L^2)^2 dx - \frac{1}{2}PA^2 \int_0^L (2x)^2 dx \\ &= A^2 \frac{1}{2}P \left(\frac{P}{EI} \frac{8}{15}L^5 - \frac{4}{3}L^3 \right), \end{aligned} \quad (3.122)$$

ja nurjahduskuormaksi saadaan

$$P_{kr} = 2.5 \frac{EI}{L^2}, \quad (3.123)$$

kun tarkka tulos on $P_{kr} = 2.47 \frac{EI}{L^2}$.

Esimerkki 3.6 Määritetään päästä $x = 0$ jäykästi tuetun ja päästä $x = L$ nivelellisesti tuetun pilarin nurjahduskuorma.

Pilarin kinemaattiset reunaehdot ovat

$$v(0) = v'(0) = v(L) = 0, \quad (3.124)$$

ja mekaaninen reunaehto on

$$M(L) = 0. \quad (3.125)$$

Valitaan taipuman lausekkeeksi

$$v(x) = Ax^2(L - x), \quad (3.126)$$

missä A on jälleen vakiokerroin. Samalla tavalla kuin edellisessä tehtävässä tasapainoehdosta

$$M'' - Pv'' = 0 \quad (3.127)$$

seuraa integroimalla

$$M = Pv + Bx + C, \quad (3.128)$$

jossa B ja C ovat integroimisvakioita. Reunaehdon $M(0) = 0$ perusteella päätellään, että

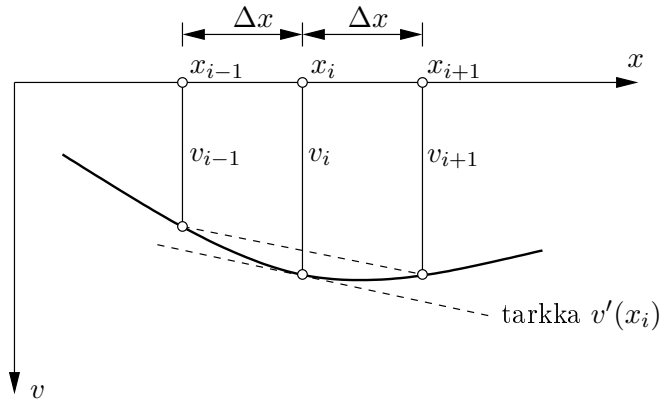
$$C = -BL, \quad (3.129)$$

ja momentin lauseke on

$$M(x) = AP(Lx^2 - x^3) - B(L - x). \quad (3.130)$$

Ehdosta

$$\bar{\delta}(\frac{1}{2}\delta^2\Pi) = 0 \quad (3.131)$$



Kuva 3.9 Keskeisdifferenssi.

seuraa lineaarinen yhtälöryhmä

$$\frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{L^4}{35}P^2 - \frac{2}{5}L^2P & -\frac{L^2}{10}P \\ -\frac{L^2}{10}P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.132)$$

Asettamalla kerroinmatriisin determinantti nolaksi saadaan

$$P_{kr} \approx 21.54 \frac{EI}{L^2}, \quad (3.133)$$

kun tarkka tulos on $P_{kr} = 20.19 \frac{EI}{L^2}$.

3.5 Differenssimenetelmä

Sauvan differentiaaliyhtälön

$$EIv^{(4)} + Pv'' = q \quad (3.134)$$

taipuman derivaatat korvataan differenssiosamäärillä. Kuvan 3.9 perusteella muodostetaan taipuman derivaatan likiarvo ensimmäisen keskeisdifferenssin avulla:

$$\left(\frac{dv}{dx} \right)_i \approx \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (3.135)$$

Toisen ja korkeamman asteen derivaatan aproksimaatioille saadaan lausekkeet:

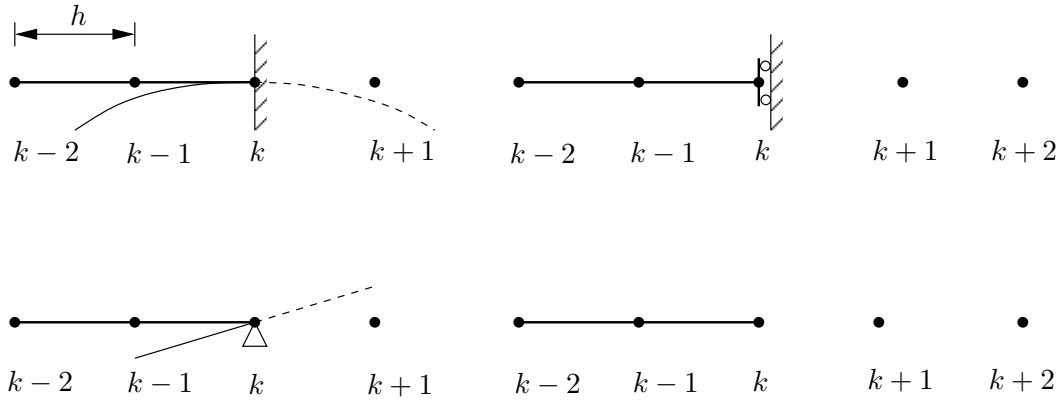
$$(v'')_i \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}), \quad (3.136)$$

$$(v''')_i \approx \frac{1}{2(\Delta x)^3}(v_{i+2} - 2v_{i+1} + 2v_{i-1} - v_{i-2}), \quad (3.137)$$

$$(v'''')_i \approx \frac{1}{(\Delta x)^4}(v_{i+2} - 4v_{i+1} + 6v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2}). \quad (3.138)$$

Sijoittamalla differenssilausekkeet sauvan tasapainoyhtälöön tulee hilapisteessä i yhtälö

$$\frac{EI_i}{(\Delta x)^4}(v_{i+2} - 4v_{i+1} + 6v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2}) + \frac{P}{(\Delta x)^2}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) = q_i. \quad (3.139)$$



Kuva 3.10 Reunaehdot.

Merkitään seuraavassa, että

$$h \equiv \Delta x \quad (3.140)$$

on hilaväli.

3.5.1 Reunaehdot

1. Kiinnitetyllä reunalla taipuma ja kiertymä ovat nollia eli reunan pisteessä k

$$v_k = 0, \quad (3.141)$$

$$v'_k = 0 \Rightarrow \frac{1}{2h}(v_{k+1} - v_{k-1}) = 0 \Rightarrow v_{k+1} = v_{k-1}. \quad (3.142)$$

2. Niveltuella taipuma ja momentti $M = -EIv''$ ovat nollia ja reunan pisteessä k

$$v_k = 0, \quad (3.143)$$

$$v''_k = 0 \Rightarrow v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1} = 0 \Rightarrow v_{k+1} = -v_{k-1}. \quad (3.144)$$

3. Luisti on tuki, jossa kiertymä ja leikkausvoima $Q = -EIv'''$ menevät nolliksi, ja tällöin reunan pisteessä k

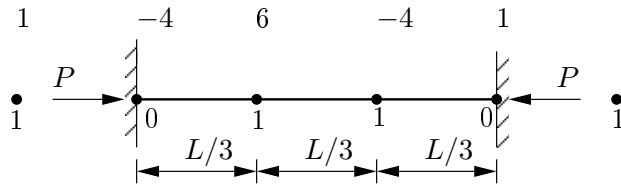
$$v'_k = 0 \Rightarrow v_{k+1} = v_{k-1}, \quad (3.145)$$

$$v'''_k = 0 \Rightarrow v_{k+2} - 2v_{k+1} + 2v_{k-1} + v_{k-2} = 0 \Rightarrow v_{k+2} = v_{k-2}. \quad (3.146)$$

4. Vapaassa päässä momentti menee nolliksi ja tasapainoehto $Pv' - Q = 0$ on voimassa, jolloin reunan pisteessä k saadaan ehdot

$$v''_k = 0 \Rightarrow v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1} = 0, \quad (3.147)$$

$$Pv'_k - Q_k = 0 \Rightarrow v_{k+2} = 2v_{k+1} - 2v_{k-1} + v_{k-2} - \frac{P}{EI}h^2(v_{k+1} - v_{k-1}). \quad (3.148)$$



Kuva 3.11 Jäykästi tuetun sauvan hilaverkko.

Esimerkki 3.7 Määritetään päistään jäykästi tuetun pilarin nurjahduskuorma differenssimenetelmällä.

Valitaan hilaväli $h \equiv \Delta x = \frac{L}{3}$, missä L on sauvan pituus, kuva 3.11. Numeroidaan hilapisteet symmetrian perusteella: 0 ja 1. Pisteessä 1 kirjoitetaan tasapainoehto differenssikaavana

$$\frac{EI}{h^4}(v_1 + 6v_1 - 4v_1) + \frac{P}{h^2}(-2v_1 + v_1) = 0, \quad (3.149)$$

eli

$$\left(\frac{3EI}{h^2} - P\right)v_1 = 0, \quad (3.150)$$

josta ratkaistaan nurjahduskuorma

$$P_{kr} = 3\frac{EI}{h^2} = 27\frac{EI}{L^2}. \quad (3.151)$$

Tarkka tulos on $P_{kr} = 39.4\frac{EI}{L^2}$. Valitsemalla hilaväli $h = \frac{L}{4}$ tulee

$$P_{kr} = 32\frac{EI}{L^2}, \quad (3.152)$$

jonka virhe on 23.4%.

Differenssimenetelmän tulosta voi parantaa ekstrapoloimalla. Kahden hilaverkon ratkaisun perusteella saadaan yhtälöt

$$P_{kr} - P_{kr1} = kh_1^2, \quad (3.153a)$$

$$P_{kr} - P_{kr2} = kh_2^2, \quad (3.153b)$$

missä k on kerroin. Yhtälöparista (3.153) ratkaistaan

$$P_{kr} \approx \frac{h_2^2 P_{kr1} - h_1^2 P_{kr2}}{h_2^2 - h_1^2}. \quad (3.154)$$

Esimerkin tapauksessa tulee

$$P_{kr} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 27 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 32}{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \frac{EI}{L^2} = 38.43 \frac{EI}{L^2}, \quad (3.155)$$

jonka virhe on 2.7%.

Esimerkki 3.8 Tutkitaan nivelellisesti tuettua sauvaa, johon vaikuttaa poikittaiskuorma Q keskipisteessä ja puristava voima P .

missä on merkitty

$$\lambda = \frac{PL^2}{16EI}. \quad (3.162)$$

Kerroinmatriisin determinantti on

$$\begin{vmatrix} -2 + \frac{1}{2}\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2 + \frac{2}{3}\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2 + \lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\lambda^3 - 3\lambda^2 + \frac{43}{6}\lambda - 4. \quad (3.163)$$

Merkitsemällä kerroinmatriisin determinantti nolaksi tulee kolmannen asteen yhtälö, jonka pienin juuri on $\lambda_1 \approx 0.80543$ ja sitä vastaava nurjahduskuorma on

$$P_{kr} \approx 12.885 \frac{EI}{L^2}, \quad (3.164)$$

kun tarkka tulos on $P_{kr} = 12.815 \frac{EI}{L^2}$.

3.6 Elementtimenetelmä

Elementtimenetelmässä nurjahdussauva jaetaan osiin, elementteihin, ja stabiiliusehto $\delta^2\Pi$ muodostetaan elementteittäin. Elementtikohtaiset tulokset kootaan lopuksi yhteen elementtiverkon solmujen vapausasteiden mukaisesti. Valitaan sauvan poikittaissiirtymän $v(x)$ interpoloimiseen kolmannen asteen polynomi. Elementin päiden vapausasteet ovat taipuma ja kiertymä, joten elementissä on yhteensä neljä vapausastetta.

Elementin alueella taipuma on

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\varphi_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\varphi_2 \quad (3.165)$$

tai matriisimuodossa

$$v(x) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (3.166)$$

missä $\varphi \equiv v'$ ja N_i ovat muotofunktiot. Laaduttoman koordinaatin $s = \frac{x}{L}$ funktiona

$$N_1(s) = 1 - 3s^2 + 2s^3, \quad (3.167)$$

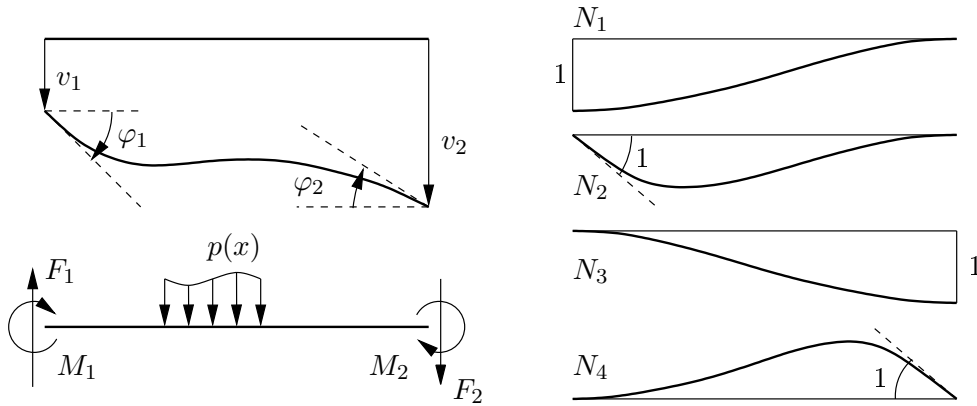
$$N_2(s) = L(s - 2s^2 + s^3), \quad (3.168)$$

$$N_3(s) = 3s^2 - 2s^3, \quad (3.169)$$

$$N_4(s) = L(-s^2 + s^3). \quad (3.170)$$

Sijoittamalla elementin interpolaatiopolynomi toisen variaation lausekkeeseen

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(v'')^2 - P(v')^2] dx \quad (3.171)$$



Kuva 3.14 Sauvaelementin vapausasteet ja muotofunktiot.

tulee

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \left\{ \int_0^L [(\mathbf{N}'')^T EI \mathbf{N}'' - P(\mathbf{N}')^T \mathbf{N}'] dx \right\} \mathbf{q} \quad (3.172)$$

tai lyhyemmin merkittynä

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T [\mathbf{C}^e - P\mathbf{B}^e] \mathbf{q}. \quad (3.173)$$

Tasajäykän ja L :n mittaisen elementin jäykkyyismatriisin

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{C}^e - P\mathbf{B}^e \quad (3.174)$$

osat ovat

$$\mathbf{C}^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (3.175)$$

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (3.176)$$

Lasketaan esimerkiksi matriisiin $\mathbf{C}^e$ termi C_{12}^e :

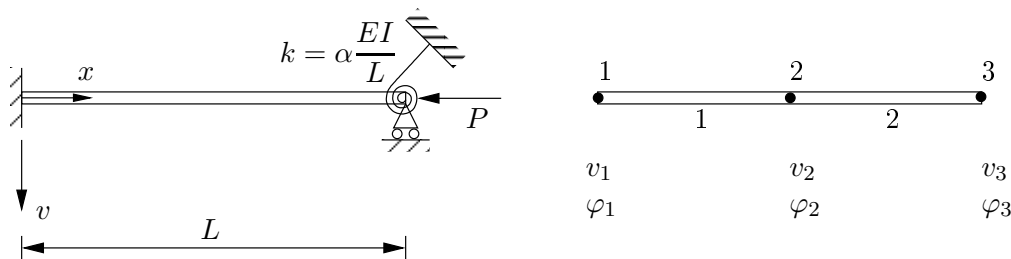
$$C_{12}^e = EI \int_0^L N_1'' N_2'' dx = \frac{EI}{L^2} \int_0^1 (-6 + 12s)(-4 + 6s) ds = 6 \frac{EI}{L^2}. \quad (3.177)$$

Muotofunktion tarpeelliset derivaatat lasketaan ketjusäännöllä. Esimerkiksi

$$N_1' = \frac{dN_1}{dx} = \frac{dN_1}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{L} \frac{dN_1}{ds} = \frac{1}{L}(-6s + 6s^2). \quad (3.178)$$

Elementtien osuuksista $\mathbf{C}^e$ ja $\mathbf{B}^e$ kootaan rakenteen (sauvan) jäykkyyismatriisi $\mathbf{C} + P\mathbf{B}$, ja ehto kriittiselle kuormalle saadaan asettamalla lausekkeen $\frac{1}{2}\delta^2\Pi$ kerroinmatriisin determinantti nolaksi, eli vaatimalla

$$\det[\mathbf{C} - P\mathbf{B}] = 0. \quad (3.179)$$



Kuva 3.15 Kierrejousella tuetun sauvan elementtimalli.

Ehdosta $\bar{\delta}(\frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}) = 0$ seuraa lineaarinen, homogeeninen yhtälöryhmä

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (3.180)$$

jolla on ei-triviaali ratkaisu, jos $\det \mathbf{K} = 0$ eli ehto (3.179) toteutuu.

Esimerkki 3.10 Määritetään elementtimenetelmällä toisesta päästä jäykästi tuetun ja toisesta päästä nivelellisen, kierrejousella tuetun sauvan nurjahduskuorma.

Valitaan ensin yhden elementin malli. Vasen tuki on solmu 1 ja oikea tuki on solmu 2. Yhden elementin mallin reunaehdot ovat

$$v_1 = \varphi_1 = v_2 = 0. \quad (3.181)$$

Ainoa jäljelle jäävä vapausaste on siten kiertymä φ_2 , ja elementin jäykkyysmatriiseista tarvitaan vain alkiot $(4, 4)$. Summaamalla vapausasteeseen φ_2 liittyvät termit ja kierrejousen (elementti, jonka pituus on nolla) jäykkyys tulee stabiiliusehto $\bar{\delta}(\frac{1}{2}\delta^2\Pi) = 0$ muotoon

$$\bar{\delta} \left\{ \frac{1}{2} \varphi_2 \left[\left(\frac{4EI}{L} + \alpha \frac{EI}{L} \right) - P \frac{4L}{30} \right] \varphi_2 \right\} = 0, \quad (3.182)$$

josta seuraa kriittinen kuorma

$$P_{kr} = \frac{15(4 + \alpha)}{2} \frac{EI}{L^2}. \quad (3.183)$$

Kun $\alpha = 0$, niin $P_{kr} = 30 \frac{EI}{L^2}$. Tarkka tulos on $P_{kr} = 20.19 \frac{EI}{L^2}$.

Ratkaistaan sama tehtävä vielä kahden elementin mallilla. Solmuja tulee nyt kolme, joista yksi on sauvan keskipisteessä. Reunaehdot ovat

$$v_1 = \varphi_1 = v_3 = 0. \quad (3.184)$$

Merkitään lyhyemmin, että kierrejousen jäykkyys on

$$k = \alpha \frac{EI}{L}. \quad (3.185)$$

Kootaan rakenteen globaaliin jäykkyysmatriisiin vain ne rivit ja sarakkeet, joita vastaavaa vapausastetta ei ole reunaehdolla asetettu nolaksi, ja saadaan tiivistetty yhtälöryhmä (3.180)

$$\begin{bmatrix} K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{14}^2 \\ K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{24}^2 \\ K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{44}^2 + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.186)$$

eli

$$\begin{bmatrix} 192\frac{EI}{L^3} - \frac{24}{5}\frac{P}{L} & 0 & 24\frac{EI}{L^2} - \frac{1}{10}\frac{P}{L} \\ 0 & 16\frac{EI}{L} - \frac{2}{15}PL & 4\frac{EI}{L} + \frac{1}{60}PL \\ 24\frac{EI}{L^2} - \frac{1}{10}P & 4\frac{EI}{L} + \frac{1}{60}PL & (8+\alpha)\frac{EI}{L} - \frac{1}{15}PL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.187)$$

Edellä jäykkyysmatriisin alkion K_{ij}^e yläindeksi on elementin numero. Asettamalla kerroinmatriisin determinantti nolaksi saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} (192 - \frac{24}{5}\lambda)(16 - \frac{2}{15}\lambda)(8 + \alpha - \frac{1}{15}\lambda) - (192 - \frac{24}{5}\lambda)(4 + \frac{1}{60}\lambda)^2 \\ - (16 - \frac{2}{15}\lambda)(24 - \frac{1}{10}\lambda)^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.188)$$

missä on merkitty

$$\lambda = \frac{PL^2}{EI}. \quad (3.189)$$

Pienin juuri tapauksessa $\alpha = 0$ (ei kierrejoustusta) on

$$\lambda_1 = 20.71, \quad (3.190)$$

josta saadaan nurjahduskuorma

$$P_{kr} = 20.71 \frac{EI}{L^2}. \quad (3.191)$$

Tarkka tulos on tässä tapauksessa $P_{kr} = 20.19 \frac{EI}{L^2}$.

3.7 Peräkkäisten approksimaatioiden menetelmä

Peräkkäisten aproksimaatioiden menetelmää käytetään nurjahduskuorman määrittämiseen niissä tapauksissa, joissa tarkkaa ratkaisua ei tunneta tai se on hyvin monimutkainen. Menetelmällä saadaan kriittisen kuorman ylä- ja alaraja-arviot.

Menetelmässä otaksutaan ensin sauvan taipumafunktio $v_1(x)$, ja määritetään sitten sen perusteella vastaava momenttijakauma $M_1(x)$ puristavan voiman P funktiona. Saadun momenttijakauman perusteella määritetään taipumafunktio $v_2(x)$. Asettamalla alunperin otaksuttu taipuma v_1 ja laskettu taipuma v_2 yhtäsuuriksi saadaan ehto kriittisen kuorman määrittämiseksi. Menettely toistetaan niin monta kertaa, että tulos vakiintuu tiettyyn arvoon. Taipumat v_1 ja v_2 voidaan asettaa yhtäsuuriksi missä tahansa pisteessä $a \in (0, L)$ eli

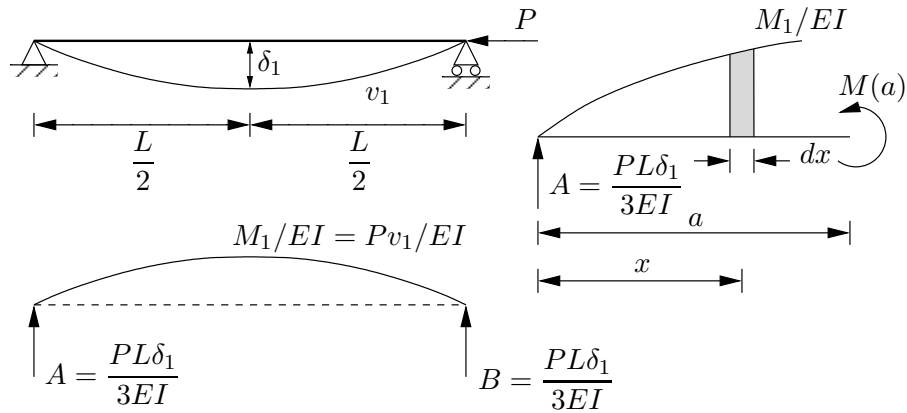
$$v_1(a) = v_2(a), \quad a \in (0, L). \quad (3.192)$$

Yhtälöstä saatu pienin P :n arvo edustaa alarajaa ja suurin ylärajaa. Tarkempia arvioita kriittiselle kuormalle saadaan taipumien keskiarvojen avulla.

Esimerkki 3.11 Määritetään niveltuetun sauvan nurjahduskuorma.

Otaksutaan taipumalle lauseke

$$v_1(x) = 4\delta_1 \frac{x(L-x)}{L^2}, \quad (3.193)$$



Kuva 3.16 Nivelsauvan taipuma Mohrin analogialla.

missä δ_1 on keskipisteen taipuma. Sauvan taivutusmomentti on

$$M_1(x) = Pv_1(x). \quad (3.194)$$

Momenttia $M_1(x)$ vastaava taipuma voidaan määrittää esimerkiksi Mohrin menetelmällä (analogialla). Asetetaan palkin kuormaksi $\frac{M_1(x)}{EI}$. Tukireaktiot ovat $A = B = \frac{PL\delta_1}{3EI}$. Momentti pisteessä $x = a$ on

$$M(a) = Aa - \int_0^a \frac{Pv_1(x)}{EI} (a-x) dx. \quad (3.195)$$

Taipumafunktioksi tulee

$$v_2(x) = \frac{PL\delta_1}{3EI} x \left(1 - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right). \quad (3.196)$$

Asettamalla esimerkiksi

$$v_1\left(\frac{L}{2}\right) = v_2\left(\frac{L}{2}\right) \quad (3.197)$$

saadaan

$$\delta_1 = \frac{5PL^2}{48EI} \delta_1 \quad \Rightarrow \quad P_{kr} = 9.6 \frac{EI}{L^2}, \quad (3.198)$$

kun tarkka tulos on $P_{kr} = 9.87 \frac{EI}{L^2}$.

Asettamalla taipumafunktioiden $v_1(x)$ ja $v_2(x)$ keskiarvot yhtäsuuriksi, eli

$$\frac{1}{L} \int_0^L v_1(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L v_2(x) dx \quad (3.199)$$

tulee

$$\frac{2}{3} \delta_1 = \frac{PL^2}{15EI} \delta_1 \quad \Rightarrow \quad P_{kr} = 10 \frac{EI}{L^2}. \quad (3.200)$$

Nurjahduskuormalle saadaan ylä- ja alaraja-arviot määrittämällä suhteen

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{12EI}{PL^2} \frac{L^2(L-x)}{L^3 - 2x^2L + x^3} \quad (3.201)$$

maksimi- ja minimiarvot. Pisteessä $x = a$ tulee

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)_{\max} = 12 \frac{EI}{PL^2}, \quad (3.202)$$

ja pisteessä $x = \frac{L}{2}$ saadaan taipumafunktioiden $v_1(x)$ ja $v_2(x)$ suhteen minimiarvo

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)_{\min} = 9.6 \frac{EI}{PL^2}. \quad (3.203)$$

Tähänastisilla laskelmilla on saatu arvio

$$9.6 \frac{EI}{L^2} < P_{kr} < 12 \frac{EI}{L^2}. \quad (3.204)$$

Asettamalla uudeksi lähtöfunktioiksi

$$v_2(x) = \frac{16\delta_2}{5L} x \left(1 - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right), \quad (3.205)$$

joka toteuttaa ehdon $v_2\left(\frac{L}{2}\right) = \delta_2$, voidaan määrittää taipumaa $v_2(x)$ vastaava momentti ja uusi taipuma

$$v_3(x) = \frac{8PL^2\delta_2}{75EI} \left(3\frac{x}{L} - 5\frac{x^3}{L^3} + 3\frac{x^5}{L^5} - \frac{x^6}{L^6}\right). \quad (3.206)$$

Asettamalla

$$v_2\left(\frac{L}{2}\right) = v_3\left(\frac{L}{2}\right) \quad (3.207)$$

tulee

$$P_{kr} = 9.836 \frac{EI}{L^2}. \quad (3.208)$$

Luku 4

Leikkausmuodonmuutoksen vaikutus nurjahduskuormaan

4.1 Taipuman differentiaaliyhtälö

Tarkastellaan seuraavaksi lyhyesti leikkausmuodonmuutoksen vaikutusta nurjahduskuormaan. Homogeenisen, hoikan pilarin tapauksessa leikkausmuodonmuutoksen merkitys on pieni, mutta kerroksellisten tai yhdistettyjen sauvojen stabiiliuden analysoinnissa se on yleensä otettava huomioon.

Leikkausmuodonmuutoksen (liukuman) ja leikkausjännityksen välisen yhteyden

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (4.1)$$

ja kaavan

$$\tau_{xy} = \zeta \frac{Q_y}{A} \quad (4.2)$$

avulla saadaan

$$\gamma_{xy} = \frac{\zeta}{GA} Q_y \quad (4.3)$$

massiiviselle poikkileikkaukselle.

Merkitsemällä

$$\alpha = \frac{\zeta}{GA} \quad (4.4)$$

ja jättämällä indeksit pois päädytään kaavaan

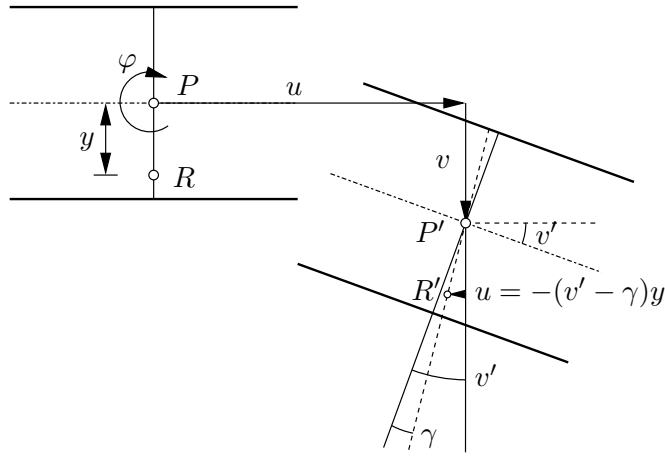
$$\gamma = \alpha Q. \quad (4.5)$$

Kerroin $\zeta = 1.2$ suorakaidepoikkileikkaukselle, ja esim. I-poikkileikkaukselle $\zeta = 2, \dots, 2.4$.

Akselin x suuntainen siirtymä on

$$u = -\varphi y, \quad (4.6)$$

missä φ on poikkileikkauksen kiertymä (positiivinen myötäpäivään).



Kuva 4.1 Leikkausmuodonmuutos γ .

Leikkausmuodonmuutos lausuttuna siirtymien avulla on

$$\begin{aligned}\gamma \equiv \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= -\varphi + v',\end{aligned}\tag{4.7}$$

Kaavan (4.6) perusteella

$$u = -(v' - \gamma)y,\tag{4.8}$$

ja sauvan mielivaltaisen pisteen venymä on

$$\varepsilon = u' = (-v'' + \gamma')y,\tag{4.9}$$

eli

$$\varepsilon = \kappa y,\tag{4.10}$$

missä on määritelty käyristymä

$$\kappa = -v'' + \gamma'.\tag{4.11}$$

Puristetussa sauvassa sauvan akselia vastaan kohtisuora leikkausvoima on

$$Q = Pv',\tag{4.12}$$

ja

$$\gamma = \alpha Pv'.\tag{4.13}$$

Sauvan käyristymä voidaan siten kirjoittaa muodossa

$$\kappa = -v''(1 - \alpha P).\tag{4.14}$$

Sauvan taivutusmomentti on

$$M(x) = EI\kappa(x) = -EI(1 - \alpha P)v''(x).\tag{4.15}$$

Sijoittamalla momentin kaava sauvan tasapainoyhtälöön

$$M''(x) - Pv''(x) = 0 \quad (4.16)$$

tulee

$$(1 - \alpha P)(EIv'')'' + Pv'' = 0. \quad (4.17)$$

Tapauksessa EI on vakio tasapainoehto voidaan kirjoittaa lyhyesti muotoon

$$v^{(4)} + k^2 v'' = 0, \quad (4.18)$$

missä on merkitty

$$k^2 = \frac{P}{EI(1 - \alpha P)}. \quad (4.19)$$

Esimerkki 4.1 Määritetään ulokesauvan nurjahduskuorma ottamalla huomioon leikkausmuodonmuutos, kun sauvan poikkileikkaus on massiivinen.

Eulerin ensimmäisessä nurjahdustapauksessa

$$k^2 = \frac{\pi^2}{4L^2}, \quad (4.20)$$

ja kaikki reunaehtotapaukset voidaan käsitellä yhdellä kaavalla

$$k^2 = \frac{\pi^2}{L_n^2}, \quad (4.21)$$

missä L_n on nurjahduspituus. Leikkausmuodonmuutos huomioon ottaen

$$k^2 = \frac{P}{EI(1 - \alpha P)}. \quad (4.22)$$

Merkitsemällä $P_E = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$ Eulerin ensimmäisessä tapauksessa ja yleisessä tapauksessa

$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L_n^2}$ voidaan leikkausmuodonmuutoksen huomioonottava nurjahduskuorma kirjoittaa muotoon

$$P_{kr} = \frac{P_E}{1 + \alpha P_E}. \quad (4.23)$$

Esimerkki 4.2 Määritetään ristikkosauvan nurjahduskuorma.

Määritetään liukuma γ ja joustokerroin α virtuaalisen työn periaatteen avulla. Tutkitaan ristikkosauvan yhtä a :n mittaista osaa. Kuormittamalla tarkasteltavaa ristikon jaksoa yksikön suuruisella poikittaisvoimalla $\tilde{Q} = 1$ saadaan lasketuksi sitä vastaava liukuma γ ja kerroin α . Lasketaan ensin todellisen kuorman (leikkausvoiman) Q aiheuttamat sauvavoimat ja sauvojen pituudenmuutokset.

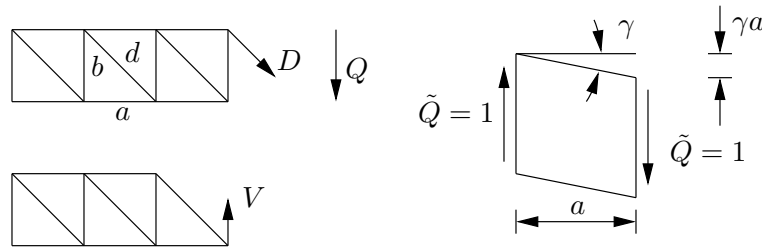
Tasapainoehdoista

$$\frac{b}{d}D = Q, \quad (4.24)$$

$$-V = Q \quad (4.25)$$

seuraa

$$D = \frac{d}{b}Q, \quad V = -Q. \quad (4.26)$$



Kuva 4.2 Ristikkosauvan voimat ja liukuma.

Sauvavoimien perusteella sauvojen pituudenmuutokset ovat

$$\Delta_D = \frac{D}{EA_d}d = \frac{d^2}{EA_db}Q \quad (4.27)$$

ja

$$\Delta_V = \frac{V}{EA_b}b = -\frac{b}{EA_b}Q, \quad (4.28)$$

missä indeksit b ja d viittaavat sauvaan b ja diagonaalisauvaan d .

Virtuaalinen voima $\tilde{Q} = 1$ aiheuttaa sauvavoimat

$$\tilde{D} = \frac{d}{b}, \quad \tilde{V} = -1. \quad (4.29)$$

Virtuaalisen työn periaatteen mukaisesti pätee yhtälö

$$\tilde{Q}\gamma a = \tilde{D}\Delta_D + \tilde{V}\Delta_V. \quad (4.30)$$

Sijoittamalla sauvavoimien kaavat saadaan yhtälö muotoon

$$\gamma a = \frac{d}{b} \frac{d^2}{EA_db}Q + (-1) \left(-\frac{b}{EA_b} \right) Q \quad (4.31)$$

ja edelleen

$$\gamma = \frac{1}{a} \left(\frac{d^3}{EA_db^2} + \frac{b}{EA_b} \right) Q = \alpha Q. \quad (4.32)$$

Kertoimen α lauseke on siten

$$\alpha = \left(\frac{d^3}{EA_db^2a} + \frac{b}{EA_ba} \right). \quad (4.33)$$

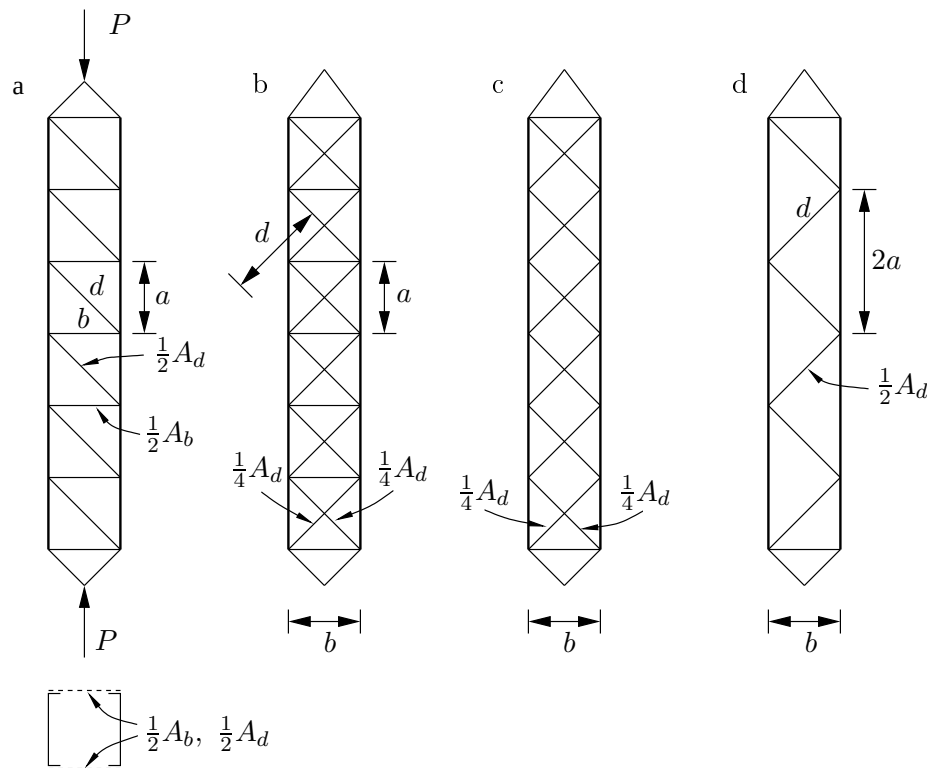
Kuvan 4.3 tapauksissa b, c ja d joustokerroin α on

$$\alpha = \frac{d^3}{EA_db^2a}. \quad (4.34)$$

Esimerkki 4.3 Määritetään leikkausmuodonmuutoksen vaikutuksen huomioonottava kerroin α kehäsaualle.

Tutkitaan kuvan 4.4 kehäsauvan yhden jakson deformaatiota. Paarteiden taipumaviivojen käännepisteet otaksutaan (likimääräisesti) sidosauvojen puoliväliin. Merkitään, että puolen sidevälin matkalla paarusauvan taipuma on δ . Tällöin sitä vastaava liukuma on $\gamma = \frac{\delta}{a/2}$. Lasketaan siirtymä δ virtuaalisen työn yhtälöllä tutkimalla kehäsauvan osaa. Virtuaalisen työn periaatteen mukaan

$$\tilde{1}\delta = \int \tilde{M} \frac{M}{EI} ds, \quad (4.35)$$



Kuva 4.3 Ristikkosauvoja.

kun otetaan huomioon vain taivutusmomentin osuus deformaatiossa. Kuvan 4.4 momenttijakaumilla tulee

$$\delta = \frac{1}{3} \frac{a}{2} \left(-\frac{Qa}{4} \right) \left(-\frac{a}{2} \right) \frac{1}{EI_a} + \frac{1}{3} \frac{b}{2} \left(-\frac{Qa}{2} \right) \left(-\frac{a}{2} \right) \frac{1}{EI_b} \quad (4.36)$$

eli

$$\delta = \left(\frac{a^3}{48EI_a} + \frac{a^2b}{24EI_b} \right) Q \quad (4.37)$$

ja

$$\gamma = \frac{\delta}{a/2} = \left(\frac{a^2}{24EI_a} + \frac{ab}{12EI_b} \right) Q \quad (4.38)$$

sekä

$$\alpha = \frac{a^2}{24EI_a} + \frac{ab}{12EI_b}. \quad (4.39)$$

Kertoimen α kaavassa on mukana myös paarteiden taipuman vaikutus.

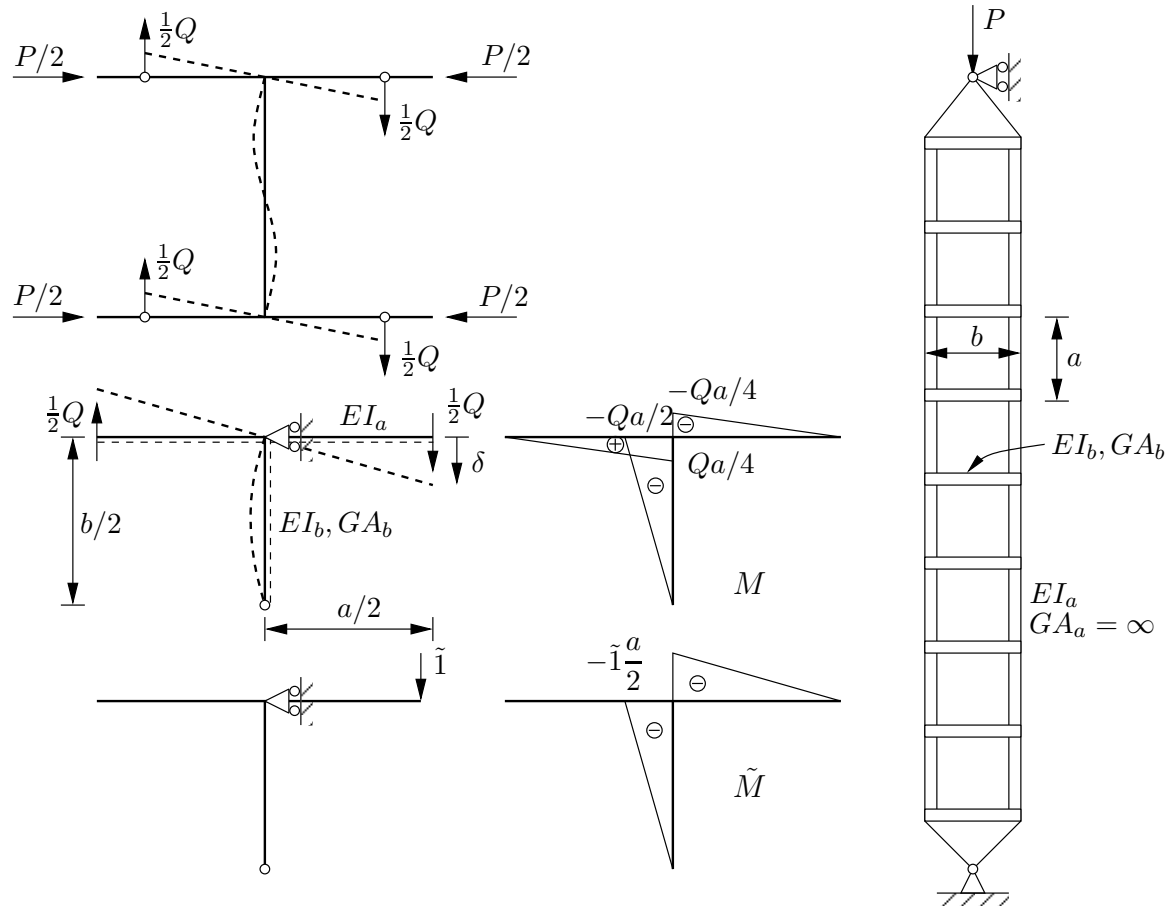
Ottamalla huomioon siteiden äärellinen leikkausjäykkyys GA_b (leikkausmuodonmuutos) taipumaan δ tulee lisäosa δ_Q . Sensijaan paarteiden leikkausmuodonmuutosten osuutta ei oteta nyt huomioon, (arvioidaan merkityksettömäksi).

Edelleen virtuaalisen työn periaatetta soveltaen lasketaan lisäosa

$$\delta_Q = \frac{b}{2} \left(-\frac{a}{b} Q \right) \left(-\frac{a}{b} \right) \frac{\zeta}{GA_b} = \frac{\zeta a^2}{2GA_b b} Q, \quad (4.40)$$

ja laskettu lisätaipuma huomioonotettuna saadaan

$$\alpha = \frac{a^2}{24EI_a} + \frac{ab}{12EI_b} + \frac{\zeta a}{GA_b b}. \quad (4.41)$$



Kuva 4.4 Kehäsauva.

Kerrointa α voidaan vielä tarkentaa ottamalla huomioon osasauvojen puristavan voiman vaikutus kertoimella β . Jos ulokkeeseen, jonka pituus on $\frac{a}{2}$, kohdistuu puristava voima $\frac{P}{2}$, niin kerroin β on

$$\beta = \frac{\left(\frac{P_{kr}}{2}\right) a^2}{\pi^2 EI_a}. \quad (4.42)$$

Kertoimeksi α tulee

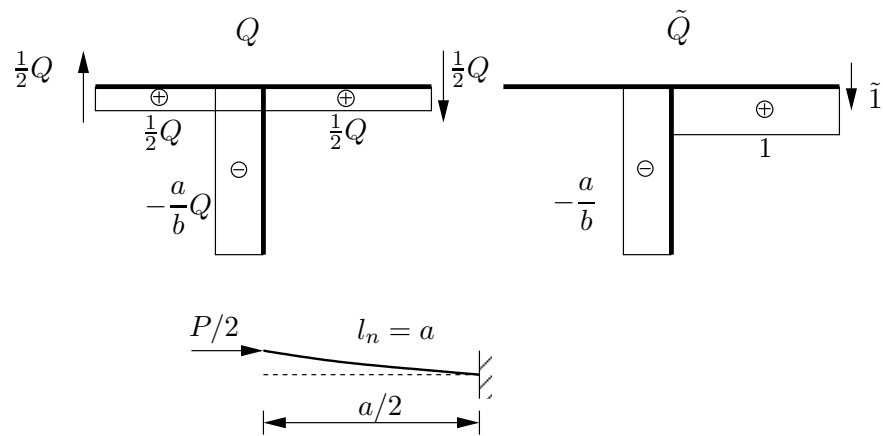
$$\alpha = \frac{a^2}{24EI_a(1-\beta)} + \frac{ab}{12EI_b} + \frac{\zeta a}{GA_b b}, \quad (4.43)$$

ja kriittinen kuorma on

$$P_{kr} = \frac{P_E}{1 + \alpha P_E}, \quad (4.44)$$

missä P_E on Eulerin nurjahduskuorma vastaavalla tavalla tuetulle pilarille, kun $\alpha = 0$. Kertoimen $\beta(P_{kr})$ huomioonottaminen johtaa iteratiivisen ratkaisun:

$$P_{kr} \rightarrow \alpha(P_{kr}) \rightarrow P_{kr}. \quad (4.45)$$



Kuva 4.5 Kehäsauva; leikkausvoiman ja normaalivoiman vaikutus.

Luku 5

Kimmoton nurjahdus

5.1 Tangenttimoduuliteoria

Eulerin nurjahduskaavat pätevät, jos jännitys pilarin poikkileikkauksessa on myötörajaa pienempi. Lyhyiden pilareiden stabiiliuden menetys voi kuitenkin tapahtua myötörajaa (tai suhteellisuusrajaa) suuremmilla jännityksen arvoilla.

Tutkitaan seuraavassa sauvaa, jonka materiaalin venymäpiirros on kuvan 5.1 mukainen. Suoran, puristetun sauvan jännitys on

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad (5.1)$$

missä A on poikkileikkauksen pinta-ala. Jos jännitys on suhteellisuusrajaa suurempi, esim. jännitys σ_b kuvassa 5.1, niin jännityksen ja venymän välinen yhteys on

$$d\sigma = E_t d\varepsilon, \quad (5.2)$$

missä E_t on tangenttimoduuli.

Taipuma $v(x)$ (suorasta perustilasta) aiheuttaa jännityksen muutoksen

$$\Delta\sigma = -E_t v'' y, \quad (5.3)$$

jota vastaa momentti (momentin muutos)

$$M = -E_t I v''. \quad (5.4)$$

Aiemmin johdettu tasapainoehto

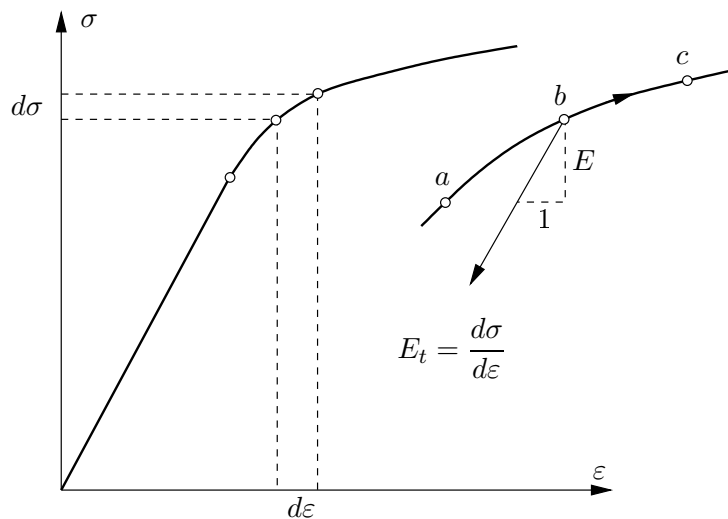
$$M'' - P v'' = 0, \quad (5.5)$$

eli

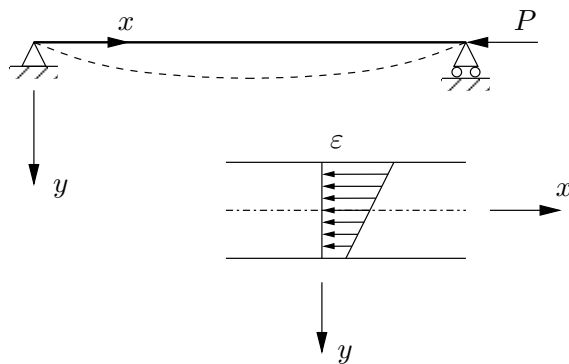
$$(E_t I v'')'' + P v'' = 0 \quad (5.6)$$

on voimassa, ja nurjahduskuormaksi saadaan

$$P_{kr,t} = \frac{\pi^2 E_t I}{L_n^2}. \quad (5.7)$$



Kuva 5.1 Venymäpiirros.



Kuva 5.2 Poikkileikkauksen muodonmuutos.

Suhteellisuusrajan yläpuolella kriittinen kuorma on Eulerin nurjahduskuormaa pienempi, koska $E_t \leq E$. Kaava (5.7) ei ole käyttökelpoinen, koska tangentialmoduuli E_t riippuu jännityksen arvosta. Jakamalla kaava pinta-alalla A tulee

$$\sigma_t = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda_n^2}, \quad (5.8)$$

missä siis on merkitty

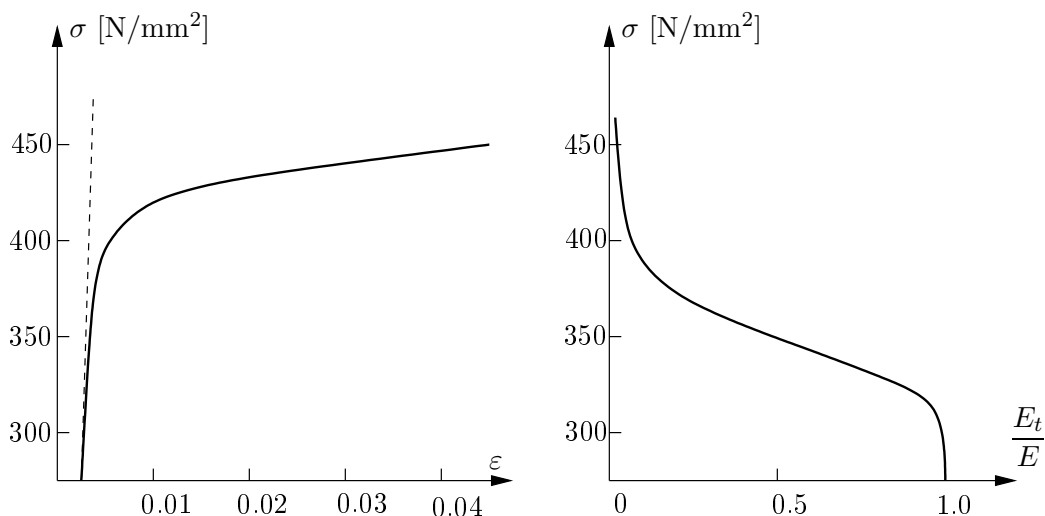
$$\sigma_t \equiv \sigma_{kr,t} = \frac{P_{kr,t}}{A}. \quad (5.9)$$

Jännityksen ja hoikkuusluvun λ_n välinen riippuvuus saadaan antamalla σ_t :lle arvo ja määrittämällä tangentialmoduuli $E_t = f(\sigma)$.

Venymäpiirros voidaan esittää esimerkiksi kaavalla

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma_n}{Em} \left(\frac{\sigma}{\sigma_n} \right)^m, \quad (5.10)$$

jossa E on kimmokerroin ja σ_n sekä m ovat materiaalivakioita. Alumiinin tapauksessa



Kuva 5.3 Venymäpiirrosta vastaava tangenttimoduuli.

$E = 78600 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$, $m = 24$ ja $\sigma_n = 360 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$. Tangenttimoduuli saadaan kaavasta

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{d\sigma} &= \frac{1}{E} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_n} \right)^{m-1} \right] \\ &= \frac{1}{E_t}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

ja

$$E_t = E \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_n} \right)^{m-1} \right]^{-1}. \quad (5.12)$$

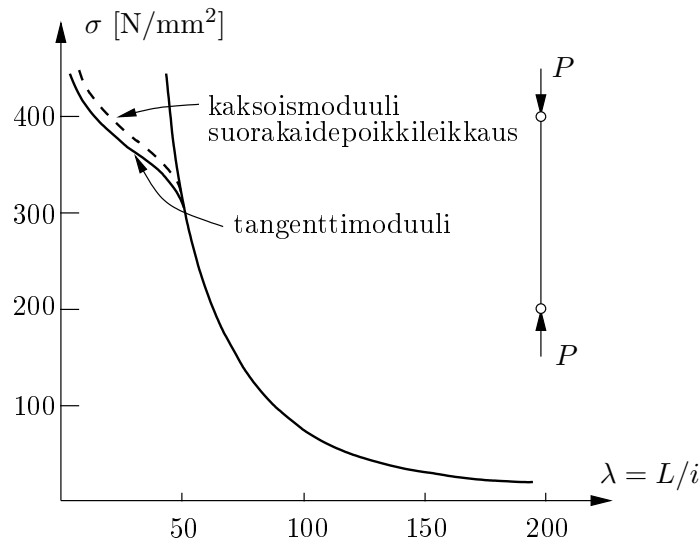
Jännityksen ja venymän sekä tangenttimoduulin ja kimmomoduulin suhteen $\frac{E_t}{E}$ riippuvaisuudet on esitetty kuvassa 5.3.

Tangenttimoduuliteorian (σ, λ) -käyrä riippuu materiaalin ominaisuuksista, mutta se ei riipu poikkileikkauksen muodosta. Tangenttimoduuliteorian esitti Engesser vuonna 1889. Jasinski kritisoi tangenttimoduuliteoriaa vuonna 1895 ja huomautti, että sauvan taipuessa kuperan puolen jännitysten pitäisi palautua kimmoisesti venymäpiirroksen pisteestä b lähtien, kuva 5.3.

Kimmoisen palautumisen huomioonottaminen sauvan kuperalla puolella (vähemmän puristetulla puolella) johti ns. redusoidun moduulin teoriaan tai **kaksoismoduulin** käyttöönottoon. Tämän teorian esittivät toisistaan riippumatta Engesser vuonna 1895, von Kármán vuonna 1909 ja Southwell vuonna 1912.

5.2 Kaksoismoduuliteoria

Tarkastellaan (x, y) -tason suhteen symmetristä poikkileikkausta. Otaksutaan, että nurjahduksen tapahtuessa P ei muutu, eli $\Delta P = 0$, ja jännityksen kimmainen palautuminen otetaan huomioon sauvan kuperalla puolella. Lisävenymä (venymän muutos) on



Kuva 5.4 Nurjahdusjännitys hoikkuuden funktiona.

$$\Delta \varepsilon = y \Delta \kappa, \quad (5.13)$$

missä y on etäisyys neutraaliakselista. Lisänormaalivoima on

$$\begin{aligned} \Delta N &= \int_{A_1} E_t \Delta \varepsilon dA + \int_{A_2} E \Delta \varepsilon dA \\ &= E_t \int_{-h_1}^0 y b dy \Delta \kappa + E \int_0^{h_2} y b dy \Delta \kappa \\ &= (E_t S_1 + E S_2) \Delta \kappa. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ehdosta

$$\Delta N = -\Delta P = 0 \quad (5.15)$$

seuraa

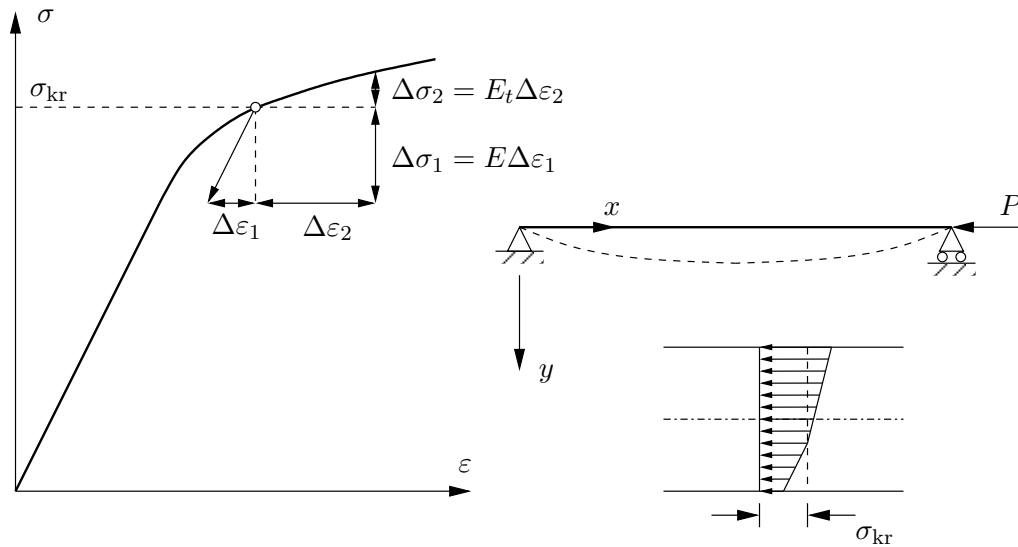
$$E_t S_1 + E S_2 = 0, \quad (5.16)$$

missä on otettu käyttöön poikkipintasuureet

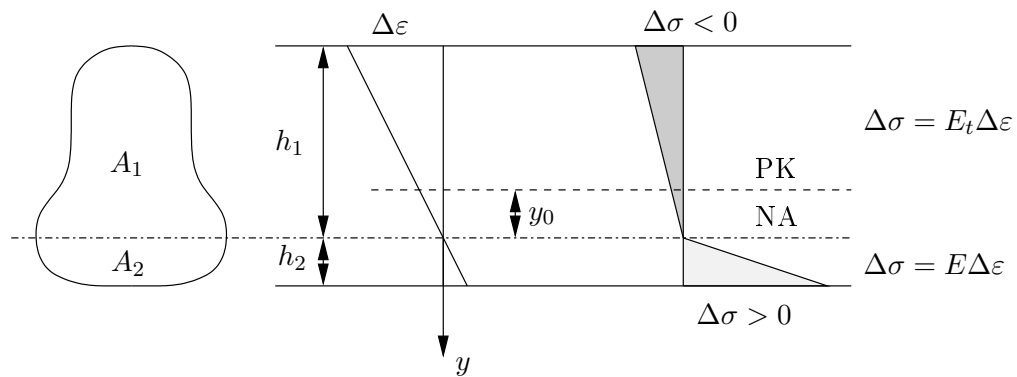
$$S_1 = \int_{-h_1}^0 y b dy, \quad (5.17)$$

$$S_2 = \int_0^{h_2} y b dy, \quad (5.18)$$

y on etäisyys neutraaliakselista ja b on poikkileikkauksen leveys. Ehdosta (5.16) ratkaistaan neutraaliakselin (NA) asema eli etäisyydet h_1 ja h_2 .



Kuva 5.5 Kaksoismoduuliteoria.



Kuva 5.6 Kaksoismoduuliteorian venymä- ja jännitysjaumat.

Koska nyt $\Delta N = 0$, voidaan momentti $M = \Delta M$ (taipumasta eli lisätaipumasta aiheutuva momentti) laskea neutraaliakselin suhteen. Momentti on

$$\begin{aligned}
 M &= \int_A y \sigma \, dA \\
 &= \int_{A_1} y E_t \Delta \epsilon \, dA + \int_{A_2} y E \Delta \epsilon \, dA \\
 &= E_t \int_{-h_1}^0 y^2 b \, dy \Delta \kappa + E \int_0^{h_2} y^2 b \, dy \Delta \kappa \\
 &= (E_t I_1 + E I_2) \Delta \kappa \\
 &\equiv E_r I \Delta \kappa,
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

missä on määritelty **redusoitu moduuli**

$$E_r = \frac{E_t I_1 + E I_2}{I}, \quad (5.20)$$

ja poikkipintasuureet

$$I_1 = \int_{-h_1}^0 y^2 b \, dy, \quad I_2 = \int_0^{h_2} y^2 b \, dy. \quad (5.21)$$

Nurjahduskuorma ja nurjahdusjännitys ovat tässäkin tapauksessa

$$P_{kr,r} = \frac{\pi^2 E_r I}{L_n^2}, \quad (5.22)$$

$$\sigma_{kr,r} = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda_n^2}. \quad (5.23)$$

Moduuli E_r riippuu poikkileikkauksen muodosta ja (σ, ε) -käyrästä. Kaksoismoduuliteoria antaa tangentialmoduuliteoriaa suuremman kriittisen kuorman, eli $P_{kr,r} > P_{kr,t}$.

Esimerkki 5.1 Määritetään *I*-poikkileikkauksen redusoitu moduuli.

Jos I-poikkileikkauksen uuma on hyvin hoikka, niin kaavasta (5.16) seuraa yhtälö

$$-E_t A h_1 + E A h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{E_t}{E} h_1. \quad (5.24)$$

Koska $h = h_1 + h_2$, saadaan ratkaistua

$$h_1 = \frac{E}{E + E_t} h, \quad h_2 = \frac{E_t}{E + E_t} h. \quad (5.25)$$

Poikkileikkauksen jäyhyysvakiot ovat

$$I_1 = A h_1^2 = A \left(\frac{E}{E + E_t} \right)^2 h^2, \quad I_2 = A h_2^2 = A \left(\frac{E_t}{E + E_t} \right)^2 h^2 \quad (5.26)$$

ja

$$I = \frac{1}{2} A h^2. \quad (5.27)$$

Redusoidun moduulin lausekkeeksi tulee

$$E_r = \frac{E_t I_1 + E I_2}{I} = \frac{2 E_t E}{E_t + E}. \quad (5.28)$$

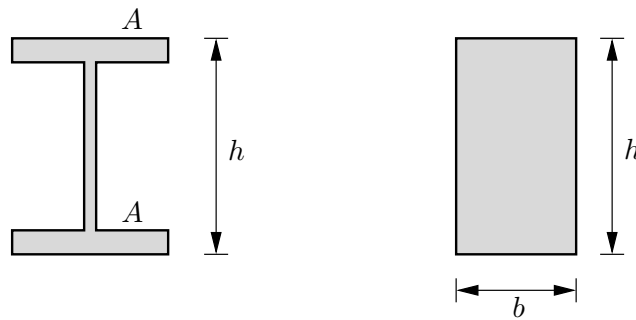
Esimerkki 5.2 Määritetään suorakaidepoikkileikkauksen kaksoismoduuli.

Ehdosta (5.16) seuraa suorakaidepoikkileikkaukselle

$$-E_t \frac{b h_1^2}{2} + E \frac{b h_2^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \sqrt{\frac{E_t}{E}} h_1. \quad (5.29)$$

Koska myös tälle poikkileikkaukselle $h = h_1 + h_2$ saadaan

$$h_1 = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} h, \quad h_2 = \frac{\sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} h. \quad (5.30)$$



Kuva 5.7 I- ja suorakaidepoikkileikkaus.

Poikkileikkauksen jäyhyysvakiot suorakaiteelle ovat

$$I_1 = \frac{1}{3}bh_1^3 = \frac{1}{3}bh^3 \left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} \right)^3, \quad (5.31)$$

$$I_2 = \frac{1}{3}bh_2^3 = \frac{1}{3}bh^3 \left(\frac{\sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} \right)^3 \quad (5.32)$$

ja

$$I = \frac{1}{12}bh^3. \quad (5.33)$$

Redusoidun moduulin lausekkeeksi tulee suorakaidepoikkileikkaukselle

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E_t} + \sqrt{E})^2}. \quad (5.34)$$

5.3 Shanleyn teoria

Joitakin vuosia kaksoismoduuliteoriaa pidettiin oikeana. Huolellisten kokeiden tulokset olivat kuitenkin lähempänä tangenttimoduuliteorian ratkaisuja. Lisäksi tangenttimoduulin käyttö on helppoa, koska E_t ei riipu poikkileikkauksen muodosta.

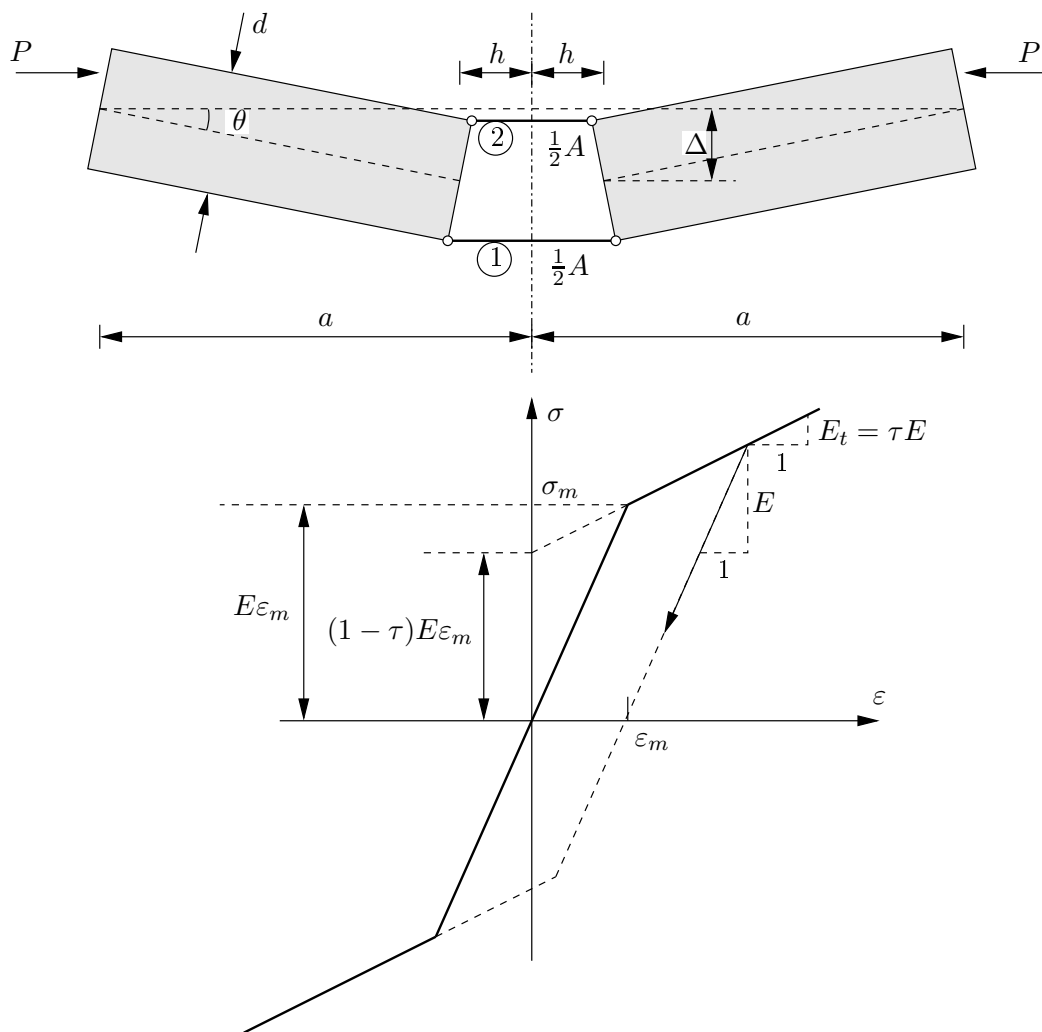
Shanley osoitti julkaisuissaan vuosina 1946-47, että sauvan taipuminen alkaa normaallivoiman yhä kasvaessa. Tällöin on mahdollista, että kupuran puolen eli alueen $y > 0$ puristusjännitys kasvaa, ainakin nurjahduksen alkuvaiheissa, tangenttimoduuliteorian mukaisesti. Shanley päätteli, että tangenttimoduulikaava antaa suurimman jännityksen, jolla sauva vielä pysyy suorana. Suoran sauvan ja keskeisen kuorman tapauksessa tangenttimoduuliteoria antaa kriittisen jännityksen alaraja-arvion.

5.3.1 Shanleyn malli

Shanley teki päätelmänsä kuvan 5.8 mallia tutkimalla. Malli jäljittelee todellisen, jatkuvan aineen mukaisen pilarimallin toimintaa olennaisilta osin riittävän tarkasti, eikä sen soveltamisessa törmätä ylipääsemättömiin analyyttisiin ongelmiin ¹.

Kuvan 5.8 mallissa kaksi äärettömän jäykkää sauvaa, joiden mitat ovat $(a - h)d$, on liitetty toisiinsa nivelsauvoilla, joiden pituus on $2h$ ja poikkileikkauksen pinta-ala on $\frac{A}{2}$.

¹"Make everything as simple as possible, but no simpler." – *Albert Einstein*.



Kuva 5.8 Shanleyn malli.

Nivelsauvojen (σ, ϵ) -käyrä on bilineaarinen (koostuu kahdesta suorasta viivasta). Kuorman epäkeskisyyden on e . Nivelsauvojen 1 ja 2 venymät ovat ϵ_1 ja ϵ_2 . Jäykkien sauvojen kiertymä on θ , ja olettaen (tässä yhteydessä), että σ ja ϵ ovat positiivisia puristuksessa, saadaan yhteys

$$\theta = \frac{h(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d}, \quad (5.35)$$

ja taipuma Δ on puolestaan

$$\Delta = (a - h)\theta = (a - h)\frac{h}{d}(\epsilon_2 - \epsilon_1). \quad (5.36)$$

Nivelsauvojen sauvavoimat ovat

$$P_1 = \frac{A}{2}\sigma_1, \quad P_2 = \frac{A}{2}\sigma_2. \quad (5.37)$$

Kokonaisvoima on siten

$$P = P_1 + P_2 = \frac{A}{2}(\sigma_1 + \sigma_2). \quad (5.38)$$

Momentin tasapainoehto puristavan voiman P vaikutussuoran suhteen muodostettuna on

$$P_1(\Delta + e + \frac{d}{2}) + P_2(\Delta + e - \frac{d}{2}) = 0. \quad (5.39)$$

Kaavan (5.36) perusteella saadaan

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{\Delta}{a - h} \frac{d}{h}. \quad (5.40)$$

Merkitään seuraavassa lyhyemmin

$$x \equiv \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \quad \sigma = \frac{P}{A}. \quad (5.41)$$

Bilineaarisen materiaalimallin mukaan kirjoitetaan

$$\sigma_i = a_i + b_i \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \quad (5.42)$$

missä a_i ja b_i ovat vakioita sauvoille 1 ja 2. Sauvoille 1 ja 2 saadaan yhtälöt

$$\sigma_1 = a_1 + b_1 \varepsilon_1, \quad \sigma_2 = a_2 + b_2 \varepsilon_2. \quad (5.43)$$

Kaavan (5.38) perusteella tulee

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma \quad (5.44)$$

eli

$$a_1 + b_1 \varepsilon_1 + a_2 + b_2 \varepsilon_2 = 2\sigma. \quad (5.45)$$

Kaavasta (5.41) saadaan, että

$$\varepsilon_2 = x + \varepsilon_1. \quad (5.46)$$

Sijoittamalla ε_2 kaavaan (5.45) tulee

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{b_1 + b_2}(-b_2 x + 2\sigma - a_1 - a_2), \quad (5.47)$$

$$\varepsilon_2 = x + \varepsilon_1 = \frac{1}{b_1 + b_2}(b_1 x + 2\sigma - a_1 - a_2). \quad (5.48)$$

Momentin tasapainoyhtälön kaavan (5.39) perusteella saadaan lopuksi yhtälö

$$\sigma = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2 + b_1 b_2 x}{\frac{2}{d}(\Delta + e)(b_1 + b_2) + b_1 - b_2}. \quad (5.49)$$

Edellä esiintyvät Shanleyn mallin suureet x , σ , ε_1 ja ε_2 voidaan nyt määrittää siirtymän Δ funktiona.

Shanleyn mallin erikoistapauksia

1. Sauvat 1 ja 2 ovat 2 kimmoisia, $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = E$:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E} - \frac{d}{2(a-h)h}\Delta, \quad (5.50)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma}{E} + \frac{d}{2(a-h)h}\Delta, \quad (5.51)$$

$$\sigma = \frac{\Delta}{\Delta + e} \frac{Ed^2}{4(a-h)h}. \quad (5.52)$$

2. Sauva 1 on kimmainen, ja sauva 2 on plastinen, $a_1 = 0$, $b_1 = E$:

$$a_2 = E\varepsilon_m(1 - \tau), \quad b_2 = \tau E. \quad (5.53)$$

3. Sauvat 1 ja 2 ovat plastisia, $a_1 = a_2 = E\varepsilon_m(1 - \tau)$, $b_1 = b_2 = \tau E$:

$$\sigma = \frac{\Delta}{\Delta + e} \frac{\tau Ed^2}{4(a-h)h}. \quad (5.54)$$

4. Sauva 1 palautuu kimmoisesti, sauva 2 on plastinen ja $b_1 = E$.

5. Sauvan 1 jännitys ylittää vetomyötörajan, $b_1 = \tau E$ ja sauva 2 on plastinen puristuksessa.

Valitaan seuraavassa Shanleyn mallin materiaaliominaisuudet ja mitat:

- $E = 205000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\sigma_m = 250 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\tau = 0.5$.
- $h = 5 \text{ mm}$, $d = 10 \text{ mm}$, $a = 250 \text{ mm}$.

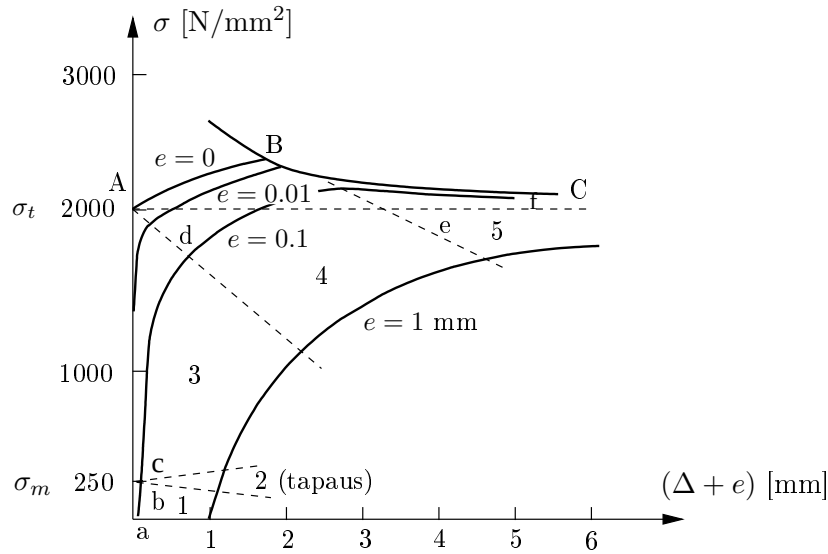
Tapauksessa $e = 0$ käyrä ABC , kuvassa 5.9, alkaa pisteestä A , jossa

$$\sigma = \sigma_t = \frac{\tau Ed^2}{4(a-h)h}. \quad (5.55)$$

Tapaus $e = 0$ osoittaa, että σ_t on suurin jännitys, jolla alkuaan suora sauva voi myös pysyä suorana. Sauva voi kantaa suuremman jännityksen kuin σ_t taipuneenakin.

Tarkastellaan seuraavaksi jännityksen ja siirtymän Δ välistä riippuvuutta, kun otaksutaan epäkeskisyyden arvo $e = 0.1 \text{ mm}$. Kaarella ab kuvassa 5.9 sauvat 1 ja 2 ovat kimmoisia. Käyrän osalla cd molemmat sauvat ovat plastisella alueella puristettuina. Pisteessä d sauvan 1 jännityksen itseisarvo alkaa pienentyä ja taipuma kasvaa nopeasti välillä $\frac{dP}{A}$ sauvan 1 palautuessa kimmoisesti puristuksesta vetoon. Suurin keskiarvojännitys $\sigma = \frac{P}{A}$ saavutetaan pisteessä e , kun sauva 1 plastisoituu vedossa.

Hyvin pienillä epäkeskisyyden arvoilla ($e < 0.01$) taipuma kasvaa nopeasti, kun jännitys σ lähestyy tangenttijännityksen arvoa σ_t . Suurin mahdollinen jännityksen arvo voi olla suurempi tai pienempi kuin σ_t epäkeskisyyden suuruudesta riippuen.



Kuva 5.9 Shanleyn mallin jännitys-siirtymä -piirroksia, kun $\tau = 0.5$.

Shanleyn mallilla lasketut tulokset havainnollistavat tangenttimoduulijännityksen σ_t merkitystä. Laskelmissa käytetty materiaalimalli ei kuitenkaan ollut joka suhteessa realistinen, vaan siinä otaksuttiin suuri myötölujenemismoduuli $E_t = 0.5E$, eli $\tau = 0.5$. Jos τ on riittävän pieni, niin jännitys σ_t voi tulla pienemmäksi kuin myötöraja σ_m .

Analysoidaan Shanleyn mallia seuraavaksi käyttämällä alumiiniseoksen materiaalimal-
lia

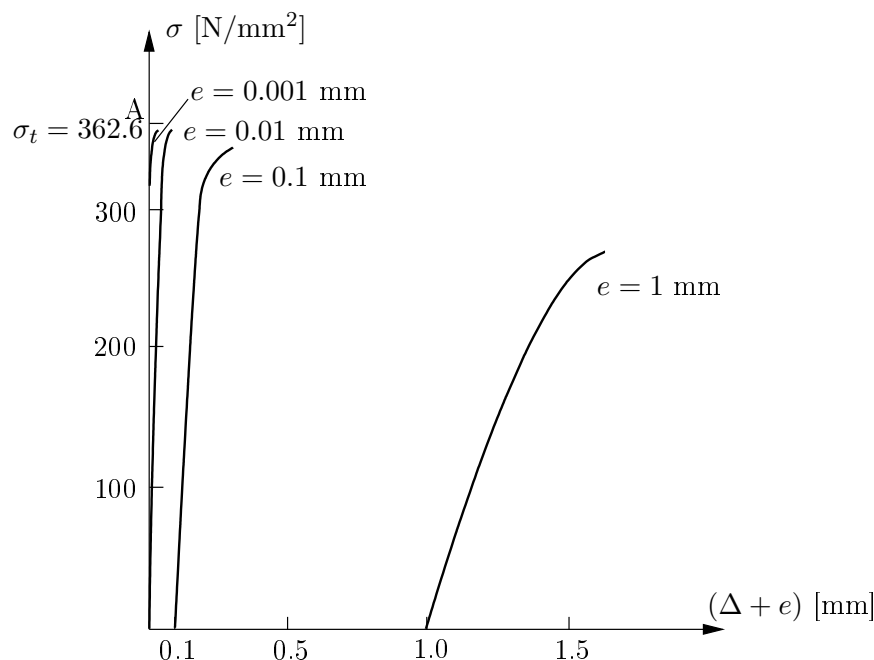
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma_n}{Em} \left(\frac{\sigma}{\sigma_n} \right)^m, \quad (5.56)$$

jossa E on kimmokerroin ja σ_n sekä m ovat materiaalivakioita, joille valitaan arvot $E = 78600 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$, $m = 24$ ja $\sigma_n = 360 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$. Mallin geometrisiksi mitoiksi otetaan: $a = 500 \text{ mm}$, $h = 5 \text{ mm}$, $d = 10 \text{ mm}$, jolloin hoikkuusluvaksi tulee

$$\lambda = \frac{L}{i} = \frac{2a}{\frac{1}{2}d} = 200, \quad (5.57)$$

missä $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$, $I = 2 \cdot \frac{1}{2} A \cdot \left(\frac{1}{2} d \right)^2 = \frac{Ad^2}{4}$, ja vastaava kriittinen tangenttimoduulijännitys on $\sigma_t = 362.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Jännityksen σ ja taipuman $(\Delta + e)$ välistä riippuvaisuutta esittävät käyrät on piirretty kuvassa 5.10 vain siihen asti, kun sauvan 1 jännitys alkaa palautua kuvan 5.9 pistettä d vastaten.

Siirtymät kasvavat nopeasti, kun sauvan 1 puristusjännitys alkaa pienentyä. Kun $e = 0.1 \text{ mm}$ eli $e = \frac{L}{10000}$, niin päästään n. 5 %:n päähän σ_t :n arvosta. Tässä esimerkissä tangenttimoduulijännitys ei anna luotettavaa kuvaa rakenteen (sauvan) kantokyvystä.



Kuva 5.10 Shanley'n mallin jännitys-siirtymä -piirroksia alumiinisauvalle.

5.4 Puristussauvojen mitoitus

Rankinen kaava

Rakenneteräksen vetokokeen jännityksen ja venymän välistä riippuvaisuutta voidaan kuvata hyvällä tarkkuudella kimmoisella ideaaliplastisella mallilla. Rakenneteräksen kimmo kerroin $E = 205000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, ja myötöraja $\sigma_m = 250 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Päistään nivelöidyn sauvan (kriittinen) Eulerin nurjahdusjännitys on

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (5.58)$$

missä $\lambda = \frac{L}{i}$ on hoikkuusluku ja $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ on hitaussäde. Jännitys (nurjahdusjännitys) ei kuitenkaan voi tulla suuremmaksi kuin aineen (teräksen) tyssäysraja (myötöraja puristuksessa) $\sigma_{ty} = \sigma_m$. Suurimman mahdollisen jännityksen määrittää käyrä *DBC* kuvassa 5.11. Koetulokset ovat kuitenkin kuvan käyrän *DBC* alapuolella pisteen *B* lähetyvillä.

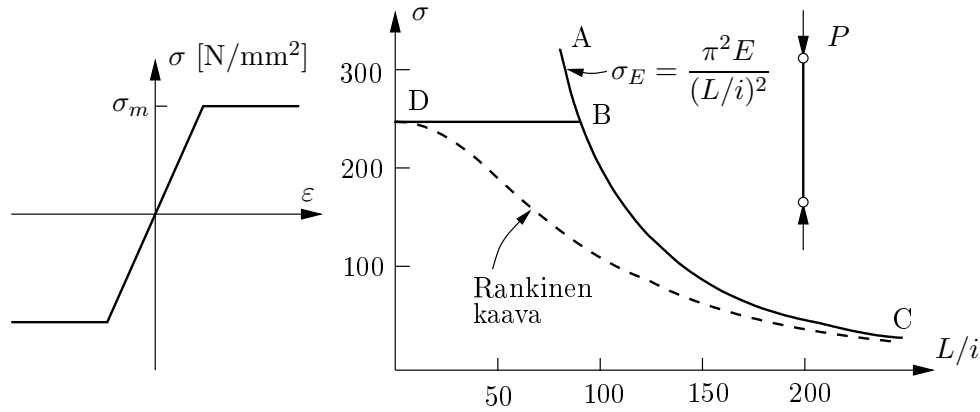
Kriittisen kuorman karkea arvio saadaan Rankinen kaavasta

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_E} + \frac{1}{\sigma_m}. \quad (5.59)$$

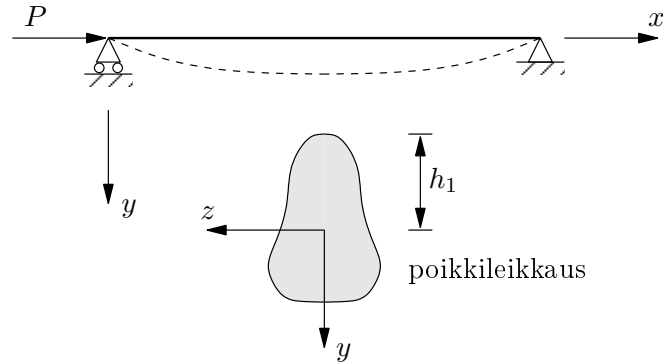
Eliminoimalla Eulerin nurjahdusjännitys σ_E Rankinen kaavasta tulee

$$\sigma = \frac{\sigma_m}{1 + \frac{\sigma_m}{\pi^2 E} \left(\frac{L}{i} \right)^2}, \quad (5.60)$$

jota esittää kuvan 5.11 katkoviiva.



Kuva 5.11 Eulerin ja Rankinen nurjahduskäyrät rakenneterässauvoille.



Kuva 5.12 Alkuaan käyrä nivelsauva.

Perryn-Robertsonin kaava

Tarkastellaan alkuaan käyrää niveltuettua sauvaa. Alkutaipumaksi otaksutaan, kuva 5.12,

$$v_0(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (5.61)$$

Puristetun, alkuaan käyrän nivelsauvan taipuman lausekkeeksi tulee laskutoimitusten jälkeen

$$v(x) = \frac{a_1}{1 - \frac{P}{P_E}} \sin \frac{\pi x}{L} \equiv b_1 \sin \frac{\pi x}{L}, \quad (5.62)$$

missä P_E on nivelsauvan Eulerin nurjahdusvoima.

Taipuman lausekkeesta määritetään taivutusmomentin kaava, ja sauvan keskipisteessä $x = \frac{L}{2}$ momentti on

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = Pb_1. \quad (5.63)$$

Jännityksen suurin arvo

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + Pb_1 \frac{h_1}{I} \quad (5.64)$$

saavutetaan keskellä yläreunassa. Sijoittamalla maksimijännityksen kaavaan $I = Ai^2$ tulee

$$\sigma_{\max} = \sigma \left(1 + \frac{\eta}{1 - \frac{\sigma}{\sigma_E}} \right), \quad (5.65)$$

missä on määritelty lyhennysmerkintä $\eta = \frac{a_1 h_1}{i^2}$.

Maksimijännitys $\sigma_{\max}$ kasvaa P :n kasvaessa jännityksen keskiarvoa $\sigma = \frac{P}{A}$ nopeammin, kunnes $\sigma_{\max} = \sigma_m$. Tämän jälkeen σ :n eli $\frac{P}{A}$:n edelleen kasvaessa sauvaan syntyy keskelle ylälaitaan plastisoituva vyöhyke, jonka laajeneminen aiheuttaa lopulta sauvan kantokyvyn menetyksen. Kriittisen kuorman alarajaksi voidaan ottaa P :n arvo, jolla $\sigma_{\max}$ saavuttaa myötöjännityksen arvon σ_m . Korvaamalla maksimijännitys $\sigma_{\max}$ myötöarvolla σ_m saadaan toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisu σ :n suhteen tuottaa kaavan

$$\sigma = \frac{\sigma_2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma_E \sigma_m}{\sigma_2^2}} \right), \quad (5.66)$$

jossa on merkitty

$$\sigma_2 = (1 + \eta)\sigma_E + \sigma_m. \quad (5.67)$$

Suure $\eta = \frac{a_1 h_1}{i^2}$ voidaan määrittää mittaamalla todellisista sauvoista. Jännityksen σ ja hoikkuusluvun $\lambda = \frac{L}{i}$ välille saadaan erilaisia riippuvuuksia otaksumalle suureelle η arvoja. Oletetaan esimerkiksi alkutaipuma verrannolliseksi sauvan pituuteen: $a_1 = k_1 L$ ja $h_1 = k_2 i$, missä k_1 ja k_2 ovat vakioita. Tällöin saadaan

$$\eta = \frac{a_1 h_1}{i^2} = \frac{k_1 L}{i} k_2 = C \frac{L}{i}. \quad (5.68)$$

Kuvan 5.13 käyrät 1 ja 2 on määritetty arvoilla $C = 0.001$ ja $C = 0.003$. Käyrän 3 tapauksessa on otaksuttu $\eta = 0.00003 \left(\frac{L}{i} \right)^2$.

5.5 Puristetun sauvan plastinen mekanismi

Suorakaidepoikkileikkauksen tapauksessa niveltuetun sauvan keskileikkaukseen syntyy kuvan 5.14 esittämä jännitystila. Kuvioita a ja b vastaa normaalivoima

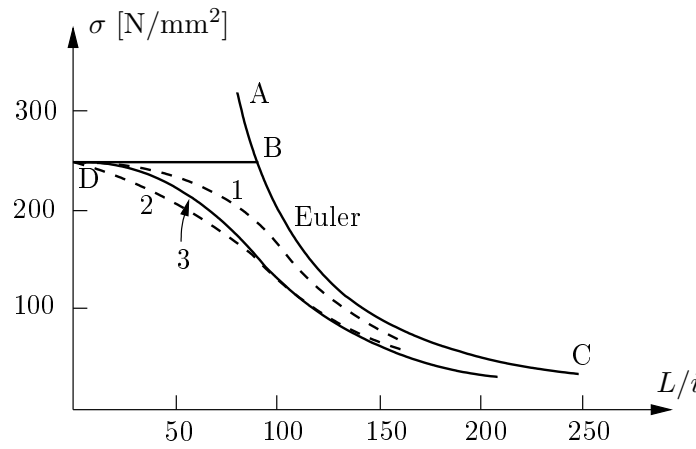
$$P = \sigma_m b(h - 2c) \quad (5.69)$$

ja momentti

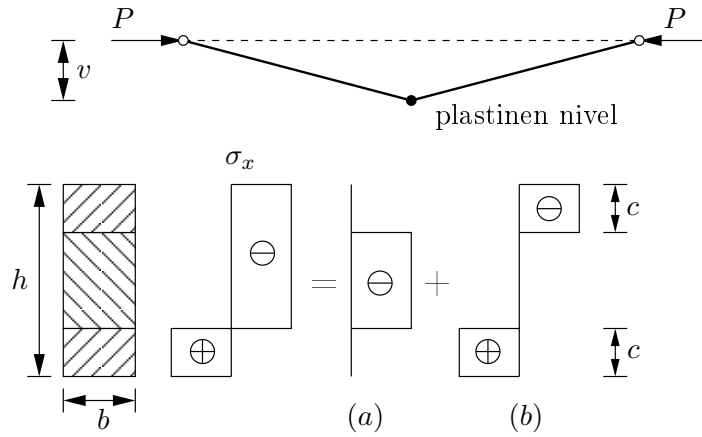
$$M = \sigma_m bc(h - c). \quad (5.70)$$

Toisaalta momentti on tasapainoehdon perusteella

$$M = Pv. \quad (5.71)$$



Kuva 5.13 Terässauvan nurjahduskäyriä.



Kuva 5.14 Nivelsauvan mekanismi.

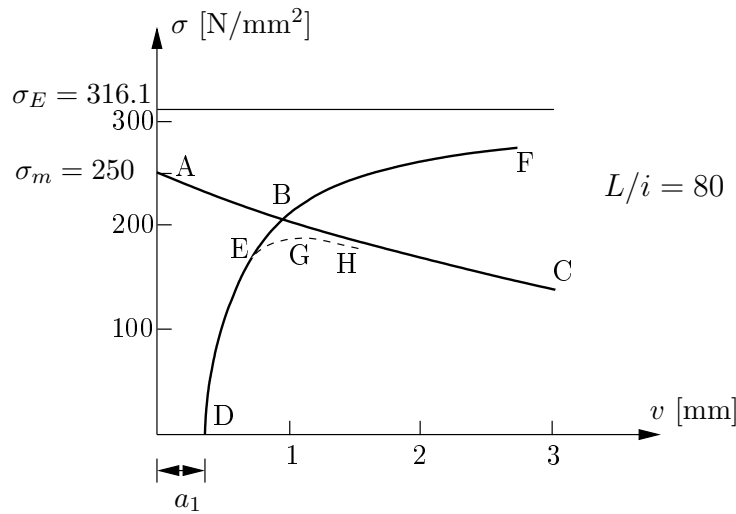
Eliminoimalla mitta c saadaan riippuvuus

$$\frac{v}{h} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma} - \frac{\sigma}{\sigma_m} \right), \quad (5.72)$$

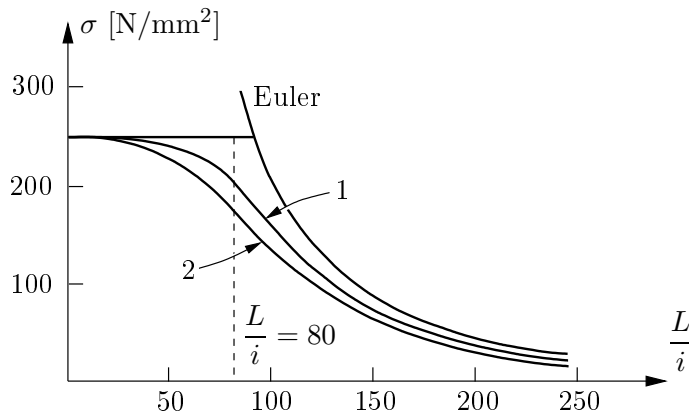
jota esittää käyrä ABC kuvassa 5.15. Käyrä $DEBF$ on puristetun kimmoisen sauvan jännityksen ja taipuman välinen riippuvuus, kun sauvan alkutaipuma on $v_0 \left(\frac{L}{2} \right) = a_1$.

Sauvassa, jonka myötöraja on $\sigma_m = 250 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, alkaa muodostua plastinen vyöhyke, kun saavutetaan piste E . Tämän jälkeen taipuma kasvaa nopeammin kuin kimmoteorian ratkaisussa, jota esittää käyrä EBF . Käyrä EGH lähestyy jäykkäplastista ratkaisua ABC . Suurinta mahdollista jännitystä $\sigma_{\max} = \frac{P_{\max}}{A}$ esittää piste G , jota vastaavaa jännityksen arvoa ei kuitenkaan saada selville edellä esitetyistä kaavoista. Maksimijännitys $\sigma_{\max}$ on joka tapauksessa välillä EB . Plastisoitumisen alkamista vastaava piste E saadaan määritettyä Perryn-Robertsonin kaavasta. Piste B on puolestaan käyrien

$$v = \frac{a_1}{1 - \frac{\sigma}{\sigma_E}} \quad (5.73)$$



Kuva 5.15 Puristetun nivelsauvan kimmoisen ja plastinen taipuma.



Kuva 5.16 Perryn-Robertsonin piste E ja kimmoisen ja plastisen ratkaisun leikkauspiste B hoikkuuden funktiona terässauvalle.

ja

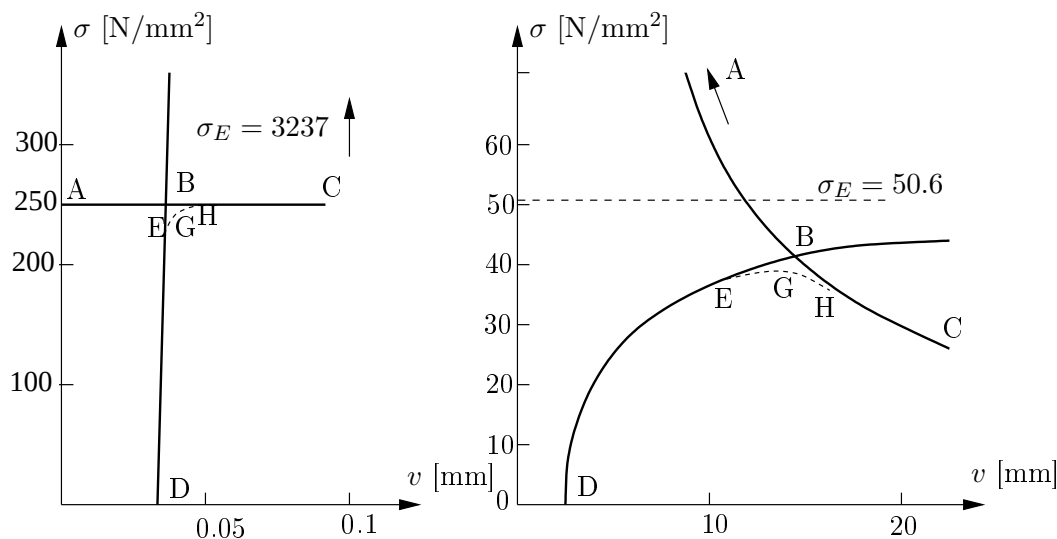
$$\frac{v}{h} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma} - \frac{\sigma}{\sigma_m} \right) \quad (5.74)$$

leikkauspiste.

Valitaan sauvan poikkileikkauksen mitoiksi $b = h = 10$ mm, kimmokerroin $E = 205000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, myötöraja $\sigma_m = 250 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ sekä parametri $\eta = \frac{a_1 h_1}{i^2} = \frac{0.3}{10^4} \left(\frac{L}{i} \right)^2$ (koesauvasta mitattu). Neliöpoikkileikkaukselle

$$\frac{a_1}{h} = \frac{a_1 h}{h^2} = \frac{a_1 (2h_1)}{12i^2} = \frac{\eta}{6} = \frac{0.05}{10^4} \left(\frac{L}{i} \right)^2. \quad (5.75)$$

Taipuman v kaavoissa suhde $\frac{a_1}{h}$ ja Eulerin nurjahdusjännitys σ_E voidaan lausua hoikkuusluvun $\lambda = \frac{L}{i}$ avulla. Kuvan 5.16 käyrä 1 esittää leikkauspistettä B eri hoikkuusluvun



Kuva 5.17 Terässauvan taipuman ja jännityksen välisiä riippuvuuksia, kun hoikkuus $\lambda = 25$ tai $\lambda = 200$.

arvoilla. Käyrä 2, joka esittää pistettä E hoikkuusluvun λ funktiona, saadaan Perryn-Robertsonin kaavasta. Kuvasta 5.16 nähdään, että pisteiden B ja E välinen ero on suurimmillaan, kun hoikkuusluku λ on noin 80.

Jos hoikkuus pienenee arvosta $\lambda = 80$, joka on tavanomainen arvo, lukuun $\lambda = 25$, joka edustaa melko jyvettä pilaria, tai suurenee arvoon $\lambda = 200$, joka puolestaan edustaa hyvin hoikkaa pilaria, niin saadaan kuvan 5.17 tulokset taipuman ja jännityksen väliselle riippuvaisuudelle.

5.6 Alkujännitysten vaikutus nurjahduskuormaan

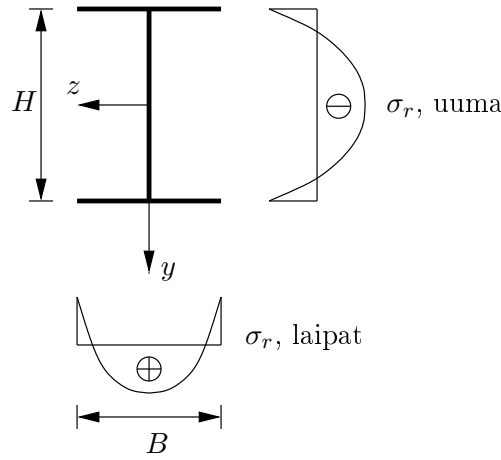
Teräspilarin tai -palkin valmistuksessa, esim. kuumavalssauksessa tai hitsauksessa, syntyy rakenteeseen epätasainen lämpötila. Jäähdytymisen jälkeen pilariin jää alkujännitystila, jolla voi olla merkittävä vaikutus rakenteen toimintaan.

Esimerkiksi I-profilin laippojen kärjet jäähtyvät nopeimmin ja muuttuvat muuta poikkileikkausta jäykemmiksi, kun osa poikkileikkausta on vielä kuuma ja plastisessa, muokattavassa tilassa. Lopulta profiilin keskiosakin jäähtyy ja pyrkii supistumaan, mutta aiemmin jäähtyneet laippojen kärjet vastustavat supistumista. Tämän seurauksena laipan ja uuman liitoskohtaan jää pysyvä vetojännitys, ja laippojen kärkiin jää puristusjännitys. Jos uuma on paksu ja lyhyt, se voi jäähtyä niin hitaasti, että siihenkin jää vetojännitys. Jäännösjännitys jakauman huippuarvot voivat olla myötörajan kolmanneksen luokkaa.

5.6.1 I-poikkileikkaus

Kuumavalssauksen aiheuttamaa jäännösjännitys jakaumaa voidaan usein approksimoida parabolisella jakaumalla.

Otaksetaan seuraavassa, että puristusjännitys ja puristusmuodonmuutos ovat positiivisia.



Kuva 5.18 I-poikkileikkauksen alkujännitys jakauma. Vetojännitys on positiivinen

Kun kuorma P kasvaa, niin jäännösjännitys- tai alkujännitys jakaumaan σ_r lisätään kuorman aiheuttama jännitys $\sigma = \frac{P}{A}$. Kuorman kasvaessa laippojen kärjet plastisoituvat ensin. Plastisoituminen pienentää taivutusjäykkyyttä eniten akselin z suunnassa, kuva 5.18.

Jäännösjännitys jakaumaa σ_r vastaava muodonmuutos jakauma on $\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E}$. Merkitään seuraavassa lyhyemmin:

- ε_1 on ε_r laipan ja uuman liitoksessa,
- ε_2 on ε_r laipan kärjessä,
- ε_3 on ε_r uuman keskellä,
- H on laippojen painopisteiden väli, ja B on laipan leveys,
- T on laipan paksuus, ja t on uuman paksuus,
- h on uuman plastisen osan korkeus, ja b on laipan kimmoisen osan leveys.

Laippojen alkumuodonmuutos jakauma on

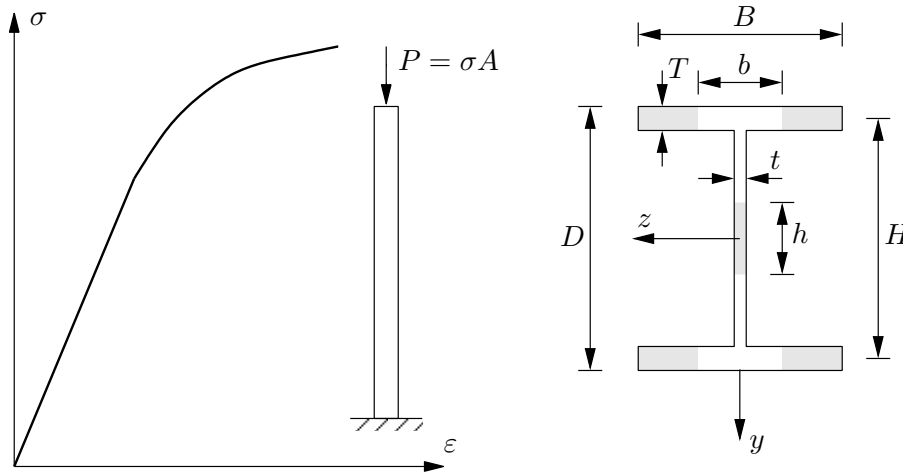
$$\varepsilon_r = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left(\frac{2z}{B} \right)^2 + \varepsilon_1, \quad (5.76)$$

ja uuman alkumuodonmuutos jakauma on vastaavasti

$$\varepsilon_r = \varepsilon_3 - (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \left(\frac{2y}{H} \right)^2. \quad (5.77)$$

Koska alkujännitykset toteuttavat homogeenisen tasapainoehdon, ($P = 0$), eivät ylitä myötörajaa, saadaan kuorman arvolla nolla tasapainoehto

$$\int_A \sigma_r dA = \int_A E \varepsilon_r dA = 0. \quad (5.78)$$



Kuva 5.20 I-poikkileikkauksen plastisoituminen.

puristuspuolella on saavutettu myötöraja. Kuormainkrementti on tällöin

$$dP = Ad\sigma = A_e E d\varepsilon, \quad (5.83)$$

eli

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{A_e}{A} E \equiv a_e E, \quad (5.84)$$

missä on merkitty

$$a_e = \frac{A_e}{A}, \quad (5.85)$$

A_e on poikkileikkauksen kimmoisena säilyneen alueen pinta-ala, ja $d\sigma$ on keskimääräinen jännityksen muutos.

Esimerkin tapauksessa saadaan

$$a_e = \frac{A_e}{A} = \frac{2bT + (H - h)t}{2BT + Ht}. \quad (5.86)$$

Kaava (5.86) on voimassa, jos sekä uumassa että laipoissa on alkanut plastinen myötö. Kaksi ääritapausta ovat:

1. Jos laipat ovat kimmoisella alueella, niin asetetaan $b = B$.
2. Jos uuma on kokonaan kimmainen, niin asetetaan $h = 0$.

Tasapainoehdon perusteella puristava voima on

$$\begin{aligned} P &= \sigma(2BT + Ht) \\ &= E(2BT + Ht)\varepsilon - \frac{2}{3}ET[B(3\varepsilon + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 3\varepsilon_m) - 2b(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon_m)] \\ &\quad - \frac{2}{3}Eth(\varepsilon_3 + \varepsilon - \varepsilon_m). \end{aligned} \quad (5.87)$$

Esimerkki 5.3 Tutkitaan alkujännityksen vaikutusta poikkileikkauksen $WF8 \times 31$ tapauksessa.

Merkintä $WF8 \times 31$ tarkoittaa leveälaiippaista poikkileikkausta, jonka laipan leveys on $B = 203.2$ mm (8 in (tuumaa)) ja paino $g = 31 \frac{\text{lbm}}{\text{ft}}$ (paunaa/jalka). Poikkileikkauksen mitat ovat:

- $B = 203.2$ mm,
- $D = B$ (korkeus),
- $H = 192.2$ mm,
- $T = 11.0$ mm,
- $t = 7.3$ mm.

Teräksen myötöraja, kimmokerroin ja myötövenymä ovat:

- $\sigma_m = 250 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $E = 2.05 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\varepsilon_m = 0.0012195$.

Poikkileikkauksen pisteiden 1 ja 2 jäännösjännityksiksi otaksutaan:

- $\sigma_1 = -40 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $\sigma_2 = 90 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.

Alkumuodonmuutokset $\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E}$ pisteissä 1 ja 2 ovat:

- $\varepsilon_1 = -0.0001951$, $\varepsilon_2 = 0.000439$.

Alkujännitysten tasapainoehdosta $\int \sigma_r dA = 0$ seuraa

$$\varepsilon_3 = 0.00001985. \quad (5.88)$$

Laipat plastisoituvat, kun $\varepsilon = \varepsilon_m - \varepsilon_2 = 0.000781$. Uuma plastisoituu, kun $\varepsilon = \varepsilon_m - \varepsilon_3 = 0.0012$. Kuorman P aiheuttamaa muodonmuutosta ε vastaavat parametrit h , b , a_e , ja jännitys σ määritetään edellä esitettyjen kaavojen avulla. Tehokas taivutusjäyhyys akselin z suhteen lasketaan kaavalla

$$\frac{I_z^e}{I_z} = \frac{\frac{b}{B} + \frac{\alpha}{3} \left[1 - \left(\frac{h}{H} \right)^3 \right]}{1 + \frac{\alpha}{3}}, \quad (5.89)$$

missä

$$\alpha = \frac{Ht}{2BT}. \quad (5.90)$$

Tehokas taivutusjäyhyys akselin y suhteen on

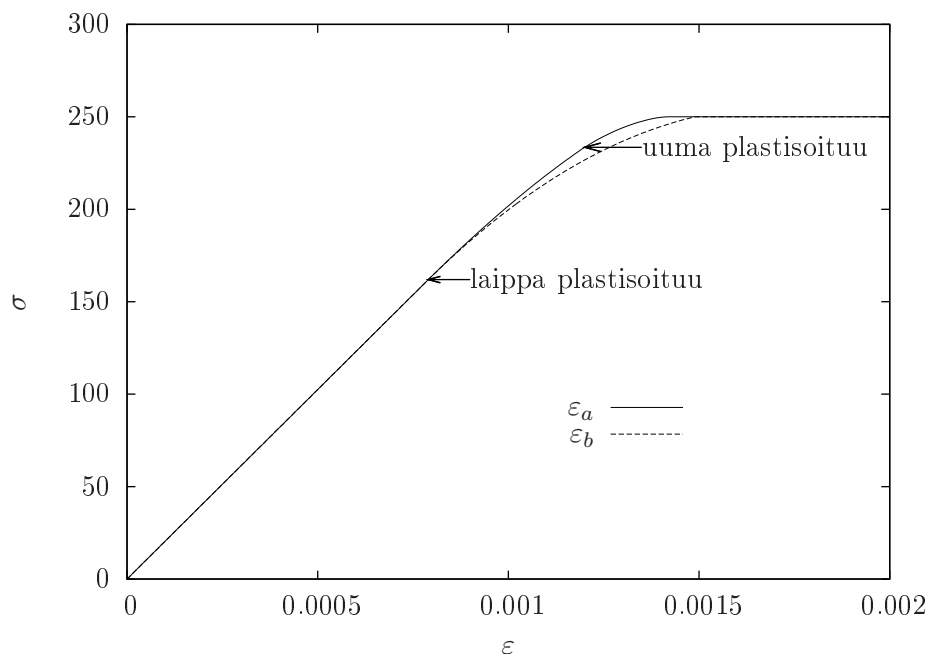
$$\frac{I_y^e}{I_y} = \left(\frac{b}{B} \right)^3. \quad (5.91)$$

Alkujännityksen huomioonottavaksi nurjahdusjännityksen kaavaksi tulee

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} \frac{I^e}{I}, \quad (5.92)$$

tai

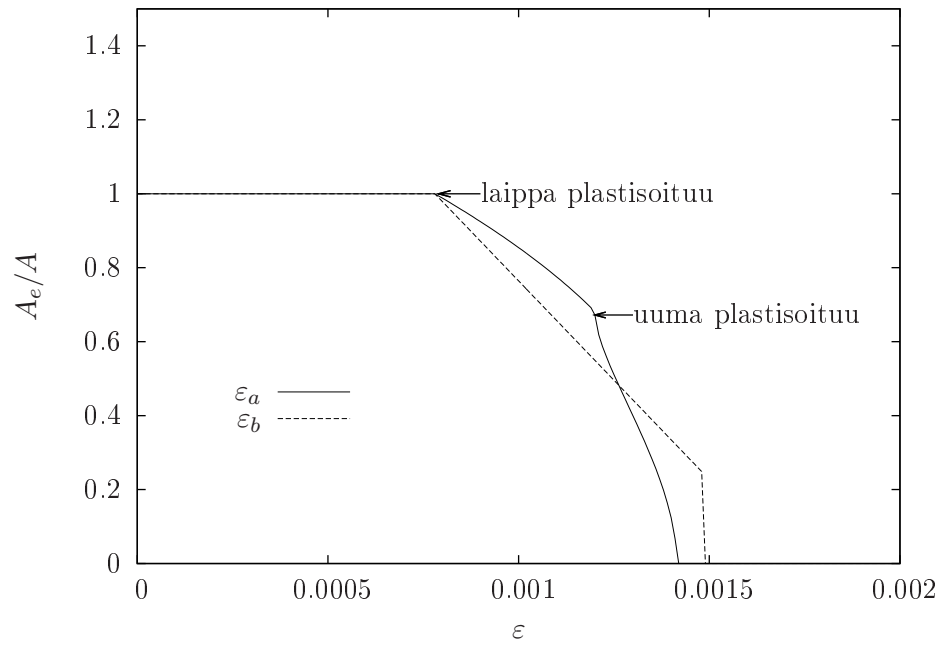
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{i} \right)^2} \frac{I^e}{I}, \quad (5.93)$$



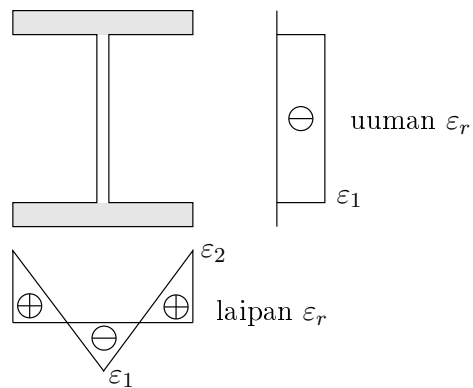
Kuva 5.21 Alkujännityksen vaikutus (σ, ε) -käyrään. ε_a viittaa paraboliseen ja ε_b paloittain lineaariseen alkumuodonmuutos- tai alkujännitys jakaumaan.

jossa I^e on tehokas taivutusjäyhyys akselin z tai y suhteen.

Kuvissa 5.21 ja 5.22 on esitetty täydellä viivalla parabolista jakaumaa ε_r vastaavat (σ, ε) - ja (a_e, ε) -riippuvaisuudet ja katkoviivalla samat riippuvaisuudet kuvan 5.23 yksinkertaistetulla alkumuodonmuutosjakaumalla ε_r määritettyinä. Kuvan 5.23 alkujännitys jakauman $\sigma_r = E\varepsilon_r$ tapauksessa on otaksuttu, että $\sigma_2 = 90 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, josta seuraa, että $\sigma_1 = -55.29 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, koska alkujännitys jakauma toteuttaa homogeenisen tasapainoyhtälön. Vastaavat alkumuodonmuutosjakauman parametrit ovat $\varepsilon_1 = -0.000269719$ ja $\varepsilon_2 = 0.000439024$, kun puristusmuodonmuutos (ja jännitys) on nyt positiivinen.



Kuva 5.22 Alkujännityksen vaikutus $\left(\frac{A_e}{A}, \varepsilon\right)$ -riippuvaisuuteen.



Kuva 5.23 Yksinkertaistettu alkumuodonmuutosjakauma, puristus positiivista.

Luku 6

Kimmoisesti tuettu sauva

Sauvan tukea ei aina voi idealisoida täysin jäykäksi tai nivelelliseksi tarkkuuden liikaa kärsimättä. Erityyppisillä liitoksilla (hitsiliitos, ruuviliitos jne.) on erilaiset jäykkyyssominaisuudet. Sauva on useimmiten osa suurempaa kokonaisuutta. Sauvojen liitosten jäykkyyssominaisuudet vaikuttavat koko rakenteen, esim. sauvoista kootun kehän, toimintaan kuormien alaisena. Kehien nurjahduskuorman laskemista käsitellään myöhemmin. Joskus puristetun sauvan nurjahduskuorman määrittämisessä ympäröivä rakenne voidaan ottaa huomioon riittävällä tarkkuudella kuvaamalla se jousilla. Kuvan 6.1 puristetun sauvan päiden kiertymistä vastustaa pystysauvojen (pilareiden) taivutusjäykkyys, joka voidaan rakennemallissa kuvata kierrejousella.

Sauvan taivutusmomentti etäisyydellä x vasemmalta tuelta on

$$M(x) = Pv(x) - \beta\varphi(0), \quad (6.1)$$

ja toisaalta kimmoisen sauvan taivutusmomentti on

$$M(x) = -EIv''(x), \quad (6.2)$$

joten tasapainoehdosta seuraa differentiaaliyhtälö

$$v''(x) + k^2v(x) = \frac{\beta}{EI}\varphi(0), \quad (6.3)$$

missä on jälleen merkitty

$$k^2 = \frac{P}{EI}. \quad (6.4)$$

Differentiaaliyhtälön (6.3) ratkaisu on

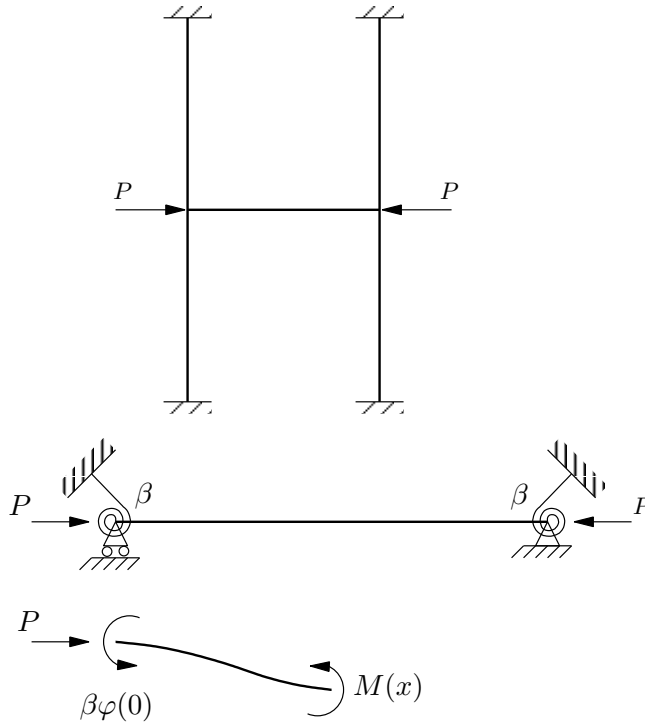
$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + \beta \frac{\varphi(0)}{P}. \quad (6.5)$$

Sauvan reunaehdot ovat

$$v(0) = v(L) = 0, \quad v'(0) = \varphi(0), \quad (6.6)$$

joista seuraa yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} B + \beta \frac{\varphi(0)}{P} &= 0, \\ A \sin kL + B \cos kL + \beta \frac{\varphi(0)}{P} &= 0, \\ Ak - \varphi(0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$



Kuva 6.1 Pilareiden tukema sauva.

Asettamalla homogeenisen yhtälöryhmän (6.7) kerroinmatriisin determinantti nolllaksi saadaan ehdoksi ei-triviaalin ratkaisun olemassaololle

$$\frac{L\beta}{EI} = -2 \frac{\frac{kL}{2}}{\tan\left(\frac{kL}{2}\right)}, \quad (6.8)$$

eli

$$\frac{\beta}{K} = -2 \frac{\frac{\pi r}{2}}{\tan\left(\frac{\pi r}{2}\right)}, \quad (6.9)$$

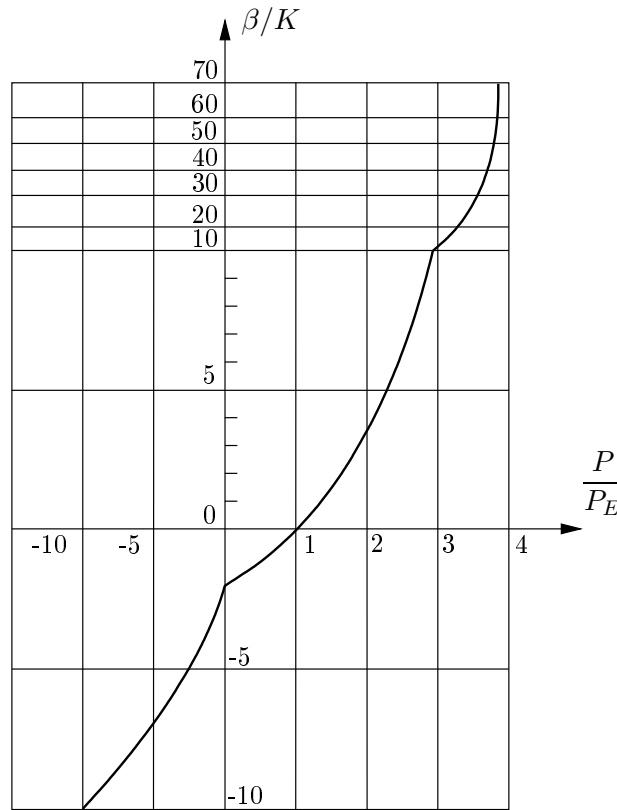
missä on merkitty

$$K = \frac{EI}{L}, \quad r = \sqrt{\frac{P}{P_E}} \quad (6.10)$$

ja P_E on Eulerin nurjahduskuorma nivelellisesti tuetulle sauvalle. Kuvan 6.2 käyrä esittää nurjahduskuorman $\frac{P}{P_E}$ riippuvuuden jäykkyyksien suhteesta $\frac{\beta}{K}$.

Yleisen ratkaisun perusteella saadaan erikoistapaukset:

1. Kun $\frac{\beta}{K} \rightarrow \infty$, $\frac{P}{P_E} \rightarrow 4$.
2. Kun $\frac{\beta}{K} \rightarrow 0$, $\frac{P}{P_E} \rightarrow 1$.
3. Kun $\frac{\beta}{K} \approx -2$, $\frac{P}{P_E} \approx 0$.



Kuva 6.2 Nurjahduskuorman riippuvuus tuennan jäykkyydestä.

4. Kun $\frac{\beta}{K} < -2$, $\frac{P}{P_E} < 0$.

6.1 Jousilla tuettu sauva

Tutkitaan kuvan 6.3 jousilla tuettua sauvaa. Differentiaaliyhtälön

$$v^{(4)} + k^2 v'' = 0 \quad (6.11)$$

reunaehdot ovat

$$-(EIv'''(0) + Pv'(0)) = \bar{\alpha}_0 v(0), \quad (6.12a)$$

$$EIv''(0) = \bar{\beta}_0 v'(0), \quad (6.12b)$$

$$-(EIv'''(L) + Pv'(L)) = -\bar{\alpha}_1 v(L), \quad (6.12c)$$

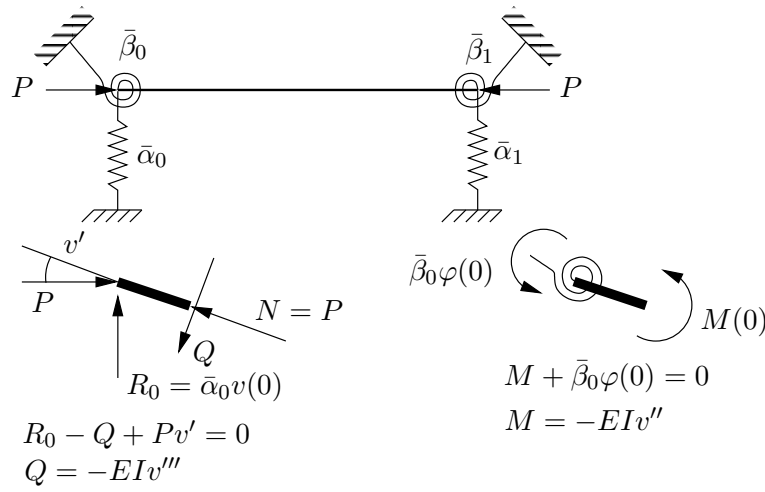
$$EIv''(L) = -\bar{\beta}_1 v'(L). \quad (6.12d)$$

Merkitään seuraavassa yksinkertaisemmin

$$\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{EI}, \quad \beta = \frac{\bar{\beta}}{EI}. \quad (6.13)$$

Tällöin differentiaaliyhtälö ja sen reunaehdot kirjoitetaan muotoon

$$v^{(4)}(x) + k^2 v''(x) = 0, \quad (6.14)$$



Kuva 6.3 Jousilla tuettu sauva.

$$v'''(0) + k^2 v'(0) + \alpha_0 v(0) = 0, \quad (6.15a)$$

$$v''(0) - \beta_0 v'(0) = 0, \quad (6.15b)$$

$$v'''(L) + k^2 v'(L) - \alpha_1 v(L) = 0, \quad (6.15c)$$

$$v''(L) + \beta_1 v'(L) = 0. \quad (6.15d)$$

Differentiaaliyhtälön (6.14) ratkaisu on

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D, \quad (6.16)$$

ja sen tarvittavat derivaatat ovat

$$v'(x) = Ak \cos kx - Bk \sin kx + C, \quad (6.17)$$

$$v''(x) = -Ak^2 \sin kx - Bk^2 \cos kx, \quad (6.18)$$

$$v'''(x) = -Ak^3 \cos kx + Bk^3 \sin kx. \quad (6.19)$$

Reunaehtojen perusteella muodostetaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_0 & k^2 & \alpha_0 \\ \beta_0 k & k^2 & \beta_0 & 0 \\ \alpha_1 \sin kL & \alpha_1 \cos kL & \alpha_1 L - k^2 & \alpha_1 \\ k\beta_1 \cos kL - k^2 \sin kL & -(\beta_1 k \sin kL + k^2 \cos kL) & \beta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Kerroinmatriisin determinantti on

$$\begin{aligned} & \{-(\alpha_0 + \alpha_1)k^6 + [\beta_0 \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1) + \alpha_0 \alpha_1 L]k^4 + \alpha_0 \alpha_1 (\beta_0 + \beta_1 - \beta_0 \beta_1 L)k^2\} \sin kL \\ & [(\alpha_0 + \alpha_1)(\beta_0 + \beta_1)k^5 - \alpha_0 \alpha_1 L(\beta_0 + \beta_1)k^3 - 2\alpha_0 \alpha_1 \beta_0 \beta_1 k] \cos kL + 2\alpha_0 \alpha_1 \beta_0 \beta_1 k, \end{aligned} \quad (6.21)$$

missä $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$.

Erikoistapauksia

1. Vapaasti tuettu sauva saadaan erikoistapauksena antamalla jousivakioille arvot

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \infty, \quad \beta_0 = \beta_1 = 0. \quad (6.22)$$

Determinantin nollaehdosta seuraa

$$Lk^4 \sin kL = 0, \quad (6.23)$$

joka toteutuu, kun $kL = \pi$, ja nurjahduskuorma on $P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$.

2. Jäykästi kiinnitetyn sauvan tapauksessa asetetaan $\alpha_0 = \alpha_1 = \beta_0 = \beta_1 = \infty$. Jakamalla determinantin kaava tekijällä $\alpha_0 \alpha_1 \beta_0 \beta_1$ saadaan ehto kriittiselle kuormalle muotoon

$$-Lk^2 \sin kL - 2k \cos kL + 2k = 0, \quad (6.24)$$

tai

$$\frac{kL}{2} \sin kL - (1 - \cos kL) = 0, \quad (6.25)$$

joka muunnetaan ensin muotoon

$$\frac{kL}{2} 2 \sin \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} - 2 \sin^2 \frac{kL}{2} = 0 \quad (6.26)$$

ja lopuksi muotoon

$$\left(\frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} - \sin \frac{kL}{2} \right) \sin \frac{kL}{2} = 0. \quad (6.27)$$

Pienin juuri $kL = 2\pi$ saadaan ehdosta $\sin \frac{kL}{2} = 0$, ja nurjahduskuorma on $P_{kr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$.

3. Jos sauvan vasemmassa päässä on niveltuki ja oikeassa päässä kierrejousi, niin jousivakiot ovat $\alpha_0 = \alpha_1 = \infty$, $\beta_0 = 0$, $\bar{\beta}_1 = \frac{4EI}{\frac{1}{2}L} = \frac{8EI}{L}$ eli $\beta_1 = \frac{8}{L}$. Determinantin nollaehdosta seuraa yhtälö

$$(Lk^4 + \beta_1 k^2) \sin kL + (-L\beta_1 k^3) \cos kL = 0, \quad (6.28)$$

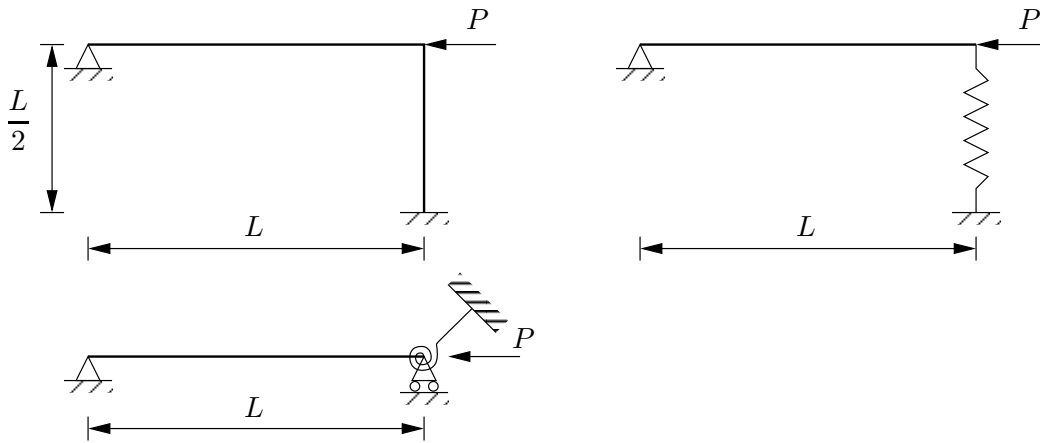
eli

$$\tan kL = \frac{8kL}{(kL)^2 + 8}, \quad (6.29)$$

jonka ratkaisu on $kL \approx 4.066$, ja kriittinen kuorma on $P_{kr} \approx 1.675 \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 1.675 P_E$.

4. Sauvan oikean pään translaatiojousituenta vastavat jousivakiot ovat $\alpha_0 = \infty$, $\beta_0 = \beta_1 = 0$. Determinantin nollaehdosta seuraa nyt

$$k^4(-k^2 + \alpha_1 L) \sin kL = 0, \quad (6.30)$$



Kuva 6.4 Kierrejousi- ja translaatiojousituki.

josta saadaan kriittinen kuorma $P_{kr} = \bar{\alpha}_1 L$ tai $P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = P_E$. Jos $\bar{\alpha}_1$ on pieni, niin $P_{kr} = \bar{\alpha}_1 < P_E$. Kun $\bar{\alpha}_1$ kasvaa, niin kriittinen kuorma P_{kr} kasvaa. Jousivakion saadessa arvon $\bar{\alpha}_1 = \frac{\pi^2 EI}{L^3}$ kriittinen kuorma on $P_{kr} = \bar{\alpha}_1 L = P_E$. Jos $\bar{\alpha}_1 > \frac{\pi^2 EI}{L^3}$, niin $P_{kr} = P_E$. Jousivakion arvo $\bar{\alpha}_1 = \frac{\pi^2 EI}{L^3}$ on **jousen kriittinen jäykkyys**. Kriittistä arvoa suuremmat jousivakion arvot eivät enää vaikuta kriittisen kuorman arvoon.

Esimerkki 6.1 Määritetään jänteen keskeltä tuetun sauvan nurjahduskuorma.

Jos taipumafunktio $v(x)$ on symmetrinen, niin tukivoimat sauvan päissä ovat

$$\frac{Q}{2} = \frac{\alpha \delta}{2}, \quad (6.31)$$

missä $\delta = v(\frac{L}{2})$. Taivutusmomentti kohdassa x vasemmalta tuelta on

$$M(x) = Pv(x) - \frac{Q}{2}x = -EIv''(x), \quad (6.32)$$

eli

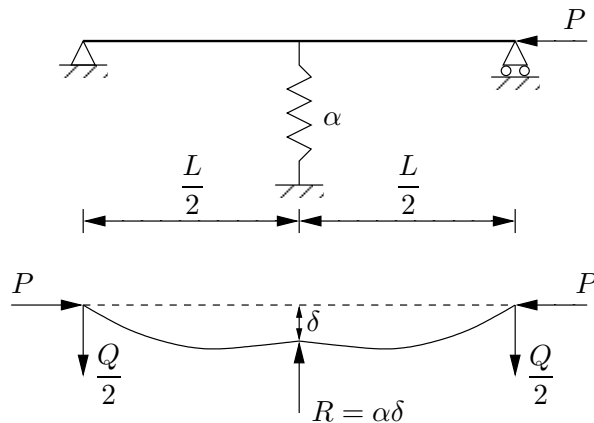
$$EIv''(x) + Pv(x) = \frac{Q}{2}x. \quad (6.33)$$

Sauvan reunaehto on $v(0) = 0$, ja lisäksi jänteen keskellä toteutuvat ehdot $v'(\frac{L}{2}) = 0$ ja $v(\frac{L}{2}) = \delta$. Differentiaaliyhtälön ratkaisuksi saadaan

$$v(x) = \frac{Q}{2P} \left(x - \frac{1}{k} \frac{\sin kx}{\cos \frac{kL}{2}} \right), \quad (6.34)$$

eli

$$v(x) = \frac{\alpha \delta}{2P} \left(x - \frac{1}{k} \frac{\sin kx}{\cos \frac{kL}{2}} \right), \quad (6.35)$$



Kuva 6.5 Jousella tuettu sauva.

missä on otettu huomioon, että $\frac{Q}{2} = \frac{R}{2} = \frac{\alpha\delta}{2}$. Sauvan keskellä taipuma on

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = \delta = \frac{\alpha\delta}{2Pk} \left(\frac{kL}{2} - \tan \frac{kL}{2} \right), \quad (6.36)$$

josta seuraa yhtälö

$$1 = \frac{\alpha L}{4P} \left(1 - \frac{\tan \frac{kL}{2}}{\frac{kL}{2}} \right), \quad (6.37)$$

eli

$$-\frac{16EI}{\alpha L^3} \left(\frac{kL}{2} \right)^2 = -1 + \frac{\tan \frac{kL}{2}}{\frac{kL}{2}}. \quad (6.38)$$

Yhtälöstä voidaan määrittää annettua jousivakiota α vastaava kriittinen kuorma P_{kr} .

Kaksi ääritapausta ovat:

- Kun $\alpha \rightarrow 0$, $\frac{kL}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ja $P_{kr} \rightarrow \frac{\pi^2 EI}{L^2}$.
- Kun $\alpha \rightarrow \infty$, $\frac{kL}{2} \rightarrow 4.492$ ja $P_{kr} \rightarrow 20.19 \frac{4EI}{L^2}$.

Jos jousivakio α on suurempi kuin $\frac{16\pi^2 EI}{L^3}$, niin nurjahdusmuoto on antisymmetrinen.

Tällöin $\frac{kL}{2} = \pi$ ja $P_{kr} = 4 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$.

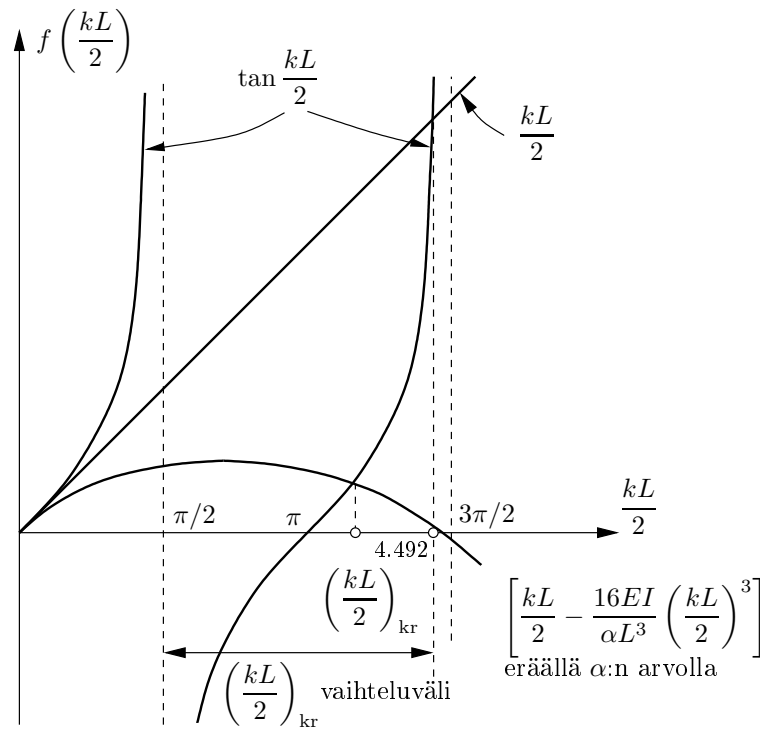
Jos jousi on etäisyydellä l_1 vasemmasta tuesta ja $l_2 = L - l_1$, niin ratkaisu kriittiselle kuormalle saadaan yhtälöstä

$$-\frac{\sin kl_1 \sin kl_2}{Pk \sin kL} + \frac{l_1 l_2}{PL} - \frac{1}{\alpha} = 0. \quad (6.39)$$

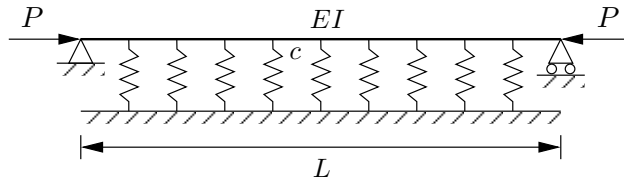
6.2 Kimmoisella alustalla oleva palkki

Tarkastellaan seuraavaksi sauvaa, joka on tuettu jatkuvalla kimmoisella väliaineella. Sauvan taipuessa (nurjahtaessa) syntyy tukipaine

$$q(x) = cv(x), \quad (6.40)$$



Kuva 6.6 Jousella tuetun sauvan ratkaisu.



Kuva 6.7 Kimmoisella alustalla oleva puristettu sauva.

missä c on alustaluku ja $v(x)$ on sauvan taipuma. Tällä tavalla käyttäytyvä kimmoinen alusta, ns. Winklerin alusta, vastaa äärettömän tiheään asennettuja jousia, jotka toimivat toisistaan riippumatta sekä vedettyinä että puristettuina (sauva ei irtoa alustasta).

Sauvan taipuma suoran perustilan suhteen on $v(x)$. Tutkitaan sauvan stabiiliutta muodostamalla potentiaalienergian toinen variaatio

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L \{EI[v''(x)]^2 + cv(x)^2 - P[v'(x)]^2\} dx, \quad (6.41)$$

missä aikaisemmin esitettyyn sauvan toisen variaation lausekkeeseen on uutena terminä tullut mukaan alustan osuus. Minimoidaan toisen variaation lauseke. Lisätään taipumaan variaatio $\varepsilon\hat{v}$, jolloin

$$v(x) \rightarrow v(x) + \varepsilon\hat{v}, \quad (6.42)$$

missä ε on parametri ja $v(x)$ on minimiä vastaava taipuma.

Integroinnin jälkeen toinen variaatio riippuu vain parametrasta ε , ja minimointi voidaan

tehdä nyt derivoimalla parametrin ε suhteen. Vaaditaan, että ¹

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon} (\delta^2 \Pi) \right]_{\varepsilon=0} = 0, \quad (6.43)$$

josta seuraa

$$\int_0^L (EI v'' \hat{v}'' + cv \hat{v} - P v' \hat{v}') dx = 0. \quad (6.44)$$

Tekemällä kaksi osittaisintegrointia ² tulee

$$\left[EI v'' \hat{v}' - \right]_0^L (EI v''' + P v') \hat{v} + \int_0^L (EI v^{(4)} + P v'' + cv) \hat{v} dx = 0. \quad (6.45)$$

Koska $\varepsilon \hat{v}$ on mielivaltainen variaatio, päätellään, että sijoitustermien ja viimeisen termin integrandin täytyy hävitä (variaatiolaskennan peruslause). Asettamalla integraalitermin integrandi nolaksi saadaan tasapainoehto

$$EI v^{(4)} + P v'' + cv = 0, \quad (6.46)$$

joka on samalla edellä käsitellyn variaatiotehtävän ns. Eulerin yhtälö. Sijoitustermien avulla päätellään sauvan reunaehdot ottamalla huomioon, että momentti $M = -EI v''$ ja leikkausvoima $Q = -EI v'''$. Reunaehdot on kahta tyyppiä:

1. Kinemaattiset reunaehdot (reunapisteissä $x = 0$ ja $x = L$)

$$v = 0, \quad (6.47)$$

$$v' = 0. \quad (6.48)$$

2. Luonnolliset reunaehdot

$$Q - P v' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v^{(3)} + k^2 v' = 0, \quad (6.49)$$

$$M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v'' = 0, \quad (6.50)$$

kun $x = 0$ ja $x = L$.

Taipuman differentiaaliyhtälö voidaan luonnollisesti johtaa, kuten aiemmin on jo tehty, tutkimalla sauvan alkion Δx tasapainoa ja ottamalla nyt huomioon myös alustapaineen $q = cv$ osuus.

Vapaasti tuetun palkin reunaehdot ovat

$$v(0) = v''(0) = 0, \quad (6.51)$$

$$v(L) = v''(L) = 0. \quad (6.52)$$

¹ F :n variaatio on $\delta F = \varepsilon \left(\frac{dF}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}$.

² $\int_0^L uv' dx = \left[uv \right]_0^L - \int_0^L u'v dx$.

Taipumafunktio $v = A \sin \frac{n\pi x}{L}$, missä A on vakiokerroin ja n on sinifunktion puolialtojen lukumäärä, toteuttaa sauvan differentiaaliyhtälön ja vapaasti tuetun sauvan reunaehdot. Sijoittamalla taipuman lauseke taipuman differentiaaliyhtälöön tulee

$$A \left[c - P \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \right] \sin \frac{n\pi x}{L} = 0. \quad (6.53)$$

Ei-triviaali ratkaisu, $A \neq 0$, on olemassa, jos

$$\begin{aligned} P &= EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + c \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \\ &= EI \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left[n^2 + \frac{1}{n^2} \frac{c}{EI} \left(\frac{L}{\pi} \right)^4 \right]. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Pienin P :n arvo riippuu sinifunktion puolialtojen lukumäärästä n . Merkitään

$$\beta = \left(\frac{L}{\pi} \right)^4 \frac{c}{EI}, \quad (6.55)$$

ja saadaan tulokset:

- Kun $0 < \sqrt{\beta} < 2$, niin $n = 1$.
- Kun $2 < \sqrt{\beta} < 6$, niin $n = 2$.
- Kun $6 < \sqrt{\beta} < 12$, niin $n = 3$.

Merkitsemällä $P_E \equiv EI \left(\frac{\pi}{L} \right)^2$ tulee nurjahduskuorman määrittävä yhtälö muotoon

$$\frac{P_n}{P_E} = n^2 + \frac{\beta}{n^2}. \quad (6.56)$$

Ottamalla kokonaisluku n jatkuvaksi muuttujaksi ja minimoimalla kuorma P_n luvun n suhteen saadaan

$$\frac{dP_n}{dn} = 0, \quad \Rightarrow n^2 = \sqrt{\beta}, \quad (6.57)$$

ja

$$P_{kr} = 2P_E \sqrt{\beta} = 2\sqrt{cEI}. \quad (6.58)$$

6.2.1 Yleinen tapaus

Kimmoisella alustalla olevan sauvan taipuman differentiaaliyhtälöksi johdettiin edellä

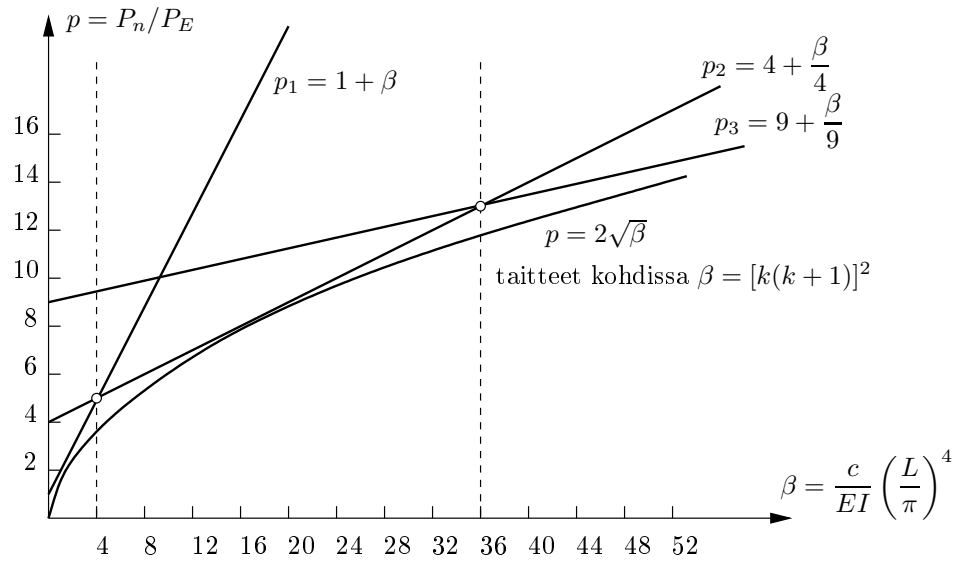
$$EIv^{(4)} + Pv'' + cv = 0, \quad (6.59)$$

eli

$$v^{(4)} + k^2 v'' + \frac{c}{EI} v = 0, \quad (6.60)$$

missä on jälleen merkitty $k^2 = \frac{P}{EI}$.

Sauvan reunaehto voi olla jokin seuraavista:



Kuva 6.8 Kimmoisella alustalla olevan sauvan nurjahduskuorma.

1. Kinemaattiset reunaehdot

$$v = 0, \quad (6.61)$$

$$v' = 0. \quad (6.62)$$

2. Luonnolliset reunaehdot

$$Q - Pv' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v^{(3)} + k^2 v' = 0, \quad (6.63)$$

$$M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v'' = 0. \quad (6.64)$$

Taipuman differentiaaliyhtälö kirjoitetaan muotoon

$$v^{(4)} + 2a^2 v'' + b^4 v = 0, \quad (6.65)$$

missä on merkitty

$$a^2 = \frac{k^2}{2} = \frac{P}{2EI} \quad \text{ja} \quad b^4 = \frac{c}{EI}. \quad (6.66)$$

Sijoittamalla ratkaistavaan differentiaaliyhtälöön yrite $v(x) = e^{rx}$ saadaan karakteristinen yhtälö

$$r^4 + 2a^2 r^2 + b^4 = 0, \quad (6.67)$$

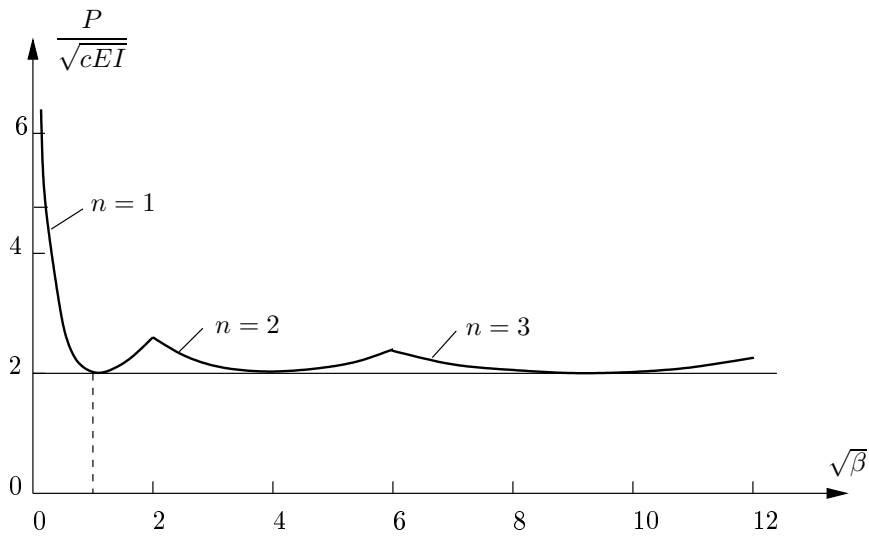
jonka ratkaisu on

$$r^2 = -a^2 \pm \sqrt{a^4 - b^4}. \quad (6.68)$$

Diskriminantin $a^4 - b^4$ merkin perusteella saadaan kolme tapausta:

1. Jos $a^4 - b^4 > 0$, niin juuret ovat

$$r_i = \pm i \sqrt{a^2 \mp \sqrt{a^4 - b^4}}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (6.69)$$



Kuva 6.9 Normeerattu nurjahduskuorma.

missä $i = \sqrt{-1}$. Merkitsemällä

$$\left. \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\} = \sqrt{a^2 \mp \sqrt{a^4 - b^4}} \quad (6.70)$$

saadaan juurille esitysmuoto

$$r_1 = ip, \quad r_2 = -ip, \quad r_3 = iq, \quad r_4 = -iq, \quad (6.71)$$

ja differentiaaliyhtälön ratkaisu voidaan muuntaa muotoon

$$v(x) = C_1 \cos px + C_2 \sin px + C_3 \cos qx + C_4 \sin qx. \quad (6.72)$$

2. Jos $a^4 - b^4 = 0$, niin juuret ovat

$$r_1 = ib, \quad r_2 = -ib, \quad r_3 = ib, \quad r_4 = -ib, \quad (6.73)$$

ja differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$v(x) = (C_1 x + C_2) \cos bx + (C_3 x + C_4) \sin bx. \quad (6.74)$$

3. Jos $a^4 - b^4 < 0$, niin saadaan

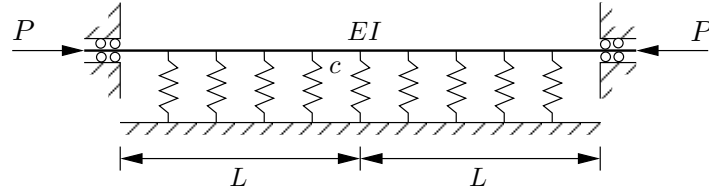
$$r^2 = -a^2 \pm i\sqrt{b^4 - a^4}, \quad (6.75)$$

ja juuret ovat

$$r_i = \pm i\sqrt{a^2 \mp i\sqrt{b^4 - a^4}}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (6.76)$$

Määritellään tässä tapauksessa

$$\left. \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{b^2 \pm a^2}{2}}, \quad (6.77)$$



Kuva 6.10 Kimmoisella alustalla oleva jäykästi tuettu sauva.

$(r^2 = (q + ip)^2)$, ja saadaan juurille esitysmuoto

$$r_i = \pm q \pm ip. \quad (6.78)$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisu voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$v(x) = A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x} + A_3 e^{r_3 x} + A_4 e^{r_4 x} \quad (6.79)$$

tai

$$v(x) = C_1 \cos px \cosh qx + C_2 \sin px \cosh qx + C_3 \cos px \sinh qx + C_4 \sin px \sinh qx. \quad (6.80)$$

Esimerkki 6.2 Määritetään jäykästi tuetun sauvan nurjahduskuorma.

Tarkastellaan ensin tapausta $a^4 - b^4 > 0$ (tapaus 1). Tällöin merkittiin

$$\left. \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\} = \sqrt{a^2 \mp \sqrt{a^4 - b^4}}, \quad (6.81)$$

ja ratkaisu on tässä tapauksessa

$$v(x) = C_1 \cos px + C_2 \sin px + C_3 \cos qx + C_4 \sin qx. \quad (6.82)$$

Jäykästi tuetun sauvan reunaehdot ovat

$$v(-L) = v(L) = 0, \quad (6.83)$$

$$v'(-L) = v'(L) = 0, \quad (6.84)$$

(sauva on välillä $[-L, L]$). Sijoittamalla ratkaisu reunaehtoyhtälöihin saadaan jälleen homogeeninen yhtälöryhmä

$$C_1 \cos pL \pm C_2 \sin pL + C_3 \cos qL \pm C_4 \sin qL = 0, \quad (6.85)$$

$$\mp C_1 p \sin pL + C_2 p \cos pL \mp C_3 q \sin qL + C_4 q \cos qL = 0, \quad (6.86)$$

(neljä yhtälöä). Symmetrisen nurjahdusmuodon tapauksessa $C_1 \neq 0$, $C_3 \neq 0$, $C_2 = C_4 = 0$, ja reunaehtoryhmästä seuraa tällöin

$$C_1 \cos pL + C_3 \cos qL = 0, \quad (6.87a)$$

$$C_1 p \sin pL + C_3 q \sin qL = 0. \quad (6.87b)$$

Asettamalla ryhmän determinantti nolaksi tulee

$$q \sin qL \cos pL = p \sin pL \cos qL, \quad (6.88)$$

tai

$$pL \tan pL = qL \tan qL, \quad (6.89)$$

jonka ratkaisun perusteella saadaan määritettyä kriittinen kuorma P_{kr} .

Antisymmetrisen nurjahdusmuodon tapauksessa $C_1 = C_3 = 0$, $C_2 \neq 0$, $C_4 \neq 0$, ja tällöin seuraa yhtälöryhmä

$$C_1 \sin pL + C_2 \sin qL = 0, \quad (6.90a)$$

$$C_1 p \cos pL + C_2 q \cos qL = 0. \quad (6.90b)$$

Asettamalla jälleen ryhmän determinantti nolaksi tulee

$$pL \cot pL = qL \cot qL, \quad (6.91)$$

josta voidaan ratkaista nurjahduskuorma suureen bL funktiona

$$\frac{P_{kr}}{P_0} = f(bL), \quad (6.92)$$

missä on normeerattu nivelsauvan tuloksen $P_{kr} \equiv P_0 = 2\sqrt{cEI}$ suhteen.

Tapauksissa 2 ja 3, eli $a^4 - b^4 < 0$ ja $a^4 - b^4 = 0$, ei esiinny bifurkaatiota (harjoitustehtävä).

Esimerkki 6.3 Lasketaan paalun kriittinen kuorma, kun väliaine kuvataan Winklerin kimmoisella alustalla.

Reunaehdot ovat tässä tapauksessa

$$v(0) = v'(0) = 0 \quad (6.93)$$

ja

$$M(L) = 0, \quad Q(L) - Pv'(L) = 0. \quad (6.94)$$

Kahdesta jälkimmäisestä reunaehdosta seuraa

$$v''(L) = 0, \quad v'''(L) + 2a^2v'(L) = 0. \quad (6.95)$$

Käsitellään tapaukset 1, 2 ja 3. Merkitään $P_0 \equiv 2\sqrt{cEI}$, joka on kriittinen kuorma suurilla alustaluvun c arvoilla tai hyvin pitkälle vapaasti tuetulle palkille, ja $P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{kr}^2}$.

- Tapauksessa 3, $a^4 - b^4 < 0$, eli $P_{kr} < P_0$ merkitään

$$\left. \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{b^2 \pm a^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \frac{P_{kr}}{P_0}}, \quad (6.96)$$

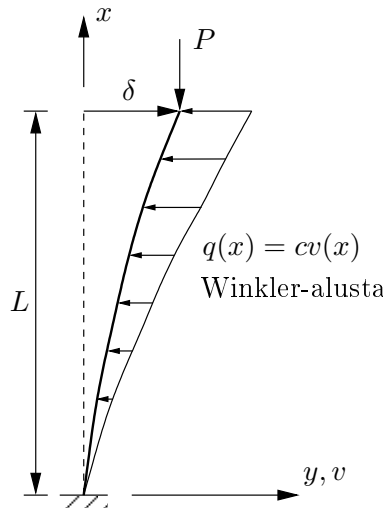
ja ratkaisu on

$$v(x) = C_1 \cos px \cosh qx + C_2 \sin px \cosh qx + C_3 \cos px \sinh qx + C_4 \sin px \sinh qx. \quad (6.97)$$

Sijoittamalla taipuman $v(x)$ lauseke kahteen ensimmäiseen reunaehtoon tulee

$$C_1 = 0, \quad (6.98a)$$

$$pC_2 + qC_3 = 0. \quad (6.98b)$$



Kuva 6.11 Kimmoisessa väliaineessa oleva paalu.

Kahdesta jälkimmäisestä, pään $x = L$, reunaehdosta

$$v''(L) = 0, \quad v'''(L) + 2(p^2 - q^2)v'(L) = 0 \quad (6.99)$$

seuraa puolestaan

$$(p^2 + q^2)C_2(q \cosh qL \sin pL + p \sinh qL \cos pL) - qC_4[(p^2 - q^2) \sinh qL \sin pL - 2pq \cosh qL \cos pL] = 0, \quad (6.100)$$

$$C_2[(p^2 - q^2) \sinh qL \sin pL + 2pq \cosh qL \cos pL] - qC_4(q \cosh qL \sin pL - p \sinh qL \cos qL) = 0. \quad (6.101)$$

Determinantin nollaehtosta seuraa laskelmien jälkeen yhtälö

$$\left(1 + \frac{1}{1 + \frac{P_0}{P_{kr}}}\right) \sin^2 pL - \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{P_0}{P_{kr}}}\right) \sinh^2 pL = 2. \quad (6.102)$$

Yhtälöstä (6.102) voidaan määrittää suhde $\frac{P_{kr}}{P_0}$ dimensiottoman muuttujan $bL =$

$L \left(\frac{c}{EI}\right)^{\frac{1}{4}}$ funktiona

$$\frac{P_{kr}}{P_0} = \frac{\pi^2 EI}{L_{kr}^2} \frac{1}{2\sqrt{cEI}}, \quad (6.103)$$

$$\frac{L_{kr}}{L} = \frac{\pi}{\sqrt{2}bL} \frac{1}{\sqrt{\frac{P_{kr}}{P_0}}}. \quad (6.104)$$

Tapauksessa $c = 0$, $P_{kr}^0 = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$. Koska $\frac{P_{kr}^0}{P_{kr}} < 1$ ja $P_{kr} < P_0$, saadaan

$$\frac{P_{kr}^0}{P_0} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \frac{1}{2\sqrt{cEI}} = \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{(bL)^2} < 1, \quad (6.105)$$

eli $bL > \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.110720735$.

- Tapauksessa 2, $a^2 = b^2$ ja $P_{kr} = P_0$, ratkaisu on

$$v(x) = (C_1x + C_2) \cos bx + (C_3x + C_4) \sin bx. \quad (6.106)$$

Reunaehdoista seuraa nyt yhtälöryhmä

$$C_2 = 0, \quad (6.107a)$$

$$C_1 + aC_2 = 0, \quad (6.107b)$$

$$(\sin bL + bL \cos bL)C_1 - (2 \cos bL - bL \sin bL)C_3 = 0, \quad (6.107c)$$

$$(2 \cos bL + bL \sin bL)C_1 + (\sin bL - bL \cos bL)C_3 = 0. \quad (6.107d)$$

Determinantin nollaehdosta seuraa yhtälö

$$\cos^2 bL = \frac{1}{3}(b^2L^2 - 1), \quad (6.108)$$

jonka ratkaisu on $bL \approx 1.1896$. Kriittinen kuorma on

$$P_{kr} = 2b^2EI = \frac{2.830EI}{L^2} = \frac{\pi^2EI}{(1.867L)^2}, \quad (6.109)$$

ja

$$c_{kr} = b^4EI = \frac{2.00EI}{L^4}. \quad (6.110)$$

Tapauksen $c = 0$ (ei alustaa) nurjahduskuorma on $P_{kr}^0 = \frac{\pi^2EI}{4L^2} = \frac{2.467EI}{L^2}$.

- Tapauksessa 1, $a^2 - b^2 > 0$ ja $P_{kr} > P_0$, ratkaisu on

$$v(x) = C_1 \cos px + C_2 \sin px + C_3 \cos qx + C_4 \sin qx. \quad (6.111)$$

missä nyt merkitään

$$\left. \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\} = \sqrt{a^2 \mp \sqrt{a^4 - b^4}} = b \sqrt{\frac{P_{kr}}{P_0} \mp \sqrt{\left(\frac{P_{kr}}{P_0}\right)^2 - 1}}. \quad (6.112)$$

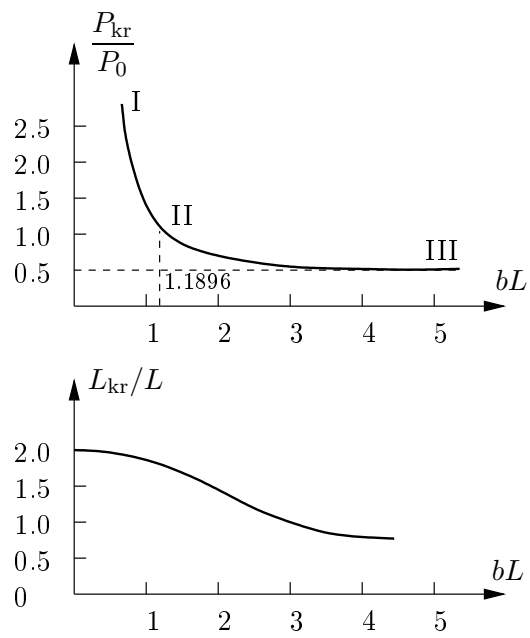
Reunaehtoryhmän determinantin nollaehdosta seuraa tässä tapauksessa yhtälö

$$\frac{P_{kr}}{P_0} \sin pL \sin qL + \left[2 \left(\frac{P_{kr}}{P_0} \right)^2 - 1 \right] \cos pL \cos qL = 1, \quad (6.113)$$

josta voidaan määrittää $\frac{P_{kr}}{P_0}$ muuttujan bL funktiona.

Saaduista tuloksista voidaan tehdä seuraavat päätelmät:

- Kun $bL \rightarrow 1.1896$, niin $\frac{P_{kr}}{P_0} \rightarrow 1$.
- Kun $bL \rightarrow 0$, niin $\frac{P_{kr}}{P_0} \rightarrow \infty$.
- Kun $bL > 1.1896$, niin $\frac{P_{kr}}{P_0} > 1$.
- Tapauksessa 3 nurjahduskuorma on $\frac{P_{kr}}{P_0} < 1$, kun $bL > 1.1896$.



Kuva 6.12 Paalun nurjahduskuorma ja nurjahduspituus.

Luku 7

Jatkuvan palkin ja kehän nurjahdus

7.1 Momenttimenetelmä

Sauvanpääkiertymien ja sauvanpäämomenttien väliset yhteydet kuvan 7.1 nivelpäiselle sauvalle ovat

$$\varphi_{12} = \alpha_{12}M_{12} - \beta_{12}M_{21} + \theta_{12} + \alpha_{12}^0, \quad (7.1)$$

$$\varphi_{21} = \alpha_{21}M_{21} - \beta_{21}M_{12} + \theta_{21} + \alpha_{21}^0, \quad (7.2)$$

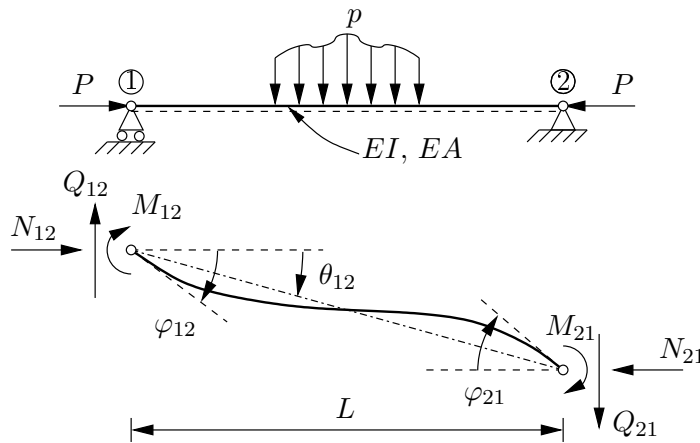
missä α_{ij} , β_{ij} ovat yksikön suuruisen sauvanpäämomentin aiheuttamat kiertymät, $\theta_{12} = \theta_{21} = (v_2 - v_1)/L$ on sauvan kiertymä (v_1 ja v_2 ovat päiden taipumat, L on sauvan pituus) ja α_{ij}^0 ovat kuorman aiheuttamat kiertymät niveltuetussa sauvassa.

Määritetään seuraavaksi edellä esiteltyt sauvavakiot tyypillisille tapauksille.

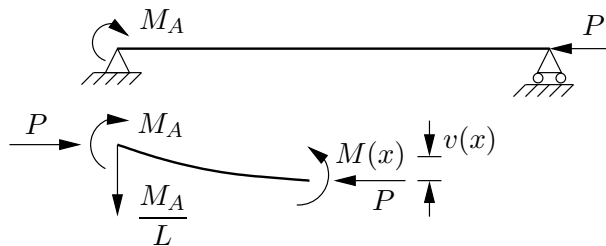
Esimerkki 7.1 Määritetään niveltuetun sauvan päässä $x = 0$ olevan momentin $M_A = 1$ aiheuttamat sauvanpääkiertymät.

Momentista M_A ja puristavasta voimasta P syntyvä sauvan taivutusmomentti on

$$M(x) = Pv(x) + M_A \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad (7.3)$$



Kuva 7.1 Sauvanpääkiertymät.



Kuva 7.2 Momentti M_A nivelsauvan päässä.

ja sauvan taipuman differentiaaliyhtälöksi saadaan

$$EIv'' + Pv = -M_A \left(1 - \frac{x}{L}\right). \quad (7.4)$$

Reunaehdoilla $v(0) = 0$, $v(L) = 0$ tulee ratkaisu

$$v(x) = \frac{M_A L^2}{EI} \frac{1}{(kL)^2} \left[\frac{\sin k(L-x)}{\sin kL} - 1 + \frac{x}{L} \right]. \quad (7.5)$$

Momentin $M_{12} \equiv M_A = 1$ aiheuttamat kiertymät sauvan päissä ovat

$$\alpha_{12} = v'(0), \quad (7.6)$$

$$\beta_{21} = -v'(L), \quad (7.7)$$

missä

$$\alpha_{12} = \frac{L}{3EI} \frac{3}{kL} \left(\frac{1}{kL} - \frac{1}{\tan kL} \right) = \frac{L}{3EI} \psi(kL), \quad (7.8)$$

$$\beta_{21} = \frac{L}{6EI} \frac{6}{kL} \left(\frac{1}{\sin kL} - \frac{1}{kL} \right) = \frac{L}{6EI} \phi(kL). \quad (7.9)$$

Edellä on määritelty funktiot

$$\psi(kL) = \frac{3}{kL} \left(\frac{1}{kL} - \frac{1}{\tan kL} \right), \quad (7.10)$$

$$\phi(kL) = \frac{6}{kL} \left(\frac{1}{\sin kL} - \frac{1}{kL} \right). \quad (7.11)$$

Kun voima P lähestyy nollaa, niin funktioiden ϕ ja ψ arvot lähestyvät ykköstä.

Esimerkki 7.2 Määritetään pistekuorman aiheuttamat sauvanpääkiertymät.

Kuvan 7.3 tapauksessa taivutusmomentti on

$$M = Pv + \frac{b}{L}Fx, \quad (7.12)$$

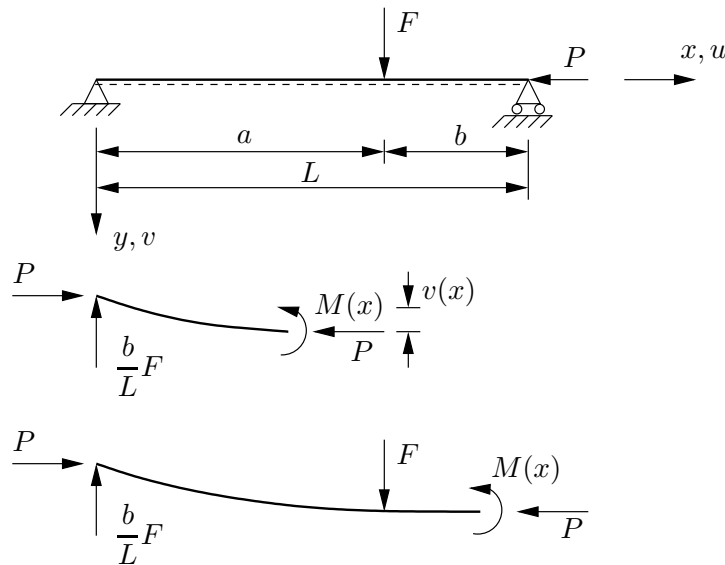
kun $x < a$, ja

$$\begin{aligned} M &= Pv + \frac{b}{L}Fx - F(x-a) \\ &= Pv + Fa \left(1 - \frac{x}{L}\right), \end{aligned} \quad (7.13)$$

kun $x > a$. Koska $M = -EIv''$ saadaan differentiaaliyhtälöt

$$EIv'' + Pv = -\frac{b}{L}Fx, \quad x \leq a, \quad (7.14)$$

$$EIv'' + Pv = -Fa \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad x > a, \quad (7.15)$$



Kuva 7.3 Pistekuorman F kuormittama puristettu sauva.

joiden ratkaisut ovat

$$v = A \cos kx + B \sin kx - \frac{Fb}{P} \frac{x}{L}, \quad x \leq a, \quad (7.16)$$

$$v = C \cos kx + D \sin kx - \frac{Fa}{P} \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad x > a, \quad (7.17)$$

missä on jälleen merkitty $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$.

Reuna- ja yhteensopivuusehtojen

$$v(0) = v(L) = 0, \quad (7.18)$$

$$v(a-) = v(a+), \quad v'(a-) = v'(a+) \quad (7.19)$$

perusteella johdetaan taipumien lausekkeet

$$v(x) = \frac{F}{P} \left(\frac{1}{k} \frac{\sin kb}{\sin kL} \sin kx - b \frac{x}{L} \right), \quad x \leq a, \quad (7.20)$$

$$v(x) = \frac{F}{P} \left[\frac{1}{k} \frac{\sin ka}{\sin kL} \sin k(L-x) - a \left(1 - \frac{x}{L}\right) \right], \quad x > a. \quad (7.21)$$

Taipuman lausekkeiden avulla määritetään pistekuorman F aiheuttamat kiertymät sauvan päissä:

$$\alpha_{12}^0 = v'(0), \quad \alpha_{21}^0 = v'(L), \quad (7.22)$$

joissa

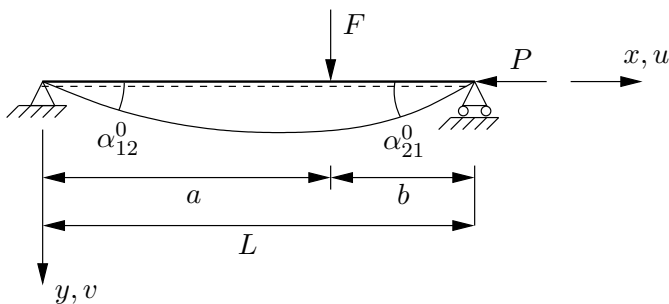
$$\alpha_{12}^0 = \frac{F}{P} \left(\frac{\sin kb}{\sin kL} - \frac{b}{L} \right), \quad (7.23)$$

$$\alpha_{21}^0 = -\frac{F}{P} \left(\frac{\sin ka}{\sin kL} - \frac{a}{L} \right). \quad (7.24)$$

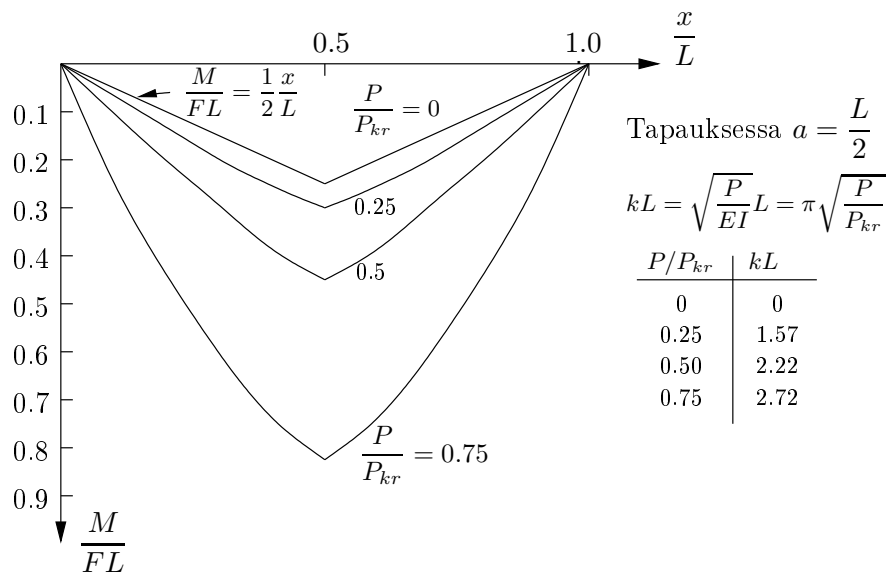
Taivutusmomentin $M(x) = -EIv''(x)$ lausekkeet osaväleillä ovat

$$M(x) = FL \frac{\sin kb}{\sin kL} \frac{\sin kx}{kL}, \quad x \leq a, \quad (7.25)$$

$$M(x) = FL \frac{\sin ka}{\sin kL} \frac{\sin k(L-x)}{kL}, \quad x > a. \quad (7.26)$$



Kuva 7.4 Pistekuorman F aiheuttamat kiertymät.



Kuva 7.5 Pistekuorman F ja normaalivoiman aiheuttama taivutusmomentti.

Esimerkki 7.3 Lasketaan sauavavakiot α_{12}^0 ja α_{21}^0 tasaisen kuorman tapauksessa.

Sijoittamalla sauvan taivutusmomentti $M(x) = -EIv''(x)$ tasapainoehtoon

$$\begin{aligned} M(x) &= Pv(x) + \frac{qL}{2}x - qx\frac{x}{2} \\ &= Pv(x) + \frac{qL^2}{2}\frac{x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right) \end{aligned} \quad (7.27)$$

saadaan taipuman differentiaaliyhtälö

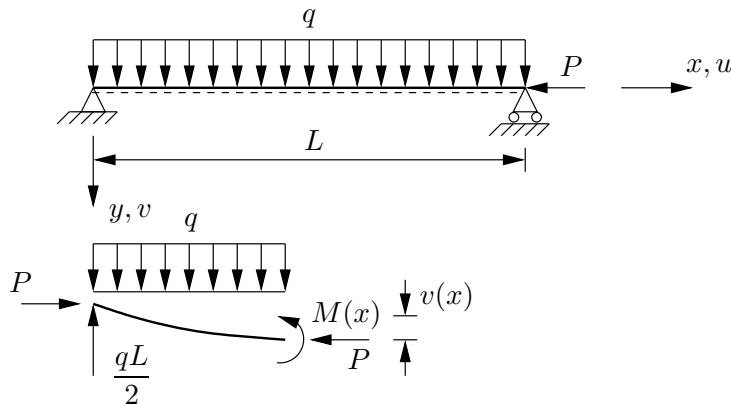
$$EIv''(x) + Pv(x) = -\frac{qL^2}{2}\frac{x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right). \quad (7.28)$$

Haetaan yhtälön yksityisratkaisua muodossa

$$v_0 = a + bx + cx^2, \quad (7.29)$$

jonka sijoittaminen differentiaaliyhtälöön tuottaa tuloksen

$$EI2c + Pa + Pbx + Pcx^2 = -\frac{qL}{2}x + \frac{q}{2}x^2. \quad (7.30)$$



Kuva 7.6 Tasainen kuorma.

Vertaamalla x :n samankorkuisia potensseja yhtälön kummallakin puolella voidaan päätellä, että

$$a = -\frac{q}{k^2 P}, \quad b = -\frac{qL}{2P}, \quad c = \frac{q}{2P}. \quad (7.31)$$

Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$v(x) = A \cos kx + B \sin kx + \frac{qL^2}{P} \left[-\frac{1}{(kL)^2} - \frac{1}{2} \frac{x}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (7.32)$$

Reunaehtojen $v(0) = 0$, $v(L) = 0$ perusteella johdetaan sauvan taipumalle lauseke

$$v(x) = \frac{qL^2}{P} \left[\frac{\sin k(L-x) + \sin kx}{(kL)^2 \sin kL} - \frac{1}{(kL)^2} - \frac{1}{2} \frac{x}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right], \quad (7.33)$$

ja sen perusteella määritetään kiertymät

$$\alpha_{12}^0 = v'(0), \quad \alpha_{21}^0 = v'(L), \quad (7.34)$$

$$\alpha_{12}^0 = \frac{qL^3}{24EI} \chi(kL), \quad \alpha_{21}^0 = -\frac{qL^3}{24EI} \chi(kL), \quad (7.35)$$

missä on määritelty jälleen uusi funktio

$$\chi(kl) = 3 \frac{\left(\tan \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right)}{\left(\frac{kl}{2} \right)^3}, \quad (7.36)$$

l on sauvan pituus. Kun P lähestyy arvoa nolla, niin funktion χ arvo lähestyy ykköstä, ja siten $\alpha_{12}^0 = \frac{qL^3}{24EI}$, kun $P = 0$.

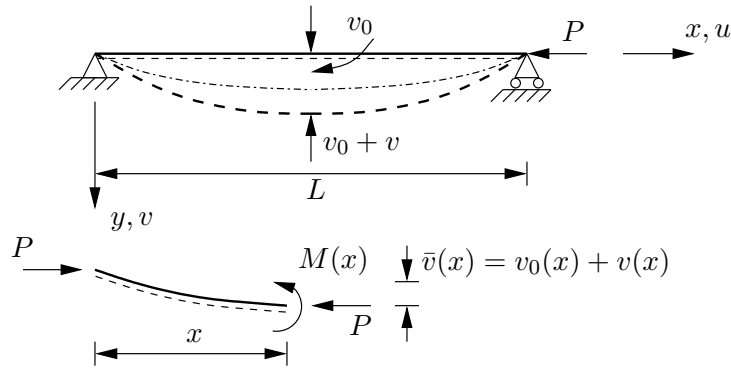
Esimerkki 7.4 Määritetään sauavakiot keskeisesti puristetulle alkuaan käyrälle sauvalle.

Alkuaan käyrän sauvan taipuman differentiaaliyhtälö on

$$EIv''(x) + P[v(x) + v_0(x)] = 0. \quad (7.37)$$

Otaksumalla alkutaipumalle lauseke

$$v_0(x) = \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (7.38)$$



Kuva 7.7 Alkuaan käyrä puristettu sauva.

differentiaaliyhtälö tulee muotoon

$$v''(x) + k^2 v(x) = -k^2 \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L}, \quad (7.39)$$

jonka ratkaisu on

$$v(x) = \frac{\left(\frac{kL}{\pi}\right)^2}{1 - \left(\frac{kL}{\pi}\right)^2} \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (7.40)$$

Sauvan kokonaistaipuma on

$$\bar{v}(x) = v_0(x) + v(x) = \frac{1}{1 - \left(\frac{kL}{\pi}\right)^2} \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (7.41)$$

Ottamalla huomioon yhteydet

$$\left(\frac{kL}{\pi}\right)^2 = \frac{PL^2}{\pi^2 EI} = \frac{P}{P_{kr}} \quad (7.42)$$

saadaan kokonaistaipuman lauseke muotoon

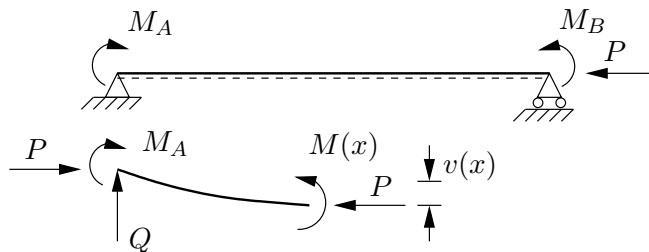
$$\begin{aligned} \bar{v}(x) &= \frac{\delta_0 \sin \frac{\pi x}{L}}{1 - \frac{P}{P_{kr}}} \\ &= \frac{v_0(x)}{1 - \frac{P}{P_{kr}}}. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Sauvan taivutusmomentti on

$$M(x) = -EI v''(x) = \frac{P v_0(x)}{1 - \frac{P}{P_{kr}}} = \frac{M_0(x)}{1 - \frac{P}{P_{kr}}}. \quad (7.44)$$

Sauvanpääkiertymät ovat

$$\alpha_{12}^0 = v'(0) = \frac{\delta_0}{L} \frac{\pi(kL)^2}{\pi^2 - (kL)^2}, \quad \alpha_{21}^0 = v'(L) = -\frac{\delta_0}{L} \frac{\pi(kL)^2}{\pi^2 - (kL)^2}. \quad (7.45)$$



Kuva 7.8 Momentit puristetun sauvan päissä.

Esimerkki 7.5 Määritetään taivutusmomentti sauvalle, jota kuormittavat momentit M_A ja M_B sauvan päissä.

Sauvan tasapainoehdon

$$M(x) = Pv(x) + M_A + Qx \quad (7.46)$$

ja yhtälöiden $M''(x) = Pv''(x)$, $M(x) = -EIv''(x)$ perusteella johdetaan differentiaaliyhtälö

$$M''(x) + k^2 M(x) = 0, \quad (7.47)$$

missä on jälleen merkitty $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$.

Differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$M(x) = A \sin kx + B \cos kx. \quad (7.48)$$

Reunaehdoilla $M(0) = M_A$, $M(L) = M_B$ momentin lausekkeeksi tulee

$$M(x) = -(M_A \cos kL - M_B) \frac{\sin kx}{\sin kL} + M_A \cos kx. \quad (7.49)$$

Ehdosta $\frac{dM(x)}{dx} = 0$ saadaan yhtälö

$$\tan kx = -\cot kL + \frac{\beta}{\sin kL}, \quad \left(\beta = \frac{M_A}{M_B} \right) \quad (7.50)$$

momentin maksimikohdan määrittämiseen. Momentin maksimiarvo on

$$M_{\max} = M_A \frac{1}{\sin kL} \sqrt{1 - 2\beta \cos kL + \beta^2}. \quad (7.51)$$

Edellä käsiteltyjen esimerkkien avulla on saatu määritetyksi sauvanpääkiertymien ja sauvanpäämomenttien kaavoissa

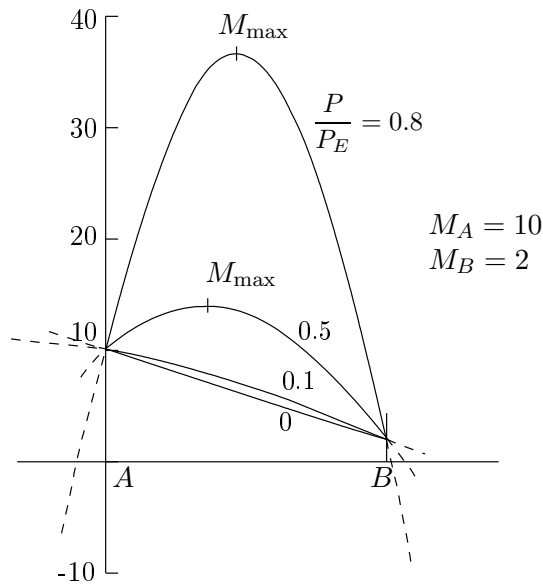
$$\varphi_{12} = \alpha_{12} M_{12} - \beta_{12} M_{21} + \theta_{12} + \alpha_{12}^0, \quad (7.52)$$

$$\varphi_{21} = \alpha_{21} M_{21} - \beta_{21} M_{12} + \theta_{21} + \alpha_{21}^0, \quad (7.53)$$

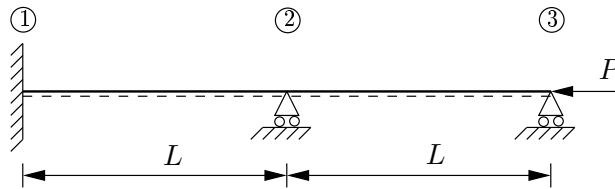
esiintyvät (tasajäykän sauvan) sauavakiot

$$\alpha_{12} = \frac{L}{3EI} \psi(kL) = \alpha_{21}, \quad \beta_{12} = \frac{L}{6EI} \phi(kL) = \beta_{21} \quad (7.54)$$

sekä vakiot α_{ij}^0 useille kuormitustapauksille.



Kuva 7.9 Taivutusmomentti puristavan voiman funktiona.



Kuva 7.10 Kaksiaukkoinen palkki.

Esimerkki 7.6 Lasketaan kaksiaukkoisen jatkuvan sauvan nurjahduskuorma.

Kuvan 7.10 kaksiaukkoisen sauvan tuilla 1 ja 2 lausutaan kiertymien yhteensopivuusehdot

$$\varphi_{12} = 0, \quad \varphi_{21} = \varphi_{23}. \quad (7.55)$$

Tasapainoehdot tuilla ovat

$$M_{21} + M_{23} = 0, \quad M_{32} = 0. \quad (7.56)$$

Ottamalla huomioon, että nyt $\alpha_{12}^0 = 0$ ja $\theta_{12} = 0$, saadaan sauvanpääkiertymän kaava

$$\varphi_{12} = \alpha_{12} M_{12} - \beta_{12} M_{21}, \quad (7.57)$$

ja yhtensopivuusehdosta $\varphi_{12} = 0$ tulee

$$M_{12} = \frac{\beta_{12}}{\alpha_{12}} M_{21}. \quad (7.58)$$

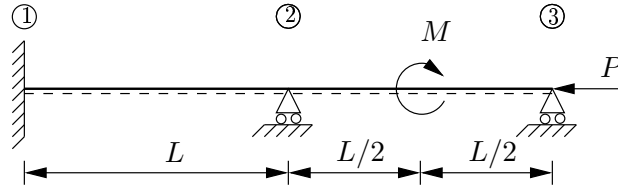
Sijoittamalla sauvanpääkiertymien kaavat

$$\varphi_{21} = \alpha_{21} M_{21} - \beta_{21} M_{12}, \quad (7.59)$$

$$\varphi_{23} = \alpha_{23} M_{23} \quad (7.60)$$

yhteensopivuusehtoon $\varphi_{21} = \varphi_{23}$ saadaan yhtälö

$$\alpha_{21}(-M_{23}) - \beta_{21} M_{12} = \alpha_{23} M_{23} \quad (7.61)$$



Kuva 7.11 Kaksiaukkoinen palkki, momenttikuorma toisen jänteen keskellä.

eli

$$\left(\alpha_{23} + \alpha_{21} - \frac{\beta_{21}\beta_{12}}{\alpha_{12}} \right) M_{23} = 0. \quad (7.62)$$

Edellä on lisäksi otettu huomioon tasapainoehto $M_{21} = -M_{23}$. Lopulta saatiin jälleen ratkaistavaksi homogeeninen yhtälöryhmä (nyt vain yksi yhtälö), jolla on ei-triviaali ratkaisu, jos kerroinmatriisin determinantti on nolla, eli

$$\alpha_{23} + \alpha_{21} - \frac{\beta_{21}\beta_{12}}{\alpha_{12}} = 0. \quad (7.63)$$

Sijoittamalla tähän edellä johdetut sauvavakioiden kaavat päädytään yhtälöön

$$\frac{1}{9}2\psi^2(kL) - \frac{1}{36}\phi^2(kL) = 0, \quad (7.64)$$

eli

$$8\psi^2(kL) - \phi^2(kL) = 0, \quad (7.65)$$

jonka ratkaisu on $kL \approx 3.583$. Kriittinen kuorma on $P_{kr} = (3.583)^2 \frac{EI}{L^2} \approx 1.30 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$, ja nurjahduspituus on vastaavasti $L_n \approx 0.877L$. Nurjahduskuorman arvoa voidaan verrata L :n mittaisen nivelsauvan kriittisen kuorman arvoon $P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$.

Esimerkki 7.7 Kuvan 7.11 kaksiaukkoisen palkin oikean jänteen keskellä on momenttikuorma M . Määritetään tukimomentin arvo.

Kuvan 7.11 palkin yhteensopivuusehdot ovat

$$\varphi_{12} = 0, \quad \varphi_{21} = \varphi_{23}. \quad (7.66)$$

Sijoittamalla näihin sauvanpääkiertymien kaavat

$$\varphi_{12} = \alpha_{12}M_{12} - \beta_{12}M_{21}, \quad (7.67)$$

$$\varphi_{21} = \alpha_{21}M_{21} - \beta_{21}M_{12}, \quad (7.68)$$

$$\varphi_{23} = \alpha_{23}M_{23} + \alpha_{23}^0, \quad (7.69)$$

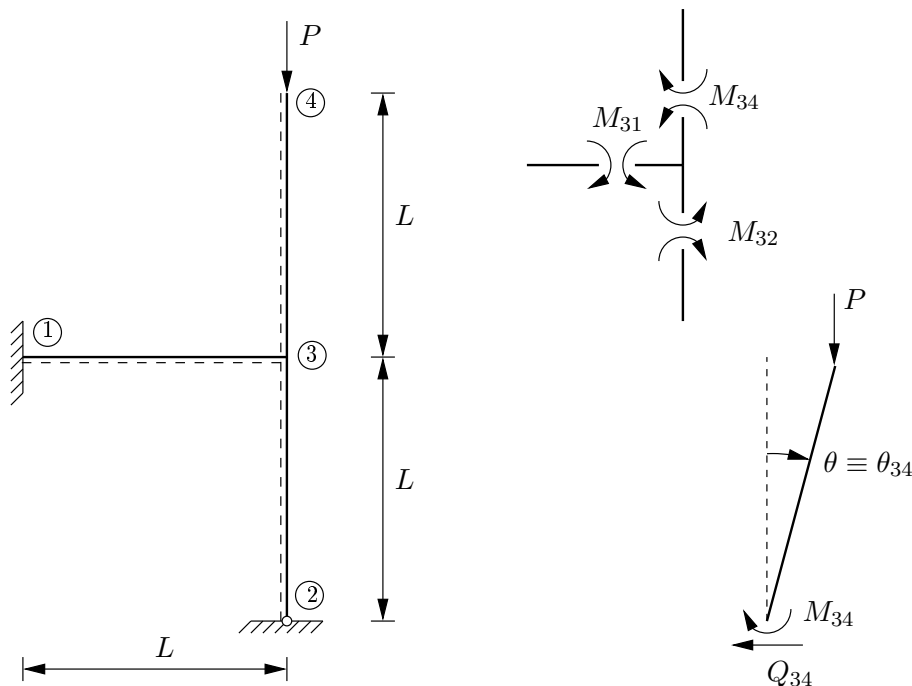
saadaan

$$M_{12} = \frac{\beta_{12}}{\alpha_{12}} M_{21}, \quad (7.70)$$

$$\alpha_{21}M_{21} - \beta_{21}M_{12} = \alpha_{23}M_{23} + \alpha_{23}^0, \quad (7.71)$$

ja eliminoimalla tulee

$$\left(\alpha_{21} + \alpha_{23} - \frac{\beta_{21}\beta_{12}}{\alpha_{12}} \right) M_{23} = -\alpha_{23}^0. \quad (7.72)$$



Kuva 7.12 Yksinkertainen kehärakenne.

Pistemomentin aiheuttamat nivelsauvan kiertymät tuilla voidaan määrittää pistekuorman ratkaisun perusteella raja-arvona asettamalla kaksi pistevoimaa vastakkaisiin suuntiin vierekkäin ja antamalla voimien välimatkan mennä kohti nollaa. Jos momentti on etäisyydellä a vasemmalta tuelta, niin

$$\alpha_{12}^0 = -\frac{M}{PL} \left(\frac{kL \cos kb}{\sin kL} - 1 \right), \quad (7.73)$$

$$\alpha_{21}^0 = -\frac{M}{PL} \left(\frac{kL \cos ka}{\sin kL} - 1 \right), \quad (7.74)$$

missä P on puristava voima ja $b = L - a$. Jos momentti M on jänteen keskellä, niin sauvalle 23

$$\begin{aligned} \alpha_{23}^0 &= -\frac{M}{PL} \left(\frac{kL \cos \frac{kL}{2}}{\sin kL} - 1 \right) \\ &= -\frac{M}{PL} \left(\frac{\frac{kL}{2}}{\sin kL} - 1 \right). \end{aligned} \quad (7.75)$$

Tukimomentin lausekkeeksi saadaan

$$M_{23} = \frac{M}{PL} \left(\frac{\frac{kL}{2}}{\sin kL} - 1 \right) \frac{\psi(kL)}{8\psi^2(kL) - \phi^2(kL)} \frac{12EI}{L^2}. \quad (7.76)$$

Esimerkki 7.8 Lasketaan kuvan 7.12 kehän nurjahduskuorma.

Kehän yhteensopivuusehdot ovat

$$\varphi_{13} = 0, \quad \varphi_{31} = \varphi_{34} = \varphi_{32}. \quad (7.77)$$

Sauvanpääkiertymien kaavat ovat

$$\varphi_{13} = \alpha_{13}M_{13} - \beta_{13}M_{31}, \quad (7.78)$$

$$\varphi_{31} = \alpha_{31}M_{31} - \beta_{31}M_{13}, \quad (7.79)$$

$$\varphi_{34} = \alpha_{34}M_{34} + \theta_{34}, \quad (7.80)$$

$$\varphi_{32} = \alpha_{32}M_{32}. \quad (7.81)$$

Kehän nurkkien tasapainoehdot ovat

$$M_{23} = 0, \quad (7.82)$$

$$M_{43} = 0, \quad (7.83)$$

$$M_{31} + M_{32} + M_{34} = 0. \quad (7.84)$$

Sauvan 34 tasapainoehto on

$$PL\theta_{34} + M_{34} = 0, \quad (7.85)$$

josta voidaan ratkaista

$$\theta_{34} = -\frac{M_{34}}{PL}. \quad (7.86)$$

Sijoittamalla sauvanpääkiertymien kaavat yhteensopivuusehtoihin $\varphi_{13} = 0$, $\varphi_{31} = \varphi_{32}$, $\varphi_{34} = \varphi_{32}$ ja ottamalla jälkimmäisissä ehdoissa huomioon, että nurkan 3 tasapainoyhtälön perusteella $M_{32} = -(M_{31} + M_{34})$, tulee

$$M_{13} = \frac{\beta_{13}}{\alpha_{13}}M_{31} = \frac{1}{2}M_{31}, \quad (7.87)$$

$$\left(-\frac{1}{2}\beta_{31} + \alpha_{31}\right)M_{31} = \alpha_{32}(-M_{31} - M_{34}), \quad (7.88)$$

$$\left(\alpha_{34} - \frac{1}{PL}\right)M_{34} = \alpha_{32}(-M_{31} - M_{34}). \quad (7.89)$$

Sijoittamalla saatuun yhteensopivuusehtojen yhtälöryhmään sauavakioiden kaavat $\alpha_{31} = \frac{L}{3EI}$, $\beta_{31} = \frac{L}{6EI}$, (sauva 13 ei ole puristettu, $\psi(kL) = \phi(kL) = 1$), $\alpha_{32} = \frac{L}{3EI}\psi(kL)$, $\alpha_{34} = \frac{L}{3EI}\psi(kL)$, (nyt kaikkien sauvojen pituus on sama L ja samoin EI on sama), saadaan

$$\frac{L}{3EI} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + 1 + \psi(kL) & \psi(kL) \\ \psi(kL) & 2\psi(kL) - \frac{3EI}{L} \frac{1}{PL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{31} \\ M_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.90)$$

Determinantin nollaehdosta seuraa yhtälö

$$\psi(kL)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{(kL)^2}\right)\psi(kL) - \frac{9}{4(kL)^2} = 0, \quad (7.91)$$

jonka ratkaisu on $kL \approx 1.37$, ja kriittisen kuorman arvo on $P_{kr} \approx 1.87 \frac{EI}{L^2}$.

7.2 Siirtymämenetelmä

Sauvanpääkiertymien ja momenttien väliset yhteydet voi kirjoittaa myös muodossa

$$\begin{bmatrix} \alpha_{12} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & \alpha_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{12} - \theta_{12} - \alpha_{12}^0 \\ \varphi_{21} - \theta_{21} - \alpha_{21}^0 \end{bmatrix}. \quad (7.92)$$

Ratkaisemalla yhtälöt sauvanpäämomenttien suhteen saadaan

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ B_{21} & A_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{12} - \theta_{12} - \alpha_{12}^0 \\ \varphi_{21} - \theta_{21} - \alpha_{21}^0 \end{bmatrix}, \quad (7.93)$$

eli

$$M_{12} = A_{12}\varphi_{12} + B_{12}\varphi_{21} - C_{12}\theta_{12} + MK_{12}, \quad (7.94)$$

$$M_{21} = A_{21}\varphi_{21} + B_{21}\varphi_{12} - C_{21}\theta_{21} + MK_{21}. \quad (7.95)$$

Tasajäykälle sauvalle

$$A_{12} = \frac{2\psi(kL)}{4\psi^2(kL) - \phi^2(kL)} \frac{6EI}{L} = A_{21}, \quad (7.96)$$

$$B_{12} = \frac{\phi(kL)}{4\psi^2(kL) - \phi^2(kL)} \frac{6EI}{L} = B_{21}, \quad (7.97)$$

ja

$$C_{12} = A_{12} + B_{12}, \quad C_{21} = A_{21} + B_{21}. \quad (7.98)$$

Kiinnitysmomentit ovat

$$MK_{12} = -A_{12}\alpha_{12}^0 - B_{12}\alpha_{21}^0, \quad MK_{21} = -A_{21}\alpha_{21}^0 - B_{21}\alpha_{12}^0. \quad (7.99)$$

Jos sauvan päässä 2 on nivel, niin

$$\varphi_{12} = \frac{L}{3EI}\psi(kL)M_{12} + \theta_{12} + \alpha_{12}^0, \quad (7.100)$$

ja

$$M_{12} = \frac{1}{\psi(kL)} \frac{3EI}{L} \varphi_{12} - \frac{1}{\psi(kL)} \frac{3EI}{L} \theta_{12} - \frac{1}{\psi(kL)} \frac{3EI}{L} \alpha_{12}^0, \quad (7.101)$$

eli

$$M_{12} = A_{12}^0\varphi_{12} - C_{12}^0\theta_{12} + MK_{12}^0, \quad (7.102)$$

missä

$$A_{12}^0 = C_{12}^0 = \frac{1}{\psi(kL)} \frac{3EI}{L}, \quad MK_{12}^0 = -\frac{1}{\psi(kL)} \frac{3EI}{L} \alpha_{12}^0 = -A_{12}^0 \alpha_{12}^0. \quad (7.103)$$

Esimerkki 7.9 Lasketaan edellisen esimerkin ja kuvan 7.12 kehän nurjahduskuorma siirtymämenetelmällä.

Kehän tasapainoyhtälöt ovat

$$M_{31} + M_{32} + M_{34} = 0, \quad (7.104)$$

$$M_{34} + PL\theta_{34} = 0, \quad (7.105)$$

ja yhteensopivuusehdot ovat

$$\varphi_{13} = 0, \quad \varphi_{31} = \varphi_{32} = \varphi_{34} = \varphi_3. \quad (7.106)$$

(φ_3 on nurkan 3 kiertymä).

Ottamalla huomioon yhteensopivuusehdot ja sijoittamalla sauvanpäämomenttien kaavat

$$M_{31} = a_{31}\varphi_3, \quad (7.107)$$

$$M_{32} = A_{32}^0\varphi_3, \quad (7.108)$$

$$M_{34} = A_{34}^0\varphi_3 - C_{34}^0\theta_{34} \quad (7.109)$$

tasapainoehtoihin saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} a_{31} + A_{32}^0 + A_{34}^0 & -A_{34}^0 \\ -A_{34}^0 & A_{34}^0 - PL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \theta_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.110)$$

Asettamalla kerroinmatriisin determinantti nolaksi tulee kriittiselle kuormalle ehto

$$(a_{31} + A_{32}^0 + A_{34}^0)(A_{34}^0 - PL) - (A_{34}^0)^2 = 0. \quad (7.111)$$

Sijoittamalla tähän sauvavakioiden arvot

$$a_{13} = \frac{4EI}{L}, \quad A_{32}^0 = A_{34}^0 = C_{34}^0 = \frac{3EI}{L} \frac{1}{\psi(kL)} \quad (7.112)$$

(a_{31} on tavallinen sauvavakio) kriittisen kuorman ehto kirjoitetaan muotoon

$$\psi^2(kL) + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{(kL)^2}\right) \psi(kL) - \frac{9}{4(kL)^2} = 0, \quad (7.113)$$

joka on sama kuin momenttimenetelmällä saatu yhtälö, ja sen ratkaisu on $kL \approx 1.37$. Kehän nurjahduskuorma on $P_{kr} \approx 1.87 \frac{EI}{L^2}$.

Esimerkki 7.10 Määritetään kuvan 7.13 kehän momenttikuvio, kun pistekuorma on $F = 100$ kN ja viivakuorma on $q = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$. Sauvojen taivutusjäykkyys on $EI = 3.6 \text{ MNm}^2$ ja $L = 6$ m.

Ratkaistaan tehtävä kulmanmuutosmenetelmällä. Kehän yhteensopivuusehdot ovat

$$\varphi_{21} = \varphi_{24} = \varphi_{23} = \varphi_2, \quad (7.114)$$

(φ_2 on nurkan 2 kiertymä). Kehän tasapainoyhtälöt ovat

$$M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0, \quad (7.115)$$

$$Q_{23} - Q_{21} - N_{24} + F = 0, \quad (7.116)$$

$$Q_{24}L + M_{24} + N_{24}\theta_{24}L = 0, \quad (7.117)$$

$$Q_{24} = 0, \quad (7.118)$$

$$M_{23} + Q_{23}L - qL\frac{L}{2} = 0, \quad (7.119)$$

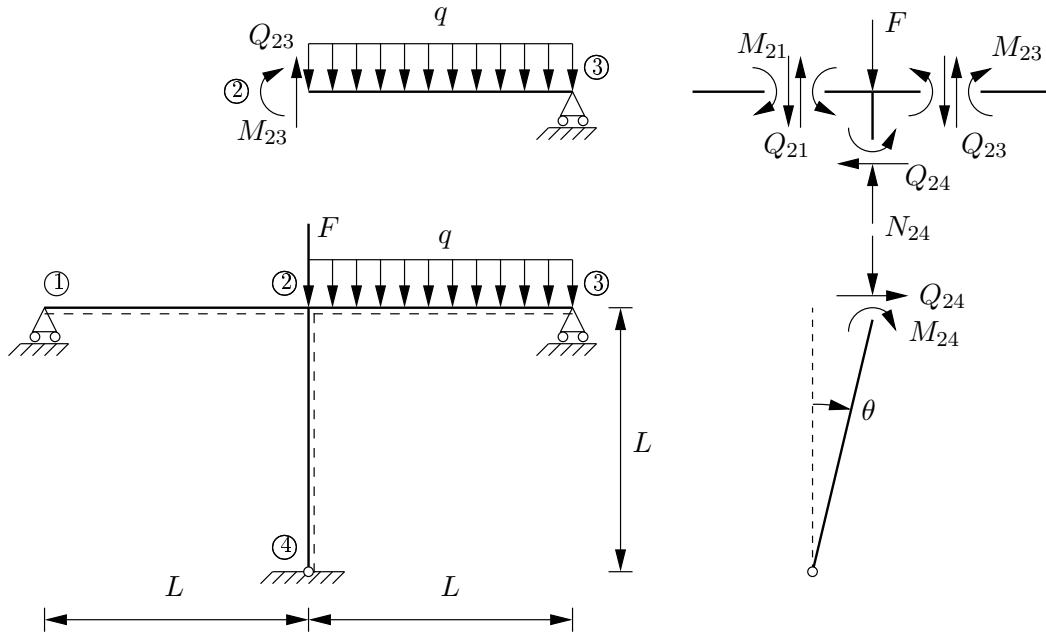
$$M_{21} + Q_{21}L = 0. \quad (7.120)$$

Kolmannen ja neljännen tasapainoehdon mukaan

$$M_{24} + N_{24}\theta_{24}L = 0, \quad (7.121)$$

ja toisen, viidennen ja kuudennen tasapainoyhtälön perusteella saadaan sauvan 2–4 normaalivoimalle kaava

$$\begin{aligned} N_{24} &= F + Q_{23} - Q_{21} \\ &= F - \frac{M_{23}}{L} + q\frac{L}{2} + \frac{M_{21}}{L}. \end{aligned} \quad (7.122)$$



Kuva 7.13 Yksinkertainen sivusiirtävä kehä.

Sijoittamalla sauvanpäämomenttien kaavat

$$M_{21} = a_{21}^0 \varphi_2, \quad (7.123)$$

$$M_{24} = A_{24}^0 \varphi_2 - A_{24}^0 \theta_{24}, \quad (7.124)$$

$$M_{23} = a_{23}^0 \varphi_2 + MK_{23}^0 \quad (7.125)$$

ensimmäiseen tasapainoehtoon (7.115) ja tasapainoehtoon (7.121) saadaan yhtälöt

$$(a_{21}^0 + a_{23}^0 + A_{24}^0) \varphi_2 - A_{24}^0 \theta_{24} = -MK_{23}^0, \quad (7.126)$$

$$A_{24}^0 \varphi_2 - A_{24}^0 \theta_{24} + N_{24} \theta_{24} L = 0. \quad (7.127)$$

Kootaan yhtälöt matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} a_{21}^0 + a_{23}^0 + A_{24}^0 & -A_{24}^0 \\ -A_{24}^0 & A_{24}^0 - N_{24}L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \theta_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL^2}{8} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.128)$$

missä

$$N_{24} = F + q\frac{L}{2} - \frac{M_{23}}{L} + \frac{M_{21}}{L}, \quad MK_{23}^0 = -\frac{qL^2}{8}. \quad (7.129)$$

Ensimmäinen iteraatiokierros

Lasketaan ensin sauvavakioille arvot:

$$a_{21}^0 = a_{23}^0 = \frac{3EI}{L} = 1800 \text{ kNm}, \quad (7.130)$$

$$A_{24}^0 = \frac{3EI}{L\psi(kL)} = 1800 \frac{1}{\psi(kL)} \text{ [kNm]}, \quad (7.131)$$

$$MK_{23}^0 = \frac{qL^2}{8} = 22.5 \text{ kNm}. \quad (7.132)$$

Suureen kL arvoksi saadaan aluksi

$$kL = \sqrt{\frac{F + \frac{qL}{2}}{EI}} L = \sqrt{\frac{115}{3600}} 6 = \sqrt{1.15} = 1.072, \quad (7.133)$$

ja $\psi(kL) = 1.086$. Sauvavakion A_{24}^0 numeerinen arvo on laskennan alussa $A_{24}^0 = 1657.2$ kNm.

Sijoittamalla edellä lasketut lukuarvot tasapainoyhtälöryhmään saadaan systeemi

$$\begin{bmatrix} 5257.2 & -1657.2 \\ -1657.2 & 967.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \theta_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.134)$$

josta ratkaistaan $\varphi_2 = 0.0093$ [rad], $\theta_{24} = 0.0159$ [rad]. Kiertymien arvojen avulla lasketaan sauvanpäämomentit:

$$M_{21} = 16.75 \text{ kNm}, \quad M_{23} = -5.75 \text{ kNm}, \quad M_{24} = -11.00 \text{ kNm}. \quad (7.135)$$

Sauvan 2 – 4 normaaliveika on

$$\begin{aligned} N_{24} &= F - \frac{M_{23}}{L} + q\frac{L}{2} + \frac{M_{21}}{L}, \\ &= 100 + 0.96 + 15 + 2.79 = 118.75. \end{aligned} \quad (7.136)$$

Toinen iteraatiokierros

Suurelle kL lasketaan uusi tarkennettu arvo $kL = \sqrt{1.1875} = 1.090$, ja sen perusteella $\psi(kL) = 1.089$. Lasketaan sitten uudet arvot sauvavakioille, ratkaistaan tasapainoyhtälöiden ryhmä, saadaan uudet arvot kiertymiselle φ_2 ja θ_{24} sekä uudet sauvanpäämomentit:

$$M_{21} = 16.77 \text{ kNm}, \quad M_{23} = -5.73 \text{ kNm}, \quad M_{24} = -11.04 \text{ kNm}. \quad (7.137)$$

Momenttien arvot muuttuivat niin vähän, että tyydytään toisella kierroksella saatuihin tuloksiin. Jos kehän kuorma olisi ollut suurempi ja lähempänä kehän nurjahduskuormaa, niin iteraation suppeneminen olisi epäilemättä vaatinut enemmän kierroksia. Kehän momenttikuvio määritetään tarkastelemalla kutakin sauvaa erikseen. Geometrisen epälineaarisuuden vuoksi sauvan 2 – 4 momenttijakauma ei ole aivan suoraviivainen kuten lineaarisen ratkaisun perusteella tulisi.

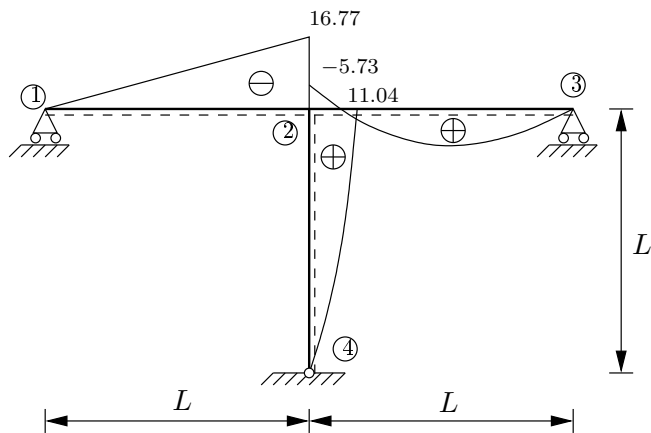
7.3 Elementtimenetelmä

Energiamenetelmällä on johdettu aiemmin sauvaelementin potentiaalienergian toista variaatiota

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(v'')^2 - P(v')^2] dx = 0, \quad (7.138)$$

missä $v(x)$ on (lisä)taipuma suorasta, puristetusta tasapainotilasta, vastaavan neliömuodon kerroinmatriisi

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_g \equiv \mathbf{C} - \mathbf{P}\mathbf{B}, \quad (7.139)$$



Kuva 7.14 Kehän momenttikuvio.

missä

$$\mathbf{K}_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (7.140)$$

$$\mathbf{K}_g = -\frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (7.141)$$

Elementtimenetelmässä taipumaa interpoloidaan muotofunktioiden $N_i(x)$ ja solmuvapausasteiden q_i avulla kaavalla

$$v(x) = \mathbf{N} \mathbf{q}_v. \quad (7.142)$$

Normaalivoima $N = -P$ puristuksessa. $\mathbf{K}_g$ on elementin geometrinen jäykkyysmatriisi, ja $\mathbf{K}_1$ on tavallinen (lineaarinen) jäykkyysmatriisi. Elementin taivutukseen liittyvien solmuvapausasteiden vektori on

$$\mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} v_1 & \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 \end{bmatrix}^T. \quad (7.143)$$

Elementin jäykkyysmatriisin rivit ja sarakkeet vastaavat vektorin $\mathbf{q}_v$ vapausasteita.

Ottamalla huomioon elementin pituuden muutos perustilan suhteen toisen variaation kaava tulee muotoon

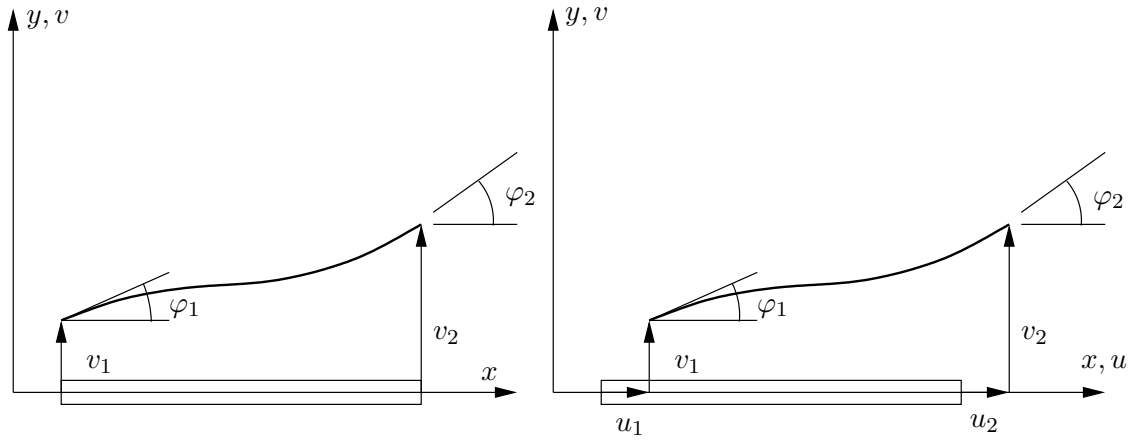
$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EA(u')^2 + EI(v'')^2 - P(v')^2] dx = 0. \quad (7.144)$$

Aksiaalista siirtymää interpoloidaan lineaarisella polynomilla

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \frac{x}{L} u_2, \quad (7.145)$$

missä L on elementin pituus. Siirtymän $u(x)$ derivaatta on

$$u'(x) = \frac{u_2 - u_1}{L}. \quad (7.146)$$



Kuva 7.15 Sauvaelementti ja kehäsauvaelementti.

Tasokehäsauvan jäykkyyismatriisiksi saadaan solmuisiirtymävektorin

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \varphi_1 & u_2 & v_2 & \varphi_2 \end{bmatrix}^T \quad (7.147)$$

vapausasteisiin liittyen

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_g, \quad (7.148)$$

jonka osat ovat

$$\mathbf{K}_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (7.149)$$

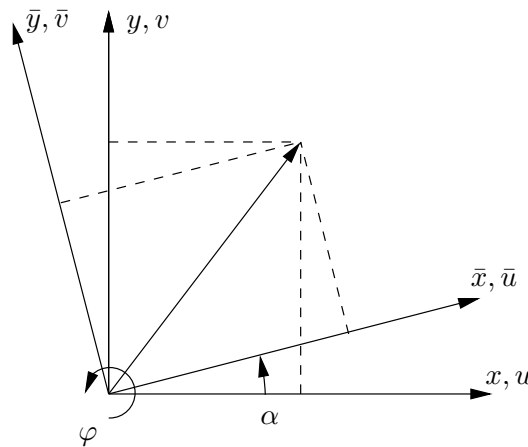
$$\mathbf{K}_g = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (7.150)$$

missä on merkitty

$$a = \frac{EA}{L} \frac{L^3}{EI} = \frac{EA}{EI} L^2 \quad (7.151)$$

ja puristavan voiman tapauksessa $N = -P$. Matriisi $\mathbf{K}_1$ on saatu lisäämällä vapausasteisiin u_1 ja u_2 liittyen ristikkosauvan jäykkyyismatriisi

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.152)$$



Kuva 7.16 Koordinaatiston muunnos.

Tasokehän tapauksessa jäykkyysmatriisi muodostetaan jokaiselle elementille elementin omassa paikallisessa koordinaatistossa, ja elementin jäykkyysmatriisi muunnetaan sitten rakennekoordinaatistoon ennen kehän jäykkyysmatriisin kokoamista.

Kuvan 7.16 perusteella johdetaan muunnoskaava

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad (7.153)$$

eli

$$\mathbf{r}_l = \mathbf{T} \mathbf{r}. \quad (7.154)$$

Kaavan (7.153) avulla saadaan elementtikohtaisen koordinaatiston $(\bar{x}, \bar{y})$ suhteen lausutut siirtymäsuureet

$$\mathbf{r}_l = \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{v} & \bar{\varphi} \end{bmatrix}^T \quad (7.155)$$

lausutuiksi siirtymäsuureiden

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} u & v & \varphi \end{bmatrix}^T \quad (7.156)$$

avulla. Solmusiirtymien vektori on paikalliskoordinaatistossa

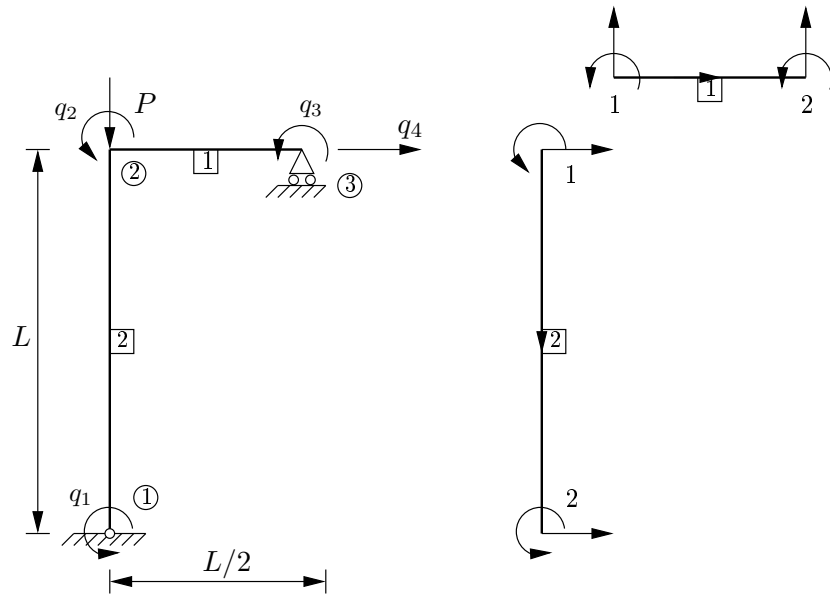
$$\mathbf{q}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix}_l, \quad (7.157)$$

ja kaavan (7.153) perusteella saadaan

$$\mathbf{q}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{q}. \quad (7.158)$$

Paikallisessa koordinaatistossa muodostettu jäykkyysmatriisi $\mathbf{K}_l$ muunnetaan globaaliin koordinaatistoon kaavalla

$$\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{q}_l^T \mathbf{K}_l \mathbf{q}_l = \mathbf{q}^T \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{T}^T \end{bmatrix} \mathbf{K}_l \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{q}, \quad (7.159)$$



Kuva 7.17 Kulmakehä.

joten globaalissa koordinaatistossa

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{T}^T \end{bmatrix} \mathbf{K}_l \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad (7.160)$$

missä $\mathbf{0}$ on 3×3 nollamatriisi.

Esimerkki 7.11 Määritetään kuvan 7.17 kehän nurjahduskuorma. Sauvojen taivutusjäykkyys EI on sama. Sauvojen kokoonpuristuma jätetään huomioonottamatta, eli $EA = \infty$.

Kehän siirtymävapausasteet ovat q_1 , q_2 , q_3 sekä siirtymä q_4 . Elementin 1 jäykkyysmatriisi on

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \frac{EI}{\left(\frac{L}{2}\right)^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & -12 & 3L \\ 3L & L^2 & -3L & \frac{1}{2}L^2 \\ -12 & -3L & 12 & -3L \\ 3L & \frac{1}{2}L^2 & -3L & L^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 96 & 24L & -96 & 24L \\ 24L & 8L^2 & -24L & 4L^2 \\ -96 & -24L & 96 & -24L \\ 24L & 4L^2 & -24L & 8L^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.161)$$

Elementin 1 jäykkyysmatriisista tarvitaan rakenteen globaaliin jäykkyysmatriisiin vain vapausasteita q_2 ja q_3 vastaavat rivit ja sarakkeet eli toinen ja neljäs rivi ja sarake.

Elementin 2 paikallisessa koordinaatistossa muodostettu jäykkyysmatriisi on

$$\mathbf{K}_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} - \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (7.162)$$

Matriisista $\mathbf{K}_2$ tarvitaan vapausasteita q_1 , q_2 ja q_4 vastaavat rivit ja sarakkeet eli neljäs, toinen ja ensimmäinen. Kehän jäykkyysmatriisi kootaan elementtien 1 ja 2 osuuksista. Siirretään ensin tarvittavat alkiot lopullisille paikoilleen, ja saadaan

$$\mathbf{K}_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8L^2 & 4L^2 & 0 \\ 0 & 4L^2 & 8L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.163)$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 & 0 & 6L \\ 2L^2 & 4L^2 & 0 & 6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6L & 6L & 0 & 12 \end{bmatrix} - \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 4L^2 & -L^2 & 0 & 3L \\ -L^2 & 4L^2 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3L & 3L & 0 & 36 \end{bmatrix}. \quad (7.164)$$

Summaamalla jäykkyysmatriisit tulee

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 & 0 & 6L \\ 2L^2 & 12L^2 & 4L^2 & 6L \\ 0 & 4L^2 & 8L^2 & 0 \\ 6L & 6L & 0 & 12 \end{bmatrix} - \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 4L^2 & -L^2 & 0 & 3L \\ -L^2 & 4L^2 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3L & 3L & 0 & 36 \end{bmatrix}. \quad (7.165)$$

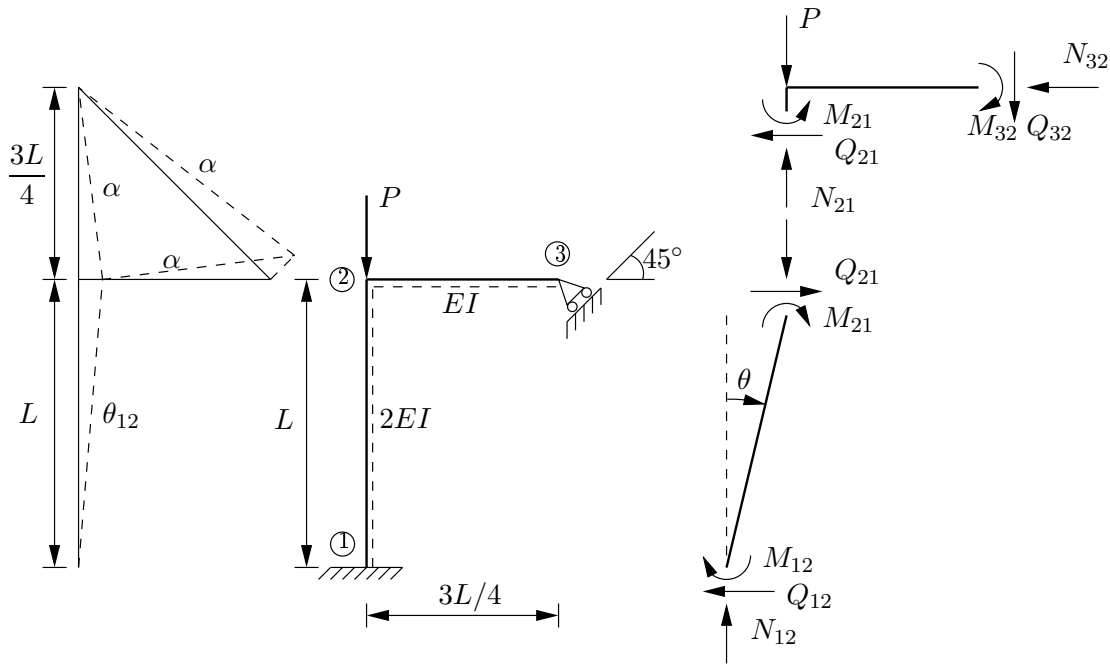
Kehän nurjahduskuorman määrittämiseksi saadaan yhtälö asettamalla jäykkyysmatriisiin (toisen variaation neliömuodon kerroinmatriisin) determinatti nolaksi. Merkitään

$$\lambda = \frac{PL^2}{30EI}. \quad (7.166)$$

Determinantin nollaehto voidaan kirjoittaa muotoon

$$\det \begin{bmatrix} 4 - 4\lambda & 2 + \lambda & 0 & (6 - 3\lambda)/L \\ 2 + \lambda & 12 - 4\lambda & 4 & (6 - 3\lambda)/L \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ (6 - 3\lambda)/L & (6 - 3\lambda)/L & 0 & (12 - 36\lambda)/L^2 \end{bmatrix} = 0, \quad (7.167)$$

jonka pienin juuri on $\lambda = 0.061$. Kriittinen kuorma on $P_{kr} = 1.83 \frac{EI}{L^2}$.



Kuva 7.18 Kulmakehä.

Esimerkki 7.12 Määritetään kuvan 7.18 kehän nurjahduskuorma.

Pisteen 2 vaakasiirtymä on

$$u_2 = \theta_{12}L = \alpha \frac{3L}{4}, \quad (7.168)$$

joten

$$\alpha = \frac{4}{3}\theta_{12}, \quad \theta_{23} = -\frac{4}{3}\theta_{12}. \quad (7.169)$$

Sijoittamalla tasapainoehtoon

$$M_{21} + M_{23} = 0 \quad (7.170)$$

sauvanpäämomentit

$$M_{21} = B_{21}\varphi_1 + A_{21}\varphi_2 - C_{21}\theta_{12}, \quad (7.171)$$

$$M_{23} = a_{23}^0\varphi_2 - c_{23}^0\theta_{23} = a_{23}^0\varphi_2 + c_{23}^0\frac{4}{3}\theta_{12} \quad (7.172)$$

ja $\varphi_1 = 0$ seuraa

$$A_{21}\varphi_2 - C_{21}\theta_{12} + a_{23}^0\varphi_2 + c_{23}^0\frac{4}{3}\theta_{12} = 0 \quad (7.173)$$

eli

$$(A_{21} + a_{23}^0)\varphi_2 + (-C_{21} + \frac{4}{3}c_{23}^0)\theta_{12} = 0. \quad (7.174)$$

Kuvan 7.18 perusteella kirjoitetaan tasapainoehto

$$Q_{21} + N_{32} = 0, \quad (7.175)$$

josta seuraa $Q_{21} = 0$. Pilarin tasapainoehdosta

$$M_{21} + Q_{21}L + PL\theta_{12} + M_{12} = 0 \quad (7.176)$$

ja sauvanpäämomentin kaavasta

$$M_{12} = A_{12}\varphi_1 + B_{12}\varphi_2 - C_{12}\theta_{12} \quad (7.177)$$

seuraa

$$B_{12}\varphi_2 - C_{12}\theta_{12} + A_{21}\varphi_2 - C_{21}\theta_{12} + PL\theta_{12} = 0 \quad (7.178)$$

eli

$$(A_{21} + B_{12})\varphi_2 + (PL - 2C_{21})\theta_{12} = 0. \quad (7.179)$$

Kiertymäsuureiden avulla lausutuista tasapainoehtoista kootaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} A_{21} + a_{23}^0 & -C_{21} + \frac{4}{3}c_{23}^0 \\ A_{21} + B_{12} & PL - 2C_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \theta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.180)$$

Asettamalla kerroinmatriisin determinantti nolaksi saadaan yhtälö, josta kriittinen kuorma ratkaistaan.

Sauvavakioit ovat

$$a_{23}^0 = c_{23}^0 = \frac{3EI}{\frac{3L}{4}} = \frac{4EI}{L}, \quad (7.181)$$

$$A_{21} = \frac{2\psi(kL)}{4\psi^2(kL) - \phi^2(kL)} \frac{6 \cdot 2EI}{L}, \quad (7.182)$$

$$B_{12} = \frac{\phi(kL)}{4\psi^2(kL) - \phi^2(kL)} \frac{6 \cdot 2EI}{L} \quad (7.183)$$

ja

$$C_{21} = A_{21} + B_{21} = C_{12}. \quad (7.184)$$

Merkitään

$$kL = L\sqrt{\frac{P}{2EI}} \quad (7.185)$$

ja

$$P = \beta \frac{EI}{L^2}, \quad (7.186)$$

joten

$$kL = \sqrt{\frac{1}{2EI} \beta \frac{EI}{L^2}} L = \sqrt{\frac{\beta}{2}}, \quad (7.187)$$

Determinatti menee nolaksi, kun β on noin 15, joten

$$P_{kr} \approx 15 \frac{EI}{L^2}. \quad (7.188)$$

Luku 8

Siirtymien vaikutus kehän plastiseen rajakuormaan

Kehän rajakuorman yläraja-arvo voidaan määrittää mekanismimenetelmällä virtuaalisen työn yhtälöstä

$$W_s - W_u = 0, \quad (8.1)$$

missä

$$W_s = \sum_j M_{pj} \theta_j \quad (8.2)$$

on sisäinen virtuaalinen työ plastisissa nivelissä ja

$$W_u = \lambda \sum_i F_i \Delta_i \quad (8.3)$$

on ulkoinen virtuaalinen työ, kun kehän kuormien otaksutaan olevan pelkästään pistevoimia¹. Kuormien otaksutaan muuttuvan samalla kertoimella. F_i on peruskuormitus.

Kun virtuaalisen työn yhtälöstä on ratkaistu kuormakertoimen yläraja λ_p , niin voidaan määrittää sitä vastaavat sauvavoimat N_{kp} sauvoille k , (tai voimat N_{ijp} sauvoille ij). Sauvavoima N_k on positiivinen puristuksessa.

Siirtymien kasvaessa (erityisesti holkassa rakenteessa) mekanismista tulee epälineaarinen. Kun mielivaltainen puristettu sauva ij kiertyy ja kaltevuuskulma kasvaa arvosta ψ_{ij} arvoon $\psi_{ij} + d\psi_{ij}$, niin sauvavoiman virtuaalinen työ on $N_{ij} L_{ij} \psi_{ij} d\psi_{ij}$. Tarkastellaan infinitesimaalisen pientä muutosta rajakuorman antavassa mekanismissa (rajamekanismissa). Tällöin:

$$\lambda \rightarrow \lambda + d\lambda, \quad (8.4a)$$

$$\theta_j \rightarrow \theta_j + d\theta_j, \quad (8.4b)$$

$$\psi_k \rightarrow \psi_k + d\psi_k, \quad (8.4c)$$

$$\Delta_i \rightarrow \Delta_i + d\Delta_i, \quad (8.4d)$$

missä λ on kuormakerroin, θ_j on kiertymä plastisessa nivelessä j , ψ_k on sauvan k kiertymä ja Δ_i on siirtymä pistekuorman F_i suuntaan kuorman kohdalla.

¹Yleistys jakautuneen kuorman tapaukseen on helppo. Jakautunut kuorma voidaan vaihtoehtoisesti antaa pistekuormina.

Mekanismin työyhtälöksi saadaan nyt

$$\sum_j M_{pj} d\theta_j = \lambda \sum_i F_i d\Delta_i + \sum_k N_k L_k \psi_k d\psi_k, \quad (8.5)$$

missä on merkitty vaihtoehtoisesti $N_k L_k \psi_k d\psi_k \equiv N_{ij} L_{ij} \psi_{ij} d\psi_{ij}$. Rajatilaa $\lambda = \lambda_p$ vastaavat sauvavoimat ovat siis $N_k = N_{kp}$, ja sauvavoimien otaksutaan kasvavan samassa suhteessa, eli

$$N_k = \frac{\lambda}{\lambda_p} N_{kp}. \quad (8.6)$$

Myös siirtymien ja kiertymien otaksutaan muuttuvan samassa suhteessa:

$$\frac{d\Delta_i}{\Delta_i} = \frac{d\psi_k}{\psi_k} = \frac{d\theta_j}{\theta_j}. \quad (8.7)$$

Työyhtälöstä tulee edellä tehtyjen otaksumien perusteella

$$\sum_j M_{pj} \theta_j = \lambda \left(\sum_i F_i \Delta_i + \sum_k \frac{N_{kp}}{\lambda_p} L_k \psi_k^2 \right). \quad (8.8)$$

Ratkaisemalla pienten siirtymien työyhtälöstä

$$\sum_j M_{pj} \theta_j = \lambda_p \sum_i F_i \Delta_i \quad (8.9)$$

$$\sum_i F_i \Delta_i = \frac{\sum_j M_{pj} \theta_j}{\lambda_p}, \quad (8.10)$$

ja sijoittamalla se geometrisesti epälineaariseen yhtälöön (8.8) tulee

$$\frac{\lambda}{\lambda_p} = \frac{1}{1 + \frac{\sum_k N_{kp} L_k \psi_k^2}{\sum_j M_{pj} \theta_j}}, \quad (8.11)$$

joka esittää kuormakertoimen riippuvaisuuden kehän siirtymistä.

Esimerkki 8.1 Määritetään kuvan 8.1 kehän kuorman ja siirtymien välinen riippuvaisuus. Otaksutaan, että kehän sauvojen täysplastinen momentti on $M_p = 2FL$ ja sauvojen taivutusjäykkyys on $EI = 5FL^2$ eli $EI = 2.5M_p L$.

Otaksutaan, että kehän sauvojen hoikkuus on $\frac{L}{i} = 400$, eli kehä on hyvin hoikka, ja rakenteen geometrian muutoksen (siirtymien) vaikutus on suuri. Kehän plastisen rajakuorman pienimmän ylärajan antaa yhdistetty mekanismi, ja sen työyhtälö on

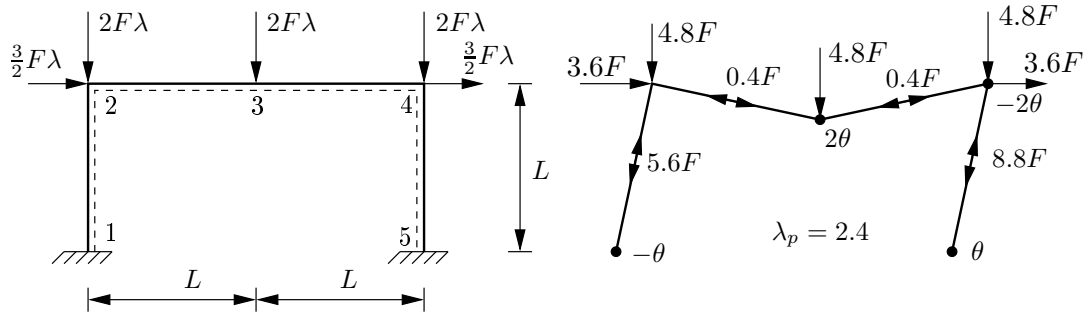
$$M_p 6\theta = 2\lambda \frac{3}{2} FL\theta + \lambda 2FL\theta, \quad (8.12)$$

eli

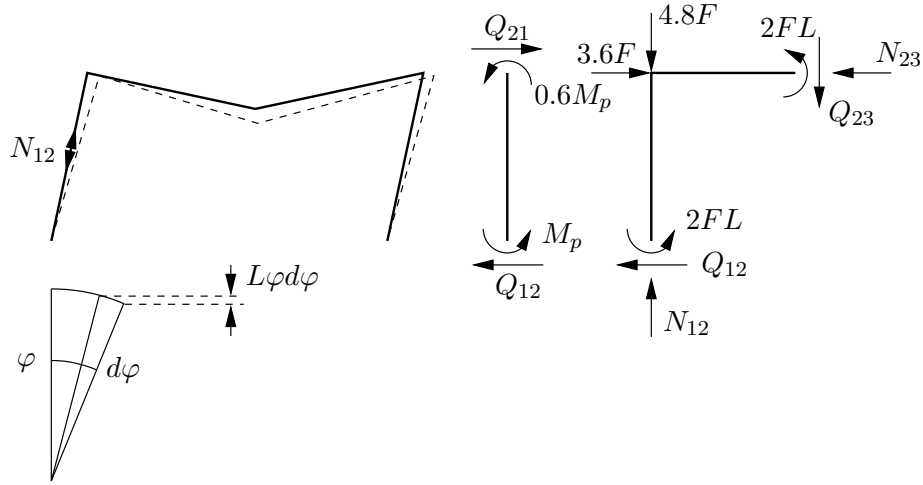
$$6M_p \theta = 5F\lambda L\theta, \quad (8.13)$$

ja plastinen rajakuormakerroin on

$$\lambda_p = \frac{12}{5} = 2.4. \quad (8.14)$$



Kuva 8.1 Portaalikehä.



Kuva 8.2 Portaalikehän voimat ja siirtymät.

Momentti kehän pisteessä 2 on $M_2 = 0.6M_p$, ja kuvan 8.2 perusteella kirjoitetaan kehän osalle tasapainoehto

$$Q_{12}L - 1.6M_p = 0, \quad (8.15)$$

josta seuraa sauvan 12 pään 1 leikkausvoiman arvo

$$Q_{12} = 1.6 \frac{M_p}{L} = 3.2F. \quad (8.16)$$

Niinkään kuvan 8.2 perusteella kirjoitetaan kehän osalle tasapainoehto

$$4.8FL + 2FL + 2FL - 3.2FL - N_{12}L = 0, \quad (8.17)$$

josta ratkeaa normaaliavoima N_{12} . Samalla tavalla ratkaistaan muut sauvavoimat, ja saadaan

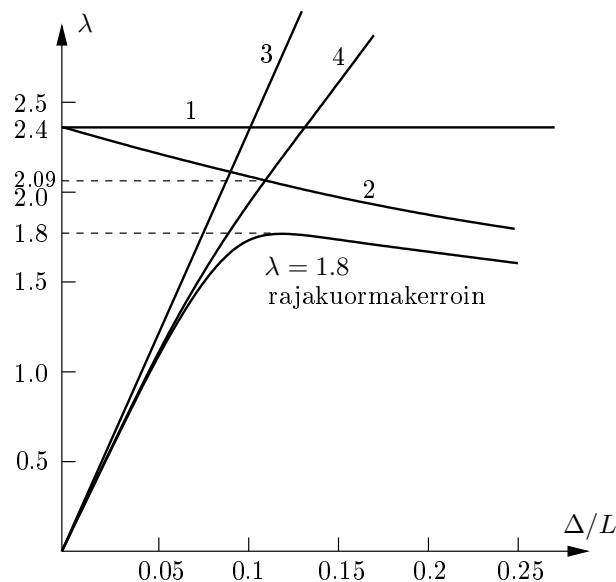
$$N_{12} = 5.6F, \quad N_{23} = N_{34} = 0.4F, \quad N_{45} = 8.8F \quad (8.18)$$

(kaikki sauvat puristettuja).

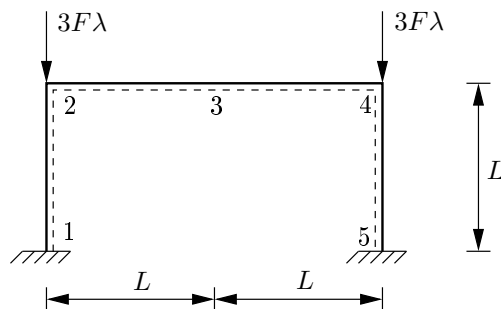
Sauvavoimat on esitetty kuvassa 8.1. Esimerkkikehän tapauksessa sauvakiertymat ovat samansuuruiset, $\psi_k = \psi$, ja lisäksi $\psi = \theta$. Työyhtälössä (8.8) tarvittavat termit voidaan nyt laskea:

$$\sum_k N_{kp} L_k \psi_k^2 = (5.6 + 0.4 + 0.4 + 8.8)FL\psi^2 = 15.2FL\psi^2, \quad (8.19)$$

$$\sum_j M_{pj} \theta_j = (\theta + 2\theta + 2\theta + \theta)M_p = 6M_p\theta = 12FL\theta, \quad (8.20)$$



Kuva 8.3 Portaalikehän kuorma-siirtymäkäyrät.



Kuva 8.4 Portaalikehän pystykuormat pilareille.

ja ratkaista

$$\frac{\lambda}{\lambda_p} = \frac{1}{1 + \frac{19}{15}\theta}, \quad (8.21)$$

jota esittää käyrä 2 kuvassa 8.3.

Geometrisesti lineaarisen teorian mukainen kehän sivusiirtymä on

$$\Delta = \frac{7}{32} \frac{FL^3}{EI} \lambda = \frac{7}{160} L\lambda, \quad (8.22)$$

jota esittää käyrä 3 kuvassa 8.3. Käyrien 2 ja 3 leikkauspisteessä kuormakerroin on $\lambda = 2.15$.

Kuvan 8.4 kuormitusta vastaava kimmoisen nurjahduskuorma on

$$\lambda_E \approx 10.04. \quad (8.23)$$

Kimmoisen nurjahduskuorman avulla voidaan muodostaa epälineaarisen kuorman ja siirtymän välisen riippuvaisuuden approksimaatio soveltamalla suurennuskerrointa

$$K = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_E}} \quad (8.24)$$

lineaariseen ratkaisuun $\Delta = \frac{7}{160}L\lambda$, jolloin tulee

$$\Delta = \frac{7}{160} \frac{\lambda\lambda_E}{\lambda_E - \lambda} L. \quad (8.25)$$

Kaavaa (8.25) esittää käyrä 4 kuvassa 8.3.

Rankinen ja Merchantin kaavan mukaan

$$\frac{1}{\lambda_R} = \frac{1}{\lambda_p} + \frac{1}{\lambda_E}, \quad (8.26)$$

eli

$$\lambda_R = \frac{\lambda_p}{1 + \frac{\lambda_p}{\lambda_E}}. \quad (8.27)$$

Esimerkin tapauksessa saadaan Rankinen kaavalla kuormakerroin

$$\lambda_R = \frac{2.4}{1 + \frac{2.4}{10.04}} = 1.93. \quad (8.28)$$

Luku 9

Vääntönurjahdus

9.1 Keskeisesti puristettu sauva

Tarkastellaan suoraa, puristettua sauvaa, jonka poikkileikkaus on avoin ja ohutseinäinen. Sauva on asennettu (x, y, z) -koordinaatistoon, jossa sauvan akseli on z -akseli. Seuraavassa otaksutaan, että koordinaatisto (x, y, z) on pääkoordinaatisto. Tällöin toteutuvat geometriset ehdot

$$\int_A x dA = \int_A y dA = \int_A xy dA = 0, \quad (9.1)$$

jossa A on poikkileikkauksen pinta-ala, $dA = t(s) ds$, $t(s)$ on ohutseinäisen poikkileikkauksen seinämän vahvuus ja s on seinämän keskiviivaa pitkin kulkeva koordinaatti.

Poikkileikkauksen vääntökeskiön A koordinaatit ovat (x_a, y_a) . Sauvan nurjahtaessa poikkileikkaus siirtyy ja kiertyy; puhtaassa vääntönurjahduksessa sauvan poikkileikkaus ainoastaan kiertyy. Merkitään, että vääntökeskiön siirtymät ovat u ja v . Poikkileikkauksen painopisteen O siirtymät ovat pienen rotaation tapauksessa

$$u_o(z) = u(z) + \varphi(z)y_a, \quad (9.2)$$

$$v_o(z) = v(z) - \varphi(z)x_a. \quad (9.3)$$

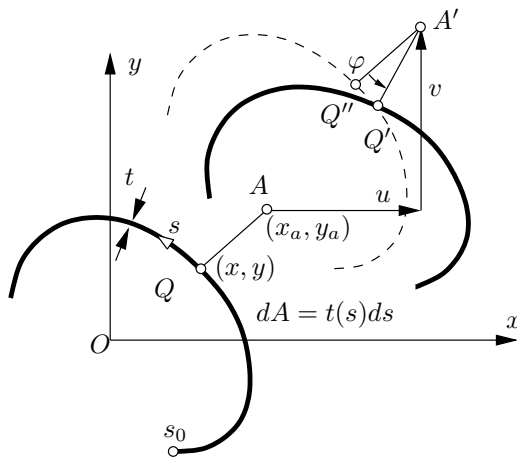
Jos taivutuksen suhteen vapaasti tuetun sauvan puristava voima P vaikuttaa painopisteessä O , niin siirtyneessä tilassa taivutusmomentit ovat

$$M_x(z) = Pv_o(z), \quad (9.4)$$

$$M_y(z) = -Pu_o(z). \quad (9.5)$$

Sauvan taipuessa vakioapuristusjännityksen $\sigma_z^0 = -\frac{P}{A} = \frac{N^0}{A}$ lisäksi poikkileikkaukseen syntyy normaalijännitysjaakauma $\sigma_z(x, y)$, ja yhteensä siirtyneen tilan 1 jännitys on perustilan 0 jännityksen ja lisäjännityksen summa

$$\begin{aligned} \sigma_z^1 &= \sigma_z^0 + \sigma_z \\ &= -\frac{P}{A} - \frac{M_y}{I_y}x + \frac{M_x}{I_x}y + \frac{B}{I_\omega}\omega(x, y), \end{aligned} \quad (9.6)$$



Kuva 9.1 Avoin poikkileikkaus.

missä

$$M_y = \int_A (-x)\sigma_z(x, y) dA, \quad (9.7)$$

$$M_x = \int_A y\sigma_z(x, y) dA, \quad (9.8)$$

$$B = \int_A \omega\sigma_z(x, y) dA \quad (9.9)$$

ovat taivutusmomentit ja bimomentti.

Vääntökeskiön suhteen määritetty sektoriaalinen koordinaatti $\omega \equiv \omega_A$ on

$$\omega(s) = \int_0^s h_A(\tau) d\tau, \quad (9.10)$$

missä s on poikkileikkauksen seinämän keskiviivaa pitkin kiertävä koordinaatti ja $h_A(\tau)$ on kohtisuora etäisyys vääntökeskiöstä pisteen τ kautta piirretylle seinämän keskiviivan tangentille. Koordinaatti ω toteuttaa ehdot

$$\int_A x\omega dA = \int_A y\omega dA = \int_A \omega dA = 0, \quad (9.11)$$

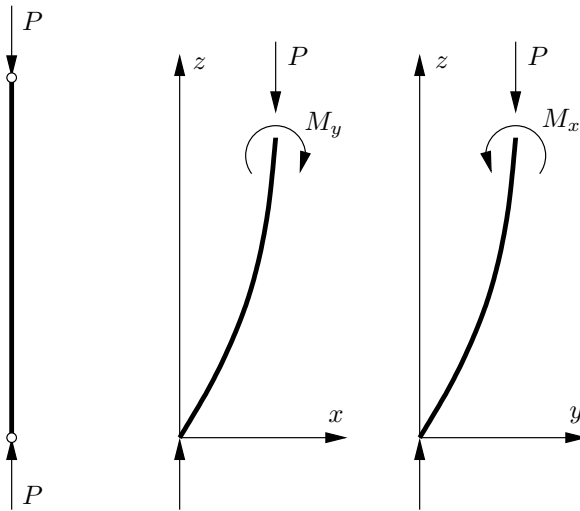
missä on integroitu poikkileikkauksen pinta-alan A yli. Poikkileikkaussuureet ovat

$$A = \int_A dA = \int_A t(s) ds, \quad I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad I_\omega = \int_A \omega^2 dA. \quad (9.12)$$

Sijoittamalla pääkoordinaatistossa lausutut konstitutiiviset yhtälöt

$$M_y = EI_y u'', \quad (9.13)$$

$$M_x = -EI_x v'' \quad (9.14)$$



Kuva 9.2 Puristettu sauva (x, y, z) -koordinaatistossa.

tasapainoyhtälöihin nivelsauvan vääntökeskiöakselin taipuman differentiaaliyhtälöiksi saadaan

$$EI_y u'' + P(u + \varphi y_a) = 0, \quad (9.15)$$

$$EI_x v'' + P(v - \varphi x_a) = 0, \quad (9.16)$$

missä on merkitty $(\bullet)' \equiv \frac{d(\bullet)}{dz}$.

Kolmas tasapainoyhtälö saadaan tutkimalla sauvan vääntöä. Väännön tasapainoyhtälö on

$$M'_z(z) + m(z) = 0, \quad (9.17)$$

missä vääntömomentti on

$$\begin{aligned} M_z &= M_\omega + M_v \\ &= -EI_\omega \varphi''' + GI_v \varphi' \end{aligned} \quad (9.18)$$

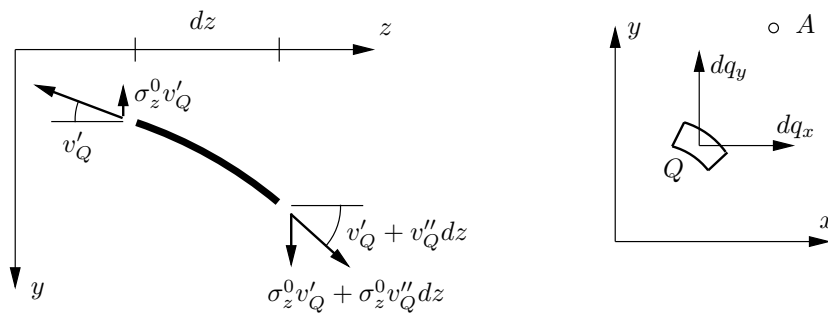
ja $m(z)$ on jakautunut vääntömomenttikuorma. Lausumalla vääntömomentti vääntökulman φ avulla väännön differentiaaliyhtälö tulee muotoon

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - GI_v \varphi'' = m_z. \quad (9.19)$$

Tarkastellaan sauvan pientä suikaletta poikkileikkauksen mielivaltaisen pisteen Q ympäristöstä. Suikaleen päädyn pinta-ala on $dA = t(s) ds$, missä s on seinämän keskiviivaa pitkin kiertävä koordinaatti, ja $t(s)$ on seinämän vahvuus. Koko poikkileikkauksen pinta-ala on A . Pisteen Q siirtymät ovat

$$u_Q(x, y, z) = u(z) + (y_a - y)\varphi(z), \quad (9.20)$$

$$v_Q(x, y, z) = v(z) - (x_a - x)\varphi(z). \quad (9.21)$$



Kuva 9.3 Poikittaisvoimat.

Sauvan alkion $dz \times dA$ päätyihin vaikuttavalla vakiovoimalla $\sigma_z^0 dA = -\frac{P}{A} dA$ on taipuneessa tilassa poikittaiset komponentit

$$dq_x(x, y, z) = \sigma_z^0 [u(z) + (y_a - y)\varphi(z)]'' dA, \quad (9.22)$$

$$dq_y(x, y, z) = \sigma_z^0 [v(z) - (x_a - x)\varphi(z)]'' dA. \quad (9.23)$$

Voimien dq_x ja dq_y momentti poikkileikkauksen vääntökeskiön suhteen on

$$\begin{aligned} dm_z(x, y, z) &= (y_a - y)dq_x - (x_a - x)dq_y \\ &= (y_a - y)\sigma_z^0 [u(z) + (y_a - y)\varphi(z)]'' dA \\ &\quad - (x_a - x)\sigma_z^0 [v(z) - (x_a - x)\varphi(z)]'' dA. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Integroimalla poikkileikkauksen yli ja ottamalla huomioon, että suorassa perustilassa $\sigma_z^0(x, y) = -\frac{P}{A}$ on nyt vakio, tulee

$$m_z(z) = \int_A dm_z(x, y, z), \quad (9.25)$$

eli

$$m_z = -\sigma_z^0 A [x_a v'' - y_a u''] + \sigma_z^0 \varphi'' [I_x + I_y + A(x_a^2 + y_a^2)], \quad (9.26)$$

missä $I_x = \int_A y^2 dA$, $I_y = \int_A x^2 dA$, $I_p = I_x + I_y + A(x_a^2 + y_a^2)$.

Sijoittamalla momentti $m_z(z)$ väännön differentiaaliyhtälöön

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - GI_v \varphi'' = m_z \quad (9.27)$$

tulee

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - (GI_v + \sigma_z^0 I_p) \varphi'' - Px_a v'' + Py_a u'' = 0, \quad (9.28)$$

missä $\sigma_z^0 = -\frac{P}{A}$.

Integroimalla poikkileikkauksen yli saadaan sauvan alkion dz poikittaiskuormat

$$\begin{aligned} q_x &= \int_A dq_x \\ &= \int_A \sigma_z^0 [u(z) + (y_a - y)\varphi(z)]'' dA \\ &= -P(u'' + y_a \varphi''), \end{aligned} \quad (9.29)$$

$$\begin{aligned}
q_y &= \int_A dq_y \\
&= \int_A \sigma_z^0 [v(z) - (x_a - x)\varphi(z)]'' dA \\
&= -P(v'' - x_a\varphi'').
\end{aligned} \tag{9.30}$$

Sijoittamalla q_x ja q_y taipumaviivan differentiaaliyhtälöihin

$$EI_y u^{(4)} = q_x, \tag{9.31}$$

$$EI_x v^{(4)} = q_y \tag{9.32}$$

päädytään taivutuksen tasapainoyhtälöihin

$$EI_y u^{(4)} + P(u'' + y_a\varphi'') = 0, \tag{9.33}$$

$$EI_x v^{(4)} + P(v'' - x_a\varphi'') = 0. \tag{9.34}$$

Integroimalla nämä kahteen kertaan ja lausumalla integroimisvakiot kohdan $z = 0$ momenttien ja leikkausvoimien avulla tulee

$$EI_y u'' + P(u + y_a\varphi) = M_y(0) - zQ_x(0), \tag{9.35}$$

$$EI_x v'' + P(v - x_a\varphi) = -M_x(0) - zQ_y(0). \tag{9.36}$$

Samalla tavalla saadaan integroimalla väännön tasapainoyhtälöstä

$$EI_\omega \varphi'' + \left(\frac{I_p}{A} P - GI_v \right) \varphi - Px_a v + Py_a u = -B(0) - zM_z(0). \tag{9.37}$$

9.1.1 Kaksoissymmetrinen poikkileikkaus

Kaksoissymmetrisen poikkileikkauksen tapauksessa $x_a = y_a = 0$, ja kytkentä taivutuksen ja väännön differentiaaliyhtälöiden väliltä katoaa. Tällöin saadaan väännön differentiaaliyhtälöstä ensin

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - (GI_v + \sigma_z^0 I_p) \varphi'' = 0. \tag{9.38}$$

Jakamalla jäykkyydellä EI_ω tulee

$$\varphi^{(4)} + k^2 \varphi'' = 0, \tag{9.39}$$

missä on merkitty

$$k^2 = -\frac{\sigma_z^0 I_p + GI_v}{EI_\omega}. \tag{9.40}$$

Differentiaaliyhtälön (9.39) ratkaisu on

$$\varphi(z) = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 z + C_4. \tag{9.41}$$

Esimerkki 9.1 Määritetään vapaasti tuetun pilarin vääntönurjahduskuorma, kun pilarin poikkileikkaus on kaksoissymmetrinen.

Vapaasti tuetun pilarin reunaehdot ovat

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0, \quad (9.42)$$

$$\varphi''(0) = \varphi''(L) = 0. \quad (9.43)$$

Reunaehtojen avulla saadaan, että $C_2 = C_3 = C_4 = 0$, ja ehdoksi ei-triviaalille ratkaisulle tulee

$$\sin kL = 0, \quad (9.44)$$

mistä seuraa $kL = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$, ja kriittinen kuorma on

$$P_{kr} = P_1 = \frac{A}{I_p} \left(GI_v + \frac{\pi^2}{L^2} EI_\omega \right). \quad (9.45)$$

Esimerkki 9.2 Määritetään edellisen esimerkin pilarin vääntönurjahduskuorma vääntön suhteen jäykästi kiinnitetyn sauvan reunaehdoilla $\varphi(0) = \varphi(L) = \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0$.

Reunaehtojen perusteella saadaan integroimisvakioille yhtälöt

$$C_2 = -C_2, \quad (9.46)$$

$$C_1 = C_3 = 0. \quad (9.47)$$

Ei-triviaali ratkaisu on tässä tapauksessa olemassa, jos $kL = 2n\pi$, ja kriittiseksi kuormaksi tulee

$$P_{kr} = P_1 = \frac{A}{I_p} \left(GI_v + \frac{4\pi^2}{L^2} EI_\omega \right). \quad (9.48)$$

9.1.2 Yleinen poikkileikkaus

Yleisen poikkileikkauksen tapauksessa edellä johdetut tasapainoyhtälöt

$$EI_y u^{(4)} + P(u'' + \varphi'' y_a) = 0, \quad (9.49)$$

$$EI_x v^{(4)} + P(v'' - \varphi'' x_a) = 0, \quad (9.50)$$

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - (GI_v + \sigma_z^0 I_p) \varphi'' - Px_a v'' + Py_a u'' = 0 \quad (9.51)$$

ovat toisiinsa kytkeytyneitä.

Esimerkki 9.3 Määritetään vapaasti tuetun sauvan nurjahduskuorma, kun poikkileikkauksella ei ole symmetriatasoja.

Vapaasti tuetun sauvan reunaehdot ovat

$$u(0) = v(0) = \varphi(0) = u(L) = v(L) = \varphi(L) = 0, \quad (9.52)$$

$$u''(0) = v''(0) = \varphi''(0) = u''(L) = v''(L) = \varphi''(L) = 0. \quad (9.53)$$

Reunaehdot toteutuvat valitsemalla vääntökeskiön siirtymille ja vääntymälle esitykset

$$u(z) = C_1 \sin \frac{\pi}{L} z, \quad v(z) = C_2 \sin \frac{\pi}{L} z, \quad \varphi(z) = C_3 \sin \frac{\pi}{L} z. \quad (9.54)$$

Sijoittamalla otaksutut funktiot tasapainoehtoihin (9.49) tulee

$$\left[P - \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 EI_y \right] C_1 + Py_a C_3 = 0, \quad (9.55)$$

$$\left[P - \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 EI_x \right] C_2 - Px_a C_3 = 0, \quad (9.56)$$

$$Py_a C_1 - Px_a C_2 + \left[\frac{I_p}{A} P - \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 EI_\omega - GI_v \right] C_3 = 0. \quad (9.57)$$

Määritellään suureet

$$P_x = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_x, \quad (9.58)$$

$$P_y = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_y, \quad (9.59)$$

$$P_\varphi = \frac{A}{I_p} \left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_\omega + GI_v \right], \quad (9.60)$$

missä P_x ja P_y ovat nivelsauvan Eulerin nurjahduskuormat taivutuksessa x :n ja y :n ympäri ja P_φ on nivelsauvan vääntönurjahduskuorma. Tasapainoyhtälöiden ryhmällä on ei-triviaali ratkaisu, jos sen kerroimatriisin determinantti on nolla, eli

$$\det \begin{bmatrix} P - P_y & 0 & Py_a \\ 0 & P - P_x & -Px_a \\ Py_a & -Px_a & \frac{I_p}{A}(P - P_\varphi) \end{bmatrix} = 0, \quad (9.61)$$

joka on aukikirjoitettuna

$$\frac{I_p}{A}(P - P_x)(P - P_y)(P - P_\varphi) - P^2 y_a^2 (P - P_x) - P^2 x_a^2 (P - P_y) = 0, \quad (9.62)$$

tai

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{I_p} P^3 + \left[\frac{A}{I_p} (P_x y_a^2 + P_y x_a^2) - (P_x + P_y + P_\varphi) \right] P^2 \\ + (P_x P_y + P_x P_\varphi + P_y P_\varphi) P - P_x P_y P_\varphi = 0, \end{aligned} \quad (9.63)$$

missä on merkitty $I_0 = I_x + I_y$.

Kriittinen kuorma on kolmannen asteen yhtälön (9.62) pienin juuri

$$P_{kr} = P_1. \quad (9.64)$$

Muotoa $f(P) = 0$ olevan yhtälön (9.62) avulla voidaan arvioida juuria P_i , $i = 1, 2, 3$. Suurilla P :n arvoilla polynomin $f(P)$ merkki määräytyy kolmannen asteen termin $\frac{I_p}{A} P^3 > 0$ perusteella. Jos $P = 0$, niin funktion $f(P)$ arvo on $-P_x P_y P_\varphi \frac{I_p}{A}$, joka on negatiivinen.

Otaksutaan, että $P_x < P_y$. Jos $P = P_x$, niin

$$f(P) = -P_x^2 x_a^2 (P_x - P_y) > 0. \quad (9.65)$$

Jos $P = P_y$, niin

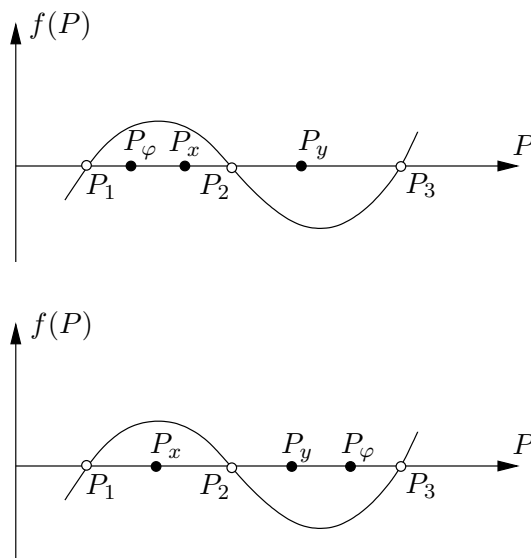
$$f(P) = -P_y^2 y_a^2 (P_y - P_x) < 0. \quad (9.66)$$

Yhtälöllä $f(P) = 0$ on siten kolme positiivista juurta, joista yksi on pienempi kuin P_x , yksi on suurempi kuin P_y , ja kolmas juuri on P_x :n ja P_y :n välissä.

Samanlainen päättely voidaan toistaa tapauksessa $P_y < P_x$. Voidaan osoittaa, että $P_1 < P_\varphi$. Jos $P_\varphi < P_x$ ja $P_\varphi < P_y$, niin $f(P_\varphi) > 0$. Suurin juuri P_3 on suurempi kuin P_φ .

Kaikissa tapauksissa yksi juuri on pienempi kuin P_x , P_y tai P_φ , yksi juuri on suurempi kuin P_x , P_y tai P_φ , ja yksi juuri on P_x :n ja P_y :n välissä.

Esimerkki 9.4 Tutkitaan jäykästi tuetun sauvan nurjahdusta.



Kuva 9.4 Polynomin $f(P)$ nollakohdat.

Jäykästi tuetun sauvan reunaehdot ovat

$$u(0) = v(0) = \varphi(0) = u(L) = v(L) = \varphi(L) = 0, \quad (9.67)$$

$$u'(0) = v'(0) = \varphi'(0) = u'(L) = v'(L) = \varphi'(L) = 0. \quad (9.68)$$

Sauvan taivutuksen ja väännön differentiaaliyhtälöiksi saadaan nyt

$$EI_y u'' + P(u + \varphi y_a) - EI_y u''(0) = 0, \quad (9.69)$$

$$EI_x v'' + P(v - \varphi x_a) - EI_x v''(0) = 0, \quad (9.70)$$

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - (GI_v + \sigma_z^0 I_p) \varphi'' - P x_a v'' + P y_a u'' = 0, \quad (9.71)$$

missä $M_y(0) = EI_y u''(0)$, $M_x(0) = -EI_x v''(0)$ ovat taivutusmomentit kohdassa $z = 0$.

Vaihtoehtoisesti voitaisiin taivutukselle käyttää yhtälöitä

$$EI_y u^{(4)} + P(u'' + y_a \varphi'') = 0, \quad (9.72)$$

$$EI_x v^{(4)} + P(v'' - x_a \varphi'') = 0. \quad (9.73)$$

Reunaehdot toteuttava ratkaisu on

$$u(z) = C_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right), \quad (9.74)$$

$$v(z) = C_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right), \quad (9.75)$$

$$\varphi(z) = C_3 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right). \quad (9.76)$$

Sijoittamalla ratkaisuyritteet tasapainoehtoihin tulee kolmen yhtälön homogeeninen yhtälöryhmä integroimisvakioiden C_i määrittämiseksi. Asettamalla ryhmän kerroinmatriisin determinantti nolaksi saadaan jälleen kolmannen asteen yhtälö (9.62) $f(P) = 0$ juurten P_i ja kriittisen kuorman määrittämiseen. Tulos on muuten sama kuin edellisessä esimerkissä, mutta nyt tekijän $\frac{\pi^2}{L^2}$ tilalle kirjoitetaan $\frac{4\pi^2}{L^2}$.

Esimerkki 9.5 Määritetään nurjahduskuorma sauvalle, jonka päätypoikkileikkausten kiertymä $x:n$ ja $y:n$ ympäri on estetty, mutta sauvan päätyjen leikkausvoimat ja vääntömomentit ovat nollia.

Sauvan reunaehdot ovat

$$u'(0) = v'(0) = \varphi'(0) = u'(L) = v'(L) = \varphi'(L) = 0, \quad (9.77)$$

$$u'''(0) = v'''(0) = \varphi'''(0) = u'''(L) = v'''(L) = \varphi'''(L) = 0. \quad (9.78)$$

Differentiaaliyhtälöt ja reunaehdot toteuttava ratkaisu on

$$u(z) = C_1 \cos \frac{n\pi z}{L}, \quad (9.79)$$

$$v(z) = C_2 \cos \frac{n\pi z}{L}, \quad (9.80)$$

$$\varphi(z) = C_3 \cos \frac{n\pi z}{L}, \quad (9.81)$$

missä $n = 1, 2, 3, \dots$

Sijoittamalla ratkaisuyritteet tasapainoehtoihin saadaan jälleen kolmen yhtälön homogeeninen yhtälöryhmä, jonka kerroinmatriisin determinantti asetetaan nolaksi. Tuloksena on sama kolmannen asteen yhtälö (9.62) $f(P) = 0$ kuin niveltuetun sauvan tapauksessa ja kriittinen kuorma on sama.

9.1.3 Yhden akselin suhteen symmetrinen poikkileikkaus

Jos sauvalle on symmetriataso, (x, z) -taso, ja poikkileikkauksella symmetria-akseli, x -akseli, niin $y_a = 0$, ja tällöin differentiaaliyhtälöiden ryhmä tulee muotoon

$$EI_y u'' + Pu = 0, \quad (9.82)$$

$$EI_x v'' + P(v - \varphi x_a) = 0, \quad (9.83)$$

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - (GI_v + \sigma_z^0 I_p) \varphi'' - Px_a v'' = 0. \quad (9.84)$$

Esimerkki 9.6 Määritetään vapaasti tuetun U -profilisauvan nurjahduskuorma.

Vapaasti tuetun sauvan reunaehdot ovat

$$v(0) = \varphi(0) = v(L) = \varphi(L) = 0, \quad (9.85)$$

$$v''(0) = \varphi''(0) = v''(L) = \varphi''(L) = 0. \quad (9.86)$$

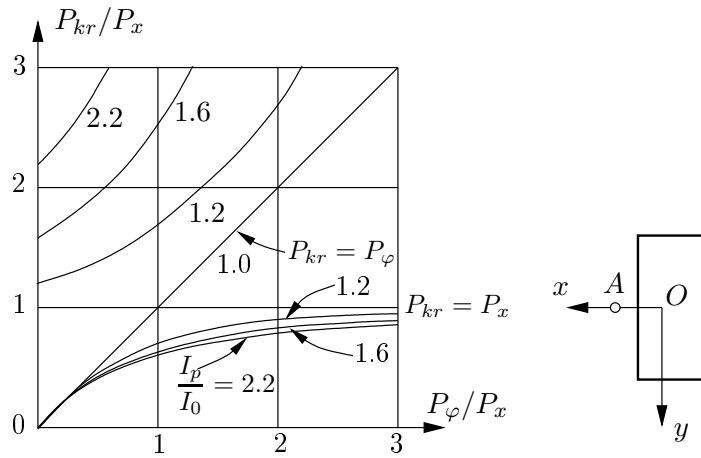
Reunaehdot toteutuvat otaksumalla siirtymille $u(z)$, $v(z)$ ja vääntökulmalle $\varphi(z)$ esitykset

$$u(z) = C_1 \sin \frac{\pi}{L} z, \quad v(z) = C_2 \sin \frac{\pi}{L} z, \quad \varphi(z) = C_3 \sin \frac{\pi}{L} z. \quad (9.87)$$

Ensimmäinen tasapainoehto voidaan ratkaista muista riippumatta, ja sen avulla saadaan nurjahduskuorma tasotaivutuksessa (x, z) -tasossa, kun palkki taipuu nurjahtaessaan akselin x suuntaan. Sijoittamalla otaksutut funktiot v ja φ kahteen jälkimmäiseen tasapainoehtoon (9.82) tulee

$$\left[P - \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 EI_x \right] C_2 - Px_a C_3 = 0, \quad (9.88)$$

$$-Px_a C_2 + \left[\frac{I_p}{A} P - \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 EI_\omega - GI_v \right] C_3 = 0. \quad (9.89)$$



Kuva 9.5 Yhtälön (9.94) juuret.

Merkitään jälleen, että

$$P_x = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_x, \quad (9.90)$$

$$P_y = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_y, \quad (9.91)$$

$$P_\varphi = \frac{A}{I_p} \left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_\omega + GI_v \right], \quad (9.92)$$

ovat nivelsauvan Eulerin nurjahduskuormat taivutuksessa x :n ympäri, y :n ympäri ja vääntönurjahduskuorma. Ensimmäisen tasapainoyhtälön ratkaisun mukaan kriittinen kuorma on $P_{kr} = P_y$.

Kahden jälkimmäisen tasapainoyhtälön ryhmällä on ei-triviaali ratkaisu, jos sen kerroinmatriisin determinantti on nolla, eli

$$\det \begin{bmatrix} P - P_x & -Px_a \\ -Px_a & \frac{I_p}{A}(P - P_\varphi) \end{bmatrix} = 0, \quad (9.93)$$

josta seuraa

$$\frac{I_p}{A}(P - P_x)(P - P_\varphi) - P^2 x_a^2 = 0 \quad (9.94)$$

tai

$$\frac{I_0}{I_p} P^2 - (P_x + P_\varphi)P + P_x P_\varphi = 0, \quad (9.95)$$

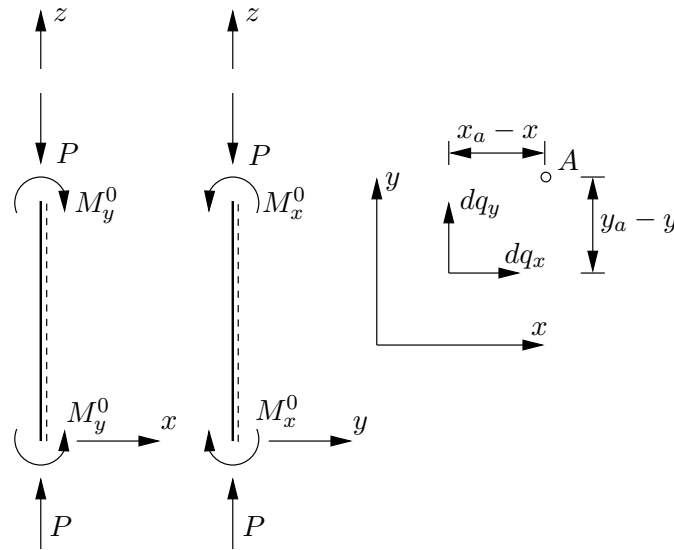
missä on merkitty $I_0 = I_x + I_y$ ja $I_p = I_0 + A(x_a^2 + y_a^2)$.

Toisen asteen yhtälöllä (9.94) on kaksi juurta, P_1 ja P_2 , joista pienempi juuri P_1 on pienempi kuin P_x ja P_φ . Suurempi juuri P_2 on suurempi kuin P_x ja P_φ , kuva 9.5.

9.2 Puristettu ja taivutettu sauva

Tarkastellaan puristettua sauvaa, jota kuormittavat lisäksi taivutusmomentit M_x^0 ja M_y^0 . Momenttijakaumat M_x^0 ja M_y^0 ovat tasaiset eli koordinaatin z suhteen vakiot. Kuormituksen aiheuttama sauvan alkujännitys on nyt

$$\sigma_z^0 = -\frac{P}{A} - \frac{M_y^0}{I_y}x + \frac{M_x^0}{I_x}y. \quad (9.96)$$



Kuva 9.6 Puristettu ja taivutettu sauva.

Sauvan taipuessa ja kiertyessä nurjahduksen yhteydessä syntyy lisäjännitys

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{I_y}x + \frac{M_x}{I_x}y + \frac{B}{I_\omega}\omega(x, y). \quad (9.97)$$

Pääkoordinaatistossa

$$M_y = EI_y u'', \quad (9.98)$$

$$M_x = -EI_x v'', \quad (9.99)$$

$$B = -EI_\omega \varphi''. \quad (9.100)$$

Yhteensä tilassa 1 jännitys σ_z^1 on

$$\begin{aligned} \sigma_z^1 &= \sigma_z^0 + \sigma_z \\ &= -\frac{P}{A} - \frac{M_y^0}{I_y}x + \frac{M_x^0}{I_x}y \\ &\quad - \frac{M_y}{I_y}x + \frac{M_x}{I_x}y + \frac{B}{I_\omega}\omega(x, y). \end{aligned} \quad (9.101)$$

Sauvan taivutuksen ja väännön tasapainoyhtälöt ovat pääkoordinaatistossa

$$EI_y u^{(4)} = q_x, \quad (9.102)$$

$$EI_x v^{(4)} = q_x, \quad (9.103)$$

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - GI_v \varphi'' = m_z. \quad (9.104)$$

Tasaisesti puristetun ja taivutetun sauvan tapauksessa saadaan samalla tavalla kuin puristetun sauvan tapauksessa edellä tarkasteltavan säikeen $(dA \times t(s)ds) \times dz$ päihin vaikuttavasta voimasta $\sigma_z^0 dA$ syntyville poikittaiskuormille lausekkeet

$$dq_x(x, y, z) = \sigma_z^0 [u(z) + (y_a - y)\varphi(z)]'' dA, \quad (9.105)$$

$$dq_y(x, y, z) = \sigma_z^0 [v(z) - (x_a - x)\varphi(z)]'' dA. \quad (9.106)$$

Integroimalla poikkileikkauksen yli tulee

$$\begin{aligned} q_x &= \int_A dq_x \\ &= \int_A \sigma_z^0 [u(z) + (y_a - y)\varphi(z)]'' dA \\ &= -Pu'' - (Py_a + M_x^0)\varphi'', \end{aligned} \quad (9.107)$$

$$\begin{aligned} q_y &= \int_A dq_y \\ &= \int_A \sigma_z^0 [v(z) - (x_a - x)\varphi(z)]'' dA \\ &= -Pv'' + (Px_a - M_y^0)\varphi''. \end{aligned} \quad (9.108)$$

Vastaavalla tavalla saadaan vääntömomenttikuorma

$$\begin{aligned} dm_z(x, y, z) &= (y_a - y)dq_x - (x_a - x)dq_y \\ &= (y_a - y)\sigma_z^0 [u(z) + (y_a - y)\varphi(z)]'' dA \\ &\quad - (x_a - x)\sigma_z^0 [v(z) - (x_a - x)\varphi(z)]'' dA. \end{aligned} \quad (9.109)$$

Integroimalla poikkipinnan yli tulee

$$\begin{aligned} m_z &= \int_A dm_z \\ &= \int_A [(y_a - y)dq_x - (x_a - x)dq_y] dA \\ &= \int_A (y_a - y)\sigma_z^0 [u(z) + (y_a - y)\varphi(z)]'' dA \\ &\quad - \int_A (x_a - x)\sigma_z^0 [v(z) - (x_a - x)\varphi(z)]'' dA. \end{aligned} \quad (9.110)$$

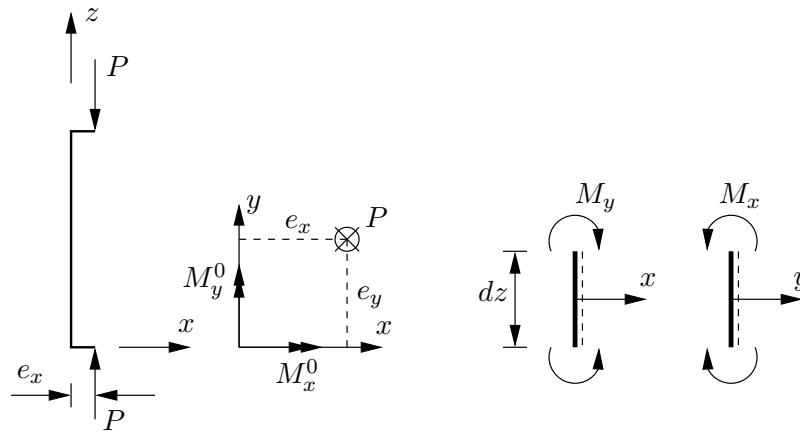
Sijoittamalla alkujännityksen σ_z^0 kaava saadaan m_z edelleen muotoon

$$\begin{aligned} m_z &= \int_A \left(-\frac{P}{A} - \frac{M_y^0}{I_y}x + \frac{M_x^0}{I_x}y \right) (y_a - y)[u(z) + (y_a - y)\varphi(z)]'' dA \\ &\quad - \int_A \left(-\frac{P}{A} - \frac{M_y^0}{I_y}x + \frac{M_x^0}{I_x}y \right) (x_a - x)[v(z) - (x_a - x)\varphi(z)]'' dA \\ &= -(Py_a + M_x^0)u'' + (Px_a - M_y^0)v'' - (-M_x^0\beta_x + M_y^0\beta_y + \frac{P}{A}I_p)\varphi'', \end{aligned} \quad (9.111)$$

missä on merkitty

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \left(\int_A y^3 dA + \int_A x^2 y dA \right) - 2y_a, \quad (9.112)$$

$$\beta_y = \frac{1}{I_y} \left(\int_A x^3 dA + \int_A xy^2 dA \right) - 2x_a. \quad (9.113)$$



Kuva 9.7 Epäkeskeisesti puristettu sauva.

Sijoittamalla suureet q_x , q_y ja m_z tasapainoyhtälöihin (9.102) saadaan differentiaaliyhtälöiden ryhmä

$$EI_y u^{(4)} + Pu'' + (Py_a + M_x^0)\varphi'' = 0, \quad (9.114)$$

$$EI_x v^{(4)} + Pv'' - (Px_a - M_y^0)\varphi'' = 0, \quad (9.115)$$

$$\begin{aligned} EI_\omega \varphi^{(4)} - (GI_v + M_x^0 \beta_x - M_y^0 \beta_y - \frac{P}{A} I_p) \varphi'' \\ + (Py_a + M_x^0) u'' - (Px_a - M_y^0) v'' = 0. \end{aligned} \quad (9.116)$$

9.2.1 Epäkeskeinen puristus

Epäkeskeisen puristuksen tapauksessa alkutilan momentit ovat

$$M_x^0 = -Pe_y, \quad M_y^0 = Pe_x. \quad (9.117)$$

Tasapainoehtoiksi saadaan tässä tapauksessa

$$EI_y u^{(4)} + Pu'' + P(y_a - e_y)\varphi'' = 0, \quad (9.118)$$

$$EI_x v^{(4)} + Pv'' - P(x_a - e_x)\varphi'' = 0, \quad (9.119)$$

$$\begin{aligned} EI_\omega \varphi^{(4)} - (GI_v - Pe_y \beta_x - Pe_x \beta_y - \frac{P}{A} I_p) \varphi'' \\ + P(y_a - e_y) u'' - P(x_a - e_x) v'' = 0. \end{aligned} \quad (9.120)$$

Esimerkki 9.7 Palkkia kuormittaa puhdas, tasainen taivutusmomenttikuorma M_x^0 ja $M_y^0 = P = 0$. Poikkileikkaus on kapea, $I_x \gg I_y$. Määritetään kriittinen kuorma.

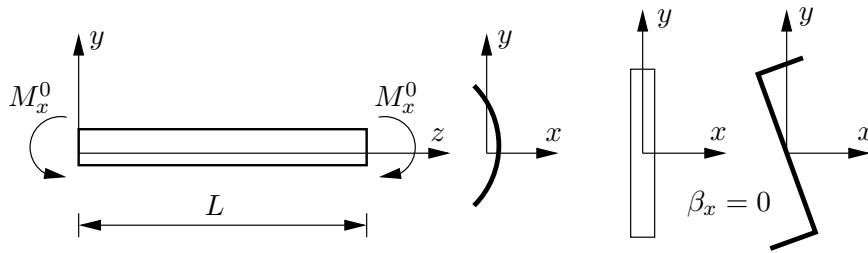
Esimerkin tapauksessa tarvittavat ensimmäinen ja kolmas tasapainoehto supistuvat muotoon

$$EI_y u^{(4)} + M_x^0 \varphi'' = 0, \quad (9.121)$$

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - (GI_v + M_x^0 \beta_x) \varphi'' + M_x^0 u'' = 0. \quad (9.122)$$

Vapaasti tuetun sauvan ratkaisu on

$$u = C_1 \sin \frac{\pi z}{L}, \quad \varphi = C_3 \sin \frac{\pi z}{L}. \quad (9.123)$$



Kuva 9.8 Puhdas taivutus.

Sijoittamalla taipuman ja vääntökulman lausekkeet tasapainoehtoihin saadaan integroimisvakioiden C_1 ja C_3 määrittämiseen kahden yhtälön homogeeninen yhtälöryhmä. Asettamalla ryhmän kerroinmatriisin determinantti nolaksi tulee momentin M_x^0 suhteen toisen asteen yhtälö

$$\frac{\pi^2 EI_y}{L^2} [GI_v + EI_\omega \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + M_x^0 \beta_x] - (M_x^0)^2 = 0. \quad (9.124)$$

Merkitsemällä jälleen

$$P_y = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_y, \quad (9.125)$$

$$P_\varphi = \frac{A}{I_p} \left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_\omega + GI_v \right], \quad (9.126)$$

saadaan toisen asteen yhtälö muotoon

$$(M_x^0)^2 - P_y \beta_x M_x - \frac{I_p}{A} P_y P_\varphi = 0, \quad (9.127)$$

jonka ratkaisu on

$$M_{x,kr}^0 = \frac{P_y \beta_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P_y \beta_x}{2}\right)^2 + \frac{I_p}{A} P_y P_\varphi}. \quad (9.128)$$

Kaksoissymmetrisen poikkileikkauksen tapauksessa, esim. I-poikkileikkaus, poikkileikkaussuure $\beta_x = 0$, ja tällöin kriittinen momentti on

$$M_{x,kr}^0 = \pm \sqrt{\frac{I_p}{A} P_y P_\varphi} = \pm \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y \left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_\omega + GI_v \right]}. \quad (9.129)$$

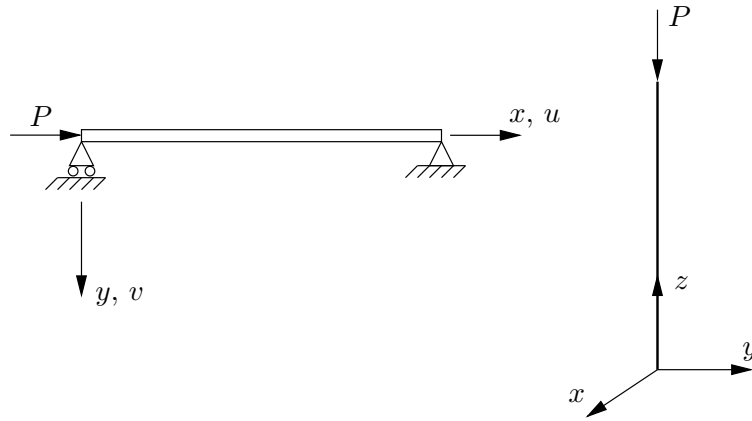
Kaava pätee myös Z-poikkileikkaukselle. Kapean suorakaidepoikkileikkauksen tapauksessa $I_\omega \approx 0$ ja $I_v = \frac{1}{3} t^3 h$, missä h ja t ovat poikkileikkauksen korkeus ja leveys, ja kriittinen momentti on

$$M_{x,kr}^0 = \pm \frac{\pi}{L} \frac{t^3 h}{6} \sqrt{EG}. \quad (9.130)$$

9.3 Vääntönurjahdustehtävän ratkaisu energiamenetelmällä

Tasonurjahduksen kriittinen kuorma määritettiin Trefftzin ehdosta

$$\bar{\delta} \left(\frac{1}{2} \delta^2 \Pi \right) = \bar{\delta} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L [EI(v'')^2 - P(v')^2] dx \right\} = 0, \quad (9.131)$$



Kuva 9.9 Tasonurjahdus ja vääntönurjahdus.

missä

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI(v'')^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L P(v')^2 dx \quad (9.132)$$

on potentiaalienergian Π toinen variaatio. Potentiaalienergian toisen variaation toinen termi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{2}\int_0^L \int_A \sigma_x^0(v')^2 dA dx = -\frac{1}{2}P \int_0^L (v')^2 dx, \quad (9.133)$$

kun sauva taipuu tasonurjahduksessa (x, y) -tasossa, sauvan akseli on x -akseli, $\sigma_x^0 = -\frac{P}{A}$ ja A on poikkileikkauksen pinta-ala.

Vääntönurjahdustehtävässä potentiaalienergian Π toinen variaatio tulee pääkoordinaatistossa (x, y, z) , missä z on sauvan akseli, muotoon

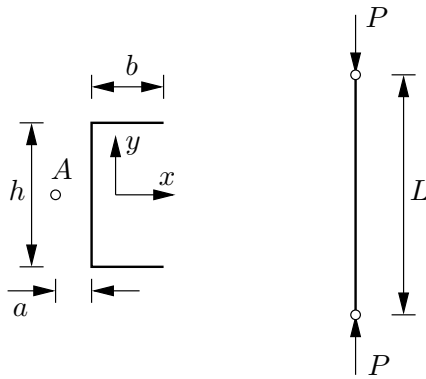
$$\frac{1}{2}\int_0^L [EI_y(u'')^2 + EI_x(v'')^2 + EI_\omega(\varphi'')^2 + GI_v(\varphi')^2] dz + \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \sigma_z^0[(u'_Q)^2 + (v'_Q)^2] dA dz. \quad (9.134)$$

Toisen variaation kaavan termin $\frac{1}{2}\int_0^L EI(v'')^2 dx$ tilalle on tullut nyt

$$\frac{1}{2}\int_0^L [EI_y(u'')^2 + EI_x(v'')^2 + EI_\omega(\varphi'')^2 + GI_v(\varphi')^2] dz, \quad (9.135)$$

ja tasonurjahdustapauksen toisen variaation jälkimmäinen termi $-\frac{1}{2}\int_0^L P(v')^2 dx$ on vääntönurjahduksen tapauksessa yleistetty muotoon

$$\frac{1}{2}\int_0^L \int_A \sigma_z^0[(u'_Q)^2 + (v'_Q)^2] dA dz. \quad (9.136)$$



Kuva 9.10 Nivelsauvan nurjahdus.

Sijoittamalla Π :n toisen variaation jälkimmäiseen termiin mielivaltaisen pisteen Q siirtymät vääntökeskiön siirtymien u ja v avulla lausuttuina muodossa

$$u_Q(x, y, z) = u(z) + (y_a - y)\varphi(z), \quad (9.137)$$

$$v_Q(x, y, z) = v(z) - (x_a - x)\varphi(z) \quad (9.138)$$

saadaan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma_z^0 ((u'_Q)^2 + (v'_Q)^2) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma_z^0 [(u' + (y_a - y)\varphi')^2 + (v' - (x_a - x)\varphi')^2] dA dz \\ &= -\frac{P}{2} \int_0^L \left[(u')^2 + (v')^2 + \frac{I_p}{A} (\varphi')^2 - 2x_a v' \varphi' + 2y_a u' \varphi' \right] dz, \end{aligned} \quad (9.139)$$

missä (x_a, y_a) ovat vääntökeskiön A koordinaatit, $I_0 = I_x + I_y$, $I_p = I_0 + A(x_a^2 + y_a^2)$, $I_x = \int_A y^2 dA$, $I_y = \int_A x^2 dA$ ja lisäksi derivaatta koordinaatin z suhteen on $(\bullet)' \equiv \frac{d(\bullet)}{dz}$. Yhteensä Π :n toinen variaatio on

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_x (v'')^2 + EI_\omega (\varphi'')^2 + GI_v (\varphi')^2] dz \\ &\quad - \frac{P}{2} \int_0^L \left[(u')^2 + (v')^2 + \frac{I_p}{A} (\varphi')^2 - 2x_a v' \varphi' + 2y_a u' \varphi' \right] dz, \end{aligned} \quad (9.140)$$

missä u , v ja φ ovat lisäsiirtymät ja vääntökulma suoran perustilan suhteen.

Esimerkki 9.8 Määritetään niveltuetun sauvan nurjahduskuorma. Sauvan poikkileikkaus on x -akselin suhteen symmetrinen U-profiili.

Otetaan käyttöön dimensioton koordinaatti $\zeta = \frac{z}{L}$, kun L on niveltuetun pilarin pituus. Sauvan reunaehtot toteutuvat valitsemalla siirtymäsuureille esitykset

$$u(\zeta) = A \sin \pi \zeta, \quad (9.141)$$

$$v(\zeta) = B \sin \pi \zeta, \quad (9.142)$$

$$\varphi(\zeta) = C \sin \pi \zeta. \quad (9.143)$$

Symmetrian perusteella $y_a = 0$. Potentiaalienergian toinen variaatio on nyt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{L^2} \left[\frac{EI_y}{L^2} \left(\frac{d^2 u}{d\zeta^2} \right)^2 + \frac{EI_x}{L^2} \left(\frac{d^2 v}{d\zeta^2} \right)^2 + \frac{EI_\omega}{L^2} \left(\frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} \right)^2 + GI_v \left(\frac{d\varphi}{d\zeta} \right)^2 \right] L d\zeta \\ & - \frac{P}{2} \int_0^1 \frac{1}{L^2} \left[\left(\frac{du}{d\zeta} \right)^2 + \left(\frac{dv}{d\zeta} \right)^2 + \frac{I_p}{A} \left(\frac{d\varphi}{d\zeta} \right)^2 - 2x_a \frac{dv}{d\zeta} \frac{d\varphi}{d\zeta} \right] L d\zeta, \end{aligned} \quad (9.144)$$

missä on otettu huomioon, että $dz = L d\zeta$, $\frac{d(\bullet)}{dz} = \frac{d(\bullet)}{d\zeta} \frac{1}{L}$ ja $y_a = 0$.

Sijoittamalla otaksutut siirtymäsuureet toisen variaation kaavaan tulee integrointien jälkeen $\left(\int_0^1 \sin^2 \pi \zeta d\zeta = \int_0^1 \cos^2 \pi \zeta d\zeta = 1/2 \right)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 \Pi = & \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{L^2} \left[A^2 EI_y \frac{\pi^2}{L^2} + B^2 EI_x \frac{\pi^2}{L^2} + C^2 \left(GI_v + EI_\omega \frac{\pi^2}{L^2} \right) \right] L \\ & - \frac{P}{4} \left(A^2 \frac{\pi^2}{L^2} + B^2 \frac{\pi^2}{L^2} + C^2 \frac{I_p}{A} \frac{\pi^2}{L^2} - 2x_a BC \frac{\pi^2}{L^2} \right) L. \end{aligned} \quad (9.145)$$

Derivoimalla Π :n toisen variaation lauseke parametrien A , B ja C suhteen ¹ saadaan yhtälöt

$$\frac{\partial(\delta^2 \Pi)}{\partial A} = \left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 EI_y - P \right] A = 0, \quad (9.146)$$

$$\frac{\partial(\delta^2 \Pi)}{\partial B} = \left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 EI_x - P \right] B + Px_a C = 0, \quad (9.147)$$

$$\frac{\partial(\delta^2 \Pi)}{\partial C} = Px_a B + \left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 EI_\omega + GI_v - \frac{I_p}{A} P \right] C = 0. \quad (9.148)$$

Ensimmäisestä yhtälöstä ratkeaa tasonurjahduksen kriittinen kuorma taivutuksessa (x, z) -tasossa

$$P_y = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 EI_y. \quad (9.149)$$

Asettamalla kahden jälkimmäisen yhtälön ryhmän determinantti nolaksi saadaan

$$\det \begin{bmatrix} P_x - P & Px_a \\ Px_a & \frac{I_p}{A}(P_\varphi - P) \end{bmatrix} = 0. \quad (9.150)$$

¹ $\bar{\delta}(\delta^2 \Pi) = \frac{\partial(\delta^2 \Pi)}{\partial A} \bar{\delta} A + \frac{\partial(\delta^2 \Pi)}{\partial B} \bar{\delta} B + \frac{\partial(\delta^2 \Pi)}{\partial C} \bar{\delta} C = 0.$

Edellä on merkitty, että

$$P_x = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_x, \quad (9.151)$$

$$P_y = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_y, \quad (9.152)$$

$$P_\varphi = \frac{A}{I_p} \left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_\omega + GI_v \right]. \quad (9.153)$$

Determinantin nollaehdosta seuraa

$$\frac{I_p}{A}(P_x - P)(P_\varphi - P) - P^2 x_a^2 = 0, \quad (9.154)$$

tai

$$\frac{I_0}{I_p}P^2 - (P_x + P_\varphi)P + P_x P_\varphi = 0, \quad (9.155)$$

missä on merkitty $I_0 = I_x + I_y$ ja $I_p = I_0 + A(x_a^2 + y_a^2)$.

Toisen asteen yhtälöllä (9.154) on kaksi juurta, P_1 ja P_2 , joista pienempi juuri P_1 on pienempi kuin P_x ja P_φ ja suurempi juuri P_2 on suurempi kuin P_x ja P_φ . Ratkaisu on sama kuin aiemmin differentiaaliyhtälöistä saatu tulos, koska nivelsauvan tapauksessa otaksutut siirtymäsuureet toteuttavat reunaehtojen lisäksi myös kenttäyhtälöt.

Luku 10

Kiepahdus

10.1 Kiepahduksen differentiaaliyhtälöt

Tutkitaan (y, z) -tasossa kuormitettua sauvaa, jonka poikkileikkauksen jäyhyys I_x on paljon suurempi kuin jäyhyys I_y pääkoordinaatistossa. Tällainen sauva voi menettää stabiiliutensa kiepahtamalla, jolloin poikkileikkaus kiertyy ja siirtyy sivulle. Sauvan kuormituksena voi olla myös momentti M_x , joka voi aiheutua esim. epäkeskeisestä puristavasta voimasta P . Jos sauvaa kuormittaa sekä poikittainen kuorma (y, z) -tasossa että puristava voima, niin saadaan yhdistetty kiepahdus- ja vääntönurjahdustehtävä.

Otaksutaan, että sauvan alkunormaalijännitys on vielä yllä kuvailtua yleisempi, eli pääkoordinaatistossa

$$\sigma_z^0 = \frac{N^0}{A} - \frac{M_y^0}{I_y}x + \frac{M_x^0}{I_x}y, \quad (10.1)$$

missä $N^0 = -P$.

Alkutilan leikkausjännitys määritetään normaali-jännityksen σ_z^0 avulla homogeenisesta tasapainoehdosta

$$\frac{\partial \sigma_z^0}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zs}^0}{\partial s} = 0 \quad (10.2)$$

integroimalla, ja saadaan (seinämän paksuudella $t(s)$ kerrottuna)

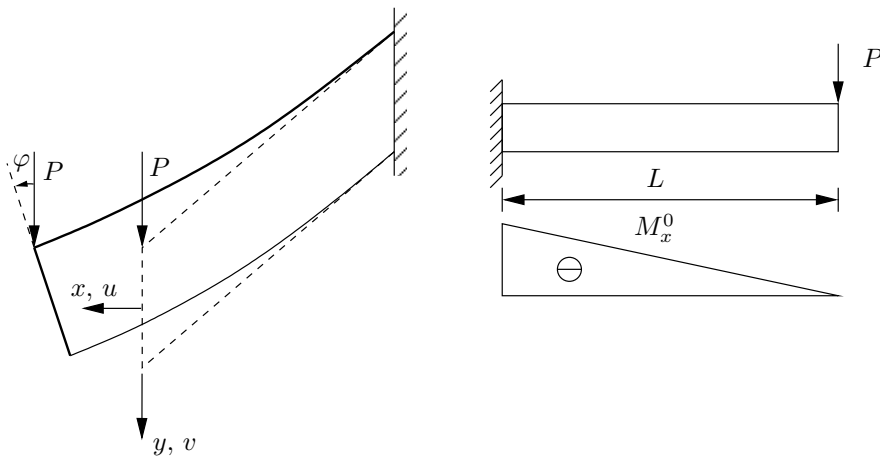
$$\tau_{zs}^0(s, z)t(s) = -\frac{(N^0(z))'}{A}A(s) + \frac{(M_y^0(z))'}{I_y}S_y(s) - \frac{(M_x^0(z))'}{I_x}S_x(s). \quad (10.3)$$

Leikkausjännityksen $\tau_{zs}^0(s, z)$ kaavassa on määritelty poikkileikkaussuureet

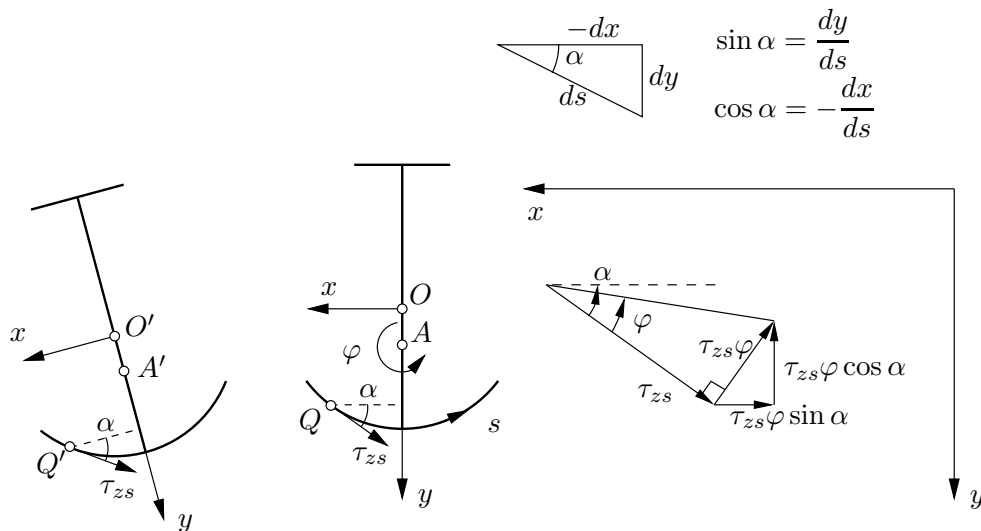
$$A(s) = \int_0^{A(s)} dA = \int_0^s t(s)ds, \quad (10.4)$$

$$S_y = \int_0^s x(s)t(s)ds, \quad (10.5)$$

$$S_x = \int_0^s y(s)t(s)ds, \quad (10.6)$$



Kuva 10.1 Kapean ulokkeen kiepahdus.



Kuva 10.2 Tason (y, z) suhteen symmetrinen poikkileikkaus.

jotka ovat tarkasteltavan leikkauksen s kohdalla poikkileikkauksen osan pinta-ala ja staattiset momentit pääkoordinaatistossa.

Otaksutaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $(N^0)' = 0$. Akseleiden x ja y suuntaiset komponentit ovat

$$\tau_{zx}^0 = -\tau_{zs}^0 \cos \alpha, \quad \tau_{zy}^0 = \tau_{zs}^0 \sin \alpha, \quad (10.7)$$

missä α on profiilin seinämän keskiviivan normaalin ja y -akselin välinen kulma.

Tarkastellaan jälleen mielivaltaisen pisteen Q ympäristöstä erotetun säikeen $(t(s)ds) \times dz$ tasapainoa. Jännityksistä σ_z^0 , τ_{zx}^0 ja τ_{zy}^0 aiheutuville poikittaiskuormille saadaan lausekkeet

$$dq_x(x, y, z) = \{\sigma_z^0[u_Q(z)]'\}' dA - [\tau_{zy}^0\varphi(z)]' dA, \quad (10.8)$$

$$dq_y(x, y, z) = \{\sigma_z^0[v_Q(z)]'\}' dA + [\tau_{zx}^0\varphi(z)]' dA, \quad (10.9)$$

missä $u_Q(z)$, $v_Q(z)$ ja $\varphi(z)$ ovat pisteen Q siirtymät ja vääntökulman muutos perustilan

suhteen.

Sijoittamalla poikkileikkauksen mielivaltaisen pisteen Q siirtymien kaavat

$$u_Q(x, y, z) = u(z) - (y - y_a)\varphi(z), \quad (10.10)$$

$$v_Q(x, y, z) = v(z) + (x - x_a)\varphi(z) \quad (10.11)$$

ja leikkausjännitysten kaavat (10.7) saadaan

$$dq_x(x, y, z) = \{\sigma_z^0[u(z) - (y - y_a)\varphi(z)]'\}' dA - [(\tau_{zs}^0 \sin \alpha)\varphi]' dA, \quad (10.12)$$

$$dq_y(x, y, z) = \{\sigma_z^0[v(z) + (x - x_a)\varphi(z)]'\}' dA - [(\tau_{zs}^0 \cos \alpha)\varphi]' dA, \quad (10.13)$$

missä $u(z)$, $v(z)$ ja $\varphi(z)$ ovat vääntökeskiön siirtymät ja vääntökulma perustilan suhteen ja vääntökeskiön koordinaatit ovat (x_a, y_a) .

Sijoittamalla jännitysten kaavat (10.1) ja (10.3) sekä integroimalla poikkileikkauksen yli tulee

$$q_x = \int_A dq_x = [N^0(u + y_a\varphi)]'' - (M_x^0\varphi)'', \quad (10.14)$$

$$q_y = \int_A dq_y = [N^0(v - x_a\varphi)]'' - (M_y^0\varphi)''. \quad (10.15)$$

Poikittaisvoimien q_x ja q_y kaavojen johtamisessa on otettu huomioon, että ¹

$$\int_A \frac{S_x}{t(s)} \sin \alpha dA = -I_x, \quad (10.16)$$

$$\int_A \frac{S_x}{t(s)} \cos \alpha dA = 0, \quad (10.17)$$

$$\int_A \frac{S_y}{t(s)} \sin \alpha dA = 0, \quad (10.18)$$

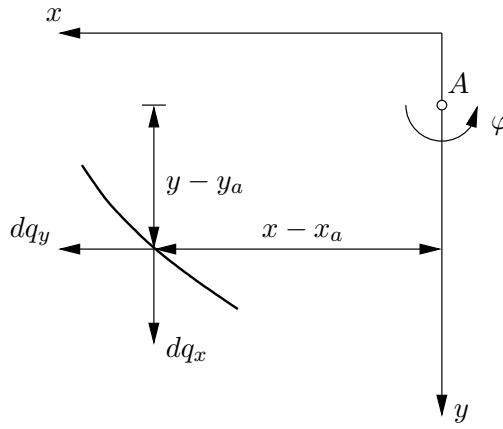
$$\int_A \frac{S_y}{t(s)} \cos \alpha dA = I_y, \quad (10.19)$$

missä $\sin \alpha = \frac{dy}{ds}$ ja $\cos \alpha = -\frac{dx}{ds}$.

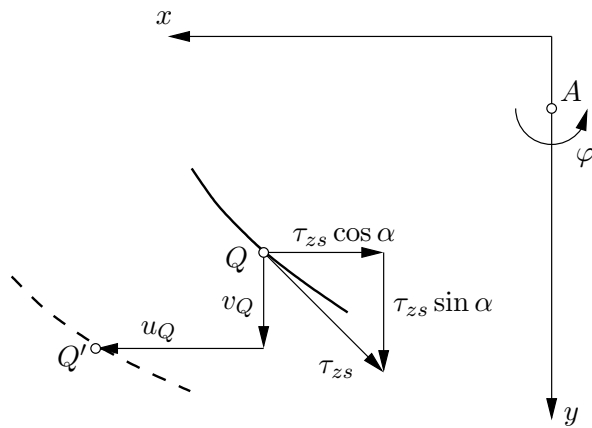
Vääntömomenttikuormaan m_z tulee kolme osuutta. Ensimmäinen komponentti dm_{z1} on voimien dq_x ja dq_y momentti

$$\begin{aligned} dm_{z1}(x, y, z) &= -(y - y_a)dq_x + (x - x_a)dq_y \\ &= -(y - y_a) \{\sigma_z^0[u(z) - (y - y_a)\varphi(z)]'\}' dA + (y - y_a)[\tau_{zs}^0 \sin \alpha \varphi(z)]' dA \\ &\quad + (x - x_a) \{\sigma_z^0[v(z) + (x - x_a)\varphi(z)]'\}' dA - (x - x_a)[\tau_{zs}^0 \cos \alpha \varphi(z)]' dA. \end{aligned} \quad (10.20)$$

¹ Osittaisintegroimalla tulee $\int_s S_x \sin \alpha ds = \int_s S_x \frac{dy}{ds} ds = |S_x y - \int_s y(s)^2 t(s) ds| = -I_x$, koska $\sin \alpha = \frac{dy}{ds}$, ja $\int_s S_y \cos \alpha ds = \int_s S_y \left(-\frac{dx}{ds}\right) ds = -|S_y x + \int_s x(s)^2 t(s) ds| = I_y$, koska $\cos \alpha = -\frac{dx}{ds}$.



Kuva 10.3 Kuormien dq_x ja dq_y momentti.

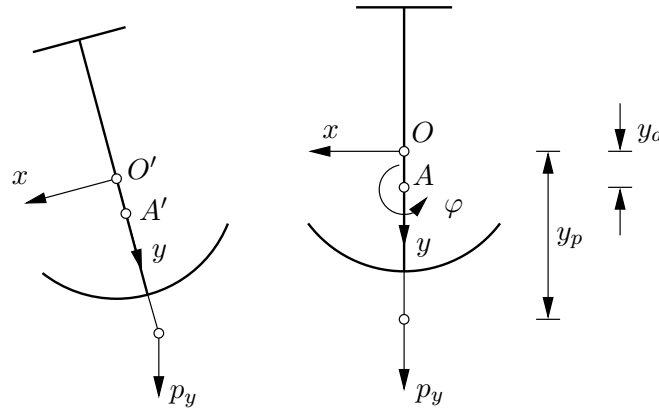


Kuva 10.4 Leikkausjännityksen vaikutuspisteen siirtyminen.

Integroimalla poikkipinnan yli tulee

$$\begin{aligned}
 m_{z1} = & \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -u' \int_A \sigma_z^0 (y - y_a) dA + v' \int_A \sigma_z^0 (x - x_a) dA \right\} \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \varphi' \int_A \sigma_z^0 [(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2] dA \right\} \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \varphi \int_A [\tau_{zs}^0 \sin \alpha (y - y_a) - \tau_{zs}^0 \cos \alpha (x - x_a)] dA \right\}.
 \end{aligned} \tag{10.21}$$

Leikkausjännityksen τ_{zs}^0 vaikutuspisteen siirtyminen aiheuttaa vääntömomentin muu-



Kuva 10.5 Kuorman vaikutuspisteen siirtyminen.

toksen

$$\begin{aligned}
 m_{z2} &= \int_A \frac{\partial}{\partial z} [\tau_{zy}^0 u_Q - \tau_{zx}^0 v_Q] dA \\
 &= \int_A \frac{\partial}{\partial z} [(\tau_{zs}^0 \sin \alpha) u_Q + (\tau_{zs}^0 \cos \alpha) v_Q] dA.
 \end{aligned} \tag{10.22}$$

Sijoittamalla poikkileikkauksen mielivaltaisen pisteen Q siirtymien kaavat

$$u_Q(x, y, z) = u(z) - (y - y_a)\varphi(z), \tag{10.23}$$

$$v_Q(x, y, z) = v(z) + (x - x_a)\varphi(z) \tag{10.24}$$

saadaan

$$\begin{aligned}
 m_{z2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(u \int_A \tau_{zs}^0 \sin \alpha dA \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v \int_A \tau_{zs}^0 \cos \alpha dA \right) \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \varphi \int_A [(y - y_a)\tau_{zs}^0 \sin \alpha - (x - x_a)\tau_{zs}^0 \cos \alpha] dA \right\}.
 \end{aligned} \tag{10.25}$$

Ulkoisen kuormituksen $p_x(z)$, $p_y(z)$ vaikutuspisteen P muuttumisesta aiheutuu vääntömomenttiin kolmas osuus

$$\begin{aligned}
 m_{z3} &= p_y u_p - p_x v_p \\
 &= p_y [u(z) - (y_p - y_a)\varphi(z)] - p_x [v(z) + (x_p - x_a)\varphi(z)].
 \end{aligned} \tag{10.26}$$

Yhteensä $m_z = m_{z1} + m_{z2} + m_{z3}$, eli

$$\begin{aligned}
 m_z = & \frac{\partial}{\partial z} \left[-u' \int_A \sigma_z^0 (y - y_a) dA + v' \int_A \sigma_z^0 (x - x_a) dA \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \varphi' \int_A \sigma_z^0 [(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2] dA \right\} \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left[u \int_A \tau_{zs}^0 \sin \alpha dA + v \int_A \tau_{zs}^0 \cos \alpha dA \right] \\
 & + up_y - vp_x - \varphi [(y_p - y_a)p_y + (x_p - x_a)p_x].
 \end{aligned} \tag{10.27}$$

Sijoittamalla normaalijännityksen kaava

$$\sigma_z^0 = \frac{N^0}{A} - \frac{M_y^0}{I_y}x + \frac{M_x^0}{I_x}y \tag{10.28}$$

saadaan edellä olevista poikkileikkauksen yli laskettavista integraaleista

$$\int_A \sigma_z^0 (y - y_a) dA = -y_a N^0(z) + M_x^0(z), \tag{10.29}$$

$$\int_A \sigma_z^0 (x - x_a) dA = -x_a N^0(z) - M_y^0(z), \tag{10.30}$$

$$\int_A \sigma_z^0 [(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2] dA = r^2 N^0(z) + \beta_x M_x^0(z) - \beta_y M_y^0(z), \tag{10.31}$$

missä on merkitty

$$r^2 = \frac{I_p}{A}, \tag{10.32}$$

$$I_p = I_x + I_y + (x_a^2 + y_a^2)A, \tag{10.33}$$

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \left(\int_A y^3 dA + \int_A x^2 y dA \right) - 2y_a, \tag{10.34}$$

$$\beta_y = \frac{1}{I_y} \left(\int_A x^3 dA + \int_A x y^2 dA \right) - 2x_a. \tag{10.35}$$

Ottamalla huomioon leikkausjännityksen kaava (tapauksessa $(N^0)' = 0$)

$$\tau_{zs}^0 t(s) = \frac{(M_y^0)'}{I_y} S_y(s) - \frac{(M_x^0)'}{I_x} S_x(s) \tag{10.36}$$

ja geometriset yhteydet

$$dx = -ds \cos \alpha, \quad dy = ds \sin \alpha \tag{10.37}$$

saadaan

$$\int_A \tau_{zs}^0 \cos \alpha t(s) ds = (M_y^0)', \quad \int_A \tau_{zs}^0 \sin \alpha t(s) ds = (M_x^0)'. \tag{10.38}$$

Vääntömomentin $m_z(z)$ kaava tulee muotoon

$$\begin{aligned} m_z &= \frac{\partial}{\partial z} [u'(y_a N^0 - M_x^0) - v'(x_a N^0 + M_y^0)] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} [\varphi'(r^2 N^0 + \beta_x M_x^0 - \beta_y M_y^0)] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} [u(M_x^0)' + v(M_y^0)'] \\ &+ up_y - vp_x - \varphi[(y_p - y_a)p_y + (x_p - x_a)p_x]. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Ottamalla huomioon tasapainoehdot

$$(M_x^0)'' = (Q_y^0)' = -p_y, \quad (M_y^0)'' = -(Q_x^0)' = p_x \quad (10.40)$$

tulee lopulta

$$\begin{aligned} m_z &= y_a(N^0 u')' - x_a(N^0 v')' - M_x^0 u'' - M_y^0 v'' \\ &+ [(r^2 N^0 + \beta_x M_x^0 - \beta_y M_y^0)\varphi']' - [(y_p - y_a)p_y + (x_p - x_a)p_x]\varphi. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Sijoittamalla kuormat q_x , q_y ja m_z tasapainoehtoihin

$$EI_y u^{(4)} = q_x, \quad (10.42)$$

$$EI_x v^{(4)} = q_y, \quad (10.43)$$

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - GI_v \varphi'' = m_z \quad (10.44)$$

saadaan kiepahduksen ja vääntönurjahduksen differentiaaliyhtälöt (puristetun ja taivutetun sauvan tasapainoyhtälöt)

$$EI_y u^{(4)} - [N^0(u' + y_a \varphi')] + (M_x^0 \varphi)'' = 0, \quad (10.45a)$$

$$EI_x v^{(4)} - [N^0(v' - x_a \varphi')] + (M_y^0 \varphi)'' = 0, \quad (10.45b)$$

$$\begin{aligned} EI_\omega \varphi^{(4)} - GI_v \varphi'' - [(r^2 N^0 + \beta_x M_x^0 - \beta_y M_y^0)\varphi']' \\ - y_a(N^0 u')' + x_a(N^0 v')' + M_x^0 u'' + M_y^0 v'' \\ + [(y_p - y_a)p_y + (x_p - x_a)p_x]\varphi = 0. \end{aligned} \quad (10.45c)$$

Tasapainoyhtälöissä $u(z)$, $v(z)$ ja $\varphi(z)$ ovat läsiirtymät ja läsikiertymä (vääntökulma) perustilan suhteen.

Esimerkki 10.1 Määritetään vapaasti tuetun I -palkin kiepahdusmomentti M_{kr} .

Kaksoissymmetrisen I -poikkileikkauksen tapauksessa $\beta_x = \beta_y = 0$. Vapaasti tuetun palkin reunaehdot ovat

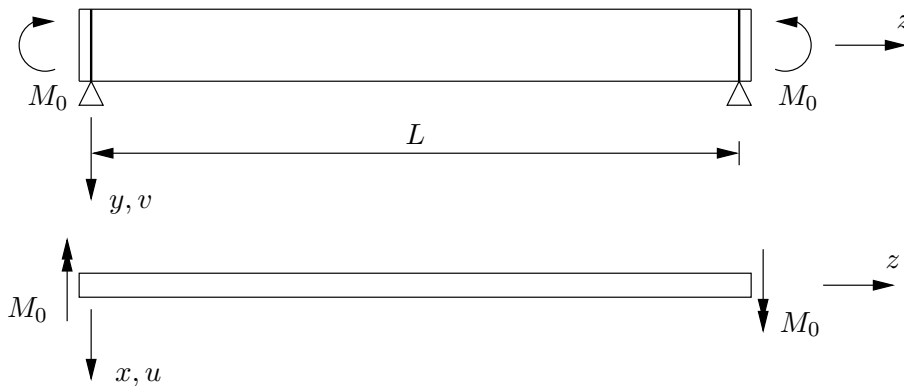
$$u(0) = v(0) = \varphi(0) = u''(0) = v''(0) = \varphi''(0) = 0, \quad (10.46)$$

$$u(L) = v(L) = \varphi(L) = u''(L) = v''(L) = \varphi''(L) = 0, \quad (10.47)$$

ja tasapainoehdot yksinkertaistuvat tarkasteltavassa kuormitustapauksessa muotoon

$$EI_y u^{(4)} + (M_x^0 \varphi)'' = 0, \quad (10.48)$$

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - GI_v \varphi'' + M_x^0 u'' = 0. \quad (10.49)$$



Kuva 10.6 Vapaasti tuettu I -palkki.

Ensimmäisestä tasapainoehdosta (10.48) integroidaan

$$EI_y u'' + M_x^0 \varphi = Az + B, \quad (10.50)$$

jossa olevat vakiot A ja B ovat nollia reunaehtojen perusteella. Ratkaisemalla

$$u'' = -\frac{M_x^0}{EI_y} \varphi, \quad (10.51)$$

ja sijoittamalla u'' jälkimmäiseen tasapainoyhtälöön (10.49) tulee

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - GI_v \varphi'' - \frac{(M_x^0)^2}{EI_y} \varphi = 0, \quad (10.52)$$

eli

$$\varphi^{(4)} - 2a\varphi'' - b\varphi = 0, \quad (10.53)$$

missä on merkitty

$$2a = \frac{GI_v}{EI_\omega}, \quad b = \frac{(M_x^0)^2}{EI_\omega EI_y}. \quad (10.54)$$

Differentiaaliyhtälön (10.53) ratkaisu on

$$\varphi(z) = A \sin pz + B \cos pz + Ce^{qz} + De^{-qz}, \quad (10.55)$$

missä

$$p = \sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b}}, \quad q = \sqrt{a + \sqrt{a^2 + b}}. \quad (10.56)$$

Vääntökulman derivaatat ovat

$$\varphi'(z) = pA \cos pz - pB \sin pz + qCe^{qz} - qDe^{-qz}, \quad (10.57)$$

$$\varphi''(z) = -p^2 A \sin pz - p^2 B \cos pz + q^2 Ce^{qz} + q^2 De^{-qz}. \quad (10.58)$$

Reunaehtojen

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(L) = \varphi''(L) = 0 \quad (10.59)$$

perusteella saadaan integroimisvakioiden A , B , C ja D ratkaisemiseksi homogeeninen yhtälöryhmä

$$B + C + D = 0, \quad (10.60a)$$

$$-p^2 B + q^2 C + q^2 D = 0, \quad (10.60b)$$

$$A \sin pL + B \cos pL + Ce^{qL} + De^{-qL} = 0, \quad (10.60c)$$

$$-p^2 A \sin pL - p^2 B \cos pL + q^2 Ce^{qL} + q^2 De^{-qL} = 0. \quad (10.60d)$$

Kahden ensimmäisen yhtälön perusteella

$$B = 0, \quad C = -D, \quad (10.61)$$

ja kahdesta jälkimmäisestä yhtälöstä seuraa yhtälöpari

$$A \sin pL - 2D \sinh qL = 0, \quad (10.62)$$

$$-p^2 A \sin pL - 2q^2 D \sinh qL = 0. \quad (10.63)$$

Asettamalla yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti nolaksi saadaan ehto

$$\sin pL \sinh qL (2p^2 + 2q^2) = 0. \quad (10.64)$$

Ehdosta

$$\sin pL = 0 \quad (10.65)$$

seuraa

$$p = \frac{\pi}{L} \Rightarrow -a + \sqrt{a^2 + b} = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad (10.66)$$

ja

$$M_{x,kr}^0 = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GI_v} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{L^2} \frac{EI_\omega}{GI_v}}. \quad (10.67)$$

Ratkaisu ei ota huomioon taipuman $v^0(z)$ vaikutusta. Jos EI_x ja EI_y ovat samaa suuruusluokkaa, niin taipuman vaikutus voi olla merkittävä. Kiepahdusmomentille on johdettu taipuman huomioonottava likiratkaisu

$$M_{x,kr}^0 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI_y GI_v}{I_r}} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{L^2} \frac{EI_\omega}{GI_v}}, \quad (10.68)$$

missä

$$I_r = 1 - \frac{I_y}{I_x} \quad (10.69)$$

ja $I_x > I_y$.

Jos päätymomentit $M_A = M_x^0(0)$, $M_B = M_x^0(L) \neq M_A$ ovat erisuuret, niin differentiaaliyhtälöstä tulee ei-vakiokertoiminen. Tehtävä voidaan ratkaista esim. sarjakehitelmän avulla numeerisesti. Kiepahdusmomentille on johdettu likikaava

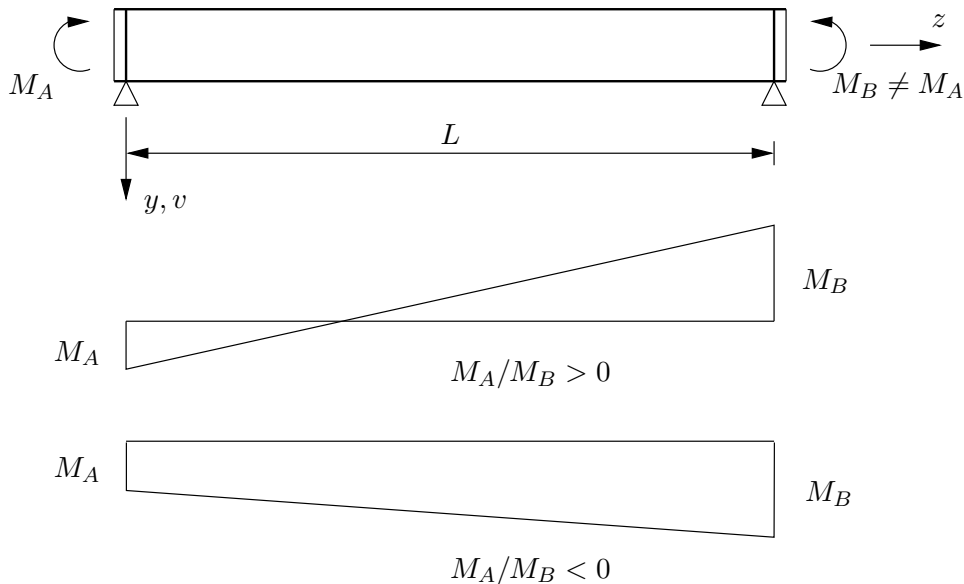
$$M_{kr} = C_b M_{kr}^0, \quad (10.70)$$

missä M_{kr}^0 on tasanjakautuneen momentin ratkaisu ja kerroin C_b on

$$C_b = 1.75 + 1.05 \left(\frac{M_A}{M_B} \right) + 0.3 \left(\frac{M_A}{M_B} \right)^2 \leq 2.3, \quad (10.71)$$

$\frac{M_A}{M_B}$ on pienemmän päätymomentin suhde suurempaan. Kertoimen C_b yläraja on siten 2.3. Kaava antaa varmalla puolella olevan arvion kiepahdusmomentille.

Esimerkki 10.2 *Lasketaan vapaasti tuetun palkin kiepahdusmomentti, kun poikkeikkaus on kapea suorakaide.*



Kuva 10.7 Vapaasti tuettu I -palkki, erisuuret päätymomentit

Kapean suorakaidepoikkileikkauksen tapauksessa $I_\omega \approx 0$, ja kiepahduksen differentiaaliyhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$GI_v \varphi'' + \frac{(M_x^0)^2}{EI_y} \varphi = 0, \quad (10.72)$$

eli

$$\varphi'' + k^2 \varphi = 0, \quad (10.73)$$

missä on merkitty

$$k^2 = \frac{(M_x^0)^2}{EI_y GI_v}. \quad (10.74)$$

Differentiaaliyhtälön (10.73) ratkaisu on

$$\varphi(z) = A \sin kz + B \cos kz. \quad (10.75)$$

Reunaehdoista

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0 \quad (10.76)$$

seuraa $B = 0$ ja

$$A \sin kL = 0. \quad (10.77)$$

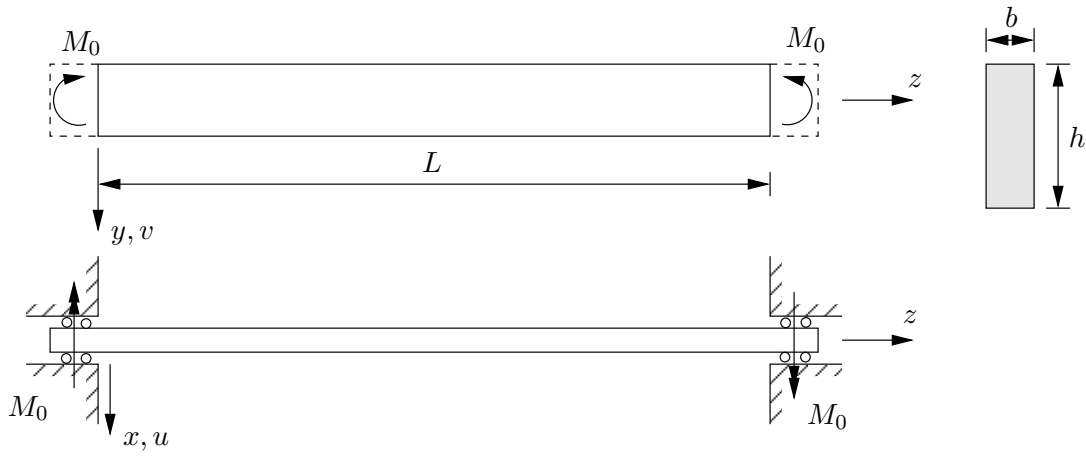
Ehto ei-triviaalille ratkaisulle on, että

$$\sin kL = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n\pi. \quad (10.78)$$

Kun $n = 1$, saadaan kriittinen momentti

$$M_{x,kr}^0 = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GI_v}. \quad (10.79)$$

Esimerkki 10.3 Määritetään kuvan 10.8 kapean suorakaidelankun kiepahduskuorma.



Kuva 10.8 Tasossa (x, z) jäykästi tuettu palkki

Kapean suorakaidepalkin tapauksessa $I_\omega \approx 0$, $\beta_x = \beta_y = 0$ ja $x_a = y_a = 0$. Differentiaaliyhtälöiden ryhmä yksinkertaistuu nyt muotoon

$$EI_y u^{(4)} + (M_x^0) \varphi'' = 0, \quad (10.80)$$

$$GI_v \varphi'' - M_x^0 u'' = 0, \quad (10.81)$$

ja niistä saadaan eliminoimalla yksi yhtälö

$$\varphi^{(4)} + k^2 \varphi'' = 0, \quad (10.82)$$

missä on merkitty

$$k^2 = \frac{(M_x^0)^2}{EI_y GI_v}. \quad (10.83)$$

Differentiaaliyhtälön (10.82) ratkaisu on

$$\varphi(z) = A \sin kz + B \cos kz + Cz + D. \quad (10.84)$$

Reunaehdoista

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi(L) = \varphi'(L) = 0 \quad (10.85)$$

seuraa yhtälöryhmä

$$B + D = 0, \quad (10.86a)$$

$$Ak + C = 0, \quad (10.86b)$$

$$A \sin kL + B \cos kL + CL + D = 0, \quad (10.86c)$$

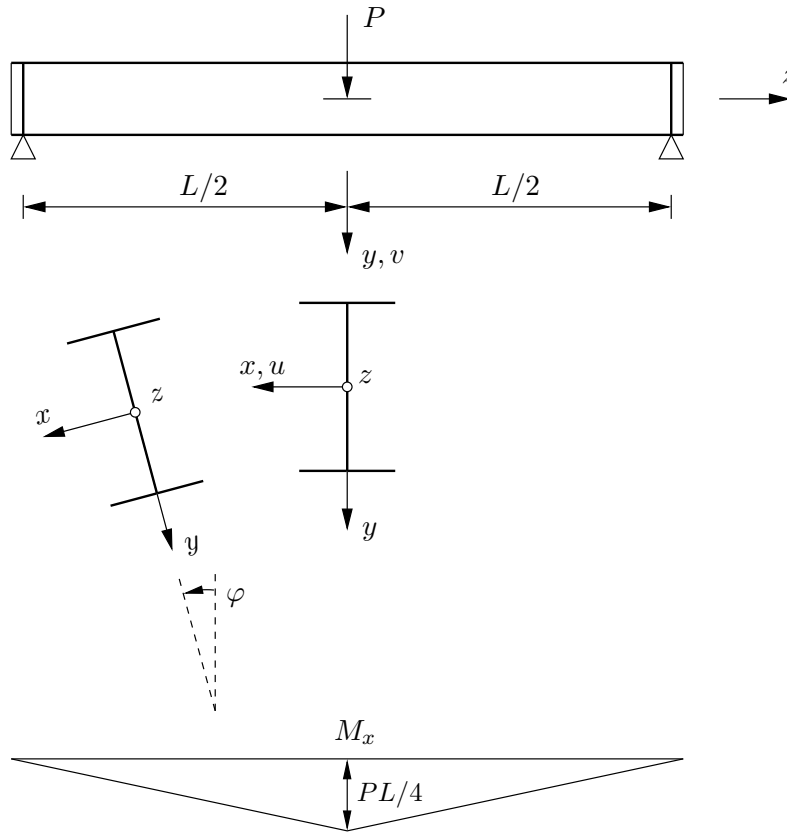
$$Ak \cos kL - Bk \sin kL + C = 0. \quad (10.86d)$$

Eliminoimalla kahden ensimmäisen yhtälön avulla C ja D päädytään yhtälöryhmään

$$\begin{bmatrix} \sin kL - kL & \cos kL - 1 \\ \cos kL - 1 & -\sin kL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.87)$$

Determinantin nollaehdosta seuraa transkendentiaalinen yhtälö

$$\tan \frac{kL}{2} = \frac{kL}{2}, \quad (10.88)$$



Kuva 10.9 Vapaasti tuettu I -palkki, pistekuorma jänteen keskellä

jonka pienin juuri on

$$\frac{kL}{2} = \pi, \quad (10.89)$$

(seuraava juuri on $\frac{kL}{2} \approx 4.493$), ja kriittinen momentti on

$$M_{kr} = \frac{2\pi}{L} \sqrt{EI_y GI_v}. \quad (10.90)$$

Esimerkki 10.4 Vapaasti tuetun I -palkin jänteen keskellä on pistekuorma P . Määritetään kriittinen kuorma P_{kr} .

Pistekuorman P aiheuttama taivutusmomentti kuvan 10.9 palkissa on

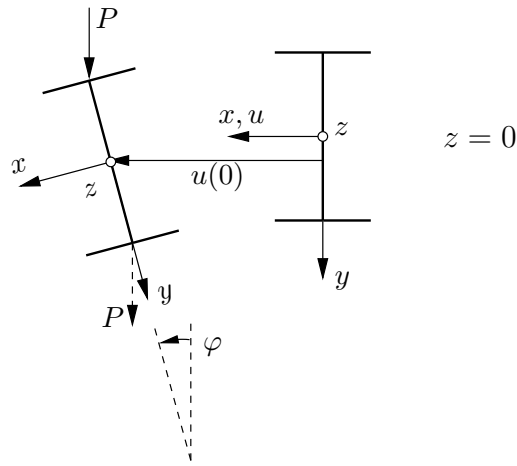
$$M_x^0 = \frac{P}{2} \left(\frac{L}{2} - z \right), \quad z \in \left(0, \frac{L}{2} \right). \quad (10.91)$$

Kiepahduksen differentiaaliyhtälöksi tulee tässä tapauksessa edellä johdetun kaavan (10.52) mukaisesti

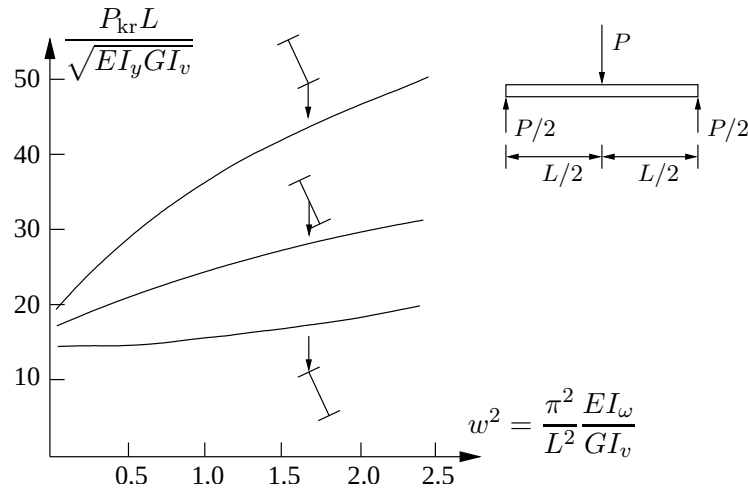
$$EI_\omega \varphi^{(4)} - GI_v \varphi'' - \frac{(M_x^0)^2}{EI_y} \varphi = 0, \quad (10.92)$$

eli

$$EI_\omega \varphi^{(4)} - GI_v \varphi'' - \frac{\left[\frac{P}{2} \left(\frac{L}{2} - z \right) \right]^2}{EI_y} \varphi = 0. \quad (10.93)$$



Kuva 10.10 Vapaasti tuetun I -palkin pistekuorman sijainti jänteen keskellä



Kuva 10.11 Vapaasti tuetun I -palkin ratkaisut pistekuormasta jänteen keskellä.

Yhtälö on ei-vakiokertoiminen, mutta se voidaan ratkaista esim. sarjakehitelmän avulla numeerisesti.

Pistekuorman P asema, kuva 10.10, vaikuttaa ratkaisuun. Jos kuorma P vaikuttaa ylälaipalla, niin vääntömomentti on

$$M_z = -\frac{P}{2}[u(0) + \frac{h}{2}\varphi(0) - u(z)], \quad (10.94)$$

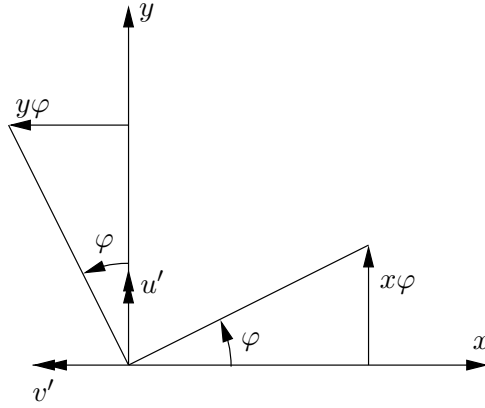
tai jos P on alalaipalla, niin

$$M_z = -\frac{P}{2}[u(0) - \frac{h}{2}\varphi(0) - u(z)]. \quad (10.95)$$

Kuvassa 10.11 on piirretty ratkaisut eri tapauksissa.

10.2 Energiamenetelmä

Kiepahduksen differentiaaliyhtälöille löydetään analyyttinen ratkaisu vain muutamassa perustapauksessa. Energiamenetelmällä sensijaan voidaan johtaa likiratkaisuja erilaisille reu-



Kuva 10.12 Poikkileikkauksen siirtymät.

naehto- ja kuormitustapauksille.

Poikkileikkauksen mielivaltaisen pisteen Q siirtymille voidaan johtaa kuvan 10.12 avulla kaavat

$$\begin{aligned} u_Q(x, y, z) &= u(z) - (y - y_a)\varphi(z), \\ v_Q(x, y, z) &= v(z) + (x - x_a)\varphi(z), \\ w_Q(x, y, z) &= w(z) - x[u'(z) + v'(z)\varphi(z)] - y[v'(z) - u'(z)\varphi(z)] - \omega(x, y)\varphi'(z), \end{aligned} \quad (10.96)$$

missä $w(z)$, $u(z)$ ja $v(z)$ ovat vääntökeskiön siirtymät, $\varphi(z)$ on kiertymä vääntökeskiön ympäri eli vääntökulma ja pisteen Q koordinaatit ovat (x, y) . Tarkasteltavan, pisteen Q kautta kulkevan säikeen Greenin-Lagrangen venymä on likimäärin

$$\varepsilon_{zQ} \approx w'_Q + \frac{1}{2}[(u'_Q)^2 + (v'_Q)^2]. \quad (10.97)$$

Sijoittamalla siirtymien lausekkeet venymän kaavaan tulee

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zQ} &= w' - xu'' - yv'' - \omega\varphi'' \\ &+ \frac{1}{2}[(u')^2 + (v')^2 + (x_a^2 + y_a^2)(\varphi')^2] - x_av'\varphi' + y_au'\varphi' \\ &+ x[-x_a(\varphi')^2 - \varphi v''] + y[-y_a(\varphi')^2 + \varphi u''] \\ &+ \frac{1}{2}[x^2 + y^2](\varphi')^2. \end{aligned} \quad (10.98)$$

Vapaan väännön leikkausmuodonmuutos ohutseinämäisen poikkileikkauksen pisteessä Q on

$$\gamma_{vQ} \equiv \gamma_v = 2n\varphi', \quad (10.99)$$

missä n on etäisyys pisteeseen Q seinämän keskiviivalta normaalin suuntaan. Vapaan väännön liukumaa vastaava leikkausjännitys on

$$\tau_v = G\gamma_v. \quad (10.100)$$

10.2.1 Potentiaalienergia

Kokonaispotentiaalienergia on muodonmuutosenergian ja ulkoisten voimien potentiaalin summa. Sauvan muodonmuutosenergia on

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\varepsilon_z \sigma_z + \gamma_v \tau_v) dA dz, \quad (10.101)$$

missä on jätetty leikkausmuodonmuutoksen τ_{sz} osuus huomioon ottamatta. Ulkoisten voimien potentiaali on

$$V = - \int_0^L p_y v_p dz - \sum P_y v_P, \quad (10.102)$$

kun kuormien on otaksuttu vaikuttavan vain (y, z) -tasossa, ja siirtymät kuormien kohdalla ovat v_p ja v_P . Kokonaispotentiaalienergia (tai lyhyemmin potentiaalienergia) on

$$\Pi = U + V. \quad (10.103)$$

Varioidaan siirtymiä

$$u = u^0 + \delta u, \quad (10.104)$$

$$v = v^0 + \delta v, \quad (10.105)$$

$$w = w^0 + \delta w, \quad (10.106)$$

$$\varphi = \varphi^0 + \delta \varphi, \quad (10.107)$$

ja kehitetään potentiaalienergian lauseke Taylorin sarjaksi

$$\Pi = \Pi^0 + \delta \Pi + \frac{1}{2} \delta^2 \Pi + \frac{1}{3!} \delta^3 \Pi + \dots. \quad (10.108)$$

Tasapainoasemassa potentiaalienergian variaatio on nolla, eli

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Pi}{\partial v} \delta v + \frac{\partial \Pi}{\partial w} \delta w + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \delta \varphi = 0. \quad (10.109)$$

Kriittinen kuorma voidaan määrittää Trefftzin ehdosta

$$\bar{\delta} \left(\frac{1}{2} \delta^2 \Pi \right) = 0. \quad (10.110)$$

Tasotapauksessa (x, y) -tasossa, kun sauvan akseli on x -akseli,

$$\frac{1}{2} \delta^2 U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\delta \varepsilon \delta \sigma + \delta^2 \varepsilon \sigma) dA dx, \quad (10.111)$$

missä

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2} (v')^2 - y v'', \quad (10.112)$$

$$\delta \varepsilon = \delta u' - y \delta v'', \quad (10.113)$$

$$\delta^2 \varepsilon = (\delta v')^2, \quad (10.114)$$

$$\delta \sigma = E \delta \varepsilon, \quad (10.115)$$

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (10.116)$$

Nurjahdustehtävässä $\frac{1}{2}\delta^2 V = 0$. Toisen variaation kaavaksi tulee

$$\frac{1}{2}\delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_x(\delta v'')^2] dx - \frac{1}{2} \int_0^L P(\delta v')^2 dx, \quad (10.117)$$

missä $P = -\sigma A$ on puristava voima ja $EA(\delta u')^2$ on muiden termien rinnalla pienenä suureena jätetty pois.

Vastaavasti kiepahdustehtävässä

$$\frac{1}{2}\delta^2 U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\delta \varepsilon_z \delta \sigma_z + \delta \gamma_v \delta \tau_v + \delta^2 \varepsilon_z \sigma_z + \delta^2 \gamma_v \tau_v) dA dz, \quad (10.118)$$

missä

$$\delta \varepsilon_z = \delta w' - x \delta u'' - y \delta v'' - \omega \delta \varphi', \quad (10.119)$$

$$\delta \gamma_v = 2n \delta \varphi', \quad (10.120)$$

$$\delta \sigma_z = E \delta \varepsilon_z, \quad (10.121)$$

$$\delta \tau_v = G \delta \gamma_v, \quad (10.122)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 \varepsilon_z = & (\delta u')^2 + (\delta v')^2 + (x_a^2 + y_a^2)(\delta \varphi')^2 - 2x_a \delta v' \delta \varphi' + 2y_a \delta u' \delta \varphi' \\ & - x [2x_a (\delta \varphi')^2 + 2\delta \varphi \delta v''] - y [2y_a (\delta \varphi')^2 - 2\delta \varphi \delta u''] \\ & + (x^2 + y^2)(\delta \varphi')^2, \end{aligned} \quad (10.123)$$

$$\delta^2 \gamma_v = 0. \quad (10.124)$$

Perustilan jännitykset ovat

$$\sigma_z^0 = \frac{M_x^0}{I_x} y, \quad (10.125)$$

$$\tau_v^0 = 0. \quad (10.126)$$

Ulkoisten voimien potentiaalin toinen variaatio on

$$\frac{1}{2}\delta^2 V = - \int_0^L p_y \delta^2 v_p dz - \sum P_y \delta^2 v_P. \quad (10.127)$$

missä

$$\delta^2 v_p = -\frac{1}{2}(y_p - y_a)(\delta \varphi)^2, \quad (10.128)$$

$$\delta^2 v_P = -\frac{1}{2}(y_P - y_a)(\delta \varphi)^2 \quad (10.129)$$

ja kuormien p_y ja P_y vaikutuspisteet ovat $(0, y_p)$ ja $(0, y_P)$.

Otaksutaan, että $\delta w'$ on pieni muiden variaatioiden rinnalla, jolloin termi $\int_0^L EA(\delta w')^2 dz$ voidaan jättää huomioon ottamatta. Merkitään seuraavassa yksinkertaisuuden vuoksi, että

$u \equiv \delta u$, $v \equiv \delta v$ ja $\varphi \equiv \delta \varphi$. Toisen variaation kaavaksi tulee

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\varphi'')^2 + GI_v (\varphi')^2] dz \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L M_x^0 [2\varphi u'' + \beta_x (\varphi')^2] dz \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L p_y (y_p - y_a) \varphi^2 dz + \frac{1}{2} \sum P_y (y_P - y_a) \varphi^2, \end{aligned} \quad (10.130)$$

missä

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \left(\int_A y^3 dA + \int_A x^2 y dA \right) - 2y_a. \quad (10.131)$$

Esimerkki 10.5 Määritetään tasaisen momentin $M_x^0 \equiv M$ kuormittaman vapaasti tuetun palkin kiepahduskuorma.

Haarukkatuetun palkin tapauksessa voidaan ratkaista ensin

$$u'' = -\frac{M}{EI_y} \varphi, \quad (10.132)$$

ja energialausekkeeksi saadaan tässä tapauksessa

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI_\omega (\varphi'')^2 + GI_v (\varphi')^2 - \frac{M^2}{EI_y} \varphi^2 \right] dz. \quad (10.133)$$

Otaksumalla vääntökulmalle lauseke

$$\varphi = C \zeta (1 - \zeta), \quad \zeta = \frac{z}{L}, \quad (10.134)$$

tulee

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \left[EI_\omega \frac{4}{L^3} C^2 + GI_v \frac{1}{3L} C^2 - \frac{M^2}{EI_y} \frac{L}{30} C^2 \right]. \quad (10.135)$$

Ehdosta

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \delta^2 \Pi \right)}{\partial C} = 0 \quad (10.136)$$

seuraa kriittinen momentti (kiepahdusmomentti)

$$M_{kr} = \frac{1}{L} \sqrt{10EI_y \left(\frac{12EI_\omega}{L^2} + GI_v \right)}. \quad (10.137)$$

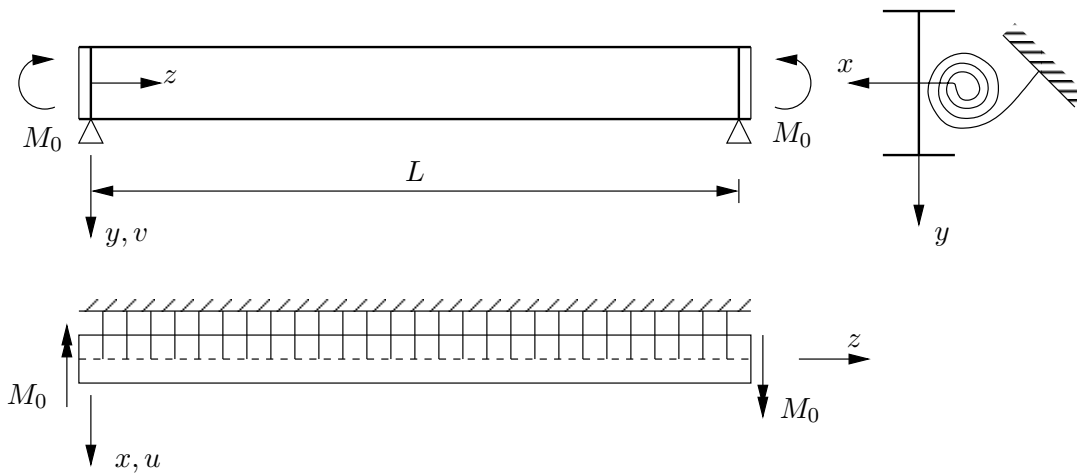
Vapaan väännön tapauksessa kriittinen momentti on

$$M_{kr} = \frac{1}{L} \sqrt{10EI_y GI_v}, \quad (10.138)$$

jonka virhe on +0.6% tarkkaan arvoon verrattuna. Estetyn väännön tapauksessa

$$M_{kr} = \frac{1}{L^2} \sqrt{120EI_y EI_\omega}, \quad (10.139)$$

jossa on virhettä +11%.



Kuva 10.13 Kierrejousella tuettu I-palkki.

Esimerkki 10.6 Lasketaan haarukkatuetun I-palkin kiepahdusmomentti $M_{x,kr}^0$, kun palkkia tukee kimmoinen jatkuva kierrejoinnutuki.

Merkitään, että kierrejousen jäykkyys on k pituusyksikköä kohti. Kierrejousen muodonmuutosenergialla täydennetty potentiaalienergian toisen variaation lauseke haarukkatuennan tapauksessa on

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L [EI_y(u'')^2 + EI_\omega(\varphi'')^2 + GI_v(\varphi')^2] dz \\ + \frac{1}{2}\int_0^L [2M_x^0 u''\varphi + k\varphi^2] dz. \end{aligned} \quad (10.140)$$

Sijoittamalla toisen variaation kaavaan reunaehdot toteuttavat lausekkeet

$$u(z) = B \sin \frac{\pi}{L} z, \quad (10.141)$$

$$\varphi(z) = C \sin \frac{\pi}{L} z \quad (10.142)$$

tulee

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi = \frac{1}{2} [EI_\omega \frac{\pi^4}{L^4} \frac{L}{2} C^2 + GI_v \frac{\pi^2}{L^2} \frac{L}{2} C^2 + EI_y \frac{\pi^4}{L^4} \frac{L}{2} B^2 \\ + 2M_x^0 \left(-\frac{\pi^2}{L^2} \right) \frac{L}{2} BC + k \frac{L}{2} C^2]. \end{aligned} \quad (10.143)$$

Ehdoista

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi \right)}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial \left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi \right)}{\partial C} = 0 \quad (10.144)$$

seuraa yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} EI_\omega \frac{\pi^4}{2L^3} + GI_v \frac{\pi^2}{2L} + k \frac{L}{2} & -M_x^0 \frac{\pi^2}{2L} \\ -M_x^0 \frac{\pi^2}{2L} & EI_y \frac{\pi^4}{2L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.145)$$

Kerroinmatriisin determinantin nollaehdosta saadaan kriittiselle momentille kaava

$$M_{x,kr}^0 = \sqrt{EI_y \left(\frac{\pi^4}{L^4} EI_\omega + \frac{\pi^2}{L^2} GI_v + k \right)}. \quad (10.146)$$

Esimerkki 10.7 *Palkin poikkileikkaus on kaksoissymmetrinen. Määritetään vapaasti tuetun palkin jänteen keskellä painopisteen korkeudella vaikuttavan pistevaiman P kriittinen arvo.*

Koska nyt $p_y = 0$, $y_P - y_a = 0$ ja $\beta_x = 0$, energialauseke pelkistyy muotoon

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (u'')^2 + EI_\omega (\varphi'')^2 + GI_v (\varphi')^2 + 2M_x^0 \varphi u''] dz \quad (10.147)$$

Vapaasti tuetun palkin perustilan momentti on

$$M_x^0 = \frac{Pz}{2}, \quad z \in \left(0, \frac{L}{2}\right). \quad (10.148)$$

Otaksutaan lisäsiirtymälle ja kiertymälle esitykset

$$u(z) = A \left[\frac{z}{L} - \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right], \quad (10.149)$$

$$\varphi(z) = C \left[\frac{z}{L} - \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right]. \quad (10.150)$$

Sijoittamalla otaksutut siirtymäfunctiot energialausekkeeseen saadaan

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \left[EI_y \frac{4}{L^3} A^2 + EI_\omega \frac{4}{L^3} C^2 + GI_v \frac{1}{3L} C^2 - \frac{5P}{48} AC \right], \quad (10.151)$$

missä on laskettu esimerkiksi termi

$$\int_0^L 2M_x^0 \varphi u'' = 2 \int_0^{L/2} \left\{ 2P \frac{z}{2} \cdot C \left[\frac{z}{L} - \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right] A \left(-\frac{2}{L^2} \right) \right\} dz = -\frac{5P}{48} AC. \quad (10.152)$$

Potentiaalienergian toinen variaatio voidaan kirjoittaa neliömuotona

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \frac{1}{3L} \begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^2} & -\frac{5PL}{32} \\ -\frac{5PL}{32} & GI_v + \frac{12EI_\omega}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}. \quad (10.153)$$

Ehdosta $\bar{\delta} \left(\frac{1}{2} \delta^2 \Pi \right) = 0$ seuraa lineaarinen homogeeninen yhtälöryhmä, jonka kerroinmatriisi on sama kuin yllä olevassa neliömuodossa. Asettamalla kerroinmatriisin determinantti nolaksi tulee toisen asteen yhtälö, jonka pienempää juurta vastaa tulos

$$\frac{P_{kr}L}{4} \approx 1.6 \sqrt{\left(\frac{12EI_y}{L^2} \right) \left(GI_v + \frac{12EI_\omega}{L^2} \right)}. \quad (10.154)$$

Tarkka tulos on

$$\frac{P_{kr}L}{4} \approx 1.35 \sqrt{\left(\frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \right) \left(GI_v + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} \right)}. \quad (10.155)$$

Haarukkatuetun palkin tapauksessa voidaan ratkaista ensin

$$u'' = -\frac{M_x^0}{EI_y}\varphi, \quad (10.156)$$

ja sijoittaa se energialausekkeeseen, jolloin saadaan

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L \left[EI_\omega(\varphi'')^2 + GI_v(\varphi')^2 - \frac{(M_x^0)^2}{EI_y}\varphi^2 \right] dz. \quad (10.157)$$

Otaksumalla vääntökulmalle edelleen lauseke

$$\varphi = C\frac{z}{L}\left(1 - \frac{z}{L}\right) \quad (10.158)$$

tulee

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi = \frac{1}{2}\left[EI_\omega\frac{4}{L^3}C^2 + GI_v\frac{1}{3L}C^2 - \frac{P^2L^3}{EI_y}\frac{29}{53760}C^2 \right]. \quad (10.159)$$

Ehdosta

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi\right)}{\partial C} = 0 \quad (10.160)$$

seuraa kriittinen momentti

$$\frac{P_{kr}L}{4} \approx 1.4\sqrt{\left(\frac{\pi^2 EI_y}{L^2}\right)\left(GI_v + \frac{12EI_\omega}{L^2}\right)}, \quad (10.161)$$

joka on tarkempi, kuin ensin laskettu tulos.

Esimerkki 10.8 *Lasketaan edellisen tehtävän palkin kriittinen kuorma, kun pistevoima P vaikuttaa kohdassa $y = y_p$.*

Otaksetaan, että sauvan alkunormaalijännitys on

$$\sigma_z^0 = \frac{M_x^0}{I_x}y, \quad M_x^0 = \frac{1}{2}Pz, \quad 0 < z < \frac{L}{2}. \quad (10.162)$$

Kun siirtymäsuureille käytetään edelleen interpolaatioita

$$u(z) = A\left[\frac{z}{L} - \left(\frac{z}{L}\right)^2\right], \quad (10.163)$$

$$\varphi(z) = C\left[\frac{z}{L} - \left(\frac{z}{L}\right)^2\right], \quad (10.164)$$

saadaan toisen variaation kaavassa tarvittava lisätermi muotoon

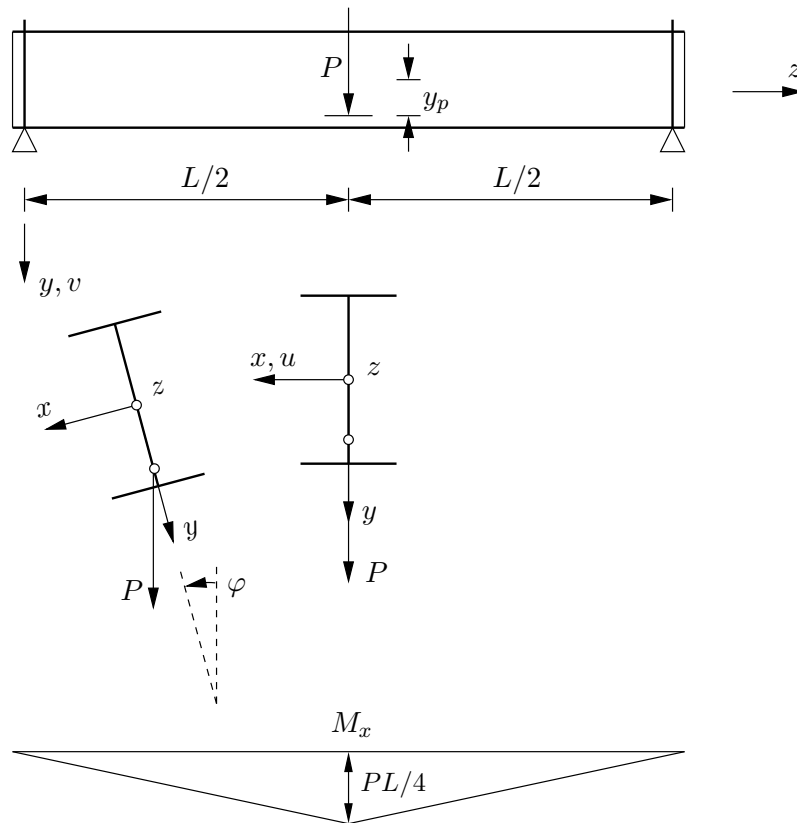
$$\frac{1}{2}Py_P\left[\varphi\left(\frac{L}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}Py_P\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 C^2, \quad (10.165)$$

ja toisen neliomuodon lausekkeeksi tulee täydennyksen jälkeen

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi = \frac{1}{2}\frac{1}{3L}\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^2} & -\frac{5PL}{32} \\ -\frac{5PL}{32} & GI_v + \frac{12EI_\omega}{L^2} + \frac{3}{16}PLy_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}. \quad (10.166)$$

Kriittisen kuorman arvoksi saadaan

$$\frac{PL}{4} \approx 1.6\left\{\sqrt{\left(\frac{12EI_y}{L^2}\right)\left[GI_v + \frac{12EI_\omega}{L^2} + \left(\frac{7.2EI_y y_P}{L^2}\right)^2\right]} + \frac{7.2EI_y y_P}{L^2}\right\}. \quad (10.167)$$



Kuva 10.14 Vapaasti tuettu I-palkki, pistekuorma P kohdassa $y = y_p$, $z = \frac{L}{2}$.

Esimerkki 10.9 Määritetään vapaasti tuetun palkin jänteen keskellä vaikuttavan pistevoiman kriittinen arvo otaksamalla sinifunktion puoliallon muotoinen siirtymä u ja kiertymä φ .

Otaksutaan lisäsiirtymäsuureille interpolaatiot

$$u(z) = A \sin \frac{\pi z}{L}, \quad \varphi(z) = C \sin \frac{\pi z}{L}. \quad (10.168)$$

Sijoittamalla otaksutut lisäsiirtymät potentiaalienergian toisen variaation kaavaan tulee

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{2L} \right) \left[EI_y \frac{\pi^2}{L^2} A^2 + EI_\omega \frac{\pi^2}{L^2} C^2 + GI_v C^2 \right] - 0.2759 \pi P A C, \quad (10.169)$$

missä viimeinen termi on

$$\frac{1}{2} \int_0^L 2M_x^0 \varphi u'' = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{L/2} 2P \frac{z}{2} \cdot AC \left(-\frac{\pi^2}{L^2} \right) \sin^2 \frac{\pi z}{L} dz = -0.2759 \pi P A C. \quad (10.170)$$

Muunnetaan potentiaalienergian toinen variaatio neliömuodoksi

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{2L} \begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} & -\frac{8 \cdot 0.2759 PL}{\pi} \\ -\frac{8 \cdot 0.2759 PL}{\pi} & \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} + GI_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}. \quad (10.171)$$

Asettamalla kerroinmatriisin determinantti nolaksi saadaan ratkaisu

$$\frac{P_{kr}L}{4} \approx 1.423 \sqrt{\left(\frac{\pi^2 EI_y}{L^2}\right) \left(GI_v + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2}\right)}. \quad (10.172)$$

Jos kuorma P vaikuttaa kohdassa $y = y_P$, niin potentiaalienergian toisen variaation kaavaan tulee lisäksi termi

$$\frac{1}{2} P y_P \left[\varphi \left(\frac{L}{2} \right) \right]^2 = \frac{1}{2} P y_P C^2. \quad (10.173)$$

Täydennetty toisen variaation neliömuoto on

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{2L} \begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} & -\frac{8 \cdot 0.2759 PL}{4} \\ -\frac{8 \cdot 0.2759 PL}{\pi} & GI_v + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} + \frac{2PLy_P}{\pi^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}. \quad (10.174)$$

Kriittisen kuorman arvoksi saadaan tässä tapauksessa, kun kuorma P ei ole palkin akselin korkeudella,

$$\frac{P_{kr}L}{4M} \approx 1.423 \left\{ \sqrt{\left[1 + \left(0.577 \frac{P_y y_P}{M} \right)^2 \right]} + 0.577 \frac{P_y y_P}{M} \right\}, \quad (10.175)$$

missä on merkitty

$$M = \sqrt{\left(\frac{\pi^2 EI_y}{L^2}\right) \left(GI_v + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2}\right)}, \quad P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}. \quad (10.176)$$

Tarkka tulos on

$$\frac{P_{kr}L}{4M} \approx 1.35 \left\{ \sqrt{\left[1 + \left(0.54 \frac{P_y y_P}{M} \right)^2 \right]} + 0.54 \frac{P_y y_P}{M} \right\}. \quad (10.177)$$

10.2.2 Yhdistetty vääntönurjahdus ja kiepahdus

Yhdistämällä kiepahduksen ja vääntönurjahduksen energialausekkeet sekä täydentämällä niitä saadaan yleistetty potentiaalienergian toisen variaation kaava

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta^2\Pi = & \frac{1}{2}\int_0^L [EI_y(u'')^2 + EI_x(v'')^2 + EI_\omega(\varphi'')^2 + GI_v(\varphi')^2] dz \\
& + \frac{1}{2}\int_0^L N^0 [(u')^2 + (v')^2 + r^2(\varphi')^2 - 2x_a v' \varphi' + 2y_a u' \varphi'] dz \\
& + \frac{1}{2}\int_0^L M_x^0 [2\varphi u'' + \beta_x(\varphi')^2] dz \\
& + \frac{1}{2}\int_0^L M_y^0 [2\varphi v'' - \beta_y(\varphi')^2] dz \\
& + \frac{1}{2}\int_0^L [p_y(y_p - y_a)\varphi^2 + p_x(x_p - x_a)\varphi^2] dz \\
& + \frac{1}{2}\sum [P_y(y_P - y_a)\varphi^2 + P_x(x_P - x_a)\varphi^2] = 0,
\end{aligned} \tag{10.178}$$

missä u , v ja φ ovat lisäsiirtymät ja vääntökulma perustilan suhteen, (x_a, y_a) ovat vääntökeskiön A koordinaatit, $r^2 = \frac{I_p}{A}$, $I_p = I_0 + A(x_a^2 + y_a^2)$, $I_0 = I_x + I_y$, $I_x = \int_A y^2 dA$, $I_y = \int_A x^2 dA$, $I_\omega = \int_A \omega^2 dA$, I_v on vapaan väännön vääntöjäyhyys ja derivaatta koordinaatin z suhteen on $(\bullet)' \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial z}$.

Treftzin mukaan kriittinen kuorma määritetään ehdosta $\bar{\delta} \left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi \right) = 0$. Merkitään seuraavassa yksinkertaisesti $\bar{\delta} \rightarrow \delta$. Treftzin ehdosta seuraa

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \{ (EI_y u'' + M_x^0 \varphi) \delta u'' + (EI_x v'' + M_y^0 \varphi) \delta v'' + EI_\omega \varphi'' \delta \varphi'' \\
& + [N^0(u' + y_a \varphi')] \delta u' \\
& + [N^0(v' - x_a \varphi')] \delta v' \\
& + [GI_v \varphi' + N^0(r^2 \varphi' - x_a v' + y_a u') + M_x^0 \beta_x \varphi' - M_y^0 \beta_y \varphi'] \delta \varphi' \\
& + [M_x u'' + M_y v'' + p_y(y_p - y_a)\varphi + p_x(x_p - x_a)\varphi] \delta \varphi \} dz \\
& + \sum [P_y(y_P - y_a)\varphi + P_x(x_P - x_a)\varphi] \delta \varphi = 0.
\end{aligned} \tag{10.179}$$

Osittaisintegroimalla ² saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \{ (EI_y u'')'' - [N^0(u' + y_a \varphi')] + (M_x^0 \varphi)'' \} \delta u \, dz + \\
& \left| \int_0^L \{ EI_y u'' + M_x^0 \varphi \} \delta u' + \right. \\
& \left| \int_0^L \{ -(EI_y u'')' + N^0(u' + y_a \varphi') - (M_x^0 \varphi)' \} \delta u + \right. \\
& \int_0^L \{ (EI_x v'')'' - [N^0(v' - x_a \varphi')] + (M_y^0 \varphi)'' \} \delta v \, dz \\
& \left| \int_0^L \{ EI_x v'' + M_y^0 \varphi \} \delta v' + \right. \\
& \left| \int_0^L \{ -(EI_x v'')' + N^0(v' - x_a \varphi') - (M_y^0 \varphi)' \} \delta v + \right. \\
& \int_0^L \{ (EI_\omega \varphi'')'' - (GI_v \varphi')' - [(r^2 N^0 + \beta_x M_x^0 - \beta_y M_y^0) \varphi']' \\
& \quad - y_a (N^0 u')' + x_a (N^0 v')' + M_x^0 u'' + M_y^0 v'' \\
& \quad + p_y (y_p - y_a) \varphi + p_x (x_p - x_a) \varphi \} \delta \varphi \, dz + \\
& \left| \int_0^L \{ EI_\omega \varphi'' \} \delta \varphi' + \right. \\
& \left| \int_0^L \{ -(EI_\omega \varphi'')' + GI_v \varphi' + (r^2 N^0 + \beta_x M_x^0 - \beta_y M_y^0) \varphi' \right. \\
& \quad \left. + y_a (N^0 u') - x_a (N^0 v') \} \delta \varphi + \right. \\
& \sum \{ P_y (y_p - y_a) \varphi + P_x (x_p - x_a) \varphi \} \delta \varphi = 0.
\end{aligned} \tag{10.180}$$

Koska δu , δv ja $\delta \varphi$ ovat mielivaltaisia kinemaattiset reunaehdot toteuttavia variaatioita, täytyy Trefftzin ehdon toteutumiseksi sekä integraali- että sijoitustermien aaltosulkulausekkeiden hävitä.

Integraalitermeistä saadaan differentiaaliyhtälöt

$$(EI_y u'')'' - [N^0(u' + y_a \varphi')] + (M_x^0 \varphi)'' = 0, \tag{10.181}$$

$$(EI_x v'')'' - [N^0(v' - x_a \varphi')] + (M_y^0 \varphi)'' = 0, \tag{10.182}$$

$$\begin{aligned}
& (EI_\omega \varphi'')'' - (GI_v \varphi')' - [(r^2 N^0 + \beta_x M_x^0 - \beta_y M_y^0) \varphi']' \\
& - y_a (N^0 u')' + x_a (N^0 v')' + M_x^0 u'' + M_y^0 v'' \\
& + p_y (y_p - y_a) \varphi + p_x (x_p - x_a) \varphi = 0,
\end{aligned} \tag{10.183}$$

jotka ovat sauvan tasapainoehdot. Sijoitustermeistä seuraavat sauvan reunaehdot ³ päissä

² $\int u' v \, dz = [uv - \int uv' \, dz]$.

³Symboli $\vee$ luetaan *tai*.

$z = 0$ ja $z = L$

$$EI_y u'' + M_x^0 \varphi = 0, \quad \vee \quad u' = 0, \quad (10.184)$$

$$-(EI_y u'')' + N^0(u' + y_a \varphi') - (M_x^0 \varphi)' = 0, \quad \vee \quad u = 0, \quad (10.185)$$

$$EI_x v'' + M_y^0 \varphi = 0, \quad \vee \quad v' = 0, \quad (10.186)$$

$$-(EI_x v'')' + N^0(v' - x_a \varphi') - (M_y^0 \varphi)' = 0, \quad \vee \quad v = 0, \quad (10.187)$$

$$EI_\omega \varphi'' = 0, \quad \vee \quad \varphi' = 0, \quad (10.188)$$

$$\begin{aligned} & -(EI_\omega \varphi'')' + GI_v \varphi' + (r^2 N^0 + \beta_x M_x^0 - \beta_y M_y^0) \varphi' \\ & \quad + y_a (N^0 u') - x_a (N^0 v') \\ & \quad + [P_y (y_P - y_a) \varphi + P_x (x_P - x_a) \varphi] = 0, \quad \vee \quad \varphi = 0. \end{aligned} \quad (10.189)$$

Vääntömomentin reunaehtoon tulee viimeinen termi mukaan, jos reunalla $z = 0$ tai $z = L$ on kuorma P_x tai P_y , jonka vaikutussuora ei kulje vääntökeskiön kautta.

Luku 11

Laatan lommahdus

Lommahdukseksi nimitetään ilmiötä, jossa tasossa kuormitettu levy taipuu äkillisesti tietyllä puristus- tai leikkausvoiman arvolla (tai yhdistetyssä levyn tason suuntaisessa kuormituksessa).

11.1 Laatan tasapainoyhtälö ja sen ratkaisu

Kirchhoffin laattateorian mukaan ohuen laatan muodonmuutokset ovat

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (11.1)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (11.2)$$

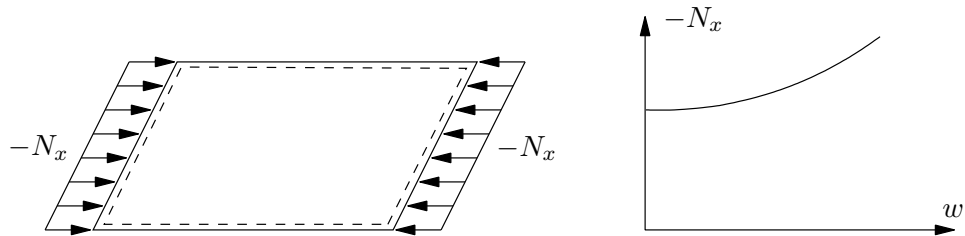
$$\gamma_{xy} = -z 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (11.3)$$

Laatan käyristymät ovat

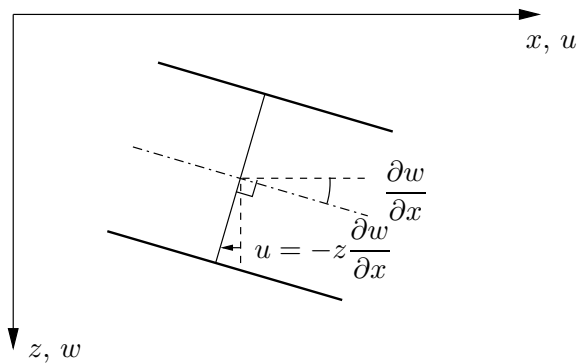
$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (11.4)$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (11.5)$$

$$\kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (11.6)$$



Kuva 11.1 Laatan lommahdus.



Kuva 11.2 Laatan kiertymä.

Laatan otaksutaan olevan tasojännitystilassa, ja yleistetyn Hooken lain mukaan isotrooppisen kimmoisen aineen konstitutiiviset yhtälöt ovat

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad (11.7)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad (11.8)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad (11.9)$$

missä liukumoduuli on

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (11.10)$$

Laatan taivutusmomentit määritellään kaavoilla

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} z \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad (11.11)$$

missä h on laatan paksuus, ja laatan pintatasot ovat $z = \pm \frac{h}{2}$. Sijoittamalla jännitykset muodonmuutosten avulla lausuttuina ja integroimalla laatan paksuuden yli tulee

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad (11.12)$$

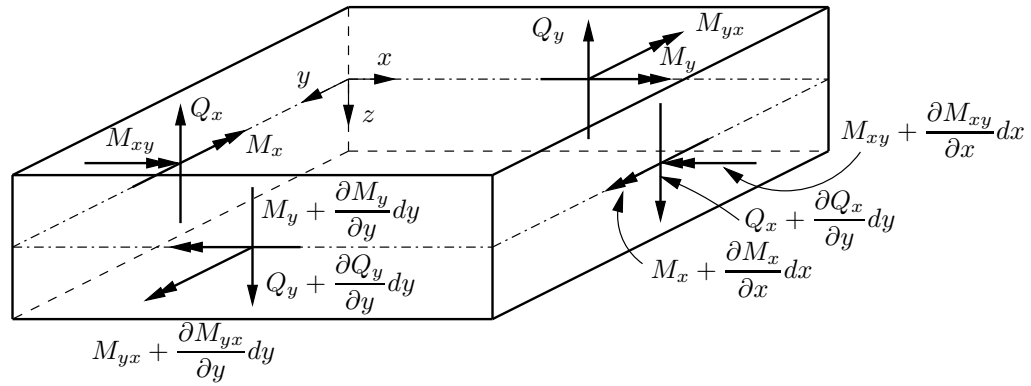
missä

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (11.13)$$

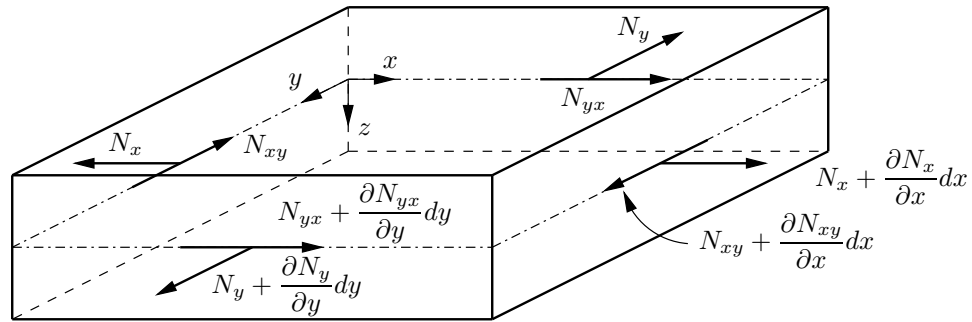
on laatan taivutusjäykkyys.

Laatan alkioon $dx \times dy$ vaikuttavien akselin z suuntaisten voimien tasapainoehto on kuvan 11.3 perusteella

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x, y) = 0. \quad (11.14)$$



Kuva 11.3 Laatan tasapainoehdot.



Kuva 11.4 Kalvovoimien tasapainoehdot.

Momentin tasapainoehdot y - ja x -akselin suhteen ovat

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad (11.15)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \quad (11.16)$$

Eliminoimalla leikkausvoimat saadaan pystysuora tasapainoehto (11.14) muotoon

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p(x, y) = 0. \quad (11.17)$$

Lausumalla momentit taipuman derivaattojen avulla kaavoilla (11.12) tulee

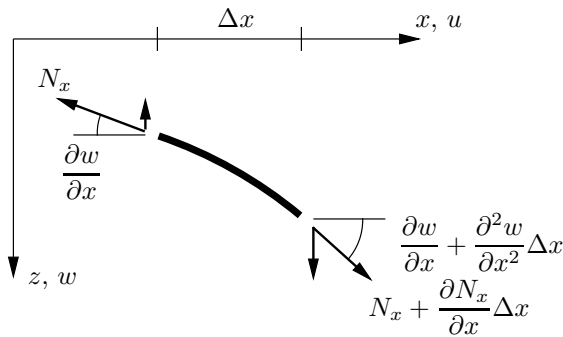
$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p(x, y). \quad (11.18)$$

Kalvovoimien tasapainoyhtälöt ovat kuvan 11.4 perusteella

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - f_x = 0, \quad (11.19)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - f_y = 0, \quad (11.20)$$

missä f_x ja f_y ovat laatan tason suuntaiset jakautuneet kuormat.



Kuva 11.5 Kalvovoiman N_x osuus pystysuoraan tasapainoehtoon.

Laatan taipuessa kalvovoimista N_x , N_y , N_{xy} ja N_{yx} aiheutuvat z -akselin suuntaiseen tasapainoyhtälöön komponentit

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Delta x\right) - N_x \Delta y \frac{\partial w}{\partial x} \approx N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Delta x \Delta y, \quad (11.21)$$

$$\left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Delta y\right) - N_y \Delta x \frac{\partial w}{\partial y} \approx N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Delta x \Delta y, \quad (11.22)$$

$$\begin{aligned} &\left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Delta x\right) - N_{xy} \Delta y \frac{\partial w}{\partial y} \\ &+ \left(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \Delta y\right) - N_{yx} \Delta x \frac{\partial w}{\partial x} \approx 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y, \end{aligned} \quad (11.23)$$

missä on otettu huomioon, että $N_{xy} = N_{yx}$.

Kalvovoimien z -n suuntaisten komponenttien summa on

$$p_z(x, y) \Delta x \Delta y = \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \Delta x \Delta y, \quad (11.24)$$

ja laatan tasapainoehto tulee muotoon

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (11.25)$$

11.1.1 Laatan reunaehdot

Vapaasti tuettu reuna

Vapaasti tuetuilla reunoilla $x = 0$ ja $x = a$

$$w(0, y) = M_x(0, y) = w(a, y) = M_x(a, y) = 0, \quad (11.26)$$

missä

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (11.27)$$

Koska reunat $x = 0$ ja $x = a$ eivät taivu, saadaan momentin M_x reunaehdoista

$$\frac{\partial^2 w(0, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(a, y)}{\partial x^2} = 0. \quad (11.28)$$

Vapaasti tuetuilla reunoilla $y = 0$ ja $y = b$

$$w(x, 0) = M_y(x, 0) = w(x, b) = M_y(x, b) = 0, \quad (11.29)$$

missä

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (11.30)$$

Koska reunat $y = 0$ ja $y = b$ eivät taivu, saadaan momentin M_y reunaehdoista

$$\frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w(x, b)}{\partial y^2} = 0. \quad (11.31)$$

Jäykästi kiinnitetty reuna

Jäykästi kiinnitetyillä reunoilla $x = 0$ ja $x = a$

$$w(0, y) = \frac{\partial w(0, y)}{\partial x} = w(a, y) = \frac{\partial w(a, y)}{\partial x} = 0, \quad (11.32)$$

ja vastaavasti reunoilla $y = 0$ ja $y = b$

$$w(x, 0) = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = w(x, b) = \frac{\partial w(x, b)}{\partial y} = 0. \quad (11.33)$$

Vapaa reuna

Vapaalla reunalla taivutusmomentti ja korvikeleikkausvoima ovat nollia tai tasapainossa annetun reunakuorman kanssa. Reunoilla $x = 0$ ja $x = a$

$$M_x(0, y) = V_x(0, y) = M_x(a, y) = V_x(a, y) = 0, \quad (11.34)$$

missä

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (11.35)$$

Reunoilla $y = 0$ ja $y = b$

$$M_y(x, 0) = V_y(x, 0) = M_y(x, b) = V_y(x, b) = 0, \quad (11.36)$$

missä

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \\ &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \end{aligned} \quad (11.37)$$

Esimerkki 11.1 Vapaasti tuetun laatan y -akselin suuntaisilla reunoilla on tasaisesti jakautunut reunakuorma $N_x < 0$ (puristava kuorma). Määritetään laatan kriittinen kuorma (lommahduskuorma).

Laatan sivumitat ovat a ja b , ja $a \geq b$. Esimerkin tapauksessa $N_y = N_{xy} = 0$, ja laatan differentiaaliyhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (11.38)$$

Kaikilta reunoilta vapaasti tuetun laatan tapauksessa kaksoissinisarja

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (11.39)$$

toteuttaa reunaehdot

$$w(0, y) = w(a, y) = M_x(0, y) = M_x(a, y) = 0, \quad (11.40)$$

$$w(x, 0) = w(x, b) = M_y(x, 0) = M_y(x, b) = 0 \quad (11.41)$$

ja kenttäyhtälön. Sijoittamalla taipuman yrite tasapainoyhtälöön tulee

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left[\pi^4 \left(\frac{m^4}{a^4} + 2 \frac{m^2}{a^2} \frac{n^2}{b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right) + \frac{N_x}{D} \pi^2 \frac{m^2}{a^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0. \quad (11.42)$$

Jotta yhtälö toteutuisi, täytyy hakasulkulausekkeen hävitä, ja ratkaisuksi tulee

$$N_x = -D\pi^2 \frac{a^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (11.43)$$

Merkitään, että $\Phi = \frac{a}{b}$ on sivusuhte. Pienin kriittisen kuorman arvo saavutetaan, kun $n = 1$ (yksi sinin puolialto lommahdusmuodossa y :n suunnassa). Tällöin yllä oleva ratkaisu kriittiselle kuormalle voidaan kirjoittaa muodossa

$$|N_{x,kr}| = D\pi^2 \frac{1}{b^2} \left(\frac{m}{\Phi} + \frac{\Phi}{m} \right)^2. \quad (11.44)$$

Lommahduskuorman minimi saadaan ehdosta

$$\frac{\partial |N_{x,kr}|}{\partial \Phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = m, \quad (11.45)$$

ja lommahduskuorman minimiarvo on

$$|N_{x,kr,\min}| = 4 \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (\Phi = m). \quad (11.46)$$

Kuvassa 11.6 on esitetty lommahduskuorman arvo vapaasti tuetulle x :n suunnassa puristetulle laatalle sivusuhteen funktiona. Absoluuttinen minimiarvo saavutetaan tiettyillä sivusuhteilla. Eri m :n arvoihin liittyvien käyrien leikkauspisteet ratkaistaan ehdosta

$$\frac{m}{\Phi} + \frac{\Phi}{m} = \frac{m+1}{\Phi} + \frac{\Phi}{m+1}, \quad (11.47)$$

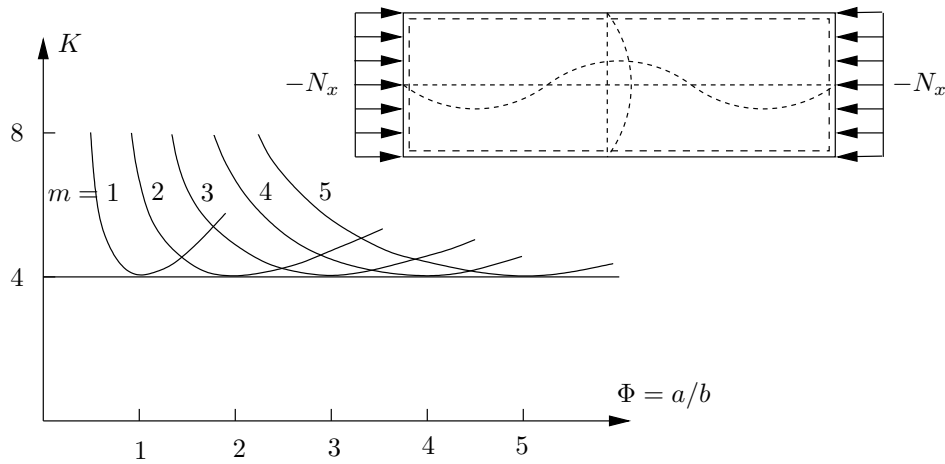
josta seuraa

$$\Phi^2 = m(m+1) \quad (11.48)$$

ja

$$\Phi = \sqrt{m(m+1)}. \quad (11.49)$$

Kun $m = 1$, niin $\Phi = \sqrt{2}$.



Kuva 11.6 Laatan lommahduskuorma.

Esimerkki 11.2 Tutkitaan vapaasti tuettua laattaa, jota kuormittavat tasanjakautuneet reunakuormat N_x ja N_y .

Laatan differentiaaliyhtälö on tässä tapauksessa

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{N_y}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (11.50)$$

ja reunaehtot ovat samat kuin edellisessä esimerkissä. Kaksoissinisarja toteuttaa reunaehtot ja tasapainoyhtälön. Sijoittamalla yrite (11.39) tasapainoehtoon saadaan tällä kerralla yhtälö

$$N_x \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + N_y \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 = -D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2. \quad (11.51)$$

Merkitään, että kuormien suhde on

$$r \equiv \frac{N_y}{N_x}. \quad (11.52)$$

Ratkaisemalla yhtälö (11.51) N_x :n suhteen tulee

$$N_x = - \frac{\left[\left(\frac{m}{\Phi} \right)^2 + n^2 \right]^2}{\left(\frac{m}{\Phi} \right)^2 + rn^2} \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (11.53)$$

missä $\Phi = \frac{a}{b}$ on sivusuhte.

11.1.2 Tasaisesti puristetun laatan tasapainoyhtälön ratkaisuja erilaisille reunaehtoille

Tarkastellaan suorakaidelaattaa, jota kuormittaa tasanjakautunut reunakuorma $N_x < 0$. Jos laatan kaksi vastakkaista y -akselin suuntaista reunaa ovat vapaasti tuetut, niin voidaan käyttää Lévy'n ratkaisutapaa. Otaksutaan taipumalle y -akselin suuntaisten vapaasti tuettujen reunojen reunaehtot toteuttava funktio

$$w(x, y) = f(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (11.54)$$

Sijoittamalla taipuman lauseke laatan tasapainoehtoon

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (11.55)$$

tulee tavallinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^4 f}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + \frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] f = 0. \quad (11.56)$$

Sijoittamalla yrite e^{ry} saadaan karakteristinen yhtälö

$$r^4 - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 r^2 + \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + \frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] = 0, \quad (11.57)$$

jolla on neljä juurta

$$r_{1,2,3,4} = \pm \left[\frac{m\pi}{a} \left(\frac{m\pi}{a} \pm \sqrt{\frac{-N_x}{D}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (11.58)$$

Tapauksessa $-\frac{N_x}{D} > \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2$ ¹ juuret ovat kompleksikonjugaatteja. Merkitään

$$p = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{-N_x}{D}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (11.59)$$

$$q = \left[- \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{-N_x}{D}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (11.60)$$

Juuret ovat $r_1 = p$, $r_2 = -p$, $r_3 = iq$ ja $r_4 = -iq$, missä $i = \sqrt{-1}$. Ratkaisu $w = \sum A_i e^{r_i y}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(y) = C_1 \sinh py + C_2 \cosh py + C_3 \sin qy + C_4 \cos qy. \quad (11.61)$$

Esimerkki 11.3 Määritetään tasaisen reunavoiman $N_x < 0$ kuormittaman laatan lommahduskuorma, kun reunat $y = 0$ ja $y = b$ ovat jäykästi kiinnitetyt.

Reunaehdot ovat nyt

$$w(x, 0) = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = w(x, b) = \frac{\partial w(x, b)}{\partial y} = 0, \quad (11.62)$$

joten

$$f(0) = \frac{df(0)}{dy} = f(b) = \frac{df(b)}{dy} = 0. \quad (11.63)$$

Kahdesta ensimmäisestä ehdosta seuraa

$$C_2 + C_4 = 0, \quad pC_1 + qC_3 = 0, \quad (11.64)$$

joten

$$f(y) = C_1 \left(\sinh py - \frac{p}{q} \sin qy \right) + C_2 (\cosh py - \cos qy). \quad (11.65)$$

¹Yhtäsuuruus toteutuu vapaareunaisen laatan tapauksessa.

Kahden jälkimmäisen reunaehdon perusteella saadaan

$$\begin{bmatrix} \sinh pb - \frac{p}{q} \sin qb & \cosh pb - \cos qb \\ \cosh pb - \cos qb & \sinh pb + \frac{q}{p} \sin qb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11.66)$$

Determinantin nollaehdosta seuraa yhtälö

$$2pq(1 - \cosh pb \cos qb) + (p^2 - q^2) \sinh pb \sin qb = 0, \quad (11.67)$$

josta voidaan määrittää lommahduskuorma

$$N_{x,kr} = -K \frac{\pi^2 D}{b^2}. \quad (11.68)$$

Kerroin $K = |N_{x,kr}| \frac{b^2}{\pi^2 D}$ esitetään sivusuhteen $\Phi = \frac{a}{b}$ funktiona samalla tavalla kuin kuvassa 11.6 vapaasti tuetulle laatalle.

Esimerkki 11.4 Määritetään reunalta $y = 0$ vapaasti tuetun ja reunalta $y = b$ vapaan laatan lommahduskuorma $N_{x,kr}$.

Laatan reunaehdot ovat

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2} = 0, \quad (11.69)$$

$$\frac{\partial^2 w(x, b)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, b)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w(x, b)}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, b)}{\partial x^2 \partial y} = 0. \quad (11.70)$$

Ratkaisu on jälleen muotoa

$$w(x, y) = f(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (11.71)$$

missä

$$f(y) = C_1 \sinh py + C_2 \cosh py + C_3 \sin qy + C_4 \cos qy, \quad (11.72)$$

ja

$$p = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{-N_x}{D}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (11.73)$$

$$q = \left[- \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{-N_x}{D}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (11.74)$$

Kahden ensimmäisen reunaehdon perusteella tulee $C_2 = C_4 = 0$, ja kahden jälkimmäisen reunaehdon perusteella saadaan kertoimien C_1 ja C_3 suhteen lineaarinen homogeeninen yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \left[p^2 - \nu \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \sinh pb & - \left[q^2 + \nu \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \sin qb \\ \left[p^3 - p(2 - \nu) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \cosh pb & - \left[q^3 + q(2 - \nu) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \cos qb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11.75)$$

Asettamalla kerroinmatriisin determinantti nolaksi tulee epälineaarinen yhtälö, josta voidaan määrittää kriittinen kuorma

$$|N_{x,kr}| = K \frac{\pi^2 D}{b^2}. \quad (11.76)$$

Kerroin K riippuu sivusuhteesta $\Phi = \frac{a}{b}$. Pitkälle laatalle Poissonin luvun arvolla $\nu = 0.25$, $K \approx 0.456 + \Phi^{-1}$.

Esimerkki 11.5 Määritetään tasaisen leikkausvoiman kuormittaman laatan lommahduskuorma.

Leikkauskuorman $N_{xy} = \text{vakio}$ tapauksessa lommahduksen differentiaaliyhtälö on

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 2 \frac{N_{xy}}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (11.77)$$

Edellä tapaukselle $N_x = \text{vakio}$ johdettu ratkaisu ei nyt päde. Äärettömän pitkän laatan tapauksessa ratkaisu on muotoa ²

$$w(x, y) = f(y) e^{i \frac{\lambda \pi x}{b}}. \quad (11.78)$$

Sijoittamalla yrite laatan tasapainoehtoon saadaan tavallinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^4 f}{dy^4} - 2 \left(\frac{\lambda \pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + 2 \frac{N_{xy}}{D} i \left(\frac{\lambda \pi}{b} \right) \frac{df}{dy} + \left(\frac{\lambda \pi}{b} \right)^4 f = 0, \quad (11.79)$$

jonka ratkaisu on muotoa

$$f(y) = e^{i \frac{\mu \pi y}{b}}, \quad (11.80)$$

missä μ on reaalinen parametri. Sijoittamalla ratkaisu differentiaaliyhtälöön tulee parametrin μ suhteen neljännen asteen yhtälö

$$\mu^4 + 2\lambda^2 \mu^2 - 2 \frac{N_{xy}}{D} \frac{b^2}{\pi^2} \lambda \mu + \lambda^4 = 0, \quad (11.81)$$

jonka juuret μ_i , $i = 1, \dots, 4$ riippuvat parametrista λ ja tekijästä $\frac{N_{xy} b^2}{D}$. Differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$f(y) = C_1 e^{i \frac{\mu_1 \pi y}{b}} + C_2 e^{i \frac{\mu_2 \pi y}{b}} + C_3 e^{i \frac{\mu_3 \pi y}{b}} + C_4 e^{i \frac{\mu_4 \pi y}{b}}. \quad (11.82)$$

Reunojen $y = 0$ ja $y = b$ reunaehtojen perusteella saadaan vakioiden C_i suhteen neljä lineaarista homogeenista yhtälöä. Asettamalla yhtälöryhmän kerroinmatriisin determinantti nolaksi päädytään epälineaariseen yhtälöön, josta voidaan ratkaista lommahduskuorma

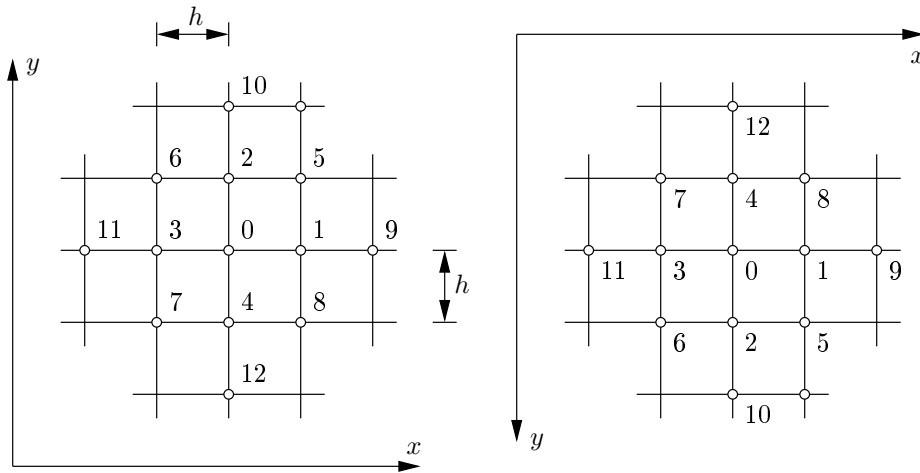
$$|N_{xy, kr}| = K \frac{\pi^2 D}{b^2}. \quad (11.83)$$

Vapaasti tuetulle laatalle $K \approx 5.35$, ja jäykästi kiinnitetylle laatalle $K \approx 8.98$.

11.2 Lommahdustehtävän ratkaisu differenssimenetelmällä

Samalla tavalla kuin aiemmin sauvan tasapainoyhtälössä approksimoidaan laatan differentiaaliyhtälön taipuman derivaattoja differenssiosamäärien avulla. Määritellään tarkoitusta varten hilaverkko, jonka solmuvälin otaksutaan olevan sama, $\Delta x = \Delta y \equiv h$, x :n ja y :n suunnissa. Verkon solmupisteiden numerointi sovitaan kuvan 11.7 mukaiseksi.

²Ratkaisu on jaksollinen x :n suunnassa.



Kuva 11.7 Differenssimenetelmän hilaverkon numerointi (x, y) -tasossa.

Ensimmäisten derivaattojen keskeisdifferenssikaavat ovat (hilapisteessä 0)

$$2h \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \approx w_1 - w_3, \quad (11.84)$$

$$2h \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \approx w_2 - w_4. \quad (11.85)$$

Toisten derivaattojen keskeisdifferenssiapproksimaatiot ovat

$$h^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \approx w_1 - 2w_0 + w_3, \quad (11.86)$$

$$h^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \approx w_2 - 2w_0 + w_4. \quad (11.87)$$

Yhdistämällä toisten derivaattojen kaavat saadaan Laplacen operaattorille yhtälö

$$h^2 \nabla^2 w \approx -4w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4. \quad (11.88)$$

Laatan differentiaaliyhtälön termin $\nabla^4 w$ approksimaatio hilan pisteessä 0 on

$$\begin{aligned} h^4 \nabla^4 w \approx & 20w_0 + (-8)(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) \\ & + 2(w_8 + w_5 + w_6 + w_7) \\ & + w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}. \end{aligned} \quad (11.89)$$

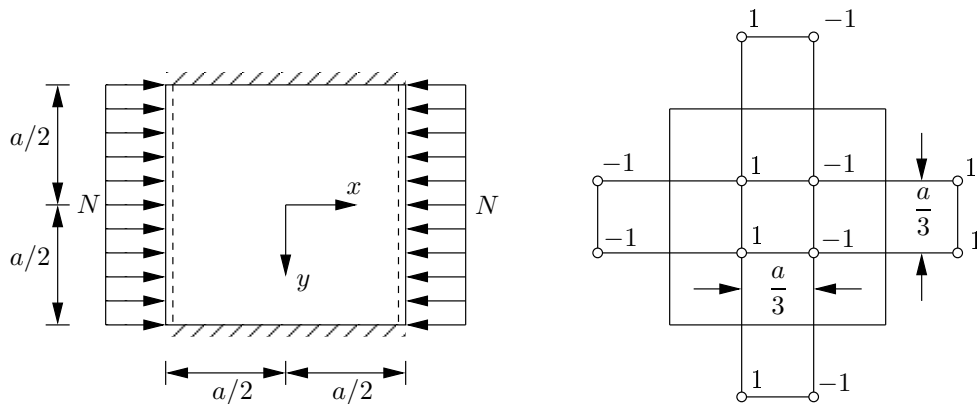
Taivutusmomenttien ja korvileikkausvoimien approksimaatiot ovat vastaavasti

$$\frac{h^2}{D}(-M_x) \approx (-2 - 2\nu)w_0 + w_1 + \nu w_2 + w_3 + \nu w_4, \quad (11.90)$$

$$\frac{h^2}{D}(-M_y) \approx (-2 - 2\nu)w_0 + \nu w_1 + w_2 + \nu w_3 + w_4, \quad (11.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{2h^3}{D}(-V_x) \approx & (2\nu - 6)(w_1 - w_3) + (2 - \nu)(w_5 - w_6 - w_7 + w_8) \\ & + w_9 - w_{11}, \end{aligned} \quad (11.92)$$

$$\begin{aligned} \frac{2h^3}{D}(-V_y) \approx & (2\nu - 6)(w_2 - w_4) + (2 - \nu)(w_5 + w_6 - w_7 - w_8) \\ & + w_{10} - w_{12}. \end{aligned} \quad (11.93)$$



Kuva 11.8 Neliölaatan differenssihila.

Esimerkki 11.6 Lasketaan reunoilta $x = \pm \frac{a}{2}$ vapaasti tuetun ja reunoilta $y = \pm \frac{a}{2}$ jäykästi kiinnitetyn neliölaatan lommahduskuorma differenssimenetelmällä ottamalla hilaväliksi $h = \frac{a}{3}$.

Otetaan reunaehdot ja mahdolliset symmetriaehdot huomioon jo hilaverkon numeerinnissa. Laatan reunaehdot ovat

$$w\left(\pm \frac{a}{2}, y\right) = M_x\left(\pm \frac{a}{2}, y\right) = 0, \quad (11.94)$$

$$w\left(x, \pm \frac{a}{2}\right) = \frac{\partial w\left(x, \pm \frac{a}{2}\right)}{\partial y} = 0. \quad (11.95)$$

Merkitään

$$h = \frac{a}{n}, \quad K = \frac{Na^2}{D}, \quad (11.96)$$

missä n on nyt 3 ja $N \equiv -N_x$. Valitun hilaverkon tapauksessa jää vain yksi tuntematon solmutaipuma w_1 . Pisteessä 1 saadaan laattayhtälön

$$\nabla^4 w - \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (11.97)$$

eli

$$\nabla^4 w + \frac{N}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (11.98)$$

approksimaatioksi differenssimenetelmällä

$$\begin{aligned} &(-w_1 + w_1 + 0 + 0) + 2(0 + 0 + 0 - w_1) - 8(0 + 0 + w_1 - w_1) \\ &\quad + 20w_1 + \frac{K}{9}(0 - 2w_1 - w_1) = 0, \end{aligned} \quad (11.99)$$

eli

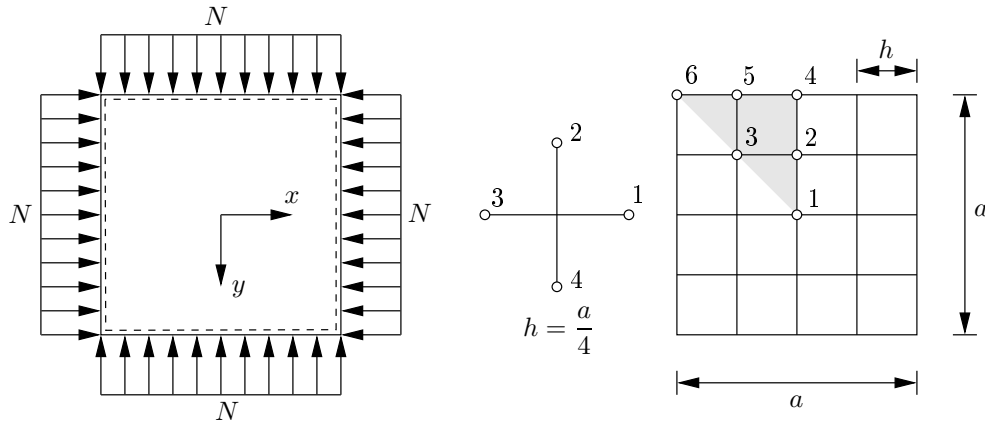
$$\left(18 - \frac{K}{3}\right) w_1 = 0. \quad (11.100)$$

Tällä homogeenisella yhtälöllä on ei-triviaali ratkaisu, kun

$$K = 54 \approx 5.471\pi^2, \quad (11.101)$$

joten laatan lommahduskuorman approksimaatio valitulla hilaverkolla laskettuna on

$$N_{kr} \approx 5.471 \frac{\pi^2 D}{a^2}. \quad (11.102)$$



Kuva 11.9 Vapaasti tuettu laatta, $N_x = N_y = -N$.

Esimerkki 11.7 Määritetään x :n ja y :n suunnassa puristetun vapaasti tuetun neliölaatan lommahduskuorma.

Vapaasti tuettua neliölaattaa kuormittavat tasanjakautuneet reunakuormat $N_x = N_y \equiv -N$. Laatan differentiaaliyhtälö on tässä tapauksessa

$$\nabla^4 w + \frac{N}{D} \nabla^2 w = 0. \quad (11.103)$$

Laatan reunaehdot ovat

$$w\left(\pm \frac{a}{2}, y\right) = \frac{\partial^2 w\left(\pm \frac{a}{2}, y\right)}{\partial x^2} = 0, \quad (11.104)$$

$$w\left(x, \pm \frac{a}{2}\right) = \frac{\partial^2 w\left(x, \pm \frac{a}{2}\right)}{\partial y^2} = 0, \quad (11.105)$$

joten laatan jokaisella reunalla $\nabla^2 w = 0$. Otetaan käyttöön momenttisumma

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D \nabla^2 w, \quad (11.106)$$

ja kirjoitetaan laatan differentiaaliyhtälö muotoon

$$-\frac{\nabla^2 M}{D} - \frac{N}{D^2} M = 0, \quad (11.107)$$

eli

$$\nabla^2 M + \frac{N}{D} M = 0, \quad (11.108)$$

$$\nabla^2 w + \frac{M}{D} = 0. \quad (11.109)$$

Ensimmäisen yhtälön differenssiapproksimaatio paikallisen hilaverkon pisteessä 0 kuvassa 11.7 on

$$-4M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + \frac{N}{D} h^2 M_0 = 0. \quad (11.110)$$

Merkitään

$$\lambda = \frac{N}{D} h^2 - 4 \equiv \frac{K}{n^2} - 4, \quad n = \frac{a}{h}, \quad K = \frac{Na^2}{D}. \quad (11.111)$$

Symmetrian takia käsitellään laatan kahdeksasosaa. Kuvan 11.9 hilaverkon reunapisteissä 4, 5 ja 6, $M = 0$, $(\nabla^2 w = 0)$. Hilaverkon pisteissä 1, 2 ja 3 saadaan yhtälöt

$$\begin{bmatrix} \lambda & 4 & 0 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11.112)$$

Asettamalla kerroinmatriisin determinantti nolaksi tulee kolmannen asteen yhtälö, jonka pienin juuri on $\lambda_1 \approx -2.8284$, sitä vastaava kerroin $K = 18.75$, ja kriittinen kuorma on

$$N_{kr} \approx 18.75 \frac{D}{a^2}, \quad (11.113)$$

jossa on virhettä 5.1%.

11.3 Energiamenetelmä

Suorakaidelaatallekin analyyttinen ratkaisu löydetään vain muutamassa perustapauksessa. Energiakriteerin avulla sensijaan voidaan määrittää lommahduskuorman likiarvoja erilaisille reunaehdoille ja kuormituksille interpoloimalla laatan taipumaa sopivalla funktiolla. Jos taipumafunktio sattuu toteuttamaan laatan differentiaaliyhtälön ja reunaehdot, niin lommahduskuormalle saadaan luonnollisesti tarkka tulos.

Etäisyydellä z laatan keskipinnalta laatan muodonmuutokset ovat

$$\epsilon_x = \varepsilon_x + z\kappa_x, \quad (11.114)$$

$$\epsilon_y = \varepsilon_y + z\kappa_y, \quad (11.115)$$

$$\epsilon_{xy} = \varepsilon_{xy} + z\kappa_{xy}, \quad (11.116)$$

missä laatan keskipinnan muodonmuutokset ovat

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (11.117)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (11.118)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (11.119)$$

Laatan muodonmuutosenergia on

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_{xy} \epsilon_{xy} + \sigma_{yx} \epsilon_{xy}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + 2\sigma_{xy} \epsilon_{xy}) dV, \end{aligned} \quad (11.120)$$

missä $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \equiv \tau_{xy}$, $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$ ja V on laatan tilavuus.

Ottamalla huomioon konstitutiiviset yhtälöt

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y), \quad (11.121)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x), \quad (11.122)$$

$$\sigma_{xy} = 2G\epsilon_{xy}, \quad (11.123)$$

missä $\sigma_{xy} \equiv \tau_{xy}$, muodonmuutosenergian lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y) + 4G\epsilon_{xy}^2 \right] dV. \quad (11.124)$$

Koska homogeenisen laatan tapauksessa

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} zEdz = 0, \quad (11.125)$$

saadaan muodonmuutosenergian lauseke jaettua kahteen osaan

$$U = U_m + U_b, \quad (11.126)$$

$$U_m = \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_A [\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y + 2(1-\nu)\epsilon_{xy}^2] dA, \quad (11.127)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_A [\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y + 2(1-\nu)\kappa_{xy}^2] dA, \quad (11.128)$$

missä

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \equiv D \quad (11.129)$$

on laatan taivutusjäykkyys.

Laatan keskipintaa vastaan kohtisuoran, jakautuneen kuorman potentiaali on

$$V = - \int_A p(x,y)w(x,y) dA. \quad (11.130)$$

Potentiaalienergia on

$$\Pi = U + V. \quad (11.131)$$

Muodonmuutosenergian toinen variaatio on

$$\frac{1}{2} \delta^2 U = \frac{1}{2} \int_V (\delta\sigma_x \delta\epsilon_x + \delta\sigma_y \delta\epsilon_y + 2\delta\sigma_{xy} \delta\epsilon_{xy} + \sigma_x \delta^2 \epsilon_x + \sigma_y \delta^2 \epsilon_y + 2\sigma_{xy} \delta^2 \epsilon_{xy}) dV, \quad (11.132)$$

missä (linearisoidut) muodonmuutosten ensimmäiset variaatiot ovat

$$\delta\epsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}, \quad (11.133)$$

$$\delta\epsilon_y = \frac{\partial \delta v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}, \quad (11.134)$$

$$\delta\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}, \quad (11.135)$$

toiset variaatiot ovat

$$\delta^2 \epsilon_x = \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2, \quad \delta^2 \epsilon_y = \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2, \quad \delta^2 \epsilon_{xy} = \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y}, \quad (11.136)$$

kimmoisen isotrooppisen aineen jännitysten ja muodonmuutosten väliset yhtälöt tasojännitystilassa ovat

$$\delta\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\delta\epsilon_x + \nu\delta\epsilon_y), \quad (11.137)$$

$$\delta\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\delta\epsilon_y + \nu\delta\epsilon_x), \quad (11.138)$$

$$\delta\sigma_{xy} = 2G\delta\epsilon_{xy} \quad (11.139)$$

ja laatan suoran tasapainotilan (perustilan) kalvojännitykset ovat

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h}, \quad \sigma_y = \frac{N_y}{h}, \quad \sigma_{xy} = \frac{N_{xy}}{h}. \quad (11.140)$$

Potentiaalin V toinen variaatio on nyt nolla.

Merkitään seuraavassa yksinkertaisuuden vuoksi $\delta u \equiv u$, $\delta v \equiv v$ ja $\delta w \equiv w$, ja toisen variaation kaava saadaan kirjoitettua edelleen muotoon

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi = & \frac{1}{2}\frac{Eh}{1-\nu^2} \int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dA \\ & + \frac{1}{2}D \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dA. \end{aligned} \quad (11.141)$$

Potentiaalienergian toisen variaation ensimmäinen termi, joka riippuu siirtymistä u ja v , on aina positiivinen, kun Poissonin luku on välillä $(-1 < \nu < 0.5)$, ja se voidaan jättää pois tarkasteluista. Laatan lommahtaessa ³ $u = v = 0$.

Trefftz'in ehdosta $\bar{\delta} \left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi \right) = 0$ seuraa, kun jälleen merkitään $\bar{\delta} \rightarrow \delta$,

$$\begin{aligned} D \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right] dA \\ + \int_A \left[\left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] dA = 0. \end{aligned} \quad (11.142)$$

³Nyt on merkitty $u \equiv \delta u$, $v \equiv \delta v$.

Trefftz'in ehto voidaan osittaisintegroimalla muuntaa muotoon

$$\begin{aligned}
& \int_A \left\{ D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} \delta w \, dA \\
& + D \int_0^b \left|_0^a \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \, dy + D \int_0^a \left|_0^b \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \, dx \right. \\
& + \int_0^b \left|_0^a \left\{ \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \left[D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \right\} \delta w \, dy \right. \\
& + \int_0^a \left|_0^b \left\{ \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \left[D \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \right\} \delta w \, dy \right. \\
& \left. + 2D(1 - \nu) \left|_0^b \left|_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta w = 0. \right. \right. \right. \tag{11.143}
\end{aligned}$$

Koska δw on mielivaltainen virtuaalinen siirtymä, täytyy Trefftz'in ehdon kaarisulkulausekkeiden hävitä. Asettamalla ensimmäisen integraalilausekkeen kaarisuluissa oleva lauseke nolaksi saadaan differentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\
& = \frac{1}{D} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]. \tag{11.144}
\end{aligned}$$

Koska kalvovoimat toteuttavat suorassa perustilassa homogeeniset tasapainoyhtälöt

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \tag{11.145}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \tag{11.146}$$

saadaan laatan differentiaaliyhtälö muotoon

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \tag{11.147}$$

joka on laatan tasapainoehto.

Sijoitustermeistä seuraavat laatan reunaehdot. Reunoilla $x = 0$ ja $x = a$ saadaan reunaehdot ⁴

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \vee \quad \frac{\partial \delta w}{\partial x} = 0, \tag{11.148}$$

$$D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] - N_x \frac{\partial w}{\partial x} - N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \vee \quad \delta w = 0. \tag{11.149}$$

⁴Operaattori $\vee$ luetaan *tai*.

Reunoilla $y = 0$ ja $y = b$ saadaan reunaehdot

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \vee \quad \frac{\partial \delta w}{\partial y} = 0, \quad (11.150)$$

$$D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] - N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} - N_y \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \vee \quad \delta w = 0. \quad (11.151)$$

Suorakaidelaatan nurkkapisteissä täytyy toteutua ehdot

$$2D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad \vee \quad \delta w = 0. \quad (11.152)$$

Esimerkki 11.8 Määritetään vapaasti tuetun laatan lommahduskuorma energiakriteerin avulla, kun N_x on vakio, $N_y = 0$ ja $N_{xy} = 0$.

Potentiaalienergian toisen variaation kaava

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 \Pi = & \frac{1}{2} D \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dA \end{aligned} \quad (11.153)$$

voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 \Pi = & \frac{1}{2} D \int_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA. \end{aligned} \quad (11.154)$$

Vapaasti tuetulla laatalle, jonka reuna koostuu suorista osista, toisen variaation kaavan termi

$$\int_A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA = 0, \quad (11.155)$$

ja tällöin

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \int_A \left[\frac{1}{2} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{2} N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dA. \quad (11.156)$$

Vapaasti tuetun laatan reunaehdot toteuttaa sarjakehitelmä

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (11.157)$$

Sijoittamalla taipuman esitys potentiaalienergian toisen variaation kaavaan ja suorit-

tamalla tarvittavat integroinnit tulee

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\delta^2\Pi &= \int_A \frac{1}{2}D \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}^2 dA \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_A N_x \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}^2 dA \\
 &= \frac{1}{8}Dab \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2 \\
 &\quad + \frac{1}{8}\pi^2 \frac{b}{a} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 a_{mn}^2.
 \end{aligned} \tag{11.158}$$

Integraalien laskemiseen on käytetty kaavoja

$$\int_0^a \sin^2 \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}, \tag{11.159}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x). \tag{11.160}$$

Ehdosta $\bar{\delta} \left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi \right) = 0$ eli yhtälöistä $\frac{\partial}{\partial a_{mn}} \left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi \right) = 0$ seuraa ratkaisu

$$N_x = -D\pi^2 \left(\frac{a}{m}\right)^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2. \tag{11.161}$$

Merkitään, että laatan sivusuhte on $\Phi = \frac{a}{b}$. Pienin ominaisarvo eli lommahduskuorma

$$N_{x,kr} = -D\pi^2 \frac{1}{b^2} \left(\frac{m}{\Phi} + \frac{\Phi}{m} \right)^2 \tag{11.162}$$

saavutetaan, kun $n = 1$. Kyseeseen tuleva m :n arvo riippuu sivusuhteesta.

Esimerkki 11.9 Määritetään y :n suuntaisilta reunoilta vapaasti tuetun ja x :n suuntaisilta sivuilta jäykästi kiinnitetyn laatan lommahduskuorma kuormitustapauksessa N_x on vakio, $N_y = 0$ ja $N_{xy} = 0$.

Otaksutaan taipumalle lauseke

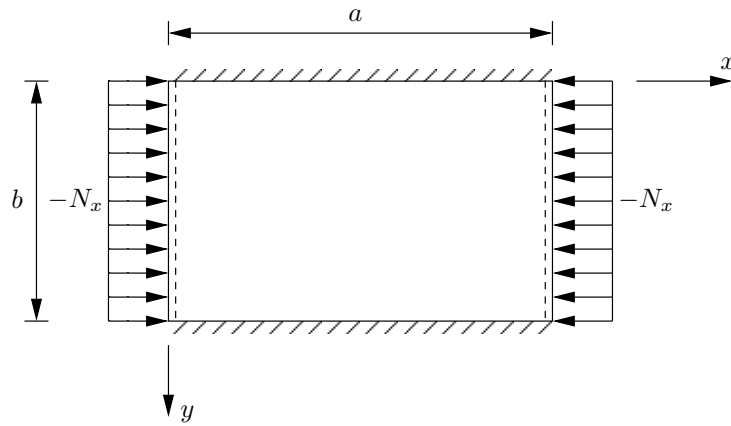
$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b}, \tag{11.163}$$

joka toteuttaa reunaehdot

$$w(x, 0) = w(x, b) = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial w(x, b)}{\partial y} = 0. \tag{11.164}$$

Sijoittamalla taipuman esitys potentiaalienergian toisen variaation kaavaan saadaan integrointien jälkeen

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\delta^2\Pi &= \frac{1}{2}D \sum_{n=1}^{\infty} \pi^4 a_n^2 \left[\frac{3m^4 b}{16a^3} + \frac{n^4 a}{b^3} + \frac{m^2 n^2}{2ab} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2}N_x \sum_{n=1}^{\infty} \pi^2 a_n^2 \frac{3m^2 b}{16a}.
 \end{aligned} \tag{11.165}$$



Kuva 11.10 Reunoilta $y = 0$, $y = b$ jäykästi tuetun ja tasaisen kuorman $-N_x$ kuormittaman laatan lommahdus.

Kun $m = n = 1$, saadaan ratkaisu

$$N_{x,kr} = -D\pi^2 \frac{1}{b^2} \left[\frac{1}{\Phi^2} + \frac{16}{3}\Phi^2 + \frac{8}{3} \right], \quad (11.166)$$

missä $\Phi = \frac{a}{b}$ on sivusuhte. Kertoimen

$$K = \frac{1}{\Phi^2} + \frac{16}{3}\Phi^2 + \frac{8}{3} \quad (11.167)$$

pienin arvo on $K_{min} \approx 7.3$, joka on noin 5% suurempi kuin tarkka tulos. Ratkaisu on esitetty kuvassa 11.10.

Esimerkki 11.10 Laatan $y:n$ suuntaisilla reunoilla on lineaarisesti jakautunut kuormitus $N_x = -N_0 \left(1 - \frac{c}{b}y\right)$. Määritetään lommahduskuorma.

Laatan taipumaksi otaksutaan

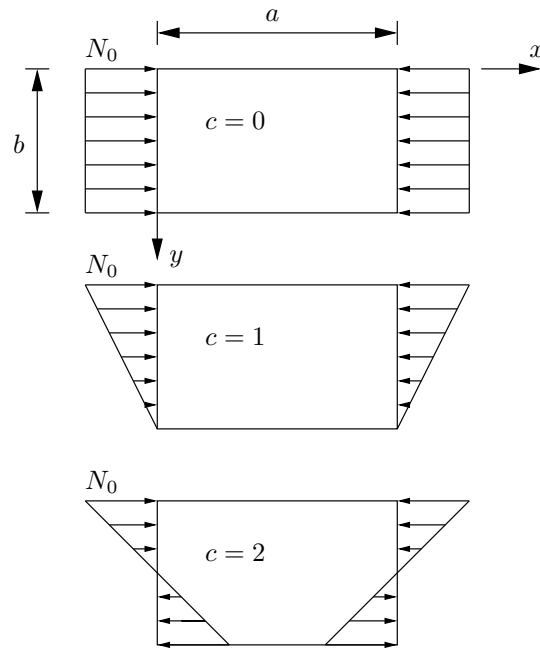
$$w(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (11.168)$$

Potentiaalienergian toisen variaation kaavan

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi = \int_A \left[\frac{1}{2}D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{2}N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dA \quad (11.169)$$

kahden ensimmäisen ensimmäisen termin summa on taipuman lausekkeen sijoittamisen ja integrointien jälkeen

$$\int_A \frac{1}{2}D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dA = \frac{\pi^4}{8}Dab \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (11.170)$$



Kuva 11.11 Lineaarisesti jakautunut reunakuorma N_x .

Lineaarisesti jakautuneen reunakuorman $N_x = -N_0 \left(1 - \frac{c}{b}y\right)$ tapauksessa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_A N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA &= -\frac{1}{2} N_0 \int_0^a \int_0^b \left(1 - \frac{c}{b}y\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA \\ &= \frac{\pi^2 N_0}{8} \frac{b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 - \frac{N_0}{4} \frac{\pi^2 c}{ab} \left[\frac{b^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 - \frac{8b^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_n a_q n q}{(n^2 - q^2)^2} \right], \end{aligned} \quad (11.171)$$

missä q on sellainen kokonaisluku, että $n \pm q$ on pariton, $n \neq q$. Integraalien laskemiseen on käytetty kaavoja

$$\int_0^b y \sin \frac{p\pi y}{b} \sin \frac{q\pi y}{b} dy = \frac{b^2}{4}, \quad p = q, \quad (11.172)$$

$$\int_0^b y \sin \frac{p\pi y}{b} \sin \frac{q\pi y}{b} dy = 0, \quad p \neq q, \quad (11.173)$$

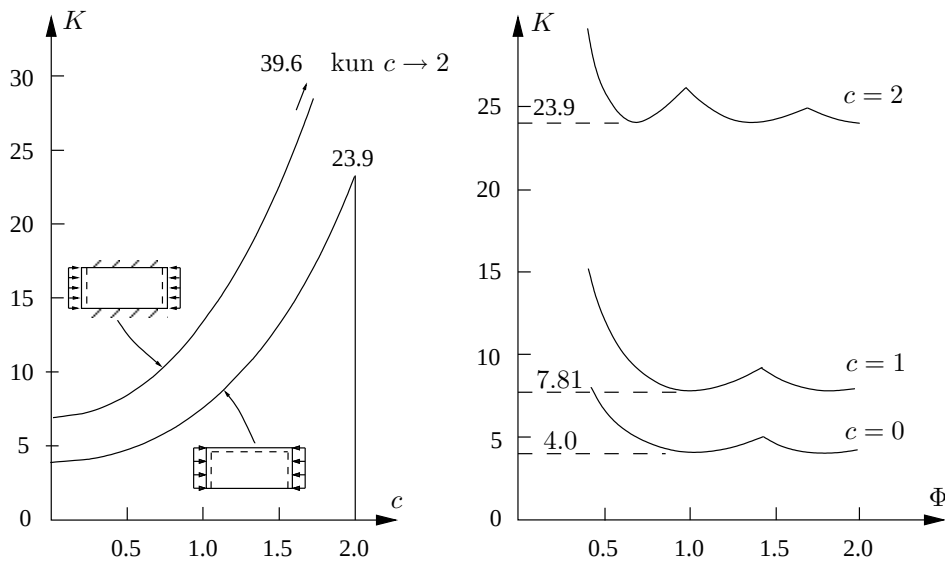
ja $p \pm q$ on parillinen,

$$\int_0^b y \sin \frac{p\pi y}{b} \sin \frac{q\pi y}{b} dy = -\frac{4b^2}{\pi^2} \frac{pq}{(p^2 - q^2)^2}, \quad p \neq q, \quad (11.174)$$

ja $p \pm q$ on pariton.

Trefftz'in ehdosta seuraa kertoimien a_n suhteen lineaarinen ja homogeeninen yhtälöryhmä. Ottamalla huomioon taipuman sarjakehitelmästä kaksi ensimmäistä termiä saadaan

$$\begin{bmatrix} (1 + \Phi^2)^2 - K\Phi^2(1 - \frac{c}{2}) & -\frac{8}{\pi^2} c\Phi^2 K \frac{2}{9} \\ -\frac{8}{\pi^2} c\Phi^2 K \frac{2}{9} & (1 + 4\Phi^2)^2 - K\Phi^2(1 - \frac{c}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11.175)$$



Kuva 11.12 Lineaarisesti jakautuneen voiman N_x kuormittaman laatan lommahdus.

missä on merkitty

$$K = \frac{N_0 b^2}{\pi^2 D}, \quad \Phi = \frac{a}{b}. \quad (11.176)$$

Ratkaisu on esitetty kuvassa 11.12.

Esimerkki 11.11 Määritetään vapaasti tuetun laatan lommahduskuorma leikkauskuormituksessa N_{xy} on vakio.

Potentiaalienergian toisen variaation kaava on leikkauskuormituksen tapauksessa vapaasti tuetulle laatalle

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \int_A \left[\frac{1}{2} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dA. \quad (11.177)$$

Vapaasti tuetun laatan tapauksessa otaksutaan taipuma

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (11.178)$$

joka toteuttaa reunaehdot. Sijoittamalla taipuman sarjakehitelmä potentiaalienergian toisen variaation kaavaan, ja ottamalla huomioon, että

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} dx = 0, \quad (11.179)$$

jos $m \pm p$ on parillinen, ja

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} dx = \frac{2a}{\pi} \frac{m}{m^2 - p^2}, \quad (11.180)$$

jos $m \pm p$ on pariton, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi = \frac{1}{8}Dab \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2 \\ + 4N_{xy} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{mn}a_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)}. \end{aligned} \quad (11.181)$$

Trefftz'in ehdosta $\bar{\delta} \left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi \right) = 0$ eli yhtälöistä $\frac{\partial}{\partial a_{mn}} \left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi \right) = 0$ seuraa yhtälöryhmä

$$a_{mn}(m^2 + n^2\Phi^2)^2 + \frac{32\Phi^3 K}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)} = 0, \quad (11.182)$$

joka voidaan jakaa kahdeksi yhtälöryhmäksi. Toisessa ovat kertoimina a_{mn} , joille $m+n$ on pariton ja joita vastaa antisymmetrinen lommahdusmuoto. Toisessa ryhmässä $m+n$ on parillinen ja lommahdusmuoto on symmetrinen. Symmetrinen ryhmä sisältää yhdistelmät $(m=1, n=1)$, $(m=1, n=3)$, $(m=2, n=2)$, $\dots$. Antisymmetrinen ryhmä sisältää yhdistelmät $(m=1, n=2)$, $(m=2, n=1)$, $(m=2, n=3)$, $\dots$.

Merkitsemillä

$$\lambda = \frac{\pi^4 D}{32\Phi b^2 N_{xy}} \quad (11.183)$$

voidaan yhtälöryhmä kirjoittaa muotoon

$$\lambda a_{mn} \frac{(m^2 + n^2\Phi^2)^2}{\Phi^2} + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)} = 0. \quad (11.184)$$

Ottamalla mukaan vain taipuman sarjan kaksi termiä, joita vastaavat kertoimet ovat a_{11} ja a_{22} , saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \lambda \frac{(1+\Phi^2)^2}{\Phi^2} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & 16\lambda \frac{(1+\Phi^2)^2}{\Phi^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11.185)$$

Asettamalla ryhmän kerroinmatriisin determinantti nolaksi tulee toisen asteen yhtälö parametrin λ suhteen. Yhtälön ratkaisu on

$$\lambda = \pm \frac{1}{9} \frac{\Phi^2}{(1 + \Phi^2)^2}, \quad (11.186)$$

ja kriittinen leikkauskuorma on

$$N_{xy,kr} = \pm \frac{9\pi^4 D}{32\Phi b^2} \frac{(1 + \Phi^2)^2}{\Phi^2}. \quad (11.187)$$

Kahden termin ratkaisun virhe on noin 15%. Tarkkaa ratkaisua (katkoviiva) approksimoi hyvin

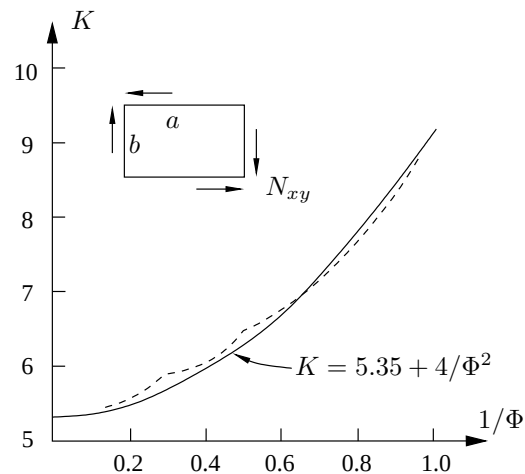
$$K = 5.35 + \frac{4}{\Phi^2}, \quad (11.188)$$

missä $\Phi > 1$, kuva 11.13.

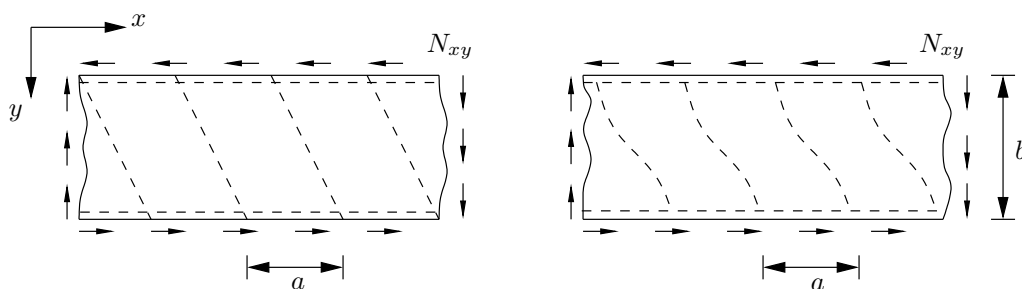
Kaikilta sivuilta jäykästi kiinnitetylle laatalle on johdettu likikaava

$$K = 8.98 + \frac{5.6}{\Phi^2}, \quad (11.189)$$

kun $\Phi > 1$.



Kuva 11.13 Leikkausvoiman N_{xy} kuormittaman laatan lommahdus.



Kuva 11.14 Leikkausvoiman N_{xy} kuormittaman laattakaistan lommahdus.

Esimerkki 11.12 Määritetään leikkausvoiman kuormittaman vapaasti tuetun laattakaistan lommahduskuorma.

Otaksutaan taipumafunktio

$$w(x, y) = C \sin \frac{\pi(x + cy)}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (11.190)$$

missä b on kaistan leveys. Lommahdusmuodon solmuviivat ($w = 0$) ovat suorat $x + cy = na$, $n = 0, 1, 2, \dots$, eivätkä ne leikkaa sivuja $y = 0$, $y = b$ suorassa kulmassa. Lommahdusmuodon aallonpituus on a . Sijoittamalla taipuman lauseke potentiaalienergian toisen variaation kaavaan tulee

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 \Pi &= \int_A \left[\frac{1}{2} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dA \\ &= D \frac{\pi^4 C^2}{8} \frac{a}{b^3} \left\{ \left[1 + \frac{(1 + c^2)b^2}{a^2} \right]^2 + 4 \frac{c^2 b^2}{a^2} \right\} + N_{xy} \pi^2 C^2 \frac{cb}{4a}. \end{aligned} \quad (11.191)$$

Kriittisen kuorman arvoksi saadaan

$$N_{xy,kr} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 D}{b^2} \left[\frac{a^2}{cb^2} + 6c + \frac{2}{c} + \frac{(1 + c^2)^2 b^2}{ca^2} \right]. \quad (11.192)$$

Lommahduskuorma saa minimiarvon, kun $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{1+c^2}$, ja

$$N_{xy} = 2D \frac{\pi^2}{b^2} \left(2c + \frac{1}{c} \right). \quad (11.193)$$

Minimoimalla vielä parametrin c suhteen tulee $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ja

$$N_{xy,\min} = 4\sqrt{2} \frac{\pi^2 D}{b^2} \approx 5.66 \frac{\pi^2 D}{b^2}. \quad (11.194)$$

Edellä esitetty ratkaisu ei toteuta mekaanisia reunaehtoja $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ sivuilla $y = 0$, $y = b$, koska lommahdusmuodon solmuviivat eivät leikkaa pitkiä sivuja kohtisuoraan. Otaksamalla lommahdusmuoto

$$w(x, y) = C \sin \frac{\pi[x + f(y)]}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (11.195)$$

solmuviivat ovat käyrät $x + f(y) = na$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ja ne leikkaavat sivut $y = 0$, $y = b$ suorassa kulmassa, kun

$$f(y) = \frac{c\pi}{b} \left(\cos \frac{\pi y}{b} - 1 \right). \quad (11.196)$$

Tällä lommahdusmuodolla lommahduskuorman arvoksi tulee $N_{xy,kr} = 5.41 \frac{\pi^2 D}{b^2}$.

11.4 Jäykistetyin laatan lommahdus

Jos laatasta on yksi keskeinen pituussuuntainen jäykiste (tai kaksi jäykistettä), niin voidaan muodostaa tasapainoehto, jossa jäykisteen ja laatan yhteensopivuus ja vuorovaikutus on otettu huomioon. Kolmen tai useamman jäykisteen tapauksessa analyyttinen lommahdustehtävän ratkaisu tulee hyvin hankalaksi. Usean jäykisteen tapauksessa jäykisteet voidaan sulattaa laatan jäykkyysominaisuuksiin ja ratkaista ortotrooppisen laatan lommahdustehtävä.

11.4.1 Yksi keskeinen jäykiste

Yhden keskeisen jäykisteen tapauksessa analyyttinen ratkaisu helpottuu jättämällä jäykisteen vääntöjäykkyys huomioonottamatta. Laatan ja jäykisteen yhteensopivuusehdot ovat:

- Laatan ja jäykisteen taipumat ovat yhtäsuuret.
- Kiertymä jäykisteen kohdalla on nolla (symmetrinen lommahdusmuoto).

Laatan taipumafunktion otaksutaan olevan muotoa

$$w(x, y) = f(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (11.197)$$

Tapauksessa $-\frac{N_x}{D} > \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2$

$$f(y) = C_1 \sinh py + C_2 \cosh py + C_3 \sin qy + C_4 \cos qy, \quad (11.198)$$

missä

$$p = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{-N_x}{D}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (11.199)$$

$$q = \left[- \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{-N_x}{D}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (11.200)$$

Jäykisteen taipuma on yhteensopivuusvaatimuksen perusteella

$$w_p(x) = w(x, 0), \quad (11.201)$$

joten jäykisteen tasapainoehto voidaan kirjoittaa muotoon

$$EI \frac{\partial^4 w(x, 0)}{\partial x^4} - N_p \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial x^2} - q_p = 0, \quad (11.202)$$

missä EI on jäykisteen taivutusjäykkyys ja $N_p = A_p \sigma_p$ on jäykisteen normaalivoima. Vapaasti tuetun laatan tapauksessa jäykisteen taipuma on

$$w(x, 0) = (C_2 + C_4) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (11.203)$$

Käyttämällä hyväksi symmetriaa saadaan tasapainoehto

$$q_p = -2V_y(x, 0), \quad (11.204)$$

missä

$$V_y(x, 0) = -D \frac{\partial^3 w(x, 0)}{\partial y^3}. \quad (11.205)$$

Laatan ja jäykisteen pystysuorasta tasapainoehdosta seuraa

$$EI \frac{\partial^4 w(x, 0)}{\partial x^4} - N_p \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial x^2} + 2D \frac{\partial^3 w(x, 0)}{\partial y^3} = 0, \quad (11.206)$$

eli

$$2p^3 C_1 - 2q^3 C_3 + \left[\frac{EI}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + \frac{N_p}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] (C_2 + C_4) = 0, \quad (11.207)$$

missä

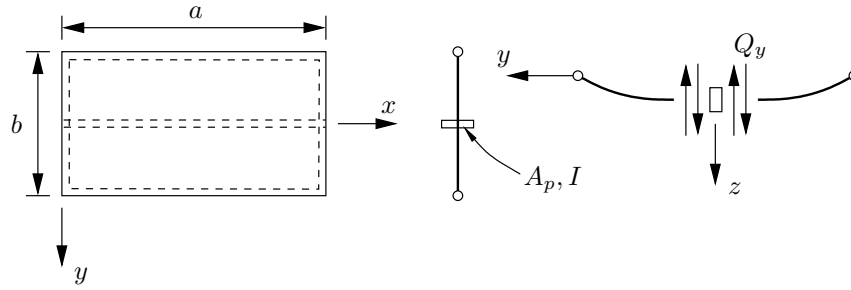
$$N_p = \sigma_x A_p = \frac{N_x}{h} A_p. \quad (11.208)$$

Kolme tarvittavaa lisäehtoa saadaan reuna- ja yhteensopivuusehdoista:

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad (11.209)$$

$$w(x, \frac{b}{2}) = 0, \quad (11.210)$$

$$\frac{\partial^2 w(x, \frac{b}{2})}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, \frac{b}{2})}{\partial x^2} = 0. \quad (11.211)$$



Kuva 11.15 Jäykistetyin laatan lommahdus.

Reuna-, yhteensopivuus- ja tasapainoehtoista kootaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \sinh \frac{pb}{2} & \cosh \frac{pb}{2} & \sin \frac{qb}{2} & \cos \frac{qb}{2} \\ p^2 \sinh \frac{pb}{2} & p^2 \cosh \frac{pb}{2} & -q^2 \sin \frac{qb}{2} & -q^2 \cos \frac{qb}{2} \\ p & 0 & q & 0 \\ 2p^3 & \left[\frac{EI}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + \frac{N_p}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] & -2q^3 & \left[\frac{EI}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + \frac{N_p}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11.212)$$

Merkitsemällä $\alpha = pb$ ja $\beta = qb$ saadaan determinantin nollaehto kirjoitettua muotoon

$$\begin{aligned} F \left\{ \beta \cos \frac{\beta}{2} \sinh \frac{\alpha}{2} - \alpha \sin \frac{\beta}{2} \cosh \frac{\alpha}{2} \right\} - 2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) \cos \frac{\beta}{2} \cosh \frac{\alpha}{2} \\ = F \left(\frac{1}{\alpha} \tanh \alpha - \frac{1}{\beta} \tan \beta \right) - 2(\alpha^2 + \beta^2) = 0, \end{aligned} \quad (11.213)$$

missä on otettu käyttöön lyhennysmerkintä

$$F = b^3 \left[\frac{EI}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + \frac{\sigma_x A_p}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right]. \quad (11.214)$$

Tapauksessa $m = 1$ saadaan kerroin F muotoon

$$\begin{aligned} F &= \frac{\pi^4}{\Phi^4} \left[\frac{EI}{bD} + \frac{N_x b^2}{\pi^2 D} \Phi^2 \frac{A_p}{bh} \right] \\ &= \frac{\pi^4}{\Phi^4} \left[\frac{EI}{bD} - K \Phi^2 \frac{A_p}{bh} \right], \end{aligned} \quad (11.215)$$

missä $\Phi = \frac{a}{b}$ on sivusuhte ja

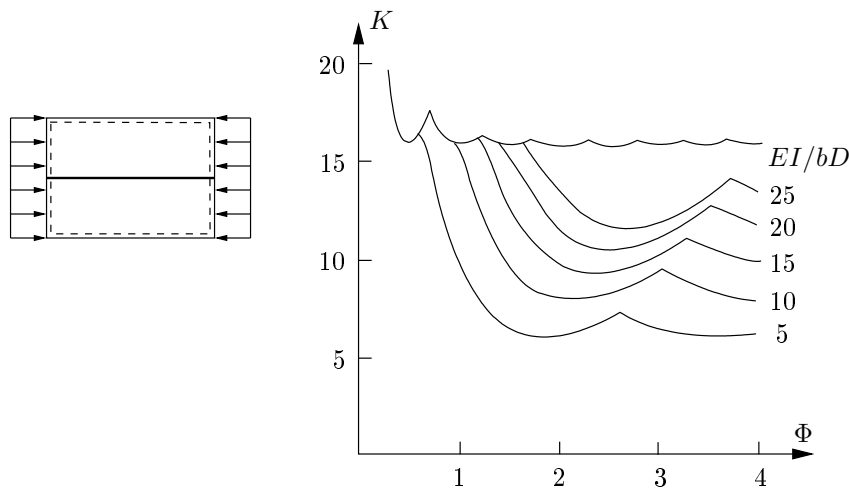
$$K = -\frac{N_{x,kr} b^2}{\pi^2 D}. \quad (11.216)$$

Determinantin nollaehdosta voidaan määrittää lommahduskerroin K sivusuhteen Φ funktiona erilaisilla parametrien $\frac{EI}{bD}$ ja $\frac{A_p}{bh}$ arvoilla, kuva 11.15.

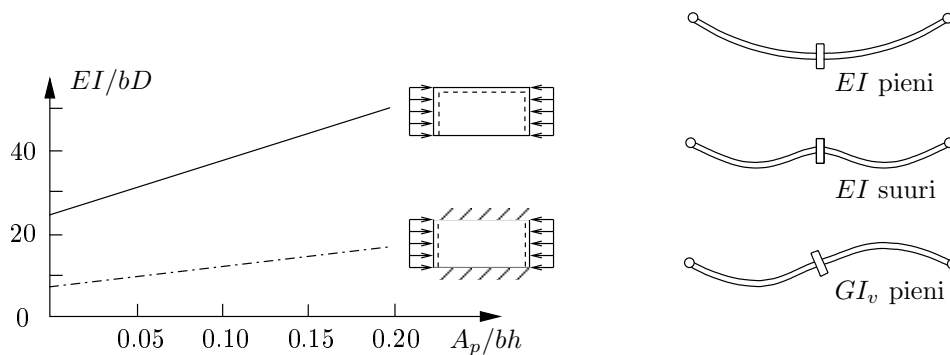
Suurin kriittinen jännitys liittyy antisymmetriseen lommahdusmuotoon, joka vastaa vapaasti tuettua $\frac{b}{2}$:n levyistä laattaa. Pitkän laatan ($\Phi \rightarrow \infty$) tapauksessa kriittinen jännitys on

$$\sigma_{kr} = -\frac{4\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{\frac{b}{2}} \right)^2 = -\frac{16\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2, \quad (11.217)$$

joten minimilommahduskerroin on $K_{\min} = 16$. Kuvassa 11.16 on esitetty jäykistepalkin minimiarvot, joilla lommahdusmuodosta tulee antisymmetrinen.



Kuva 11.16 Jäykistepalkin jäykkyyden vaikutus lommahdusmuotoon.



Kuva 11.17 Jäykistepalkin minimiarvot, jotta lommahdusmuodosta tulisi antisymmetrinen.

11.4.2 Kaksi symmetristä jäykistettä

Kahden symmetrisen jäykisteen tapauksessa antisymmetrinen lommahdusmuoto tulee kysymykseen hyvin lyhyillä laatoilla. Pitkillä laatoilla symmetrinen lommahdusmuoto antaa lommahduskertoimen K minimiarvon. Energiamenetelmällä on johdettu lommahduskertoimelle likiratkaisu

$$K = \frac{(1 + \Phi^2)^2 + \frac{3EI}{bD}}{\Phi^2 \left(1 + 3\frac{A_p}{bh}\right)}. \quad (11.218)$$

Jos jäykisteen arvot ovat $I = A_p = 0$, niin likiratkaisusta tulee vapaasti tuetun jäykistämättömän laatan ratkaisu

$$K = \frac{1}{\Phi^2} + \Phi^2 + 2. \quad (11.219)$$

11.4.3 Jäykisteitä kolme tai useampia

Jos jäykisteitä on paljon, niin ne voidaan ottaa huomioon hyvällä tarkkuudella laatan taivutus- ja vääntöjäykkyyden yhteydessä:

- D_x on laatan taivutusjäykkyys leikkauksessa $x = \text{vakio}$.
- D_y on laatan taivutusjäykkyys leikkauksessa $y = \text{vakio}$.
- H on laatan keskimääräinen vääntöjäykkyys.

Ortotrooppisen laatan tasapainoyhtälö on

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (11.220)$$

kun kuormana on N_x . Vapaasti tuetun laatan lommahdusmuodoksi otaksutaan

$$w(x, y) = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (11.221)$$

Sijoittamalla taipuman lauseke tasapainoehtoon ja merkitsemällä, että sivusuhte on $\Phi = \frac{a}{b}$, saadaan

$$D_x \pi^4 + 2H \Phi^2 \pi^4 + D_y \Phi^4 \pi^4 + N_x a^2 \pi^2 = 0, \quad (11.222)$$

josta ratkaistaan kriittinen lommahduskuorma

$$N_{kr} = -\frac{\pi^2}{b^2} \left(\frac{D_x}{\Phi^2} + 2H + D_y \Phi^2 \right). \quad (11.223)$$

Minimoidaan lommahduskuorma sivusuhteen suhteen vaatimalla

$$\frac{\partial N_x}{\partial \Phi} = 0, \quad (11.224)$$

josta seuraa

$$\Phi = \left(\frac{D_x}{D_y} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (11.225)$$

ja tätä sivusuhdetta vastaava lommahduskuorma on

$$N_{x,kr} = -\frac{2\pi^2}{b^2} (\sqrt{D_x D_y} + H). \quad (11.226)$$

Jos laatassa on x -akselin suuntaisia jäykisteitä, joiden taivutusjäykkyys on EI_x ja joiden välimatka on c , niin laatan taivutusjäykkyyksiksi tulee

$$D_x = \frac{EI_x}{c} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (11.227)$$

ja laatan vääntöjäykkyys on

$$H = D_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (11.228)$$

Sijoittamalla nämä arvot kriittisen jännityksen kaavaan $\sigma_{x,kr} = \frac{N_{x,kr}}{h}$ saadaan

$$\sigma_{x,kr} = -\frac{4\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 12(1-\nu^2) \frac{I_x}{ch^3}} \right]. \quad (11.229)$$

Hakasulkulauseke on suurennuskerroin, jolla vapaasti tuetun laatan kriittinen kuorma kasvaa x -akselin suuntaisten jäykisteiden ansiosta, jos jäykisteet eivät muodosta lommahduskuvion (lommahdusmuodon) solmuviivoja ($w = 0$). Jos jäykisteet sijaitsevat solmuviivoilla, niin kriittisen jännityksen arvo on

$$\sigma_{x,kr} = \frac{4\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{c}\right)^2, \quad (11.230)$$

missä c on jäykisteiden välimatka y -akselin suunnassa. Suunnittelussa määräävä kriittisen jännityksen arvo on pienempi kahdesta edellä määritetystä arvosta.

11.4.4 Poikittaiset ja pitkittäiset jäykisteet

Merkitään, että jäykisteiden välimatkat x - ja y -akselien suunnissa ovat c ja d . Jos laatan taiputusjäykkyys voidaan jättää huomioonottamatta jäykisteiden jäykkyyksien rinnalla, niin saadaan ortotrooppisen laatan jäykkyydet

$$D_x = \frac{EI_x}{c}, \quad D_y = \frac{EI_y}{d}, \quad H = 0. \quad (11.231)$$

Tällöin kriittisen jännityksen arvoksi tulee

$$\sigma_{x,kr} = -\frac{2\pi^2 E}{b^2 h} \sqrt{\frac{I_x I_y}{cd}}. \quad (11.232)$$

Jos jäykisteet ovat lommahdusmuodon solmuviivoilla, niin levykentän paikallinen (jäykisteiden välisen kentän) lommahdusjännitys saadaan kaavasta

$$\sigma_{x,kr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{d}{c}\right)^2 + 2 \right], \quad (11.233)$$

missä sivusuhte on nyt $\Phi = \frac{d}{c}$.

Esimerkki 11.13 Määritetään energiamenetelmällä yhden symmetrisen jäykisteen jäykistämän laatan lommahduskuorma.

Vapaasti tuetun laatan potentiaalienergian toisen variaation kaava on

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi_l = \int_A \left[\frac{1}{2}D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{2}N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dA. \quad (11.234)$$

Vastaavasti jäykistepalkin potentiaalienergian toinen variaatio on

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi_p = \int_0^a \left[\frac{1}{2}EI \left(\frac{\partial^2 w(x, \frac{b}{2})}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2}N_p \left(\frac{\partial w(x, \frac{b}{2})}{\partial x} \right)^2 \right] dA. \quad (11.235)$$

Otaksutaan taipumalle lauseke

$$w(x, y) = \left(C_1 \sin \frac{\pi y}{b} + C_2 \sin \frac{2\pi y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (11.236)$$

Käyttämällä hyväksi integrointikaavaa

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \sin \frac{r\pi y}{b} = \delta_{qr} \frac{ab}{4}, \quad (11.237)$$

missä $\delta_{qr} = 1$, jos $q = r$, ja $\delta_{qr} = 0$, jos $q \neq r$, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi_l = \frac{1}{8}Dab \left[C_1^2 \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 + C_2^2 \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right)^2 \right] \\ + \frac{1}{8}abN_x \frac{m^2\pi^2}{a^2} (C_1^2 + C_2^2), \end{aligned} \quad (11.238)$$

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi_p = C_1^2 \frac{a}{4} \frac{m^2\pi^2}{a^2} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} EI + N_p \right). \quad (11.239)$$

Yhteensä

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi = \frac{1}{2}\delta^2\Pi_l + \frac{1}{2}\delta^2\Pi_p \\ = C_1^2 \left\{ \frac{ab}{8} \left[D \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 + N_x \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right] + \frac{a}{4} \frac{m^2\pi^2}{a^2} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} EI + N_p \right) \right\} \\ + C_2^2 \frac{ab}{8} \left[D \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right)^2 + N_x \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right]. \end{aligned} \quad (11.240)$$

Ehdoista

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi \right)}{\partial C_1} = 0, \quad \frac{\partial \left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi \right)}{\partial C_2} = 0, \quad (11.241)$$

seuraa

$$N_{x,kr1} = -\frac{\pi^2 D}{b^2} \frac{1}{1 + 2\frac{A_p}{bh}} \left[\left(\frac{m}{\Phi} + \frac{\Phi}{m} \right)^2 + 2\frac{EI}{bD} \left(\frac{m}{\Phi} \right)^2 \right], \quad (11.242)$$

$$N_{x,kr2} = -4\frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{m}{2\Phi} + \frac{2\Phi}{m} \right)^2, \quad (11.243)$$

missä $\Phi = \frac{a}{b}$ ja suhde $\frac{A_p}{bh} = \frac{N_p}{N_x b}$. Lommahduskuorma on $N_{x,kr1}$ symmetrisen lommahdusmuodon tapauksessa, ja antisymmetrisen lommahdusmuodon tapauksessa lommahduskuorma on $N_{x,kr2}$. Jälkimmäisessä tapauksessa jäykistepalkki ei taivu.

Esimerkki 11.14 Tutkitaan vapaasti tuettua laattaa, jossa on poikittaissuuntainen jäykiste.

Laatan ja palkin taivutusjäykkyudet ovat D ja EI , ja laatan sivusuhte on $\Phi = \frac{a}{b}$. Lommahdusmuodoksi otaksutaan

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (11.244)$$

Laatan potentiaalienergian toiseksi variaatioksi tulee laskelmien jälkeen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi_l &= \int_A \left[\frac{1}{2}D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{2}N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dA \\ &= \frac{1}{8} \frac{\pi^4 D}{\Phi a^2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 (m^2 + \Phi^2)^2 + \frac{1}{8} N_x \frac{\pi^2}{\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 m^2. \end{aligned} \quad (11.245)$$

Vastaavasti palkin energialauseke on

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi_p = \int_0^a \frac{1}{2}EI \left[\frac{\partial^2 w(x_p, y)}{\partial y^2} \right]^2 dy = \frac{1}{2}EI \frac{\pi^4}{b^4} \frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \sin^2 \frac{m\pi x_p}{a}. \quad (11.246)$$

Valitaan palkin sijainniksi $x_p = \frac{a}{2}$. Yhden puoliallon ($m = 1$) tapauksessa Trefftz'in ehdosta saadaan

$$N_{x,kr1} = -\frac{\pi^2 D}{b^2 \Phi^2} \left[(1 + \Phi^2)^2 + 2 \frac{EI}{Db} \Phi^3 \right], \quad (11.247)$$

ja kahden puoliallon ($m = 2$) tapauksessa

$$N_{x,kr2} = -\frac{\pi^2 D}{b^2} \frac{(4 + \Phi^2)^2}{4\Phi^2}. \quad (11.248)$$

Jälkimmäisessä tapauksessa lommahdusmuodon solmuviiva kulkee pitkin jäykistepalkkia.

Esimerkki 11.15 Määritetään tasaisesti puristetun kimmoisella alustalla olevan vapaasti tuetun laatan lommahduskuorma.

Jatkuva kimmainen tuenta on omalla tavallaan laatan jäykiste. Esimerkin tapauksessa $N_x = N_y = \text{vakio}$. Winklerin alustan tukireaktio (alustapaine) on $q_r = kw$, missä k on alustan jäykkyys ja w on taipuma (nyt lisätaiipuma suoran puristetun perustilan suhteen). Potentiaalienergian toisen variaation kaava on alustan vaikutus mukaanlukien

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi = \int_A \left[\frac{1}{2}D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{2}N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2}N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2}kw^2 \right] dA. \quad (11.249)$$

Vapaasti tuetun laatan reunaehdot toteuttaa sarjakehitelmä

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (11.250)$$

Sijoittamalla taipuman esitys potentiaalienergian toisen variaation kaavaan ja suorittamalla tarvittavat integroinnit tulee

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi &= \frac{1}{8}Dab \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{8}abN_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} a_{mn}^2 + \frac{1}{8}abN_y \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} a_{mn}^2 \\ &\quad + \frac{1}{8}abk \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2, \end{aligned} \quad (11.251)$$

missä integraalien laskemiseen on käytetty kaavoja

$$\int_0^a \sin^2 \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}, \quad (11.252)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x). \quad (11.253)$$

Ehdosta $\bar{\delta} \left(\frac{1}{2} \delta^2 \Pi \right) = 0$ seuraavista yhtälöistä $\frac{\partial}{\partial a_{mn}} \left(\frac{1}{2} \delta^2 \Pi \right) = 0$ saadaan ratkaisu

$$N_{x,kr} = N_{y,kr} = - \frac{k}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]} - D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]. \quad (11.254)$$

Luku 12

Laatan epälineaarinen analyysi

Laatan lommahduskuorma määritettiin edellä lineaarisen ominaisarvotehtävän ratkaisun perusteella. Lommahdusjännityksen eli kriittisen jännityksen arvolla laattaan alkaa muodostua lommahduskuvio. Laatta voi kuitenkin kantaa lommahdusjännitystä vastaavaa kuormaa suuremman kuorman, jos tuennan ansiosta laattaan kehittyy lommahduksen jälkeisessä ns. ylikriittisessä tilassa kalvovenymiä.

Ylikriittisen tilan tutkimista varten tarvitaan laatan epälineaariset kinemaattiset yhtälöt. Jos tietyn, materiaalipisteiden muodostaman säikeen pituus on alkutilassa (deformoitumattomassa tilassa) dS ja lopputilassa (deformoituneessa tilassa) ds , niin Greenin-Lagrangen mukaan säikeen venymää kuvaa kaava

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}. \quad (12.1)$$

Jos materiaalisäikeen komponentit ovat dX_k (alkutilassa) ja dx_k (lopputilassa) koordinaattien X_k , $k = 1, 2, 3$, ja x_k , $k = 1, 2, 3$, suhteen, eli

$$d\mathbf{S} = dX_k \mathbf{I}_k, \quad d\mathbf{s} = dx_k \mathbf{i}_k, \quad (12.2)$$

missä koordinaattiakseleiden suuntaiset yksikkövektorit ovat $\mathbf{i}_k$ ja $\mathbf{I}_k$, $k = 1, 2, 3$, niin säikeen pituuksien neliöt ovat ¹

$$(dS)^2 = dX_k dX_k, \quad (ds)^2 = dx_k dx_k. \quad (12.3)$$

Koordinaattien ja siirtymäkomponenttien vastaavuudet ovat $x_1 = x$, $x_2 = y$ ja $x_3 = z$; $u_1 = u$, $u_2 = v$ ja $u_3 = w$.

Materiaalipisteen koordinaatit ovat deformatuneessa tilassa

$$x_k = X_k + u_k, \quad (12.4)$$

missä u_k ovat siirtymävektorin $\mathbf{u} = u_k \mathbf{i}_k$ komponentit. Siirtymävektorin inkrementin avulla saadaan yhteys

$$\begin{aligned} dx_k &= dX_k + du_k \\ &= dx_k + u_{k,j} dX_j \\ &= (\delta_{kj} + u_{k,j}) dX_j, \end{aligned} \quad (12.5)$$

¹ Einsteinin sopimuksen mukaan summataan toistuvan indeksiin suhteen, eli $a_k b_k \equiv \sum_{k=1}^3 a_k b_k$.

missä $\delta_{kj} = 1$, jos $k = j$, ja $\delta_{kj} = 0$, jos $k \neq j$, ja $u_{i,j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ on siirtymävektorin komponentin u_i osittaisderivaatta koordinaatin X_j suhteen.

Viiva-alkion neliöiden erotus voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} (ds)^2 - (dS)^2 &= (\delta_{ki} + u_{k,i}dX_i)(\delta_{kj} + u_{k,j}dX_j) - dX_k dX_k \\ &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})2dX_i dX_j \\ &= 2\epsilon_{ij}dX_i dX_j, \end{aligned} \quad (12.6)$$

missä

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (12.7)$$

ovat Greenin-Lagrangen venymän komponentit.

Identifioimalla koordinaatit ja siirtymät siten, että $x = X_1$, $y = X_2$ ja $z = X_3$; $u = u_1$, $v = u_2$ ja $w = u_3$, laatan mielivaltaisen pisteen Q siirtymät ovat

$$u_Q = u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (12.8)$$

$$v_Q = v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (12.9)$$

$$w_Q = w, \quad (12.10)$$

missä $u(x, y, 0)$ ja $v(x, y, 0)$ ovat pistettä Q vastaavan laatan keskipinnan, $z = 0$, pisteen siirtymät akseleiden x ja y suuntiin.

Kohtuullisen taipuman tapauksessa (taipuma laatan paksuuden suuruusluokassa) laatan keskipinnan muodonmuutoksen epälineaariset komponentit ovat likimääräisesti ($el \doteq$ epälineaarinen)

$$\epsilon_{11,el} \equiv \epsilon_{x,el} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (12.11)$$

$$\epsilon_{22,el} \equiv \epsilon_{y,el} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (12.12)$$

$$\epsilon_{12,el} \equiv \epsilon_{xy,el} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (12.13)$$

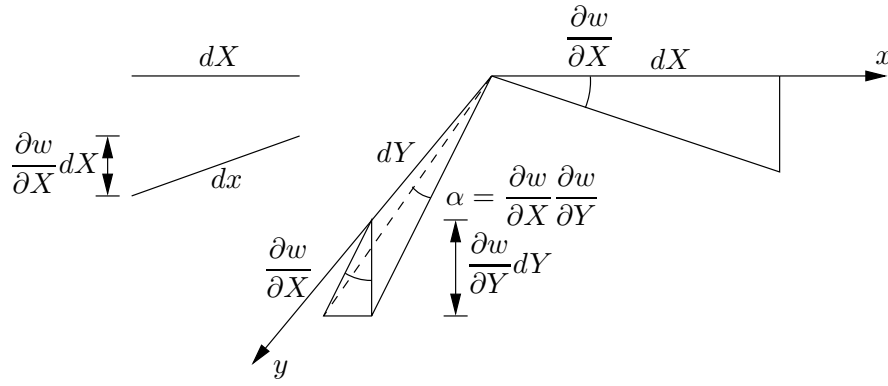
kun siirtymäkomponenttien $u = u_1$ ja $v = u_2$ epälineaariset osuudet jätetään laatan taipumasta w seuraavien osuuksien rinnalla pieninä suureina pois. Epälineaaristen kalvomuodonmuutosten syntyä on havainnollistettu kuvassa 12.1.

Sijoittamalla siirtymiä koskevat Kirchhoffin otaksumat muodonmuutoskomponenttien kaavoihin saadaan yksinkertaistusten jälkeen laatalle epälineaariset venymäkaavat, ns. von Kármánin laattateorian kaavat. Etäisyydellä z laatan keskipinnalta laatan muodonmuutokset ovat

$$\epsilon_x = \epsilon_x + z\kappa_x, \quad (12.14)$$

$$\epsilon_y = \epsilon_y + z\kappa_y, \quad (12.15)$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{xy} + z\kappa_{xy}, \quad (12.16)$$



Kuva 12.1 Laatan epälineaariset kalvomuodonmuutokset.

missä laatan keskipinnan muodonmuutokset ovat

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (12.17)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (12.18)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (12.19)$$

ja laatan käyristymät ovat

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (12.20)$$

Laatan keskipinnan muodonmuutokset toteuttavat yhteensopivuusehdon

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (12.21)$$

missä on merkitty $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$.

Yleistetyn Hookein lain mukaan tasojännitystilassa kalvomuodonmuutosten ja kalvovoimien välillä ovat yhteydet

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y), \quad (12.22)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x), \quad (12.23)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{Gh} N_{xy}, \quad (12.24)$$

missä $G \equiv \frac{E}{2(1+\nu)}$ on liukumoduuli.

Määrittelemällä Airyn jännitysfunktio $F(x, y)$ siten, että

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (12.25)$$

kalvovoimat toteuttavat tasapainoehdot

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (12.26)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (12.27)$$

identtisesti.

Lausumalla yhteensopivuusehdossa kalvomuodonmuutokset kalvovoimien ja jännitysfunktion avulla tulee yhtälö

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (12.28)$$

Lausumalla laatan tasapainoyhtälössä kalvovoimat Airyn jännitysfunktion avulla saadaan

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (12.29)$$

Yhtälöt (12.28) ja (12.29) ovat Kármánin-Föpplin yhtälöt (1910), (1907). Yhtälöiden analyttinen ratkaisu on hyvin hankala, mutta elementtimenetelmällä tai differenssimenetelmällä ratkaisu onnistuu periaatteessa helposti.

Ottamalla huomioon isotrooppisen kimmoisen aineen konstitutiiviset yhtälöt

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y), \quad (12.30)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x), \quad (12.31)$$

$$\tau_{xy} = 2G\epsilon_{xy} \quad (12.32)$$

saadaan laatan muodonmuutosenergian lauseke

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + 2\tau_{xy} \epsilon_{xy}) dV, \quad (12.33)$$

missä V on laatan tilavuus, muotoon

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y) + 4G\epsilon_{xy}^2 \right] dV. \quad (12.34)$$

Homogeenisen laatan tapauksessa

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} z E dz = 0, \quad (12.35)$$

ja muodonmuutosenergian lauseke saadaan jaettua kahteen osaan

$$U = U_m + U_b, \quad (12.36)$$

missä

$$U_m = \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_A [\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + 2(1-\nu)\varepsilon_{xy}^2] dA, \quad (12.37)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_A [\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y + 2(1-\nu)\kappa_{xy}^2] dA. \quad (12.38)$$

Laatan keskipintaa vastaan kohtisuoran, jakautuneen kuorman potentiaali on

$$V = - \int_A p(x, y) w(x, y) dA. \quad (12.39)$$

Kokonaispotentiaalienergia (tai lyhyemmin potentiaalienergia) on muodonmuutosenergian ja ulkoisen kuorman potentiaalin summa

$$\Pi = U + V. \quad (12.40)$$

Tarkastellaan esimerkkinä kuvan 12.2 kaikilta reunoilta vapaasti tuettua neliölaattaa. Reuna $y = a$ pysyy suorana, ja sen siirtymä on $v = -2ae$, missä e on siirtymäkerroin. Reunat $x = \pm a$ ovat vapaasti tuetut, ja reunat liukuvat koordinaatin y suunnassa, mutta x :n suuntainen liike on estetty. Otaksutaan laattaan alkutaipuma

$$w_0(x, y) = C_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a}, \quad (12.41)$$

missä C_0 on alkutaipuman arvo laatan keskipisteessä. Laatan siitymien lausekkeiksi otaksutaan

$$u(x, y) = B \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2a}, \quad (12.42)$$

$$v(x, y) = B \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{a} - e(y + a), \quad (12.43)$$

$$w(x, y) = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a}, \quad (12.44)$$

missä B ja C ovat tuntemattomat kertoimet.

Laatan taivutukseen liittyvän muodonmuutosenergian lauseke

$$\begin{aligned} U_b &= \frac{1}{2} D \int_A [\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y + 2(1-\nu)\kappa_{xy}^2] dA \\ &= \frac{1}{2} D \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA \end{aligned} \quad (12.45)$$

voidaan kirjoittaa muotoon

$$U_b = \frac{1}{2} D \int_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dA. \quad (12.46)$$

Ottamalla huomioon alkutaipuma w_0 tulee

$$U_b = \frac{1}{2}D \int_A \left\{ \left(\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dA. \quad (12.47)$$

Sijoittamalla taipuman ja alkutaipuman lausekkeet muodonmuutosenergian kaavaan saadaan integrointien jälkeen

$$U_b = D \frac{\pi^4 (C - C_0)^2}{8a^2}. \quad (12.48)$$

Sijoittamalla vuorostaan laatan keskipinnan muodonmuutokset

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2, \quad (12.49)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2, \quad (12.50)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (12.51)$$

missä alkutaipuman w_0 vaikutus on mukana, kalvotilan muodonmuutosenergian kaavaan tulee

$$U_m = \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ 4a^2 e^2 - \frac{\pi^2(1+\nu)}{4} eC^2 + \frac{5\pi^4}{256a^2} C^4 - \frac{\pi^2(5-3\nu)}{6a} C^2 B + \frac{64+81\pi^2-\nu(9\pi^2-64)}{36} B^2 + \frac{5\pi^4}{256a^2} C_0^4 - \frac{5\pi^4}{128a^2} C^2 C_0^2 + \frac{\pi^2(1+\nu)}{4} eC_0^2 + \frac{\pi^2(5-3\nu)}{6a} BC_0^2 \right\}, \quad (12.52)$$

missä Poissonin luvun arvoksi otaksutaan $\nu = 0.3$.

Derivoimalla potentiaalienergian kaava kertoimien B ja C suhteen seuraa nyt, kun $\Pi = U_b + U_m$,

$$\frac{\partial(U_b + U_m)}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial(U_b + U_m)}{\partial C} = 0. \quad (12.53)$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan ratkaistua

$$B = 0.1418 \frac{C^2 - C_0^2}{a}. \quad (12.54)$$

Sijoittamalla tämä jälkimmäiseen yhtälöön seuraa

$$[5.698(C^2 - C_0^2) + 4.059h^2 - 6.415a^2e] C = 4.059h^2 C_0. \quad (12.55)$$

Virheettömän laatan tapauksessa $C_0 = 0$, ja viimeisin yhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$(5.698C^2 + 4.059h^2 - 6.415a^2e)C = 0, \quad (12.56)$$

jonka ratkaisut ovat

$$C = 0 \quad \vee \quad C = \frac{\sqrt{6.415a^2e - 4.059h^2}}{5.6974}. \quad (12.57)$$

Jotta kertoimen C lausekkeen juurettava olisi positiivinen, täytyy reunan $y = a$ tasaista siirtymää kuvaavan parametrin e toteuttaa ehto $e > e_{kr} = 0.6327 \frac{h^2}{a^2}$. Tätä e :n arvoa vastaava kalvovoima suorassa perustilassa on

$$N_{y,kr} = -\frac{Eh}{1-\nu^2} e_{kr} = -\frac{0.6327}{1-\nu^2} \frac{Eh^3}{a^2}. \quad (12.58)$$

Reunojen $x = \pm a$ liikutuet eivät salli siirtymää x :n suuntaan, joten suorassa perustilassa

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_x = \nu N_y. \quad (12.59)$$

Määritetään seuraavaksi kalvovoiman N_y ja laatan taipuman C välinen riippuvaisuus muotovirheellisen laatan tapauksessa (alkutaipuma $C_0 \neq 0$). Yleistetyn Hooken lain mukaan tasojännitystilassa

$$N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x). \quad (12.60)$$

Laatan reunalla $y = a$ kalvovenymä $\varepsilon_x = 0$. Kaavan

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (12.61)$$

avulla tulee kalvovoiman N_y jakaumaksi reunalla $y = a$

$$N_y(x, a) = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[e + \frac{C^2 - C_0^2}{a^2} \left(0.4455 - 1.234 \cos \frac{\pi x}{2a} \right) \cos \frac{\pi x}{2a} \right]. \quad (12.62)$$

Antamalla reunan $y = a$ tasaista siirtymää kuvaavalle parametrille arvo voidaan laatan taipuma laskea kaavasta (12.55)

Kuvassa 12.2 on esitetty parametrin e arvolla $e = 10e_{kr}$ kalvovoiman $N_y(x, a)$ jakauma reunalla $y = a$. Samassa kuvassa on myös kalvovoiman N_x jakauma. Kalvovoima N_y jakautuu voimakkaasti uudelleen ylikriittisessä tilassa siten, että reunat kantavat enemmän kuormaa kuin keskusta.

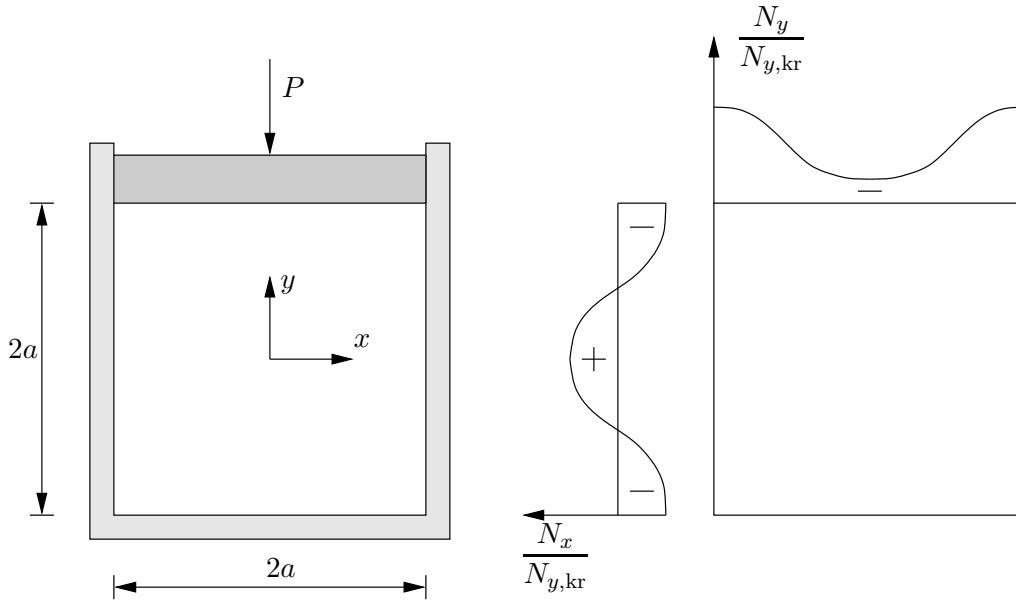
Kalvovoiman keskiarvo voidaan laskea kaavalla

$$\bar{N}_y = \frac{\int_{-a}^a N_y dx}{2a}. \quad (12.63)$$

Sijoittamalla voiman N_y lauseke kaavasta (12.62) tulee

$$\bar{N}_y(x, a) = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left[0.6327 \left(1 - \frac{C_0}{C} \right) + 0.5549 \left(\frac{c^2}{h^2} - \frac{c_0^2}{h^2} \right) \right]. \quad (12.64)$$

Keskimääräisen kalvovoiman $\bar{N}_y(x, a)$ ja taipuman C riippuvaisuus on piirretty kuvaan 12.3.



Kuva 12.2 Laatan kalvovoimat ylikriittisessä tilassa.

Kuvaan 12.3 on piirretty vertailun vuoksi myös vapaasti tuetun pilarin (yksilön levyisen puristetun laattakaistan) epälineaarinen ratkaisu. Laattakaistan kriittinen puristava voima on

$$N_{kr} = -\frac{\pi^2 EI}{L^2} = -\frac{\pi^2 E h^3}{4a^2} = -0.2056 \frac{E h^3}{a^2}. \quad (12.65)$$

Laattakaistan kriittinen kalvovoima on paljon pienempi kuin vastaavan reunoilta tuetun levyn ($\frac{0.6327}{1-\nu^2} \frac{E h^3}{a^2} \leftrightarrow 0.2056 \frac{E h^3}{a^2}$). Jälkikriittisessä tilassa laattakaista on paljon joustavampi kuin reunoilta $x = \pm a$ tuettu laatta.

Epälineaarisen laattateorian laskelmat muodostuvat varsin hankaliksi, vaikka laatan taipumaa ja siirtymiä kuvattaisiin yksinkertaisilla funktioilla ja tehtävä ratkaistaisiin energiamenetelmällä. Vaihtoehtoisesti laatan kantokykyä voidaan arvioida tehokkaan leveyden menetelmällä, jonka on esittänyt von Kármán. Tutkitaan x -akselin suunnassa puristettua vapaasti tuettua laattaa. Edellisen esimerkin perusteella otaksutaan ylikriittisessä tilassa kalvovoiman jakautuvan tasaisesti reunakaistoille, joiden leveys on $\frac{1}{2}b_e$, b_e on ns. tehokas leveys. Otaksuttu jakauma on yksinkertainen soveltaa ja approksimoi todellista jakaumaa. Jos $b_e \ll a$, niin voidaan soveltaa kapealle vapaasti tuetulle laatalle johdettua lommahdusvoiman kaavaa

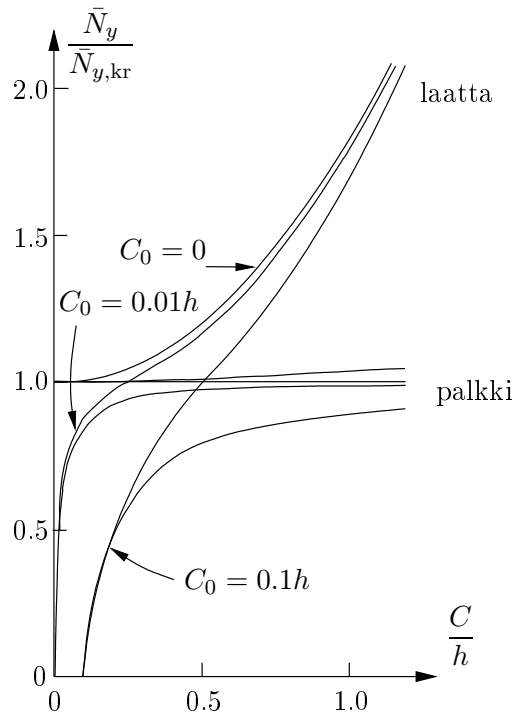
$$\bar{N}_x = -4 \frac{\pi^2 D}{b_e^2}. \quad (12.66)$$

Rajakuorma saavutetaan, kun reunakaistat menevät myötörajalle. Tällöin

$$\bar{N}_x = -h\sigma_m, \quad (12.67)$$

missä σ_m on myötöraja, ja saadaan ratkaistua

$$b_e^2 = \frac{4\pi^2 D}{h\sigma_m}, \quad (12.68)$$



Kuva 12.3 Laatan kalvovoiman $\bar{N}_y(x, a)$ ja taipuman riippuvaisuus.

eli

$$b_e = 2\pi \sqrt{\frac{D}{h\sigma_m}}. \quad (12.69)$$

Laatan maksimikuorma on $P_p = b_e h \sigma_m$. Sijoittamalla tähän b_e ja $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ tulee

$$P_p = ch^2 \sqrt{E\sigma_m}, \quad (12.70)$$

missä on merkitty

$$c = \frac{\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \approx 1.9, \quad (12.71)$$

kun Poissonin luku on $\nu = 0.3$.

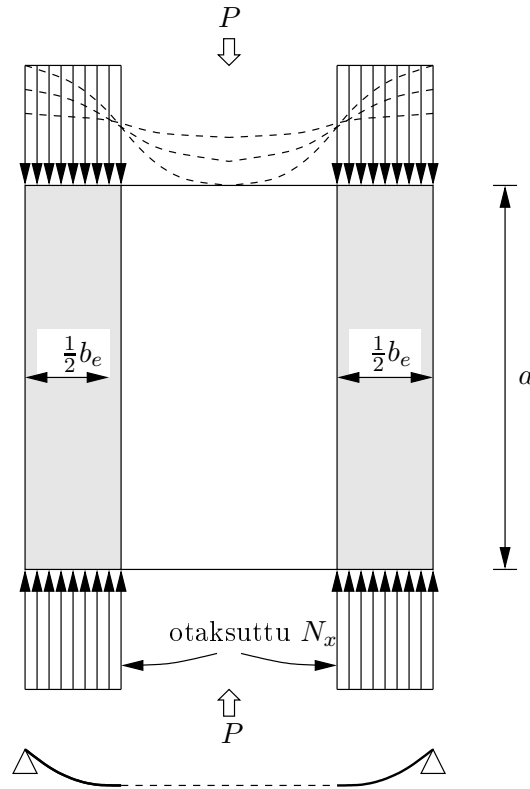
Koetulosten perusteella on johdettu tarkempi kaava

$$c = 1.9 \left(1 - \frac{0.42h}{b} \sqrt{\frac{E}{\sigma_m}} \right). \quad (12.72)$$

Tehokkaan leveyden menetelmä on yksinkertainen, mutta sillä ei ole kunnollista teoreettista perustelua.

Esimerkki 12.1 *Neliön muotoiseen kalvoon kohdistuu tasainen paine. Määritetään kalvon taipuma energiamenetelmällä.*

Hyvin ohuen laatan tapauksessa voidaan taivutukseen liittyvä energia jättää huomioonottamatta kalvomuodonmuutosten energian rinnalla. Kalvon venymät ovat pienen



Kuva 12.4 Laatan tehokas leveys b_e .

mutta äärellisen taipuman tapauksessa von Kármánin mukaan

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (12.73)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (12.74)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (12.75)$$

Laatan kalvotilan muodonmuutosenergian lauseke on

$$U_m = \frac{1}{2} \int_A (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + 2N_{xy} \varepsilon_{xy}) dA. \quad (12.76)$$

Ottamalla huomioon isotrooppisen kimmoisen aineen konstitutiiviset yhtälöt

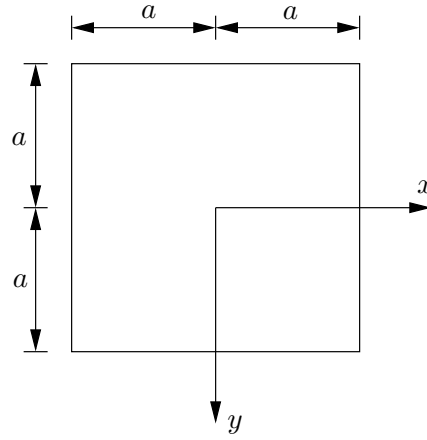
$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad (12.77)$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad (12.78)$$

$$N_{xy} = 2Gh \varepsilon_{xy} \quad (12.79)$$

saadaan muodonmuutosenergian lauseke kirjoitettua muotoon

$$U_m = \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_A [\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + 2(1-\nu) \varepsilon_{xy}^2] dA. \quad (12.80)$$



Kuva 12.5 Neliön muotoinen kalvo.

Sijoittamalla tähän kalvovenymien kaavat tulee

$$\begin{aligned}
 U_m = \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \\
 + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^2 + 2\nu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 \left. + \frac{1-\nu}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} dA.
 \end{aligned} \tag{12.81}$$

Ulkoisen kuorman (tasaisen paineen) potentiaali on

$$V = - \int_A p(x, y) w(x, y) dA, \tag{12.82}$$

ja potentiaalienergia on $\Pi = U_m + V$.

Otaksutaan siirtymille lausekkeet

$$u(x, y) = B \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2a}, \tag{12.83}$$

$$v(x, y) = B \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{a}, \tag{12.84}$$

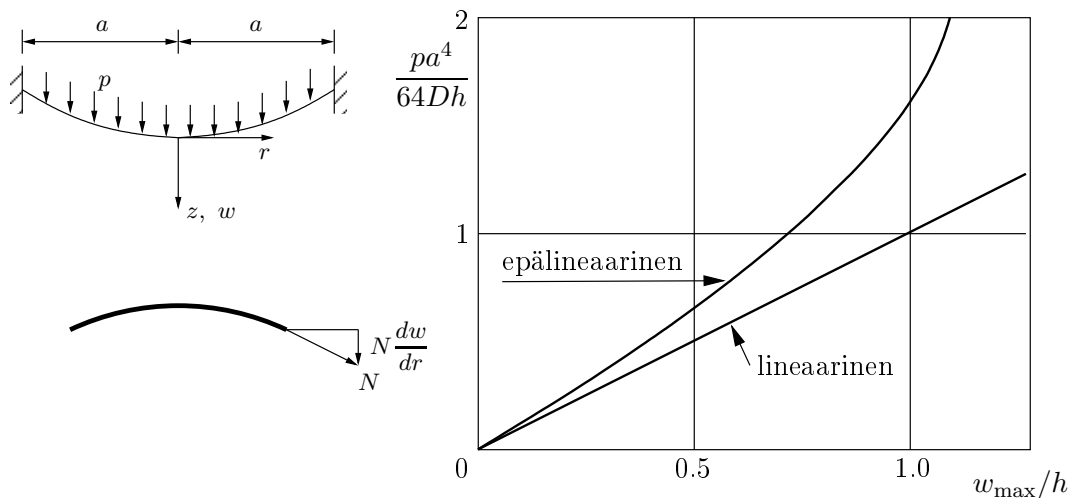
$$w(x, y) = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a}. \tag{12.85}$$

Sijoittamalla siirtymien lausekkeet kalvoenergian kaavaan tulee

$$\begin{aligned}
 U_m = \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{5\pi^4}{256a^2} C^4 - \frac{\pi^2(5-3\nu)}{6a} C^2 B \right. \\
 \left. + \frac{64 + 81\pi^2 - \nu(9\pi^2 - 64)}{36} B^2 \right].
 \end{aligned} \tag{12.86}$$

Poissonin luvun arvolla $\nu = 0.25$ tulee

$$U_m = \frac{Eh}{7.5} \left[\frac{5\pi^4}{64a^2} C^4 - \frac{17\pi^2}{6a} BC^2 + \left(\frac{35\pi^2}{4} + \frac{80}{9} \right) B^2 \right]. \tag{12.87}$$



Kuva 12.6 Ympyrälaatan keskipisteen taipuma.

Kuorman potentiaali on

$$V = -\frac{16a^2}{\pi^2}pC. \quad (12.88)$$

Ehdoista

$$\frac{\partial \Pi}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial C} = 0, \quad (12.89)$$

ratkaistaan

$$C = 0.802a \left(\frac{pa}{Eh} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad B = \frac{0.147}{a}C^2. \quad (12.90)$$

Kalvon keskipisteen taipuma on

$$w(0,0) = 0.802a \left(\frac{pa}{Eh} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (12.91)$$

ja keskipisteen kalvojännitykset ovat

$$\sigma_x(0,0) = \sigma_y(0,0) = 0.396 \left(\frac{p^2 Ea^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (12.92)$$

Esimerkki 12.2 Määritetään ohuen ympyrälaatan keskipisteen taipuma kuorman funktiona.

Haetaan ympyrälaatan likiratkaisua yhdistämällä pienten siirtymien laattateorian ja kalvoteorian ratkaisut. Laatan keskipisteen taipuma tasaisesta kuormasta on infinitesimaalisen teorian mukaan

$$w(0) = \frac{pa^4}{64D}. \quad (12.93)$$

Kalvovoiman ja tasaisen kuorman tasapainoehto on

$$2\pi r N \frac{dw}{dr} + p\pi r^2 = 0 \quad (12.94)$$

eli

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{pr}{N}, \quad (12.95)$$

missä $N = N_r$ on kalvovoima. Taipumaksi saadaan integroimalla

$$w(r) = \frac{1}{4} \frac{pa^2}{N} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right], \quad (12.96)$$

ja keskipisteen taipumaksi tulee

$$w(0) = \frac{1}{4} \frac{pa^2}{N}. \quad (12.97)$$

Kalvovoima N määritetään kalvon venymän

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \quad (12.98)$$

avulla. Säteen suuntainen kalvon pitenemä on

$$\Delta = \int_0^a \varepsilon_r dr = \frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 dr = \frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{pr}{2N} \right)^2 dr = \frac{p^2 a^3}{24N^2}. \quad (12.99)$$

Keskimääräinen venymä on

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{a} = \frac{p^2 a^2}{24N^2}. \quad (12.100)$$

Hooken lain mukaan

$$\varepsilon = \frac{1}{Eh} (N_r - \nu N_\theta) = \frac{1 - \nu}{Eh} N, \quad (12.101)$$

josta seuraa

$$N^3 = \frac{E}{1 - \nu} \frac{p^2 a^2 h}{24}. \quad (12.102)$$

Eliminoimalla kalvovoima N keskipisteen taipuman kaavan avulla saadaan

$$p = \frac{8}{3} \frac{E}{1 - \nu} \frac{h}{a} \left(\frac{w(0)}{a} \right)^3, \quad (12.103)$$

joka on kalvovoiman kantama osuus kuormasta. Yhteensä

$$p = \frac{64D}{a^3} \frac{w(0)}{a} + \frac{8}{3} \frac{E}{1 - \nu} \frac{h}{a} \left(\frac{w(0)}{a} \right)^3. \quad (12.104)$$

Jos Poissonin luvun arvo on $\nu = 0.3$, niin

$$\frac{pa^4}{64Dh} = \frac{w(0)}{h} \left[1 + 0.65 \left(\frac{w(0)}{h} \right)^2 \right]. \quad (12.105)$$

Kun $w(0) = h$ (laatan paksuus), niin toisen termin osuus on 65%.

Luku 13

Sylinterikuoren lommahdus

13.1 Sylinterikuoren pyörähdysymmetrinen lommahdus

Tarkastellaan puristettua sylinterikuorta. Lommahdusmuoto otaksutaan symmetriseksi. Ajatellaan kuoren seinästä erotetuksi suikale, jonka leveys on $Rd\theta$, missä θ on sylinterin polaarinen koordinaatti ja R on sylinterin säde. Sylinterin akselin suuntainen koordinaatti on x , ja sylinterin seinämän vahvuus on h .

Tutkitaan infinitesimaalisen suikaleen $dx \times (Rd\theta \times h)$ tasapainoa. Samalla tavalla kuin aikaisemmin palkille saadaan nyt sylinteristä irtileikatuksi ajatellulle suikaleelle tasapainoehto

$$-\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p - p_\theta, \quad (13.1)$$

eli

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p_\theta = p, \quad (13.2)$$

missä w kuoren taipuma ja p on jakautunut säteen suuntainen kuorma. Palkin tasapainoehtoon verrattuna palkin taivutusjäykkyys EI on korvattu kuoren seinämän taivutusjäykkyydellä $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, ja lisäksi on tullut jakautunut voima p_θ .

Voima p_θ aiheutuu siitä, että suikaleen taipuessa sitä vastaan kohtisuorien renkaiden täytyy venyä tai puristua kokoon. Pyörähdysymmetrisen taipuman tapauksessa renkaiden venymä on

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(R+w) - 2\pi R}{2\pi R} \approx \frac{w}{R}, \quad (13.3)$$

ja sitä vastaava kalvovoima (renkaan suunnassa) on

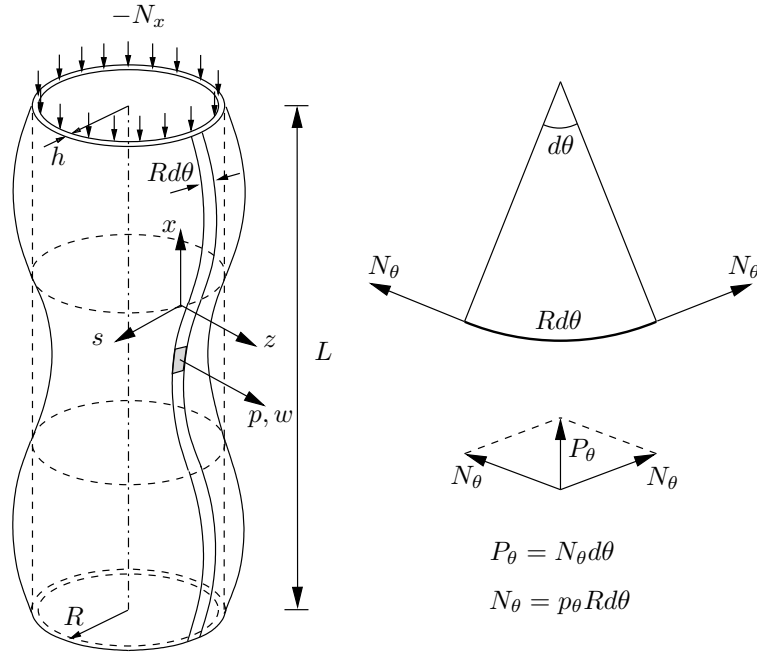
$$N_\theta = \frac{Ehw}{R}. \quad (13.4)$$

Kalvovoimalla, joka kohdistuu tarkasteltavan suikaleen x :n suuntaisiin reunoihin, on säteen suuntainen komponentti

$$p_\theta Rd\theta dx = N_\theta d\theta dx = \frac{Ehw}{R} d\theta dx, \quad (13.5)$$

ja

$$p_\theta = \frac{Ehw}{R^2}. \quad (13.6)$$



Kuva 13.1 Puristettu sylinterikuori.

Sylinterin tasapainoyhtälöksi saadaan paineen p_θ sijoittamisen jälkeen

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{Eh}{R^2} w = p. \quad (13.7)$$

Yhtälö on täysin sama kuin kimmoisella alustalla olevan puristetun palkin tasapainoyhtälö, kun alustaluku on

$$k = \frac{Eh}{R^2}. \quad (13.8)$$

Fysikaalinen analogia löytyy helposti: tynnyrin vanteet (sylinterin kuvitellut renkaat) muodostavat kimmoisen alustan pituussuuntaisille suikaleille.

Asetetaan seuraavassa poikittainen paine p nolaksi. Päistään vapaasti tuetun sylinterin reunaehdot toteuttaa pyörähdyssymmetrinen lommahdusmuoto

$$w(x) = C_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (13.9)$$

missä m on sinifunktion puolialtojen lukumäärä ja C_m ovat kertoimia. Sijoittamalla otaksuttu lommahdusmuoto tasapainoehtoon saadaan

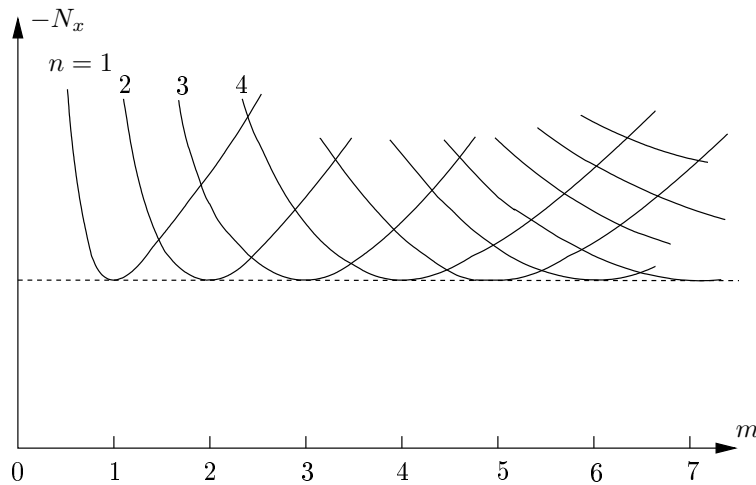
$$N_{x,kr} = -D \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{Eh}{R^2 D} \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2 \right]. \quad (13.10)$$

Pienin lommahdusvoiman arvo saavutetaan, kun

$$\frac{m\pi}{L} = \left(\frac{Eh}{R^2 D} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (13.11)$$

ja tällöin

$$N_{x,kr,\min} = -\frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{Eh^2}{R} \right). \quad (13.12)$$



Kuva 13.2 Puristetun sylinterikuoren lommahduskuorma.

Lommahduskuorman minimiarvoon päästään, kun vapaasti tuetun sylinterin pituus L on sellainen, että siihen sopii kokonaisluvun m verran sinin puolialtoja. Muissa tapauksissa lommahduskuorma on suurempi, kuva 13.2. Edellä esitetty ratkaisu on voimassa myös hyvin pitkälle sylinterille, kun reuna-alueita (sylinterin päitä) ei oteteta huomioon.

13.1.1 Energiamenetelmä

Sylinterikuoren pyörähdyssymmetrisen lommahdumuodon tapauksessa potentiaalienergian toisen variaation kaava voidaan kirjoittaa suoraan käyttämällä hyväksi samankaltaisuutta palkin energialausekkeen kanssa:

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi = 2\pi R \int_0^L \frac{1}{2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + Eh \left(\frac{w}{R} \right)^2 + N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (13.13)$$

Sijoittamalla yrite

$$w(x) = C_m \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (13.14)$$

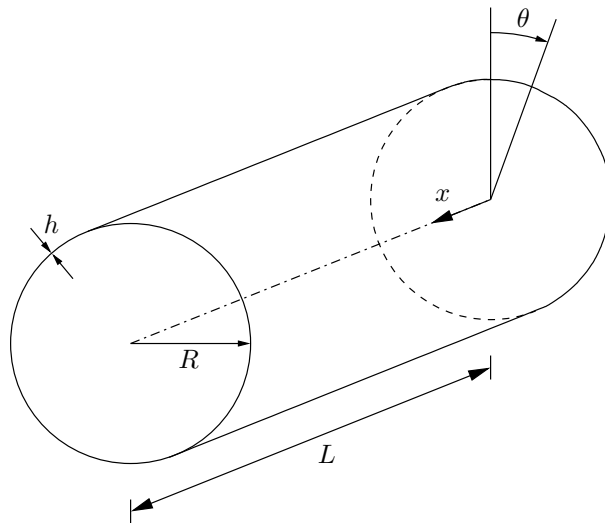
saadaan Trefftzin ehdosta

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2}\delta^2\Pi \right)}{\partial C_m} = 0 \quad (13.15)$$

sama ratkaisu kuin edellä differentiaaliyhtälöstä, eli

$$N_{x,kr} = -D \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{Eh}{R^2 D} \left(\frac{L}{m\pi} \right)^2 \right]. \quad (13.16)$$

Pyörähdyssymmetrinen lommahdusmuoto tulee kyseeseen vain paksuseinäisillä tai hyvin lyhyillä sylinterikuorilla. Lommahduskuorma N_x on kuitenkin verrannollinen suureeseen $\frac{Eh^2}{R}$.



Kuva 13.3 Sylinterikuori.

13.2 Laakean sylinterikuoren tasapainoyhtälöt

Määritellään koordinaatisto (x, s, z) siten, että sylinteripinta (x, s) on kuoren seinämän keskipinta, x on sylinterin akselin suuntainen koordinaatti, s kaaren suuntainen koordinaatti ja z on pintaa vastaan kohtisuora koordinaatti. Kuoren seinämän vahvuus on h . Kuorialkion $dx \times ds \times h$ reunoihin vaikuttavat jännitysresultantit ovat

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \quad N_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_s dz, \quad (13.17)$$

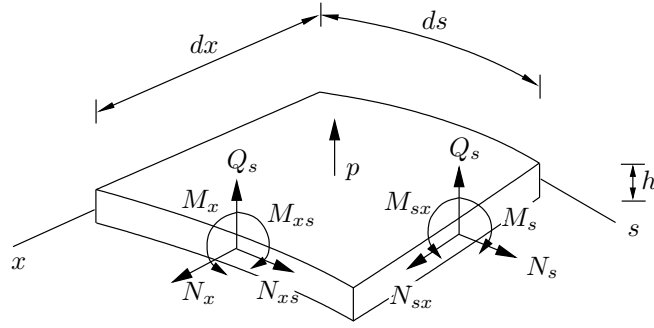
$$N_{xs} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xs} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \quad N_{sx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{sx} dz, \quad (13.18)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \quad Q_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{sz} dz, \quad (13.19)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz, \quad M_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_s z dz, \quad (13.20)$$

$$M_{xs} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xs} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz, \quad M_{sx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{sx} z dz, \quad (13.21)$$

missä N_x , N_{xs} , N_s ja N_{sx} ovat kalvon normaalivoimat ja leikkausvoimat, Q_x ja Q_s ovat poikittaiset leikkausvoimat, M_x ja M_s ovat taivutusmomentit, M_{xs} ja M_{sx} ovat vääntömomentit.



Kuva 13.4 Sylinterikuoren jännitysresultantit

Tarkastelemalla kuorialkion $dx \times ds \times h$ tasapainoa johdetaan sylinterikuoren tasapainoehdot

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} = 0, \quad (13.22)$$

$$\frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{Q_s}{R} = 0, \quad (13.23)$$

$$\frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{N_s}{R} - N_x \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - N_{xs} \frac{\partial \beta_s}{\partial x} - N_{sx} \frac{\partial \beta_x}{\partial s} - N_s \frac{\partial \beta_s}{\partial s} + p = 0. \quad (13.24)$$

Momenttien tasapainoehdot ovat

$$Q_s = \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial M_{xs}}{\partial x}, \quad (13.25)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{sx}}{\partial s}. \quad (13.26)$$

Tasapainoehto $\sum M_z = 0$ toteutuu identtisesti.

Eliminoimalla leikkausvoimat tasapainoehdoista (lukuunottamatta leikkausvoimaa Q_s toisessa tasapainoyhtälössä) tulee

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{sx}}{\partial s} = 0, \quad (13.27a)$$

$$\frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{Q_s}{R} = 0, \quad (13.27b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xs}}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 M_{sx}}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} \\ & - \frac{N_s}{R} - N_x \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - N_{xs} \frac{\partial \beta_s}{\partial x} - N_{sx} \frac{\partial \beta_x}{\partial s} - N_s \frac{\partial \beta_s}{\partial s} + p = 0. \end{aligned} \quad (13.27c)$$

Laakean kuoren tapauksessa leikkausvoiman Q_s osuus voidaan jättää pois muiden termien rinnalla. Ohuelle kuorelle $\frac{z}{R}$ on pieni ykkösen rinnalla, ja tällöin voidaan asettaa

$$N_{sx} = N_{xs}, \quad M_{sx} = M_{xs}. \quad (13.28)$$

Tasapainoyhtälöt voidaan nyt **laakean kuoren** tapauksessa kirjoittaa hieman yksin-

on kalvon jäykkyys. Taivutusmomenttien ja kuoren käyritysmien väliset yhtälöt ovat

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_s), \quad (13.36)$$

$$M_s = D(\kappa_s + \nu\kappa_x), \quad (13.37)$$

$$M_{xs} = D(1 - \nu)\kappa_{xs}, \quad (13.38)$$

missä

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (13.39)$$

on kuoren taivutusjäykkyys.

Sylinterikuoren keskipinnan muodonmuutokset ja käyritysmät määritellään kaavoilla

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\beta_x^2, \quad \varepsilon_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\beta_s^2, \quad \varepsilon_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}\beta_x\beta_s, \quad (13.40)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x}, \quad \kappa_s = \frac{\partial \beta_s}{\partial s}, \quad \kappa_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial s} + \frac{\partial \beta_s}{\partial x} \right), \quad (13.41)$$

missä

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \beta_s = -\frac{\partial w}{\partial s} \quad (13.42)$$

ovat kiertymät. Koordinaattien x , y ja z suuntaiset siirtymät ovat u , v ja w . Merkitään vielä, että kalvomuodonmuutosten lineaariset osuudet ovat

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R}, \quad e_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (13.43)$$

jolloin

$$\varepsilon_x = e_x + \frac{1}{2}\beta_x^2, \quad \varepsilon_s = e_s + \frac{1}{2}\beta_s^2, \quad \varepsilon_{xs} = e_{xs} + \frac{1}{2}\beta_x\beta_s. \quad (13.44)$$

Kiertymän β_s kaavassa on tehty laakean kuoren tapauksessa likimääräistys jättämällä siirtymän v vaikutus pois. Kiertymän β_s tarkempi kaava on

$$\beta_s = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial s}. \quad (13.45)$$

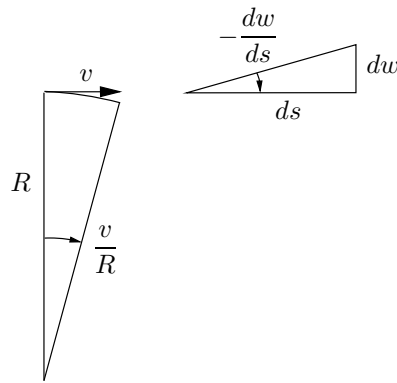
Yllä olevat kinemaattiset yhtälöt on esittänyt Donnell.

Kalvomuodonmuutoksissa on samanlaiset geometrisesti epälineaariset termit kuin laatan vastaavissa muodonmuutoksissa. Muodonmuutoksen ε_s termi $\frac{w}{R}$ aiheutuu sylinterin säteen pituuden muutoksesta (taipuman w verran), eli

$$\varepsilon_{s,w} = \frac{2\pi(R+w) - 2\pi R}{2\pi R} \approx \frac{w}{R}, \quad (13.46)$$

kuten pyörähdyssymmetrisen lommahdusmuodon yhteydessä johdettiin. Kuvan 13.6 perusteella kiertymä β_s on

$$\beta_s = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v}{R}. \quad (13.47)$$



Kuva 13.6 Sylinterikuoren kiertymä β_s .

Kun kuoren säde lähestyy ääretöntä, niin kinemaattiset yhtälöt lähestyvät laatan vastaavia yhtälöitä. Laatan keskipinnan muodonmuutokset ovat

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (13.48)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (13.49)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (13.50)$$

ja laatan käyristymät ovat

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (13.51)$$

Laatan tapauksessa kiertymät ovat

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (13.52)$$

Etäisyydellä z kuoren keskipinnalta kuoren mielivaltaisen pisteen muodonmuutokset ovat ¹

$$\epsilon_x = \varepsilon_x + z\kappa_x, \quad (13.53)$$

$$\epsilon_y = \varepsilon_y + z\kappa_y, \quad (13.54)$$

$$\epsilon_{xs} = \varepsilon_{xs} + z\kappa_{xs}. \quad (13.55)$$

Sijoittamalla osa konstitutiivisista yhtälöistä kolmanteen tasapainoehtoon saadaan tasapainodifferentiaaliyhtälöiden ryhmä kirjoitettua muotoon

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{sx}}{\partial s} = 0, \quad (13.56)$$

$$\frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} = 0, \quad (13.57)$$

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \right) + \frac{N_s}{R} - \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xs} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} + N_s \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = p, \quad (13.58)$$

¹Kuoren mielivaltaisen pisteen muodonmuutos esim. x :n suunnassa on $\epsilon_x = \epsilon_x(x, s, z)$, mutta keskipinnan vastaava muodonmuutos on $\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, s)$.

missä kuoren taipumaan kohdistettu biharmoninen operaattori on lyhyemmin merkittynä

$$\nabla^4 w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial s^4}. \quad (13.59)$$

Yhtälöt ovat laakean sylinterikuoren epälineaariset tasapainoehdot, ja niitä on sovellettu laajasti sylinterikuoren suuren taipuman analyysihin. Tasapainoyhtälöissä ovat tuntemattomina N_x , N_s , N_{xs} ja taipuma w .

Tasapainoyhtälöt voidaan linearisoida jättämällä siirtymien u , v ja w suhteen toisen ja korkeamman asteen termit pois. Tällöin tulee

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{sx}}{\partial s} = 0, \quad (13.60a)$$

$$\frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} = 0, \quad (13.60b)$$

$$D\nabla^4 w + \frac{N_s}{R} = p, \quad (13.60c)$$

missä linearisoinnin jälkeen kalvovoimat ovat

$$N_x = C(e_x + \nu e_s), \quad (13.61)$$

$$N_s = C(e_s + \nu e_x), \quad (13.62)$$

$$N_{xs} = C(1 - \nu)e_{xs} \quad (13.63)$$

ja lineaariset kalvomuodonmuutokset ovat

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R}, \quad e_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (13.64)$$

Tasapainoyhtälöt (13.60) muodostavat kolmen toisiinsa kytkeytyneen differentiaaliyhtälön ryhmän, jossa ovat tuntemattomina N_x , N_s , N_{xs} ja w .

Eliminoimalla kalvovoimat konstitutiivisten yhtälöiden avulla saadaan kolme tasapainoyhtälöä

$$-C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad (13.65)$$

$$-C \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0, \quad (13.66)$$

$$D\nabla^4 w + \frac{C}{R} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v}{\partial s} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = p, \quad (13.67)$$

joissa ovat tuntemattomina ja toisiinsa kytkeytyneinä siirtymät u , v ja w .

Donnell on yksinkertaistanut linearisoitujen tasapainoyhtälöiden systeemin kytkennän osittain purkavaan muotoon

$$\nabla^4 u = -\frac{\nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial s^2}, \quad (13.68)$$

$$\nabla^4 v = -\frac{2 + \nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3}, \quad (13.69)$$

$$D\nabla^8 w + \frac{1 + \nu^2}{R^2} C \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \nabla^4 p. \quad (13.70)$$

missä $\nabla^8(\bullet) \equiv \nabla^4(\nabla^4(\bullet))$.

Laatan von Kármánin ja Föpplin yhtälöitä vastaavaan kahden tuntemattoman ja kahden yhtälön systeemiin päädytään määrittelemällä Airyn jännitysfunktio $F(x, s)$ siten, että

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xs} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial s}, \quad (13.71)$$

jolloin kalvovoimat toteuttavat tasapainoehdot

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} = 0, \quad (13.72)$$

$$\frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} = 0 \quad (13.73)$$

identtisesti.

Lausumalla yhteensopivuusehdossa

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_s}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial s} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (13.74)$$

kalvomuodonmuutokset kalvovoimien ja jännitysfunktion avulla tulee yhtälö

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial s^4} = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]. \quad (13.75)$$

Lausumalla kuoren kolmannessa tasapainoyhtälössä kalvovoimat Airyn jännitysfunktion avulla saadaan

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \right) = p + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad (13.76)$$

Yhtälöt (13.75) ja (13.76) johti ensimmäisenä Donnell. Yhtälöiden analyyttinen ratkaisu on hankala, mutta kuten laatan tapauksessa ne voidaan ratkaista likimääräisesti numeerisilla menetelmillä.

Linearisoidaan Donnellin yhtälöt kirjoittamalla ne perustilassa (0) ja häirityssä tilassa (1) ja vähentämällä tilan (1) yhtälöistä perustilassa lausutut yhtälöt. Merkitään, että häirityn tilan (1) suureet ovat

$$w^1 = w^0 + w, \quad F^1 = F^0 + F, \quad (13.77)$$

missä w ja F ovat tilojen väliset inkrementit (pienet muutokset). Vähennyslaskun jälkeen saadaan kaavasta (13.75)

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial s^4} = Eh \left[2 \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (13.78)$$

ja samalla tavalla kaavasta (13.76)

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \right) \\ = \frac{\partial^2 F^0}{\partial s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F^0}{\partial x \partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial s} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial s} \\ + \frac{\partial^2 F^0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (13.79)$$

missä painekuorma on $p^1 = p^0$, eli inkrementti $p = 0$. Otaksumalla, että alkutilan käyritymät ovat nollia, eli

$$\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w^0}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial s} = 0, \quad (13.80)$$

saadaan vielä yksinkertaisemmat yhtälöt

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial s^4} = Eh \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (13.81)$$

ja

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \right) = \\ \frac{\partial^2 F^0}{\partial s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F^0}{\partial x \partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} \frac{\partial^2 F^0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (13.82)$$

Merkitsemällä

$$\nabla^4 w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial s^4}, \quad (13.83)$$

$$\nabla^4 F \equiv \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial s^4} \quad (13.84)$$

ja kohdistamalla operaattori ∇^4 yhtälöön (13.81) saadaan ensin

$$\frac{1}{R} \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad (13.85)$$

ja sitten kohdistamalla operaattori ∇^4 yhtälöön (13.82) ja ottamalla siinä kaava (13.85) huomioon saadaan

$$D \nabla^8 w - \nabla^4 \left(N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xs}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} + N_s^0 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \quad (13.86)$$

Laakean sylinterikuoren tasapainoyhtälö (13.86) voidaan johtaa myös energiamenetelmällä.

13.3 Sylinterikuoren potentiaalienergia

Kuoren kokonaispotentiaalienergia (potentiaalienergia) on muodonmuutosenergian ja ulkoisten voimien potentiaalin summa. Sylinterikuoren muodonmuutosenergia on

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_s \epsilon_s + 2 \tau_{xs} \epsilon_{xs}) dV, \quad (13.87)$$

missä V on kuoren tilavuus. Ottamalla huomioon isotrooppisen kimmoisen aineen konstitutiiviset yhtälöt

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_s), \quad (13.88)$$

$$\sigma_s = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_s + \nu\epsilon_x), \quad (13.89)$$

$$\tau_{xs} = 2G\epsilon_{xs} \quad (13.90)$$

saadaan muodonmuutosenergia lausuttua pelkästään muodonmuutosten avulla muodossa

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x^2 + \epsilon_s^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_s) + 4G\epsilon_{xs}^2 \right] dV, \quad (13.91)$$

missä kuoren mielivaltaisen pisteen $Q : (x, y, z)$ muodonmuutokset ovat

$$\epsilon_x(x, y, z) = \varepsilon_x(x, y) + z\kappa_x(x, y), \quad (13.92)$$

$$\epsilon_y(x, y, z) = \varepsilon_s(x, y) + z\kappa_s(x, y), \quad (13.93)$$

$$\epsilon_{xs}(x, y, z) = \varepsilon_{xs}(x, y) + z\kappa_{xs}(x, y). \quad (13.94)$$

Homogeenisen kuoren tapauksessa, integroimalla kuoren paksuuden yli, muodonmuutosenergian lauseke saadaan hajotettua kahteen osaan, membraani- ja taivutusosaan

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} C \int_A [\varepsilon_x^2 + \varepsilon_s^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_s + 2(1-\nu)\varepsilon_{xs}^2] dA \\ &\quad + \frac{1}{2} D \int_A [\kappa_x^2 + \kappa_s^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_s + 2(1-\nu)\kappa_{xs}^2] dA, \end{aligned} \quad (13.95)$$

missä

$$C = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (13.96)$$

ovat kalvon jäykkyys ja kuoren taivutusjäykkyys, h on kuoren paksuus.

Sylinterikuoren muodonmuutosenergian lausekkeen keskipinnan, $z = 0$, muodonmuutokset ja käyritykset määritellään kaavoilla

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\beta_x^2, \quad \varepsilon_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\beta_s^2, \quad \varepsilon_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}\beta_x\beta_s, \quad (13.97)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x}, \quad \kappa_s = \frac{\partial \beta_s}{\partial s}, \quad \kappa_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial s} + \frac{\partial \beta_s}{\partial x} \right), \quad (13.98)$$

missä

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \beta_s = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial s} \quad (13.99)$$

ovat kiertymät.

Kiertymän (inkrementin) β_s kaavassa voidaan laakean kuoren tapauksessa tehdä likimääräistys jättämällä siirtymän v vaikutus pois, eli

$$\beta_s = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial s} \approx -\frac{\partial w}{\partial s}. \quad (13.100)$$

Aiemmin esitellyn merkinnän mukaisesti kalvomuodonmuutosten siirtymien suhteen lineaariset osuudet ovat

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R}, \quad e_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (13.101)$$

joten

$$\varepsilon_x = e_x + \frac{1}{2}\beta_x^2, \quad \varepsilon_s = e_s + \frac{1}{2}\beta_s^2, \quad \varepsilon_{xs} = e_{xs} + \frac{1}{2}\beta_x\beta_s. \quad (13.102)$$

Kuoren keskipintaa vastaan kohtisuoran, jakautuneen kuorman potentiaali on

$$V = - \int_A p(x, s) w(x, s) dA. \quad (13.103)$$

Potentiaalienergia on muodonmuutosenergian ja ulkoisen kuorman potentiaalin summa

$$\Pi = U + V. \quad (13.104)$$

13.3.1 Potentiaalienergian toinen variaatio

Sylinterikuoren tasapainoaseman stabiiliutta tutkitaan potentiaalienergian toisen variaation avulla. Ulkoisen kuorman potentiaalin

$$V = - \int_A p w dA \quad (13.105)$$

toinen variaatio on nyt nolla.

Sylinterikuoren muodonmuutosenergian lauseke (13.95) voidaan konstitutiivisten yhtälöiden avulla kirjoittaa myös muotoon

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int_A [N_x \varepsilon_x + N_s \varepsilon_s + 2N_{xs} \varepsilon_{xs}] dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A [M_x \kappa_x + M_s \kappa_s + 2M_{xs} \kappa_{xs}] dA. \end{aligned} \quad (13.106)$$

Tarkastellaan potentiaalienergian muutosta, kun perustilan siirtymiin lisätään pienet muutokset, eli

$$u^0 \rightarrow u^0 + \delta u, \quad v^0 \rightarrow v^0 + \delta v, \quad w^0 \rightarrow w^0 + \delta w, \quad (13.107)$$

missä muutokset siirtymien arvoissa (siirtymien variaatiot) ovat δu , δv ja δw .

Muodonmuutosenergian toinen variaatio on

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 U = & \frac{1}{2} \int_A (\delta N_x \delta \varepsilon_x + \delta N_s \delta \varepsilon_s + 2\delta N_{xs} \delta \varepsilon_{xs} + N_x^0 \delta^2 \varepsilon_x + N_s^0 \delta^2 \varepsilon_s + 2N_{xs}^0 \delta^2 \varepsilon_{xs}) dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A (\delta M_x \delta \kappa_x + \delta M_s \delta \kappa_s + 2\delta M_{xs} \delta \kappa_{xs}) dA, \end{aligned} \quad (13.108)$$

missä muodonmuutosten variaatiot ovat

$$\delta\varepsilon_x = \delta e_x + \beta_x^0 \delta\beta_x, \quad \delta\varepsilon_s = \delta e_s + \beta_s^0 \delta\beta_s, \quad \delta\varepsilon_{xs} = \delta e_{xs} + \beta_s^0 \delta\beta_x + \beta_x^0 \delta\beta_s, \quad (13.109)$$

$$\delta e_x = \frac{\partial\delta u}{\partial x}, \quad \delta e_s = \frac{\partial\delta v}{\partial s} + \frac{\delta w}{R}, \quad \delta e_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\delta u}{\partial s} + \frac{\partial\delta v}{\partial x} \right), \quad (13.110)$$

kiertymien variaatiot ovat (laakean kuoren tapauksessa)

$$\delta\beta_x = -\frac{\partial\delta w}{\partial x}, \quad \delta\beta_s = -\frac{\partial\delta w}{\partial s}, \quad (13.111)$$

muodonmuutosten toiset variaatiot ovat

$$\delta^2\varepsilon_x = (\delta\beta_x)^2, \quad \delta^2\varepsilon_s = (\delta\beta_s)^2, \quad \delta^2\varepsilon_{xs} = \delta\beta_x\delta\beta_s \quad (13.112)$$

ja käyristymien variaatiot ovat

$$\delta\kappa_x = \frac{\partial\delta\beta_x}{\partial x}, \quad \delta\kappa_s = \frac{\partial\delta\beta_s}{\partial s}, \quad \delta\kappa_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\delta\beta_x}{\partial s} + \frac{\partial\delta\beta_s}{\partial x} \right). \quad (13.113)$$

Konstitutiivisten yhtälöiden

$$N_x = C(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_s), \quad (13.114)$$

$$N_s = C(\varepsilon_s + \nu\varepsilon_x), \quad (13.115)$$

$$N_{xs} = C(1 - \nu)\varepsilon_{xs} \quad (13.116)$$

ja

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_s), \quad (13.117)$$

$$M_s = D(\kappa_s + \nu\kappa_x), \quad (13.118)$$

$$M_{xs} = D(1 - \nu)\kappa_{xs} \quad (13.119)$$

perusteella voimasuureiden ja muodonmuutossuureiden variaatioiden väliset yhtälöt ovat

$$\delta N_x = C(\delta\varepsilon_x + \nu\delta\varepsilon_s), \quad (13.120)$$

$$\delta N_s = C(\delta\varepsilon_s + \nu\delta\varepsilon_x), \quad (13.121)$$

$$\delta N_{xs} = C(1 - \nu)\delta\varepsilon_{xs} \quad (13.122)$$

ja

$$\delta M_x = D(\delta\kappa_x + \nu\delta\kappa_s), \quad (13.123)$$

$$\delta M_s = D(\delta\kappa_s + \nu\delta\kappa_x), \quad (13.124)$$

$$\delta M_{xs} = D(1 - \nu)\delta\kappa_{xs}, \quad (13.125)$$

missä

$$C = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (13.126)$$

Perustilan kalvovoimat ovat

$$N_x^0 = C(\varepsilon_x^0 + \nu\varepsilon_s^0), \quad (13.127)$$

$$N_s^0 = C(\varepsilon_s^0 + \nu\varepsilon_x^0), \quad (13.128)$$

$$N_{xs}^0 = C(1 - \nu)\varepsilon_{xs}^0, \quad (13.129)$$

missä

$$\varepsilon_x^0 = e_x^0 + \frac{1}{2}(\beta_x^0)^2, \quad \varepsilon_s^0 = e_s^0 + \frac{1}{2}(\beta_s^0)^2, \quad \varepsilon_{xs}^0 = e_{xs}^0 + \frac{1}{2}\beta_x^0\beta_s^0. \quad (13.130)$$

Linearisoimalla perustilan kalvovoimien lausekkeet tulee

$$N_x^0 = C(e_x^0 + \nu e_s^0), \quad (13.131)$$

$$N_s^0 = C(e_s^0 + \nu e_x^0), \quad (13.132)$$

$$N_{xs}^0 = C(1 - \nu)e_{xs}^0, \quad (13.133)$$

missä perustilan linearisoidut kalvomuodonmuutokset ovat

$$e_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x}, \quad e_s^0 = \frac{\partial v^0}{\partial s} + \frac{w^0}{R}, \quad e_{xs}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^0}{\partial s} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right). \quad (13.134)$$

Potentiaalienergian toinen variaatio voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi &= \frac{1}{2}C \int_A [(\delta\varepsilon_x)^2 + (\delta\varepsilon_s)^2 + 2\nu(\delta\varepsilon_x)(\delta\varepsilon_s) + 2(1 - \nu)(\delta\varepsilon_{xs})^2] dA \\ &+ \frac{1}{2} \int_A \left[N_x^0 \left(\frac{\partial\delta w}{\partial x} \right)^2 + N_s^0 \left(\frac{\partial\delta w}{\partial s} \right)^2 + 2N_{xs}^0 \frac{\partial\delta w}{\partial x} \frac{\partial\delta w}{\partial s} \right] dA \\ &+ \frac{1}{2}D \int_A [(\delta\kappa_x)^2 + (\delta\kappa_s)^2 + 2\nu(\delta\kappa_x)(\delta\kappa_s) + 2(1 - \nu)(\delta\kappa_{xs})^2] dA. \end{aligned} \quad (13.135)$$

Linearisoimalla muodonmuutosenergian toisen variaation kaava ja merkitsemällä variaatioita yksinkertaisesti $\delta u \equiv u$, $\delta v \equiv v$ ja $\delta w \equiv w$ jne. saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi &= \frac{1}{2}C \int_A [e_x^2 + e_s^2 + 2\nu e_x e_s + 2(1 - \nu)e_{xs}^2] dA \\ &+ \frac{1}{2} \int_A \left[N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_s^0 \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + 2N_{xs}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial s} \right] dA \\ &+ \frac{1}{2}D \int_A [\kappa_x^2 + \kappa_s^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_s + 2(1 - \nu)\kappa_{xs}^2] dA, \end{aligned} \quad (13.136)$$

missä

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R}, \quad e_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (13.137)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial\beta_x}{\partial x}, \quad \kappa_s = \frac{\partial\beta_s}{\partial s}, \quad \kappa_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\beta_x}{\partial s} + \frac{\partial\beta_s}{\partial x} \right) \quad (13.138)$$

ja

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \beta_s = -\frac{\partial w}{\partial s} \quad (13.139)$$

ovat kiertymät. (Kiertymän (inkrementin) β_s kaavassa on tehty laakean kuoren tapauksessa likimääräistys jättämällä siirtymän (inkrementin) v vaikutus pois, eli

$$\beta_s = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial s} \approx -\frac{\partial w}{\partial s}, \quad (13.140)$$

ja yhtälöitä on linearisoitu jättämällä perustilan kiertymät $\frac{\partial w^0}{\partial x}$ ja $\frac{\partial w^0}{\partial s}$ sisältävät termit pois.)

Lausumalla potentiaalienergian toinen variaatio siirtymäinkrementtien u , v ja w avulla tulee

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi = & \frac{1}{2}C \int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{w^2}{R^2} + 2\frac{\partial v}{\partial s} \frac{w}{R} + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{w}{R} \right] dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A \left[N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_s^0 \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 + 2N_{xs}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial s} \right] dA \\ & + \frac{1}{2}D \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}\right)^2 \right] dA. \end{aligned} \quad (13.141)$$

Taivutukseen liittyvä toisen variaation osuus

$$\begin{aligned} U_b = & \frac{1}{2}D \int_A [\kappa_x^2 + \kappa_s^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_s + 2(1-\nu)\kappa_{xs}^2] dA \\ = & \frac{1}{2}D \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}\right)^2 \right] dA \end{aligned} \quad (13.142)$$

voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$U_b = \frac{1}{2}D \int_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}\right)^2 \right] \right\} dA. \quad (13.143)$$

Samalla tavalla kuin aiemmin laatan lommahduksen yhteydessä johdetaan sylinterikuoren tasapainoehdot potentiaalienergian toisen variaation Eulerin yhtälöinä. Osittaisintegroimalla ja soveltamalla variaatiolaskennan peruslausetta tai kirjoittamalla suoraan

variaatiolaskennan Eulerin yhtälöt

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial u_{,s}} \right) = 0, \quad (13.144)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial v_{,s}} \right) = 0, \quad (13.145)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial w_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial w_{,s}} \right) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial w_{,xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial w_{,xs}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial f}{\partial w_{,ss}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (13.146)$$

missä on merkitty

$$(\bullet)_{,x} \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}, \quad (\bullet)_{,s} \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial s}, \quad (13.147)$$

variaatioprobleemalle

$$\frac{1}{2} \delta^2 \Pi = \int_A f(u, u_{,x}, u_{,s}, v, v_{,x}, v_{,s}, w, w_{,x}, w_{,s}, w_{,xx}, w_{,xs}, w_{,ss}) dA = \min \quad (13.148)$$

saadaan tasapainoyhtälöiden ryhmä

$$-C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad (13.149a)$$

$$-C \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0, \quad (13.149b)$$

$$\begin{aligned} & D \nabla^4 w + \frac{C}{R} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v}{\partial s} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ & - \left(N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xs}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} + N_s^0 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (13.149c)$$

joissa ovat tuntemattomina ja toisiinsa kytkeytyneinä inkrementaaliset siirtymät u , v ja w .

Yhtälöiden (13.149) välinen kytkentä voidaan osittain purkaa ja kirjoittaa ne muotoon

$$\nabla^4 u + \frac{\nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial s^2} = 0, \quad (13.150a)$$

$$\nabla^4 v + \frac{2+\nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} = 0, \quad (13.150b)$$

$$D \nabla^8 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \nabla^4 \left(N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xs}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} + N_s^0 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = 0, \quad (13.150c)$$

missä $\nabla^8(\bullet) \equiv \nabla^4(\nabla^4(\bullet))$. Tasapainoehto (13.150c) on sama kuin aiemmin eri tavalla johdettu kaava (13.86).

13.4 Sylinterikuoren yleiset tasapainoehdot

Sylinterikuoren tasapainoehtoja johdettaessa tehtiin joukko yksinkertaistuksia, joiden vuoksi ne soveltuvat vain laakealle kuorelle. Ottamalla mukaan aiemmin poisjätetyn leikkausvoiman

$$Q_s = \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial M_{xs}}{\partial x} \quad (13.151)$$

osuus toisessa tasapainoehdossa, mutta otaksumalla ohuen kuoren tapauksessa, että $N_{sx} = N_{xs}$ ja $M_{sx} = M_{xs}$, tasapainoyhtälöiden ryhmä (13.27) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} = 0, \quad (13.152a)$$

$$\frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial M_{xs}}{\partial x} \right) = 0, \quad (13.152b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xs}}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} \\ & - \frac{N_s}{R} - N_x \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - N_{xs} \frac{\partial \beta_s}{\partial x} - N_{sx} \frac{\partial \beta_x}{\partial s} - N_s \frac{\partial \beta_s}{\partial s} + p = 0. \end{aligned} \quad (13.152c)$$

Kiertymän β_s kaavassa tehtiin edellä likimääräistys

$$\beta_s = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial s} \approx -\frac{\partial w}{\partial s}. \quad (13.153)$$

Täydellisemmät sylinterikuoren keskipinnan muodonmuutokset ja käyritymät ovat

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\beta_x^2, \quad \varepsilon_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\beta_s^2, \quad \varepsilon_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}\beta_x\beta_s, \quad (13.154)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x}, \quad \kappa_s = \frac{\partial \beta_s}{\partial s}, \quad \kappa_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial s} + \frac{\partial \beta_s}{\partial x} \right), \quad (13.155)$$

missä

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \beta_s = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial s} \quad (13.156)$$

ovat kiertymät.

Ottamalla jälleen käyttöön kalvomuodonmuutosten lineaarisille osuuksille merkinnät

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R}, \quad e_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (13.157)$$

saadaan kaavat

$$\varepsilon_x = e_x + \frac{1}{2}\beta_x^2, \quad \varepsilon_s = e_s + \frac{1}{2}\beta_s^2, \quad \varepsilon_{xs} = e_{xs} + \frac{1}{2}\beta_x\beta_s. \quad (13.158)$$

Lausumalla käyritymät siirtymien avulla tulee

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_s = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \kappa_{xs} = \frac{1}{2R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}. \quad (13.159)$$

Sylinterikuoren stabiiliuden tutkimista varten tarvittavat tasapainoyhtälöt johdetaan potentiaalienergian toisen variaation kaavan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi &= \frac{1}{2}C \int_A [(\delta\varepsilon_x)^2 + (\delta\varepsilon_s)^2 + 2\nu\delta\varepsilon_x\delta\varepsilon_s + 2(1-\nu)(\delta\varepsilon_{xs})^2] dA \\ &+ \frac{1}{2} \int_A [N_x^0\delta^2\varepsilon_x + N_s^0\delta^2\varepsilon_s + 2N_{xs}^0\delta^2\varepsilon_{xs}] dA \\ &+ \frac{1}{2}D \int_A [(\delta\kappa_x)^2 + (\delta\kappa_s)^2 + 2\nu(\delta\kappa_x)(\delta\kappa_s) + 2(1-\nu)(\delta\kappa_{xs})^2] dA \end{aligned} \quad (13.160)$$

avulla samalla tavalla kuin aikaisemmin.

Linearisoimalla muodonmuutosenergian toisen variaation kaava ja merkitsemällä variaatioita lyhyesti $\delta u \equiv u$, $\delta v \equiv v$ ja $\delta w \equiv w$ jne. saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi &= \frac{1}{2}C \int_A (e_x^2 + e_s^2 + 2\nu e_x e_s + 2(1-\nu)e_{xs}^2) dA \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_A (N_x^0 \beta_x^2 + N_s^0 \beta_s^2 + 2N_{xs}^0 \beta_x \beta_s) dA \\ &\quad + \frac{1}{2}D \int_A (\kappa_x^2 + \kappa_s^2 + 2\nu \kappa_x \kappa_s + 2(1-\nu)\kappa_{xs}^2) dA, \end{aligned} \quad (13.161)$$

missä

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R}, \quad e_{xs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (13.162)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x}, \quad \kappa_s = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \kappa_{xs} = \frac{1}{2R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} \quad (13.163)$$

ja

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \beta_s = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial s} \quad (13.164)$$

ovat kiertymät. (Toisen variaation kaavaa on linearisoitu jättämällä perustilan kiertymät β_x^0 ja β_s^0 sisältävät termit pois.)

Lausumalla potentiaalienergian toinen variaatio siirtymäinkrementtien u , v ja w avulla tulee

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2\Pi &= \frac{1}{2}C \int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{w^2}{R^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial s} \frac{w}{R} + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{w}{R} \right] dA \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_A \left[N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_s^0 \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{v}{R} \right)^2 + 2N_{xs}^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{v}{R} \right) \right] dA \\ &\quad + \frac{1}{2}D \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} - \frac{1}{2R} \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dA. \end{aligned} \quad (13.165)$$

Variaatioprobleeman

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi = \int_A f(u, u_{,x}, u_{,s}, v, v_{,x}, v_{,s}, w, w_{,x}, w_{,s}, w_{,xx}, w_{,xs}, w_{,ss}) dA = \min \quad (13.166)$$

Eulerin yhtälöt ovat

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial u_{,s}} \right) = 0, \quad (13.167)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial v_{,s}} \right) = 0, \quad (13.168)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial w_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial w_{,s}} \right) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial w_{,xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial w_{,xs}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial f}{\partial w_{,ss}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (13.169)$$

missä osittaisderivaatoille on käytetty lyhennysmerkintöjä

$$(\bullet)_{,x} \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}, \quad (\bullet)_{,s} \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial s}. \quad (13.170)$$

Sijoittamalla funktion f tilalle potentiaalienergian toisen variaation lausekkeen integrandi saadaan yleisen sylinterikuoren tasapainoyhtälöiden ryhmä

$$-C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad (13.171a)$$

$$\begin{aligned} -C \left[\left(1 - \frac{h^2}{12R^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1-\nu}{2} \left(1 - \frac{h^2}{12R^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \\ \left. + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial s} \right] - \frac{D}{R} \frac{\partial}{\partial s} (\nabla^2 w) \\ + N_s^0 \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{v}{R} \right) + N_{xs}^0 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (13.171b)$$

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w + \frac{C}{R} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v}{\partial s} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{D}{R} \frac{\partial}{\partial s} (\nabla^2 v) \\ - N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xs}^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} - \frac{1}{2R} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - N_s^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s} \right) = 0, \end{aligned} \quad (13.171c)$$

missä on merkitty lyhyesti

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \quad \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}. \quad (13.172)$$

Tasapainoyhtälöissä (13.171) ovat tuntemattomina ja toisiinsa kytkeytyneinä inkrementaaliset siirtymät u , v ja w . Yhtälöiden (13.171) välisen kytkennän purku ei onnistu samalla tavalla kuin yhtälöiden (13.149) tapauksessa.

13.4.1 Paine kuorman potentiaalin toinen variaatio

Trefftzin menetelmässä jätettiin ulkoisen kuorman potentiaalissa siirtymien suhteen toista astetta olevat termit pois. Tästä voi aiheutua merkittävää virhettä, jos tasaisen paineen kuormittaman sylinterin lommahdusmuodossa on hyvin vähän puoliaaltoja sylinterin kehän suunnassa. Tasainen nestepainekuorma on konservatiivinen, ja sen tekemä työ on painekuorman intensiteetti kertaa sylinterin tilavuuden muutos. Sylinterin poikkileikkauksen

pinta-ala on deformatuneessa tilassa

$$A = \pi R^2 + \int_0^{2\pi R} \left[w + \frac{1}{2R} \left(v^2 - vR \frac{\partial w}{\partial s} + wR \frac{\partial v}{\partial s} + w^2 \right) \right] ds, \quad (13.173)$$

ja painekuorman potentiaalienergia on

$$V = -p \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[w + \frac{1}{2R} \left(v^2 - vR \frac{\partial w}{\partial s} + wR \frac{\partial v}{\partial s} + w^2 \right) \right] ds dx, \quad (13.174)$$

missä paine p on positiivinen säteen suunnassa (ulospäin). Aiemmin jätettiin siirtymien suhteen toista astetta olevat termit pois, eli approksimoitiin tasaisen painekuorman potentiaalia kaavalla

$$V \approx -p \int_0^L \int_0^{2\pi R} w ds dx. \quad (13.175)$$

Painekuorman potentiaalin toinen variaatio on

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = -\frac{1}{2} p \int_0^L \int_0^{2\pi R} \frac{1}{R} \left[(\delta v)^2 - (\delta v) R \frac{\partial \delta w}{\partial s} + (\delta w) R \frac{\partial \delta v}{\partial s} + (\delta w)^2 \right] ds dx. \quad (13.176)$$

Merkitsemällä jälleen variaatioita yksinkertaisesti $v \equiv \delta v$ ja $w \equiv \delta w$ saadaan

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = -\frac{1}{2} p \int_0^L \int_0^{2\pi R} \frac{1}{R} \left(v^2 - vR \frac{\partial w}{\partial s} + wR \frac{\partial v}{\partial s} + w^2 \right) ds dx. \quad (13.177)$$

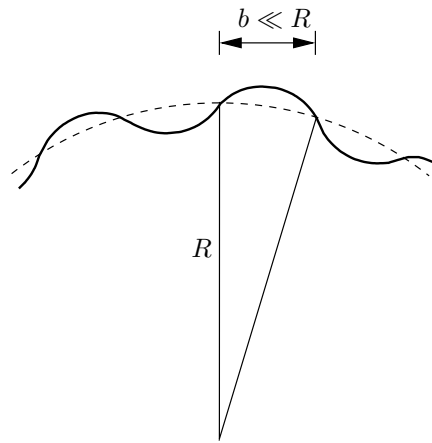
Ottamalla huomioon painekuorman toisen variaation lauseke Trefftzin ehdossa saadaan täydennetyt sylinterikuoren lommahduksen tasapainoyhtälöt

$$-C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad (13.178a)$$

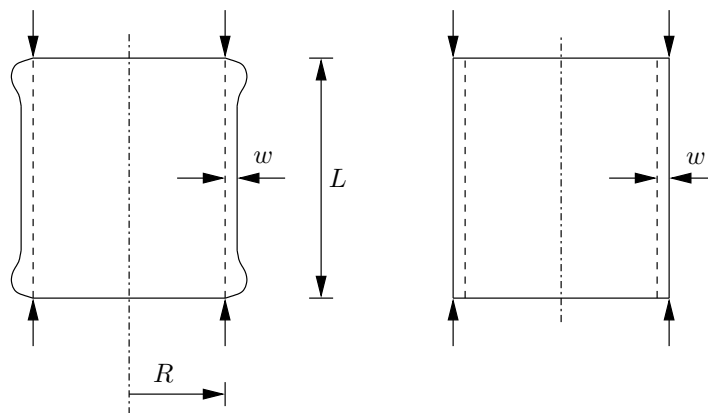
$$\begin{aligned} -C \left[\left(1 - \frac{h^2}{12R^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1-\nu}{2} \left(1 - \frac{h^2}{12R^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \\ \left. + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial s} \right] - \frac{D}{R} \frac{\partial}{\partial s} (\nabla^2 w) \\ + N_s^0 \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{v}{R} \right) + N_{xs}^0 \frac{\partial w}{\partial x} + p \left(v - R \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0, \end{aligned} \quad (13.178b)$$

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w + \frac{C}{R} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v}{\partial s} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{D}{R} \frac{\partial}{\partial s} (\nabla^2 v) \\ - N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xs}^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} - \frac{1}{2R} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - N_s^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \\ + p \left(R \frac{\partial v}{\partial s} + w \right) = 0, \end{aligned} \quad (13.178c)$$

missä on tullut täydennyksenä painekuorman intensiteetin sisältävät termit toiseen ja kolmanteen yhtälöön.



Kuva 13.7 Sylinterikuoren lommahdusmuoto, johon voidaan soveltaa laakean kuoren teoriaa.



Kuva 13.8 Puristetun sylinterikuoren lommahdus.

13.5 Sylinterikuoren lommahdus erilaisissa kuormitustapauksissa

Tehtyjen linearisointien ja yksinkertaistusten vuoksi differentiaaliyhtälöt (13.150) pätevät laakealle sylinterikuorelle. Jos lommahdusmuodossa on useita lommahdusaaltoja sylinterin kehän suunnassa siten, että yhden lommahdusaallon nuolikorkeus on pieni, kuva 13.7, niin lommahduskuorma voidaan ratkaista joissakin kuormitustapauksissa hyvällä tarkkuudella tasapainoyhtälöistä (13.150). Tutkitaan asiaa esimerkkien avulla.

Esimerkki 13.1 Määritetään akselin suunnassa puristetun sylinterikuoren lommahduskuorma Donnellin yhtälöiden (13.150) avulla.

Ratkaistaan tehtävä Donnellin likimääräisten laakean kuoren yhtälöiden (13.150) avulla. Jos sylinterin päätyjen poikittaisliike on estetty tuennalla, niin päätyjen lähelle tulee perustilassa (ennen lommahdusta) taivutusta, jonka vaikutus jätettiin pois tasapainoyhtälöitä yksinkertaistettaessa. Likimääräisessä ratkaisussa otaksutaan siten oikeanpuoleisen kuvan 13.8 mukainen perustilan tasainen deformaatio. Jos sylinterin

akselin suuntainen painekuorma on p_a , niin perustilan kalvovoimat ovat

$$N_x^0 = -\frac{p_a R}{2}, \quad N_s^0 = 0, \quad N_{sx}^0 = 0, \quad (13.179)$$

ja kolmas yhtälö (13.150) tulee muotoon

$$D\nabla^8 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_x^0 \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (13.180)$$

Yhtälön ratkaisua haetaan muodossa

$$w(x, s) = C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ns}{R}, \quad (13.181)$$

missä C_{mn} ovat kertoimia. Sijoittamalla yrite (13.181) differentiaaliyhtälöön (13.180) saadaan ratkaistua lommahduskuorma

$$N_{x,kr} = -\frac{\pi^2 D}{L^2} \left[\frac{(m^2 + \bar{n}^2)^2}{m^2} + \frac{12Z^2 m^2}{\pi^4 (m^2 + \bar{n}^2)^2} \right], \quad (13.182)$$

missä on merkitty

$$\bar{n} = \frac{nL}{\pi R}, \quad Z = \frac{L^2}{Rh} \sqrt{1 - \nu^2}. \quad (13.183)$$

Z on nimeltään Batdorfin parametri. Pienimmän lommahduskuorman antava kokonaislukupari m, n löydetään esim. kokeilemalla. Keskipitkän sylinterikuoren kriittisen akselinsuuntaisen puristavan voiman likiarvo saadaan minimoimalla $N_{x,kr}$:n kaava tekijän $\frac{(m^2 + \bar{n}^2)^2}{m^2}$ suhteen. Minimim

$$N_{x,kr,\min} \approx -\frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Eh^2}{R} \quad (13.184)$$

antaa

$$\frac{(m^2 + \bar{n}^2)^2}{m^2} = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{L^2}{Rh}. \quad (13.185)$$

Terässylinterille $\nu = 0.3$, ja tässä tapauksessa

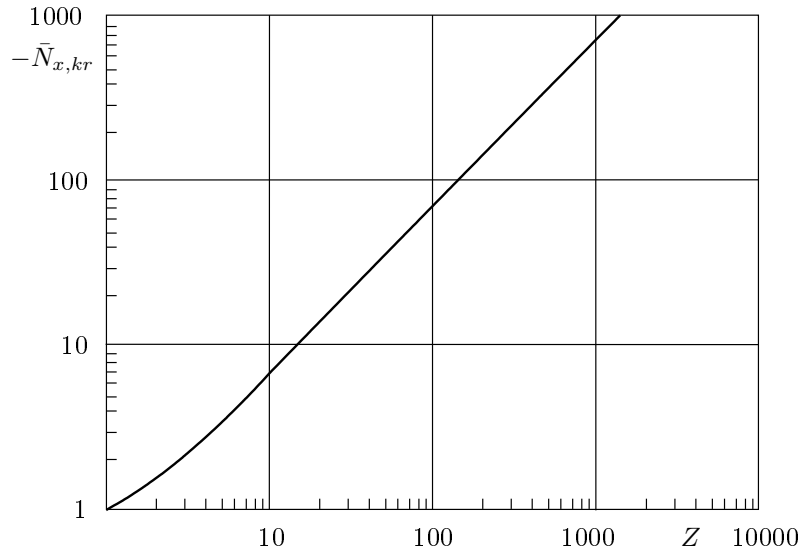
$$N_{x,kr} = -0.605 \frac{Eh^2}{R}. \quad (13.186)$$

Kaavasta (13.185) nähdään, että yhtä bifurkaatiopistettä ($N_{x,kr}$:n arvoa) vastaa monta lommahdusmuotoa. Eri lommahdusmuotojen vuorovaikutus tekee aksiaalisuunnassa puristetusta sylinterikuoresta erittäin häiriöherkän. Ns. teollisesti valmistettujen sylinterien rajakuorma voi olla sylinterin muodon pienten alkuvirheiden takia vain n. 30 % teoreettisesta lommahduskuormasta, kun laboratorio-olosuhteissa on päästy lähelle teoreettista arvoa $N_{x,kr}$.

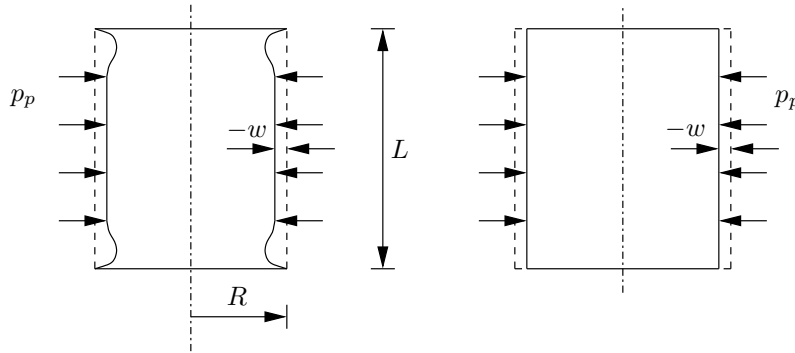
Koska puolialtojen lukumäärät m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, yhtälöä (13.185) ei voida toteuttaa Batdorfin parametrin arvoilla $Z < 2.85$. Tällöin ratkaisu on haettava kaavasta (13.182) kokeilemalla. Kuvassa 13.9 on esitetty laaduton lommahduskuorma (kriittinen kalvovoima)

$$\bar{N}_{x,kr} \equiv \frac{L^2}{\pi^2 D} N_{x,kr} \quad (13.187)$$

Batdorfin parametrin $Z = \frac{L^2}{Rh} \sqrt{1 - \nu^2}$ funktiona.



Kuva 13.9 Puristetun sylinterikuoren lommahduskuorma Batdorfin parametrin funktiona.



Kuva 13.10 Poikittaisen paineen kuormittama sylinterikuori.

Kun sylinterin säde lähenee ääretöntä, niin lommahduskuorma lähestyy arvoa

$$N_{x,kr} = -\frac{\pi^2 D}{L^2}, \quad (13.188)$$

joka on päästään vapaasti tuetun levykaistan (Eulerin) nurjahduskuorma. Koska Donnellin yhtälö ei anna oikeaa tulosta hyvin pitkälle sylinterille, on kriittinen kuorma laskettava Eulerin nurjahduskuormana putkelle, jonka taivutusjäyhyys on $I = \pi R^3 h$.

Esimerkki 13.2 Määritetään poikittaissuuntaisen paineen $p = -p_p$ kuormittaman sylinterikuoren lommahduskuorma.

Jos sylinterin päiden vaakasuuntainen liike on estetty tuennoilla, niin puhdas kalvotila ei ole mahdollinen perustilassa (0), vaan kuoren päiden läheisyyteen syntyy taivutus-tila, joka kuitenkin jätettiin huomioonottamatta yksinkertaistetussa laakean kuoren (Donnellin) teoriassa. Otaksutaan oikean puoleisen kuvan 13.10 esittämä perustila, jossa kalvovoimat ovat

$$N_x^0 = 0, \quad N_s^0 = pR = -p_p R, \quad N_{sx}^0 = 0. \quad (13.189)$$

Potentiaalienergian toinen variaatio on poikkisuuntaisen painekuorman tapauksessa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta^2\Pi = & \frac{1}{2}C \int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \right. \\
& + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{w^2}{R^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial s} \frac{w}{R} + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{w}{R} \left. \right] dA \\
& + \frac{1}{2}D \int_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} \right)^2 \right] \right\} dA \\
& + \frac{1}{2} \int_A \left[N_s^0 \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right] dA.
\end{aligned} \tag{13.190}$$

Eulerin yhtälöinä saadaan tasapainoyhtälöiden ryhmä

$$-C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \tag{13.191a}$$

$$-C \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0, \tag{13.191b}$$

$$D\nabla^4 w + \frac{C}{R} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v}{\partial s} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - N_s^0 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0 \tag{13.191c}$$

reunaehdoin

$$v = 0, \tag{13.192a}$$

$$w = 0, \tag{13.192b}$$

$$C \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\nu}{2} \frac{w}{R} \right) = 0, \tag{13.192c}$$

$$D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = 0 \tag{13.192d}$$

sylinterin reunoilla $x = 0$ ja $x = L$. Kolmannen reunaehdon mukaan $N_x = 0$, ja neljännen reunaehdon mukaan taivutusmomentti sylinterin päissä on nolla.

Yhtälöt voidaan jälleen yksinkertaistaen kirjoittaa muotoon

$$\nabla^4 u + \frac{\nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial s^2} = 0, \tag{13.193a}$$

$$\nabla^4 v + \frac{2+\nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} = 0, \tag{13.193b}$$

$$D\nabla^8 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_s^0 \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = 0, \tag{13.193c}$$

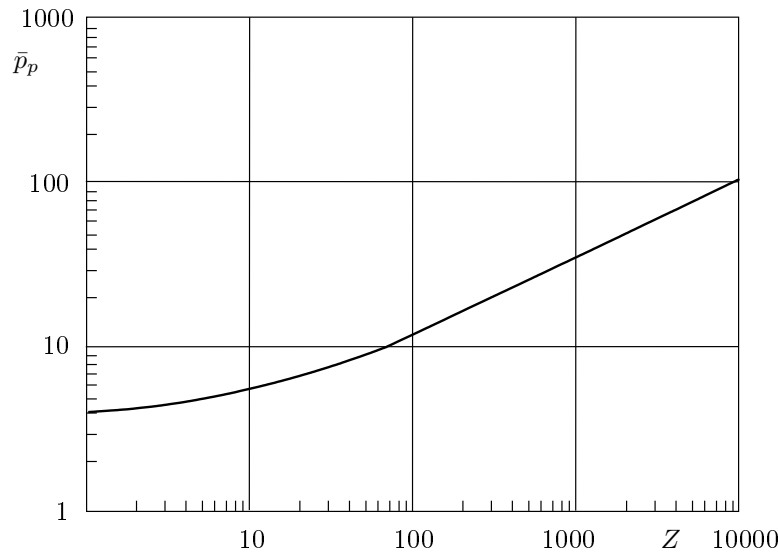
Tasapainoyhtälöiden ratkaisu voidaan esittää lausekkeilla

$$u(x, s) = A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ns}{R}, \tag{13.194a}$$

$$v(x, s) = B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{ns}{R}, \tag{13.194b}$$

$$w(x, s) = C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ns}{R}, \tag{13.194c}$$

missä A_{mn} , B_{mn} ja C_{mn} ovat kertoimia. Siirtymien u ja v lausekkeiden kertoimet A_{mn} ja B_{mn} saadaan lausuttua kertoimien C_{mn} avulla sijoittamalla siirtymäotaksu-
mat (13.194) tasapainoyhtälöihin (13.193a,b). Nyt voidaan tarkistaa, että taipuman



Kuva 13.11 Poikittaisen paineen kuormittaman sylinterikuoren lommahduskuorma.

w yrite toteuttaa reunaehdot $w = M_x = 0$ reunoilla $x = 0$ ja $x = L$ ja on jaksollinen poikittaissuunnassa.

Sijoittamalla yrite (13.194c) differentiaaliyhtälöön (13.193c) saadaan ratkaistua lommahduskuorma

$$N_{s,kr} = -\frac{\pi^2 D}{L^2} \left[\frac{(m^2 + \bar{n}^2)^2}{\bar{n}^2} + \frac{12Z^2 m^4}{\pi^4 \bar{n}^2 (m^2 + \bar{n}^2)^2} \right], \quad (13.195)$$

missä on jälleen merkitty

$$\bar{n} = \frac{nL}{\pi R}, \quad Z = \frac{L^2}{Rh} \sqrt{1 - \nu^2} \quad (13.196)$$

on Batdorfin parametri. Lommahduskuorma saa minimiarvon

$$N_{s,kr} = -\frac{\pi^2 D}{L^2} \left[\frac{(1 + \bar{n}^2)^2}{\bar{n}^2} + \frac{12Z^2}{\pi^4 \bar{n}^2 (1 + \bar{n}^2)^2} \right], \quad (13.197)$$

kun $m = 1$.

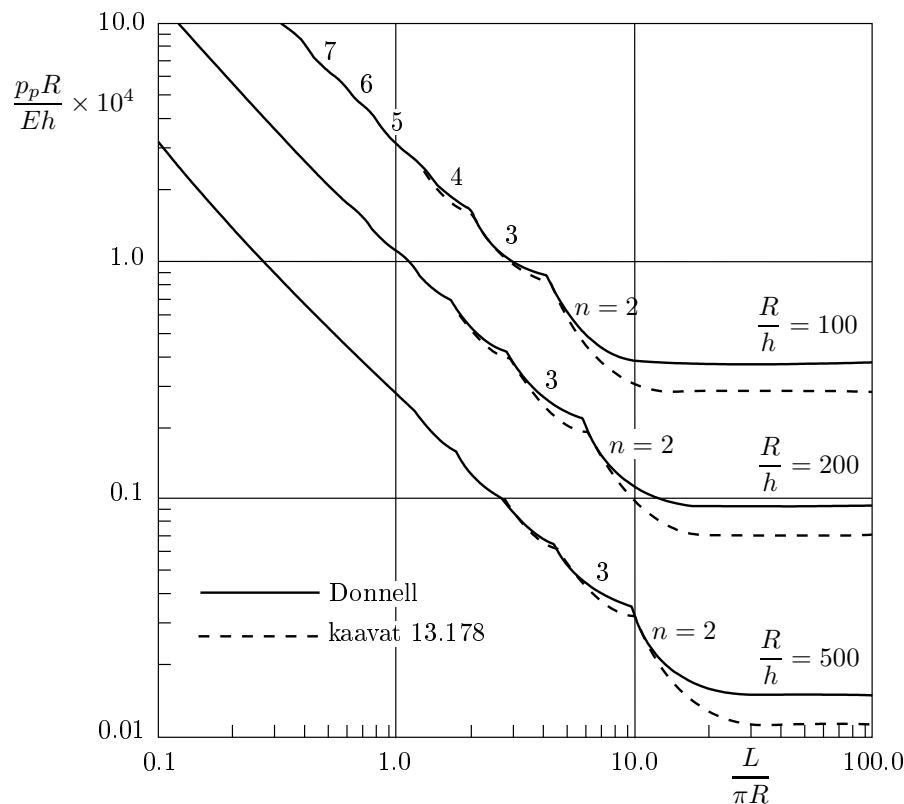
Poikittaissuuntaisen paineen kuormittaman vapaasti tuetun sylinterikuoren lommahdusmuotoon tulee yksi sinin puolialto aksiaalisuuntaan. Minimoimalla lommahduskuorma parametrin $\bar{n}$ suhteen saadaan kriittinen kuorma esitettyä Batdorfin parametrin Z funktiona. Kuvassa 13.11 on esitetty laaduton paine $\bar{p}_p \equiv \frac{L^2 R}{\pi^2 D} p_p$, missä $p_p = -p$ on poikittaisen painekuorman intensiteetti, parametrin Z funktiona. Hyvin lyhyen sylinterin tapauksessa $Z \approx 0$, ja

$$N_{s,kr} \approx -\frac{\pi^2 D}{L^2} \left[\frac{(1 + \bar{n}^2)^2}{\bar{n}^2} \right]. \quad (13.198)$$

Kun $\bar{n} = 1$ saadaan minimiarvo

$$N_{s,kr} = -\frac{4\pi^2 D}{L^2}. \quad (13.199)$$

Kuvassa 13.12 on verrattu Donnellin yhtälöillä (13.193) ja tarkemmilla yhtälöillä (13.178) saatuja ratkaisuja poikittaisen painekuorman tapauksessa.



Kuva 13.12 Poikittaisen paineen kuormittaman sylinterikuoren lommahduskuorma Donnellin yhtälöillä ja tarkemmilla yhtälöillä (13.178).

Esimerkki 13.3 Määritetään leikkausvoiman N_{xs}^0 kuormittaman sylinterikuoren lommahduskuorma Donnellin laakean kuoren tasapainoyhtälön avulla.

Leikkausvoiman N_{xs}^0 (vääntömomentin) rasittaman sylinterikuoren tapauksessa kolmas tasapainoyhtälö (13.150) tulee muotoon

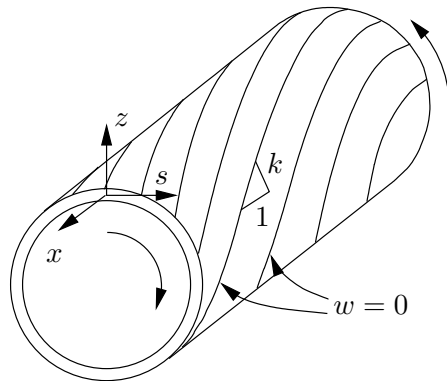
$$D\nabla^8 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \nabla^4 \left(2N_{xs}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} \right) = 0. \quad (13.200)$$

Otaksutaan jälleen yksinkertaisuuden vuoksi, että perustila on kalvotila ja N_{xs}^0 on vakio. Tällöin tasapainoehdoksi tulee

$$D\nabla^8 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2N_{xs}^0 \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} \right) = 0. \quad (13.201)$$

Koska yhtälössä (13.201) esiintyy taipuman sekä parillisia että parittomia derivaattoja, ei edellisissä esimerkeissä otaksuttu taipuman lauseke tule nyt kyseeseen. Leikkausvoiman kuormittaman sylinterikuoren lommahdusmuodossa sylinterin kehän suuntaiset lommahdusaallot kiertävät spiraalimaisesti sylinteriä akselin suuntaan mentäessä, ja tällaista deformaatiota vastaava taipuman lauseke on

$$w(x, s) = C_{mn} \sin \left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{ns}{R} \right), \quad (13.202)$$



Kuva 13.13 Leikkausvoiman kuormittaman sylinterikuoren lommahdus.

missä C_{mn} ovat kertoimia. Muiden siirtymien lausekkeet ovat

$$u(x, s) = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{ns}{R}\right), \quad (13.203)$$

$$v(x, s) = B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{ns}{R}\right), \quad (13.204)$$

missä A_{mn} ja B_{mn} ovat kertoimia.

Sijoittamalla taipuman lauseke (13.202) differentiaaliyhtälöön (13.201) saadaan ratkaistua lommahduskuorma

$$N_{xs,kr} = \frac{n^2(1+k^2)^2}{2k} \frac{D}{R^2} + \frac{k^3}{2(1+k^2)^2 n^2} Eh, \quad (13.205)$$

missä on merkitty

$$k = \frac{\frac{m\pi}{L}}{\frac{n}{R}} = \frac{m\pi}{n}. \quad (13.206)$$

Valittu taipuman lauseke (13.202) ei toteuta mitään tiettyä sylinterikuoren päätyjen reunaehtoja, joten saatu kriittisen kuorman lauseke pätee pitkille sylintereille, joiden reunojen lähelle syntyvä taivutustila ei vaikuta merkittävästi kriittisen kuorman arvoon. Kokonaislukuarvoja m ja n vastaa tietty ominaisarvo $N_{xs,mn}^0$. Pitkän sylinterin tapauksessa

$$1 + k^2 \approx 1, \quad (13.207)$$

ja tällöin saadaan likimääräisesti

$$N_{xs,kr} = \frac{n^2}{2k} \frac{D}{R^2} + \frac{k^3}{2n^2} Eh. \quad (13.208)$$

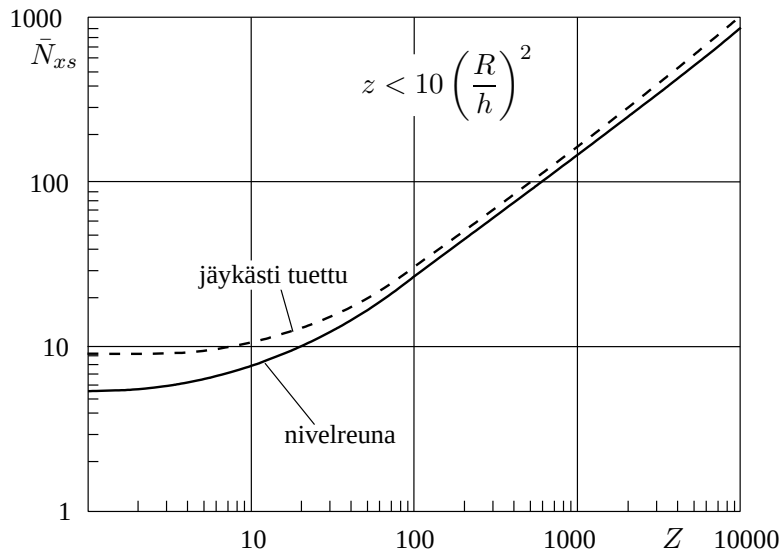
Minimoimalla lauseke (13.208) parametrin k (tai m) suhteen tulee

$$N_{xs,kr,\min} = 0.136n \frac{Eh}{(1-\nu^2)^{3/4}} \left(\frac{h}{R}\right)^{3/2}, \quad (13.209)$$

kun

$$k = \frac{n^4}{36(1-\nu)} \left(\frac{h}{R}\right)^2. \quad (13.210)$$

Pienin kriittisen kuorman arvo saadaan, kun $n = 1$, mutta käytännössä reunaehtojen toteuttaminen vaatii, että n on vähintään 2. Sylinterikuoren reunojen läheisyydessä $n = 2$ on liian pieni, joten Donnellin yhtälön ratkaisu on tästäkin syystä likimääräinen.



Kuva 13.14 Leikkausvoiman kuormittaman sylinterikuoren lommahduskuorma Batdorf-parametrin funktiona.

Tarkemmalla teorialla on johdettu kriittisen kuorman arvo, joka on $n:n$ arvolla $2\sqrt{\frac{4}{3}}$ -kertainen edellä laskettuun arvoon verrattuna.

Kuvassa 13.14 on Donnellin yhtälöitä tarkemmalla teorialla lasketut ratkaisut nivelellisesti tuetulle ja jäykästi kiinnitetylle sylinterikuorelle. Kuvassa 13.14 on esitetty laaduton kriittinen leikkausvoima $\bar{N}_{xs,kr} \equiv \frac{L^2}{\pi^2 D} N_{xs,kr}$ Batdorf-parametrin Z funktiona.

Esimerkki 13.4 Määritetään sekä akselin suunnassa että poikittaisessa suunnassa puristetun sylinterikuoren lommahduskuorma.

Otaksutaan jälleen yksinkertaisuuden vuoksi likimääräisesti, että kuoren perustilan voimasuureet ovat kalvotilan mukaiset. Perustilan kalvovoimat ovat

$$N_x^0 = -\frac{p_a R}{2}, \quad N_s^0 = -p_p R, \quad N_{sx}^0 = 0, \quad (13.211)$$

kun p_a on akselin suuntainen paine ja p_p on poikittaissuuntainen paine. Yhdistetyssä kuormitustapauksessa kolmas yhtälö (13.150) tulee muotoon

$$D\nabla^8 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \nabla^4 \left(N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_s^0 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = 0. \quad (13.212)$$

Valitsemalla tietty painekuormien suhde

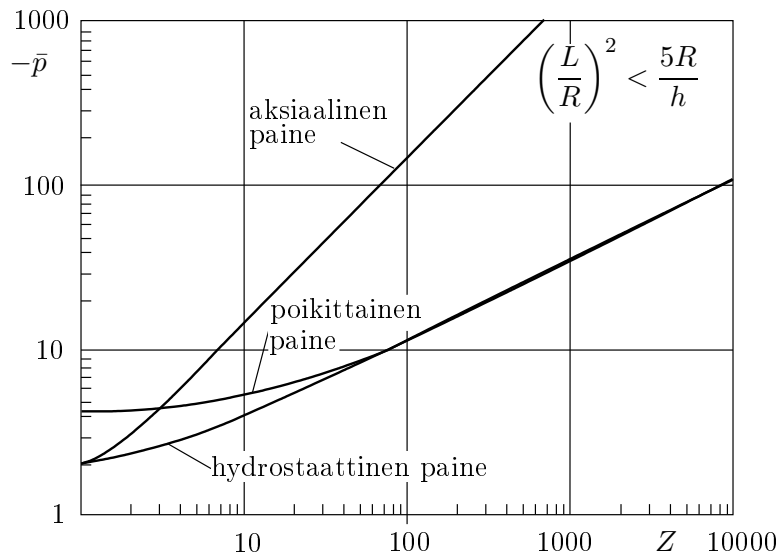
$$k = \frac{N_x^0}{N_s^0} \quad (13.213)$$

saadaan tasapainoehto kirjoitettua muotoon

$$D\nabla^8 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p_p R \nabla^4 \left(k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = 0. \quad (13.214)$$

Päistään vapaasti tuetun sylinterikuoren tapauksessa yhtälön (13.214) ratkaisu on

$$w(x, s) = C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ns}{R}, \quad (13.215)$$



Kuva 13.15 Sylinterikuoren lommahduskuorma Batdorfin parametrin funktiona eri kuormitustapauksissa.

missä C_{mn} ovat kertoimia. Sijoittamalla taipuman lauseke (13.215) differentiaaliyhtälöön (13.214) voidaan ratkaista lommahduskuorma

$$N_{s,kr} = -\frac{\pi^2 D}{L^2} \left[\frac{(m^2 + \bar{n}^2)^2}{km^2 + \bar{n}^2} + \frac{12Z^2 m^4}{\pi^4 (m^2 + \bar{n}^2)^2 (km^2 + \bar{n}^2)} \right], \quad (13.216)$$

missä

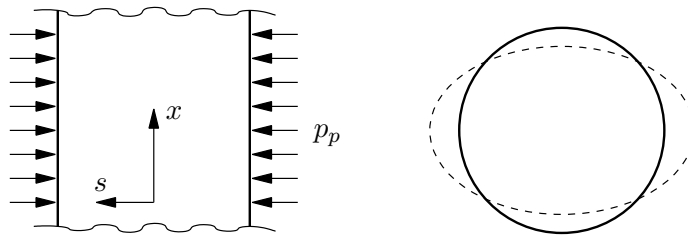
$$\bar{n} = \frac{nL}{\pi R}, \quad Z = \frac{L^2}{Rh} \sqrt{1 - \nu^2} \quad (13.217)$$

on Batdorfin parametri. Pienimmän lommahduskuorman antava kokonaislukupari m, n löydetään kokeilemalla. Tapauksessa $k = 0$ saadaan poikittaissuunnassa puristetun sylinterikuoren lommahduskuorma. Tapaus $k = \frac{1}{2}$ vastaa hydrostaattista painekuormitusta.

Kuvaan 13.15 on koottu akselin suuntaisen puristavan kuorman, poikittaisen painekuorman ja hydrostaattisen painekuorman $\bar{p} = \frac{L^2 R}{\pi^2 D} p$, missä $p = -p_a$, $p = -p_p$ tai $p = -p_a = -p_p$ on painekuorman (todellinen) intensiteetti em. kuormitustapauksissa, lommahdusarvot parametrin Z funktiona.

Esimerkki 13.5 Määritetään äärettömän pitkän, hydrostaattisen paineen kuormittaman sylinterikuoren kriittinen kuorma.

Äärettömän pitkän sylinterikuoren (putken) ratkaisu ei riipu koordinaatista x . Käytetään painekuorman tapauksessa tarkemman teorian energialauseketta (13.177). Po-



Kuva 13.16 Hydrostaattisen paineen kuormittama äärettömän pitkä sylinterikuori.

tentiaalienergian toiseksi variaatioksi tulee nyt (yksikön pituiselle kuorelle)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\delta^2\Pi = & \frac{1}{2}C \int_0^{2\pi R} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R} \right)^2 ds \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} N_s^0 \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{v}{R} \right)^2 ds \\
 & + \frac{1}{2}D \int_0^{2\pi R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 ds \\
 & - \frac{1}{2}p \int_0^{2\pi R} \frac{1}{R} \left(v^2 - vR \frac{\partial w}{\partial s} + wR \frac{\partial v}{\partial s} + w^2 \right) ds,
 \end{aligned} \tag{13.218}$$

missä $N_s^0 = pR = -p_p R$.

Otaksumalla siirtymille lausekkeet

$$v(s) = \frac{1}{2}C_1 \cos \frac{2ns}{R}, \quad w(s) = C_1 \sin \frac{2ns}{R}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{13.219}$$

saadaan

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\delta^2\Pi = & C_1^2 \pi \left[\frac{1}{2} \frac{C}{R} (1-n)^2 + \frac{1}{2} p \left(2n - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{D}{R^3} 2n^2 \left(2n - \frac{1}{2} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{4} p \left(2n - \frac{1}{2} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{13.220}$$

Toinen variaatio menettää positiivisen definiittisyyden, kun painekuorma on $p = p_{kr}$, eli

$$p_{kr} = -\frac{D}{R^3} 2n \left(2n - \frac{1}{2} \right). \tag{13.221}$$

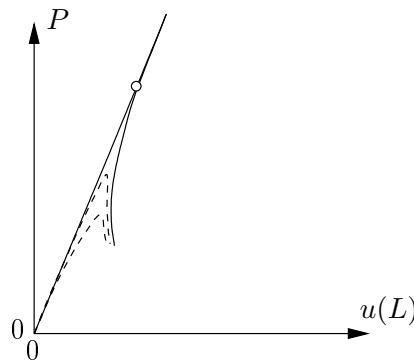
Pienin kriittisen kuorman arvo saavutetaan, kun $n = 1$. Tällöin

$$p_{kr} = -\frac{3D}{R^3}, \tag{13.222}$$

ja poikkileikkaus menee soikion muotoiseksi, kuva 13.16. Jos kuorman potentiaalin toinen variaatio otaksutaan nolaksi, niin saadaan kolmanneksen liian suuri tulos

$$p_{kr} = -\frac{4D}{R^3}. \tag{13.223}$$

Ratkaisu pätee myös ympyrän muotoiselle renkaalle, jota kuormittaa hydrostaattinen paine.



Kuva 13.17 Tasapainopolut virheettömälle ja kahdelle muotovirheelliselle puristetulle sylinterikuorelle.

13.6 Sylinterikuoren ylikriittinen tila

Laakean sylinterikuoren linearisoidulla teorialla, jossa perustilaksi otetaan kalvotila ja kiertymien vaikutus jätetään huomioonottamatta ennen lommahdusta, voidaan määrittää primaarinen tasapainopolku ja haarautumispiste (bifurkaatiopiste) eli lommahduskuorman arvo. Kuoren jälkikriittisen tilan selvittäminen vaatii täydellisempää epälineaarista teoriaa. Kuvassa 13.17 on esitetty akselin suunnassa puristetun sylinterikuoren tasapainopolut eli puristavan kokonaisvoiman $P = -2\pi RN_x$ ja aksiaalisen siirtymän $u(L)$ välinen yhteys. Primaarinen tasapainopolku on suora tehtyjen linearisointien seurauksena. Kuvaan 13.17 on piirretty katkoviivalla kahden vastaavanlaisen muotovirheellisen kuoren tasapainopolut. Muotovirheen seurauksena bifurkaatiopisteen sijasta tasapainopolulla on rajapiste. Puristetun ohutseinäisen sylinterikuoren tapauksessa bifurkaatiopiste antaa yleensä aivan liian optimistisen kuvan kuoren kantokyvystä. Todellinen rajakuorma voi olla paljon pienempi kuin virheettömän kuoren lommahduskuorma.

Aksiaalisuunnassa puristettu sylinterikuori on hyvin herkkä alkuhäiriöille. Tämä voidaan selittää sillä, että lommahdusvoimaa (pienintä ominaisarvoa) vastaa useita erilaisia lommahdusmuotoja, tai useita ominaisarvoja on lähekkäin ja nämä vuorovaikuttavat toisiinsa heikentäen sylinterin kantokykyä.

Kuvissa 13.18, 13.19, 13.20 ja 13.21 on verrattu teoreettisia kriittisen kuorman arvoja koetuloksiin eri kuormitustapauksissa. Kuvassa 13.18 on esitetty laaduton aksiaalisuuntainen puristava voima

$$\bar{N}_x \equiv \frac{L^2}{\pi^2 D} N_x \quad (13.224)$$

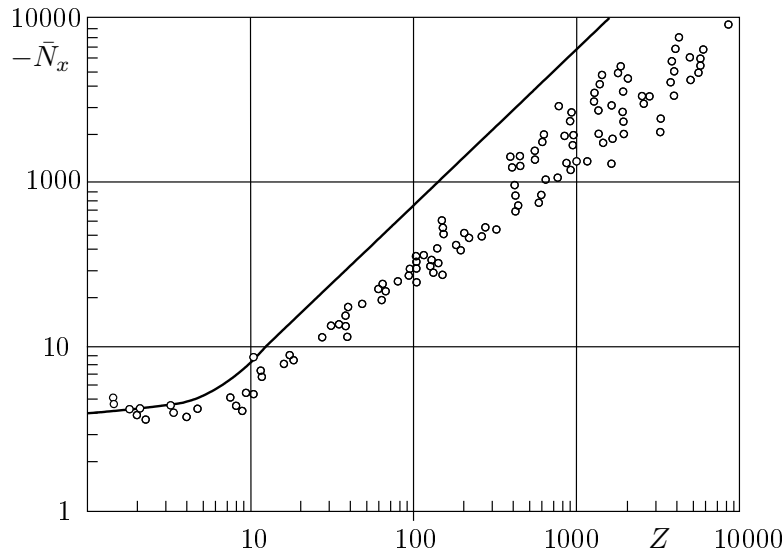
Batdorfin parametrin

$$Z = \frac{L^2}{Rh} \sqrt{1 - \nu^2} \quad (13.225)$$

funktiona. Käytetty logaritminen asteikko näyttää erot todellista pienempinä.

Kuvassa 13.19 on verrattu leikkausvoiman kuormittaman sylinterin tuloksia. Laaduton leikkausvoima on

$$\bar{N}_{xs} = \frac{L^2}{\pi^2 D} N_{xs}. \quad (13.226)$$



Kuva 13.18 Puristetun sylinterikuoren kokeellisten ja teoreettisten tulosten vertailu.

Kuvassa 13.20 on verrattu poikittaisen paineen kuormittaman sylinterikuoren tuloksia. Pystyakselilla on laaduton paine

$$\bar{p}_p \equiv L^2 \pi^2 D R p_p = -L^2 \pi^2 D R p, \quad (13.227)$$

missä $p_p = -p$ on ulkoinen poikittainen paine.

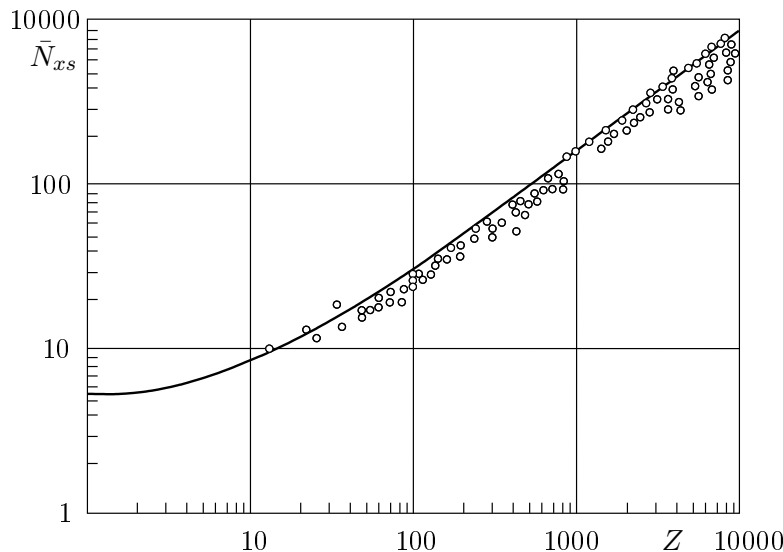
Kuvassa 13.21 on hydrostaattisen paineen kuormittaman sylinterikuoren tulokset. Pystyakselilla on nyt laaduton hydrostaattinen paine

$$\bar{p} \equiv L^2 \pi^2 D R p, \quad (13.228)$$

missä $-p = p_a = p_p$ on todellinen hydrostaattinen paine.

Kuvassa 13.22 on esitetty kokeellisen ja teoreettisen aksiaalisen kriittisen voiman suhde $\frac{N_{x,koe}}{N_{x,teor}}$, missä $N_{x,teor} = -0.605 \frac{E h^2}{R}$, säteen ja seinämän paksuuden suhteen $\frac{R}{h}$ funktiona. Kuvaan on piirretty myös eräs ehdotettu suunnittelukäyrä, josta voidaan lukea tarvittava pienennyskerroin suhteen $\frac{R}{h}$ funktiona. Pienennyskerroimen ja suunnittelukuorman arvoon vaikuttaa myös koetulosten hajonta. Aksiaalisesti puristettu sylinterikuori on ääritapaus. Muissa kuormitustapauksissa tullaan yleensä toimeen suuremmilla reduktiokertoimen arvoilla eli pienemmällä reduktiolla.

Sylinterikuoren epälineaarisen teorian uranuurtajia olivat von Kármán ja Tsien. Vuonna 1941 julkaistussa tutkimuksessa he osoittivat, että aksiaalisesti puristetun sylinterikuoren sekundaarisella tasapainopolulla, joka lähtee bifurkaatiopisteestä A kuvassa 13.23, puristava voima aksiaalisen siirtymän funktiona putoaa nopeasti. von Kármánin ja Tsienin ratkaisun perusteella voidaan päätellä, että vastaavan muotovirheellisen kuoren tasapainopolulla on rajapiste B . Donnell ja Wan esittivät vuonna 1950 tämäntyyppisen ratkaisun sylinterikuorelle, jonka muoto poikkeaa hieman täydellisen sylinterin muodosta. Koiter esitti vuonna 1945 yleisen epälineaarisen kuoriteorian, jonka avulla voidaan tutkia lommahduk-



Kuva 13.19 Leikkausvoiman kuormittaman sylinterikuoren kokeellisten ja teoreettisten tulosten vertailu.

sen jälkeistä tilaa bifurkaatiopisteen läheisyydessä ja muotovirheiden vaikutusta kuoren käyttäytymiseen. Koiterin tutkimustulokset tulivat yleisesti tietoon vasta vuonna 1963.

Koiter tutki kuoren käyttäytymistä avaruudessa, jonka koordinaatit ovat kuorma (kuormakerroin) ja eri lommahdusmuotojen amplitudit. Tasapainopolut määritetään potentiaalienergian lausekkeen ensimmäisten derivaattojen avulla ja tasapainon laatua tutkitaan toisten derivaattojen avulla.

Puristetun sylinterikuoren suuri häiriöherkkyys aiheutuu potentiaalienergian lausekkeen

$$\Pi = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + a_4 q^4 + \dots, \quad (13.229)$$

missä q on lommahdusmuodon amplitudi ja $a_0, a_1, a_2, \dots$ ovat kuormasta (tai kuormakerroimesta) ja muotovirheestä riippuvia kertoimia, kolmannen asteen termistä. Esim. laatan ja pilarin potentiaalienergian lausekkeesta puuttuu kolmannen asteen termi, ja ne eivät ole herkkiä alkuvirheille. Edellä tarkastellussa lineaarisessa stabiiliusteoriassa käytetty potentiaalienergian toinen variaatio on neliöllinen, joten sen avulla ei voi tehdä päätelmiä jälkikriittisestä tilasta.

Potentiaalienergian lausekkeen korkeamman asteen termien merkitystä voi tutkia esim. von Kármánin esimerkin avulla. Kuvan 13.24 nivelsauvoista ja jousesta koostuvan systeemin jousivoiman ja siirtymän riippuvaisuudeksi otaksutaan

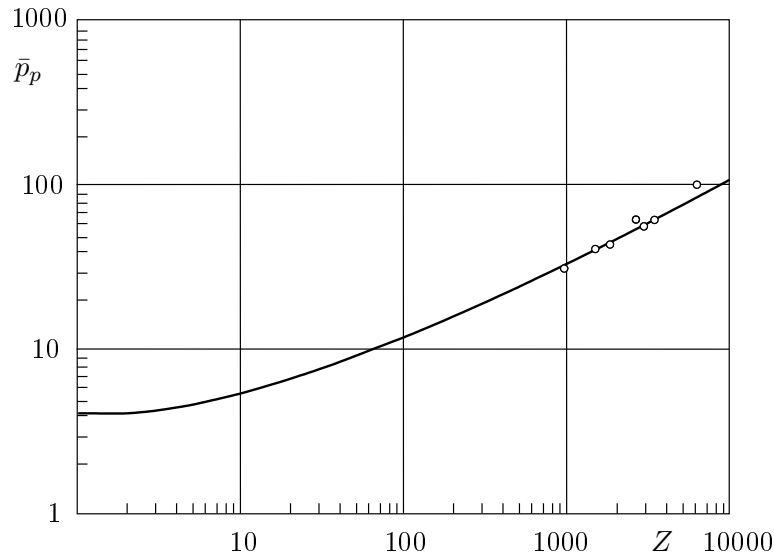
$$F = C_1 w - C_2 w^2, \quad (13.230)$$

missä w on taipuma ja C_1, C_2 ovat kertoimia. Systeemin potentiaalienergia on

$$\Pi = \int F dw - 2PL(\cos \varphi_0 - \cos \varphi). \quad (13.231)$$

Tässä esimerkissä $\varphi = q$. Kaavassa (13.231) voidaan approksimoida

$$\cos \varphi_0 - \cos \varphi \approx \frac{1}{2}(\varphi^2 - \varphi_0^2), \quad w \approx L(\varphi - \varphi_0). \quad (13.232)$$



Kuva 13.20 Poikittaisen paineen kuormittaman sylinterikuoren kokeellisten ja teoreettisten tulosten vertailu.

Integroinnin jälkeen saadaan potentiaalienergialle likimääräinen lauseke

$$\Pi = \frac{1}{2}C_1L^2(\varphi - \varphi_0)^2 - \frac{1}{3}C_2L^3(\varphi - \varphi_0)^3 - PL(\varphi^2 - \varphi_0^2). \quad (13.233)$$

Tasapainoasemassa $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0$, joten tasapainopolut toteuttavat yhtälön

$$P = \frac{1}{2} [C_1L - C_2L^2(\varphi - \varphi_0)] \frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi}. \quad (13.234)$$

Kaavan (13.234) avulla nähdään, että jousivoiman kaavan kertoimen C_2 takia puristavan voiman P ja kulman φ välistä riippuvuutta esittävä käyrä (suora) on laskeva virheettömän systeemin ($\varphi_0 = 0$) tapauksessa. Virheellisen systeemin maksimikuorma on sitä pienempi mitä suurempi on muotovirhe φ_0 .

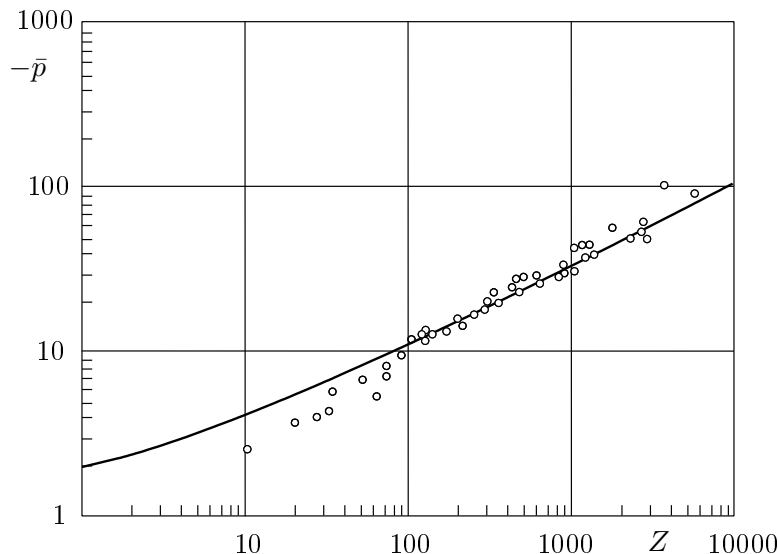
Koiterin mukaan lommahduksen jälkeinen tasapainopolku voidaan esittää asymptoottisesti (bifurkaatiopisteen läheisyydessä) täydelliselle (muotovirheettömälle) rakenteelle kaavalla

$$\frac{\lambda}{\lambda_{kr}} = 1 - c_1q - c_2q^2, \quad (13.235)$$

missä λ on kuormaparametri ($\lambda = N_x$), λ_{kr} lommahduskuorma, q on lommahdusmuodon amplitudi (esimerkissä $q = \varphi$) ja c_1, c_2 ovat kertoimia. Rakenteen käyttäytyminen riippuu rakenteelle ominaisista kertoimista c_1 ja c_2 . Koiterin mukaan muotovirheettömän rakenteen käyttäytyminen bifurkaatiopisteen läheisyydessä määrää rakenteen herkkyyden muotovirheen vaikutuksille.

Kuvan 13.25 tapauksessa I $c_1 = 0$ ja $c_2 < 0$. Koiter osoitti, että tässä tapauksessa rakenne ei ole herkkä alkuvirheille. Tapauksessa II $c_1 = 0$ ja $c_2 > 0$, ja tässä tapauksessa Koiterin mukaan pätee asymptoottinen kaava

$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{kr}} = 1 - 3 \left[q_0 \left(\frac{\rho}{2} \right) \sqrt{c_2} \right]^{2/3}, \quad (13.236)$$



Kuva 13.21 Hydrostaattisen paineen kuormittaman sylinterikuoren kokeellisten ja teoreettisten tulosten vertailu.

missä ρ on muotovirheen muodosta riippuva kerroin ja q_0 on muotovirheen amplitudi. Tapauksessa III $c_1 > 0$, ja Koiterin mukaan muotovirheellisen rakenteen maksimikuorma on

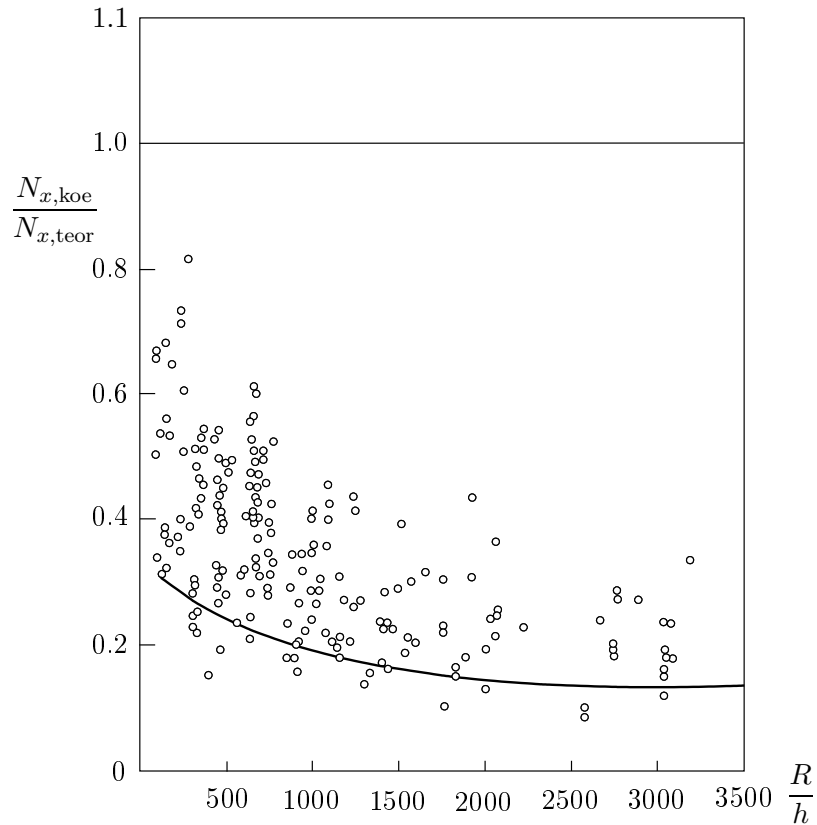
$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{kr}} = 1 - 2(q_0 \rho c_1)^{1/2}. \quad (13.237)$$

Sekundaarisella polulla kuorma $\lambda_{\max}$ putoaa aluksi hyvin nopeasti, ja rakenne on hyvin herkkä muotovirheelle. Kaavan (13.237) mukainen käyttäytyminen (herkkyys muotovirheille) on luonteenomaista ulkoisen paineen kuormittamille pallokuorille ja puristetuille sylinterikuorille.

Nykyään kuorirakenteita voidaan analysoida epälineaarisesti tehokkaasti numeerisilla menetelmillä kuten elementtimenetelmällä. Liu ja Lam ovat julkaisseet vuonna 1989 tutkimuksen aksiaalisesti puristetun sylinterikuoren käyttäytymisestä. Elementtimenetelmällä analysoidun kuoren pituus $L = 71.9$, säde $R = 100$, kuoren seinän paksuus $h = 0.247$, materiaalin kimmokerroin $E = 567$ ja Poissonin luku $\nu = 0.3$. Aikaisempien tutkimusten perusteella lommahdusmuodossa on tässä tapauksessa 14 tai 12 aaltoa kehän suunnassa. Liu ja Lam mallinsivat kuoren symmetrisen kahdeksasosan nelisolmuisilla kuorielementeillä, joiden lukumääräksi tuli 420. Elementtimallissa oli pituuden puolikkaalla 14 elementtiä ja kehän suunnassa 30 elementtiä. Symmetrian hyväksikäyttö pienentää laskentamallia, mutta sulkee samalla pois lommahdusmuotoja.

Kuvassa 13.26 on esitetty lineaaristen lommahdusanalyysien lommahdusmuotoja kaksilla reunaehdoilla. Vasemmanpuoleisten kuvien lommahdusmuodot on laskettu päistään jäykästi tuetulle sylinterille, ja oikeanpuoleisten kuvien vastaavat tulokset on laskettu otaksumalla sylinterin päät vapaiksi mutta kiertymät tuetuiksi. Reunaehdot eivät tässä tapauksessa vaikuta merkittävästi lineaarisen lommahdusanalyysin lommahdusmuotoihin.

Kuvassa 13.27 on epälineaarisen analyysin kuorman ja siirtymän välinen riippuvuus, joka on laskettu päistään jäykästi tuetulle kuorelle. Kuvassa 13.27 pystyakselilla on suh-



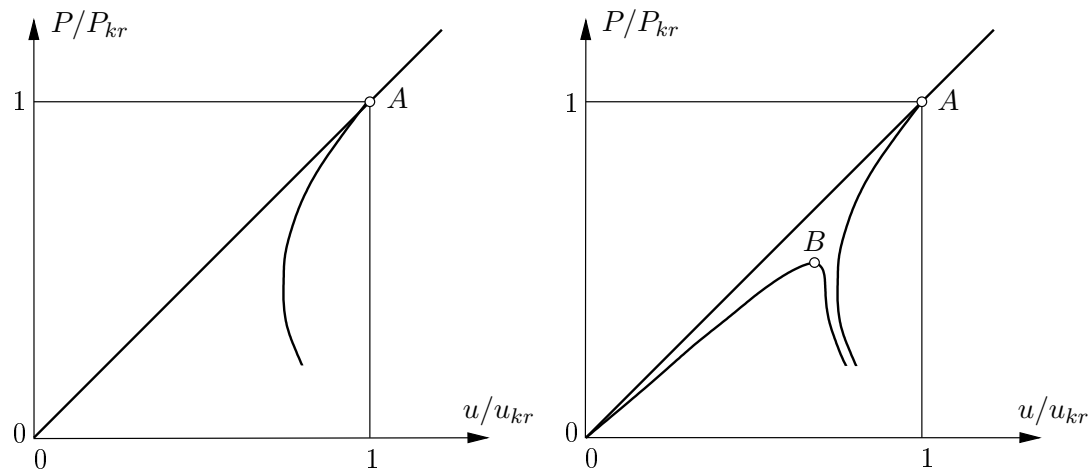
Kuva 13.22 Akselin suunnassa puristetun sylinterikuoren kokeellisen ja teoreettisen kriittisen kuorman suhde.

teellinen aksiaalinen kuorma $\frac{P}{P_{cr}}$, missä P_{cr} on klassillisen lineaarisen analyysin lommahduskuorma, ja vaaka-akselilla on sylinterin reunan siirtymä akselin suuntaan normeerattuna lineaarisen analyysin vastaavalla siirtymän arvolla u_{cr} . Välillä $A - B$ kuori deformoituu pyörähdyssymmetrisesti. Pisteessä B kuoreen syntyy muoto, jossa on 14 aaltoa kehän suunnassa.

Kuvassa 13.28 on ylinnä esitetty kuoren deformaation vaihe primaaripolulla juuri ennen pistettä B kuorman arvolla $\frac{P}{P_{cr}} = 1.0388$, ja pisteen B tilanne on seuraavassa kuvassa kuorman arvolla $\frac{P}{P_{cr}} = 1.0452$. Kuoren deformaation muoto muuttuu hyvin pienellä kuorman muutoksen välillä. Sekundaarisella polulla päädytään singulaariseen pisteeseen D , jota vastaava deformaation muoto on esitetty alimmassa kuvassa 13.28. Sekundaarisella palautumispolulla $B - D$ säteen suuntaiset siirtymät kasvavat, mutta kuoren pään aksiaalisuuntainen siirtymä pienenee. Pisteessä B hallitsee kavotilan muodonmuutosenergia, ja pisteessä D kuoreen varastoitunut energia on sitoutunut taivutukseen. Kuvista nähdään myös, että 'lommot' kasvavat mieluummin kuoren sisään päin.

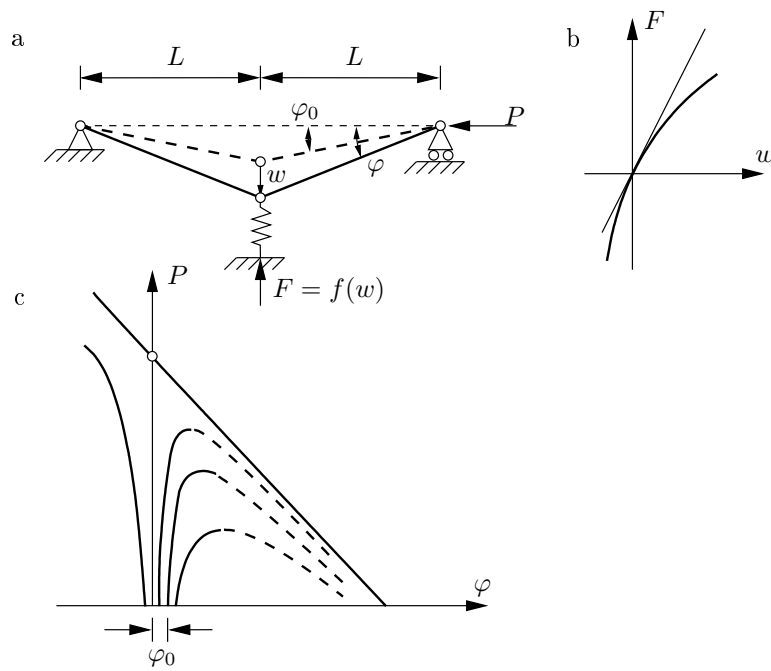
Jos kuvassa 13.27 mennään bifurkaatiopisteen B ohi primaarista polkua pitkin, niin kuori deformoituu aluksi pyörähdyssymmetrisesti, mutta myöhemmin siihen ilmaantuu kukaan merkittyjä muotoja, joita on esitetty kuvassa 13.29.

Kuvassa 13.30 on Wohleverin ja Healeyn vuonna 1995 julkaisemia tuloksia vastaavanlai-

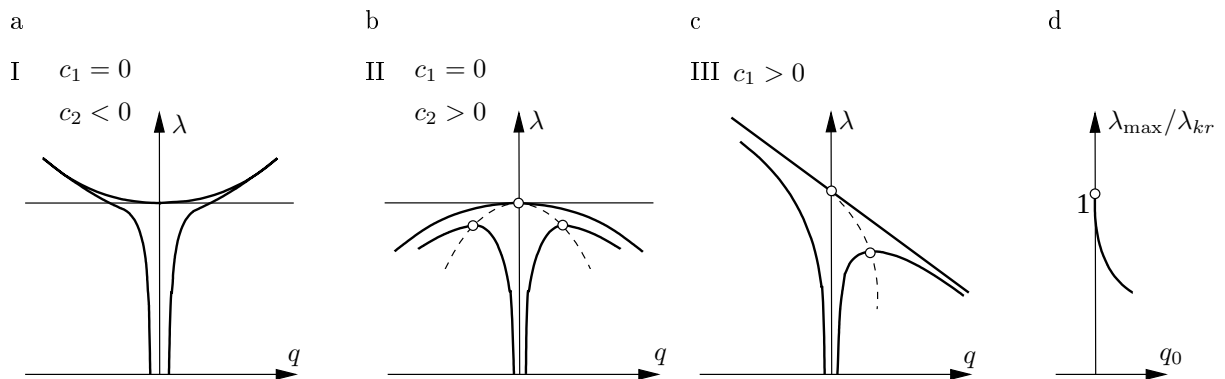


Kuva 13.23 Akselin suunnassa puristetun sylinterikuoren tasapainopolut.

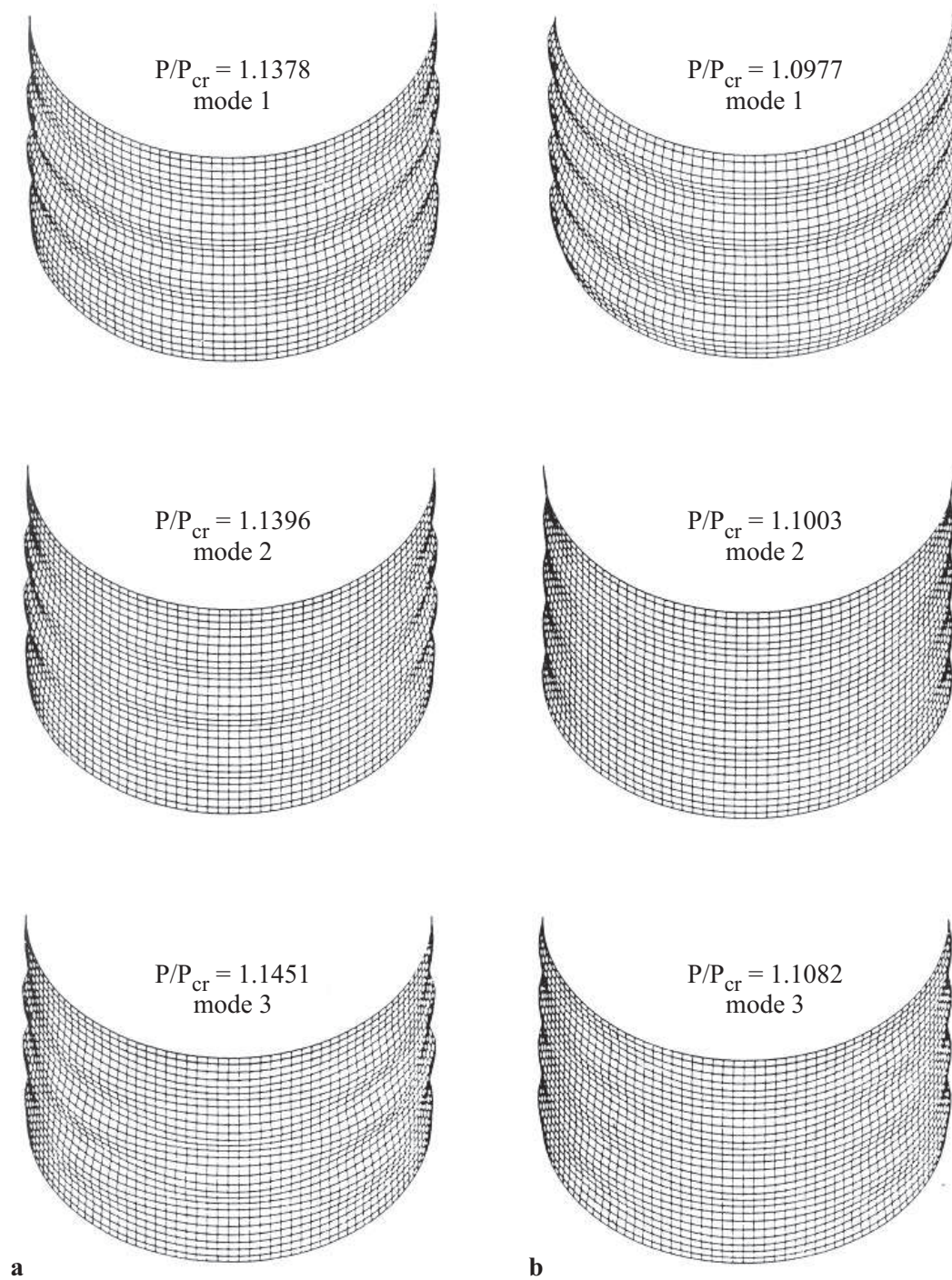
selle puristetulle sylinterikuorelle. Puristava kuorma on nyt λ , ja aksiaalinen siirtymä on U . Primaarisella polulla on 77 bifurkaatiopistettä ennen rajapistettä kohdassa $\frac{u}{u_{cr}} = 4.2$. Kuvassa 13.30 on piirretty 22 ensimmäistä sekundaarista tasapainopolkua primaarisen polun lisäksi. Kuvassa 13.31 on esitetty ensimmäinen sekundaaripolku ja siihen liittyvä kuoren deformaatiomuoto.



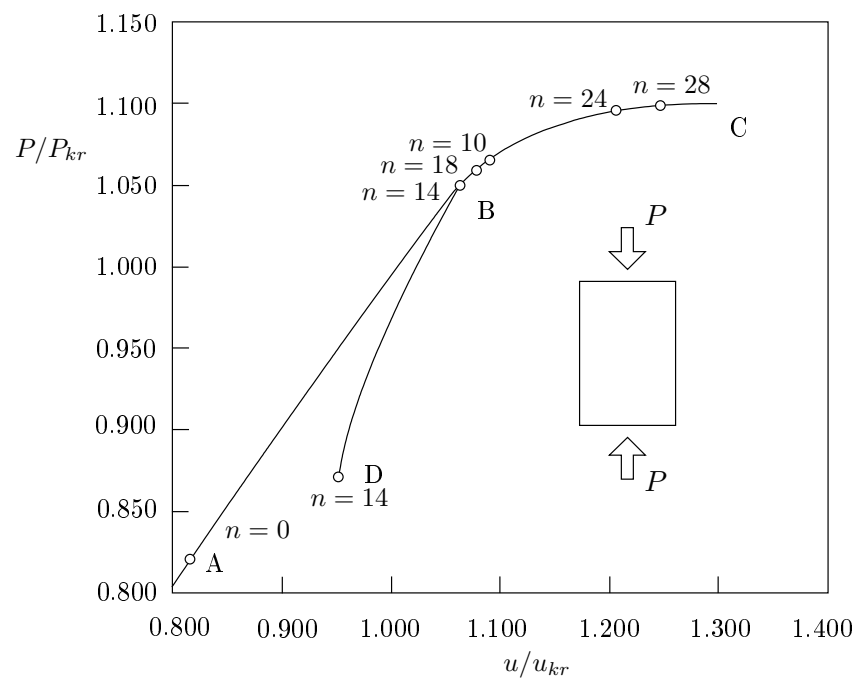
Kuva 13.24 von Kármánin esimerkkirakenne.



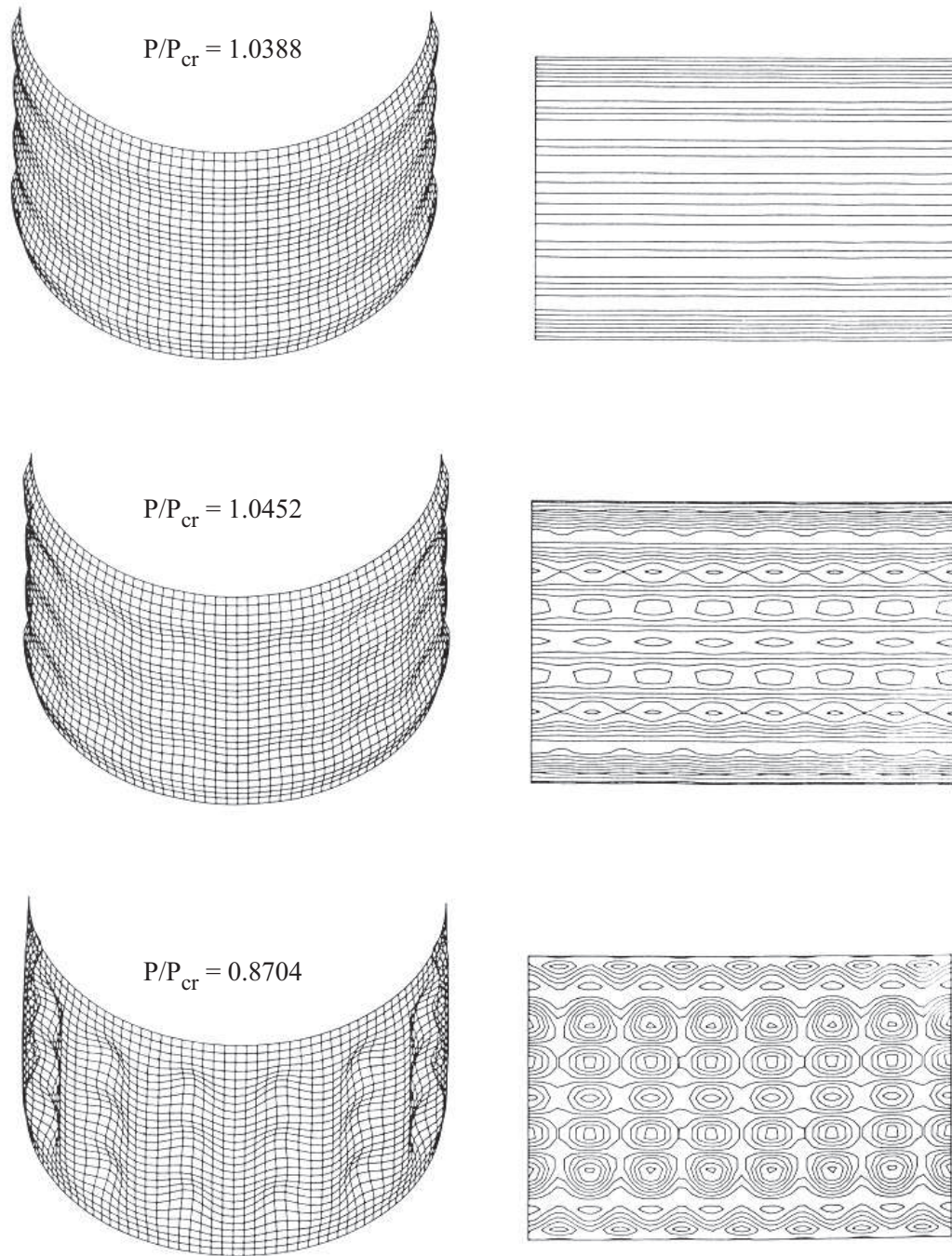
Kuva 13.25 Rakenteen muotovirheherkkyys Koiterin mukaan.



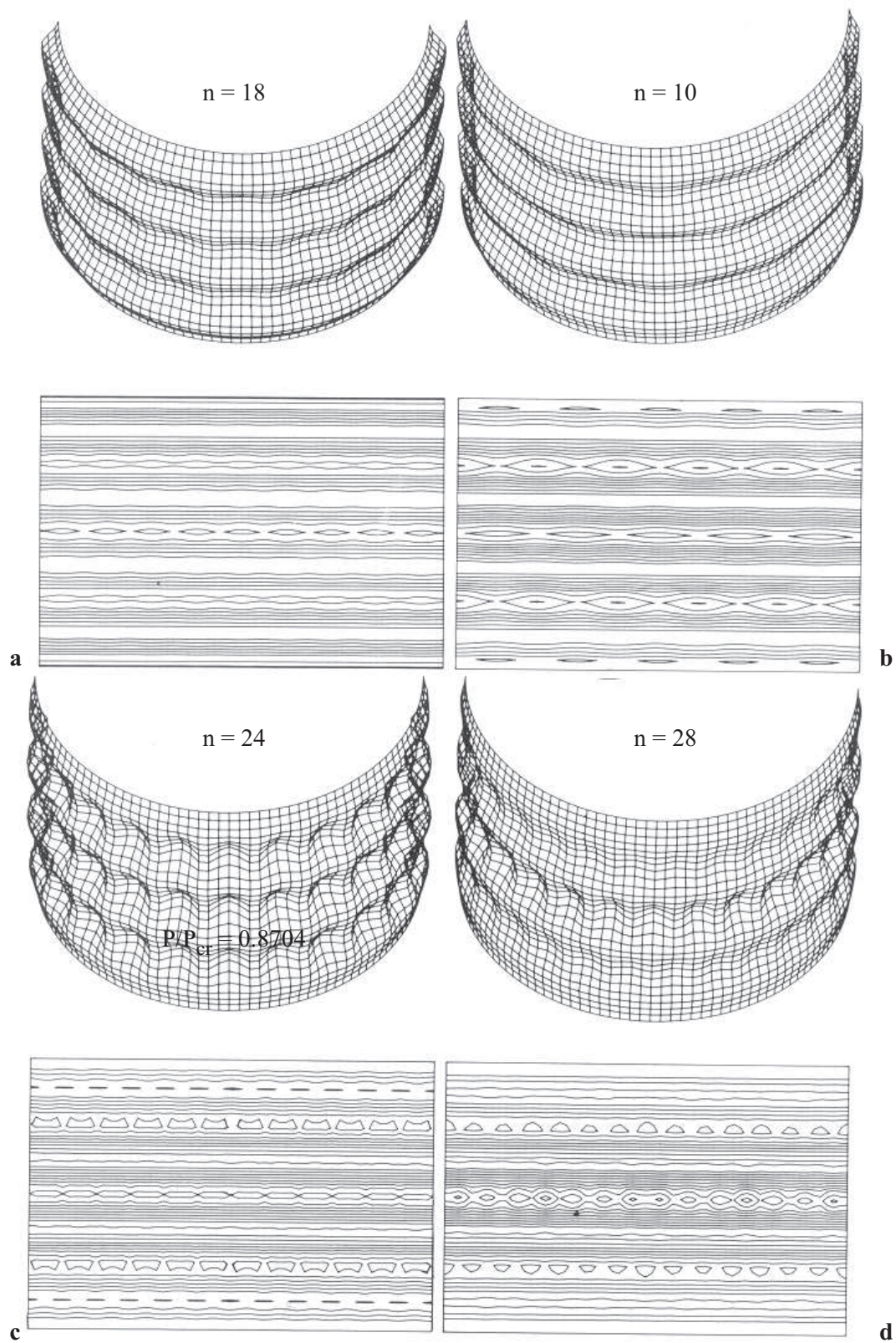
Kuva 13.26 Lineaarisen analyysin lommahdusmuodot.



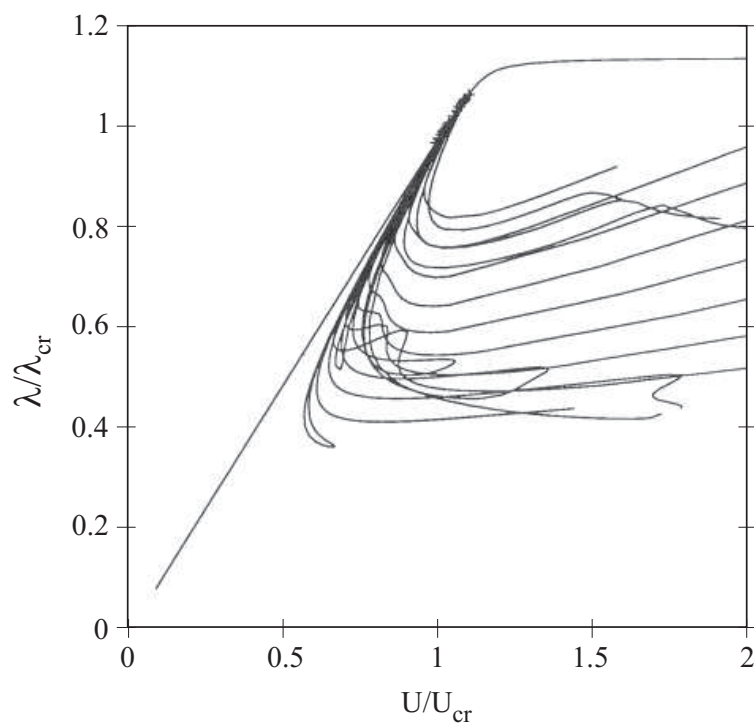
Kuva 13.27 Epälineaarisen analyysin tasapainopolkuja.



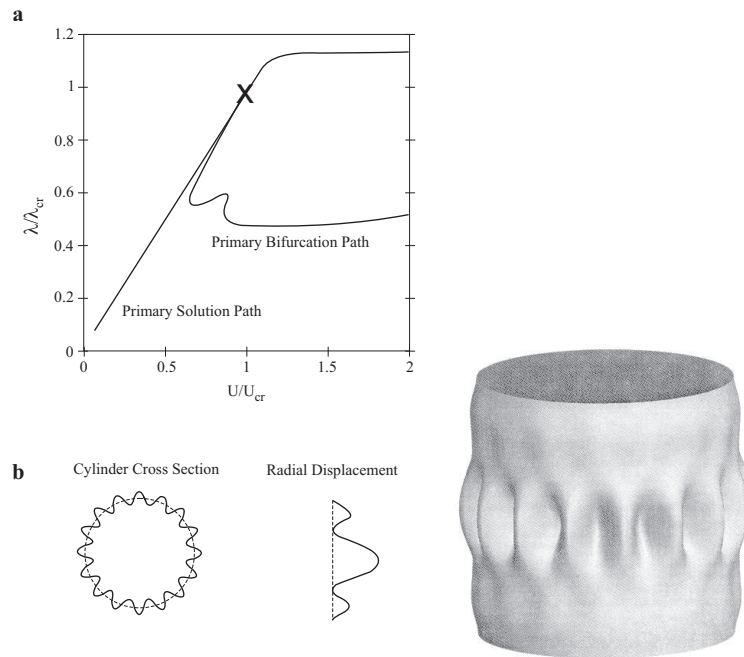
Kuva 13.28 Epälineaarisen analyysin deformaatiomutoja.



Kuva 13.29 Primaaripolulla kohdattavia deformaatiomuotoja.



Kuva 13.30 Primaaripolku ja 22 ensimmäistä sekundaarista polkua.



Kuva 13.31 Ensimmäinen sekundaarinen polku ja siihen liittyvä deformaatiomuoto.