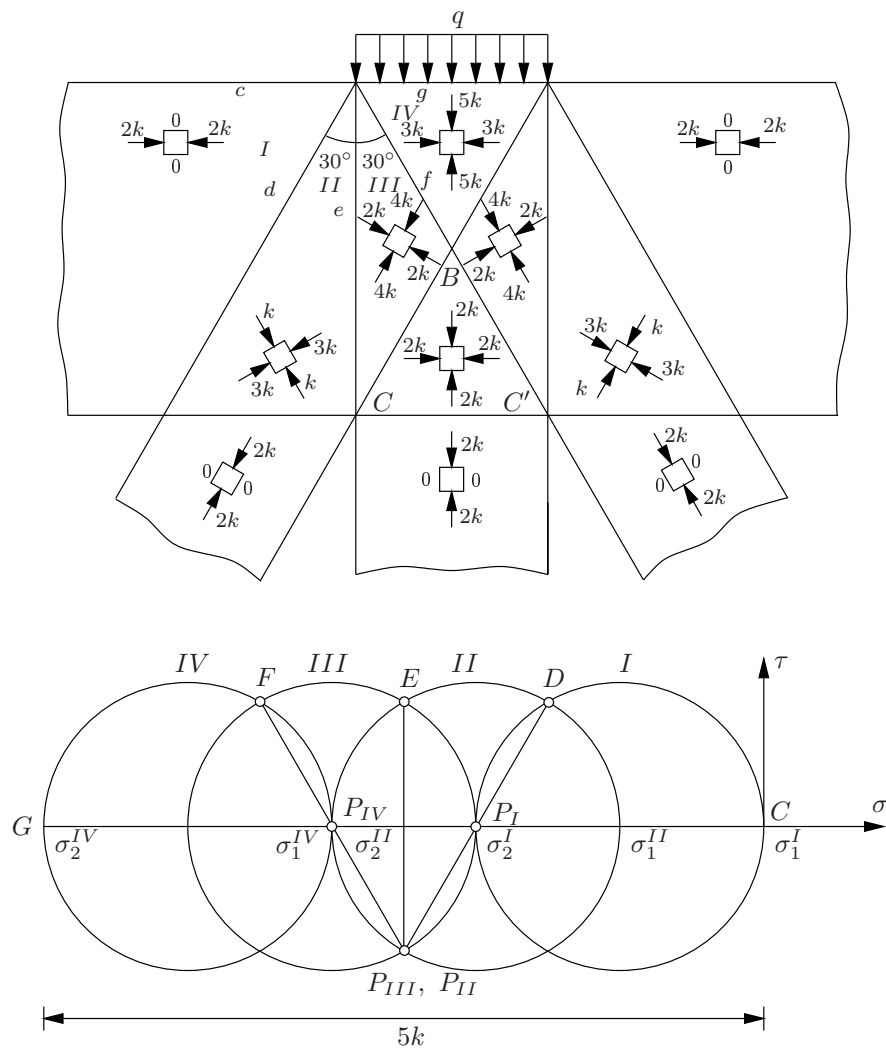


Plastisuusteoria

luentomoniste

Markku Tuomala



Sisältö

1	Johdanto	1
2	Palkin plastinen taivutus	15
2.1	Poikkileikkauksen plastisoituminen	15
2.2	Palkin plastisoituminen	18
2.3	Momentin ja käyrityksen välinen riippuvuus	19
2.4	Palkin taipuman laskenta	21
2.5	Jäännösjännitykset	23
3	Normaalivoiman ja leikkausvoiman vaikutus täysplastiseen momenttiin	27
3.1	Suorakaidepoikkileikkaus	27
3.2	I-poikkileikkaus, normaalivoima ja momentti	29
3.3	Leikkausvoiman vaikutus täysplastiseen momenttiin	33
3.4	Myötöehto kaksikulotteisessa jännitystilassa	37
3.4.1	Suorakaidepoikkileikkaus	39
3.4.2	<i>I</i> -poikkileikkaus	40
4	Rajakuorman määrittäminen yksinkertaisille rakenteille	45
4.1	Virtuaalisen työn yhtälö	48
4.2	Rajamekanismin määrittäminen	54
5	Mekanismimenetelmä	57
5.1	Plastisten nivelten lukumäärä	57
5.2	Mekanismien yhdistelymenetelmä	58
6	Rajakuormamenetelmän peruslauseet	75
7	Taipumien määrittäminen rajatilassa	83
8	Plastinen momentinjakomenetelmä	97
9	Minimipainomitoitus	107
9.1	Minimipainon määrittäminen mekanismien työyhtälöiden avulla	107
9.2	Minimipainoteoreemat	112

10 Muuttuva toistuva kuormitus	119
10.1 Mukautumislause	123
10.2 Vähittäismurtokuorman ala- ja yläraja	125
11 Plastinen vääntö	143
11.1 Siirtymämenetelmä	143
11.2 Voimamenetelmä	145
11.3 Vääntömomentti	147
11.3.1 Myötöehto	148
11.3.2 Täysplastinen vääntömomentti	148
11.3.3 Ontelopoikkileikkaus	149
11.4 Ohutseinäisen putken vääntö	151
11.5 Paksuseinäisen putken vääntömomentin ala-raja	153
11.6 Hiekkakasa-analogia	156
11.7 Yhdistettyjä kuormitustapauksia	157
12 Plastisuusteoriaa 2- ja 3-ulotteisissa jännitystiloissa	161
12.1 Jatkuvan aineen mekaniikan perusyhtälöt	161
12.1.1 Siirtymät, muodonmuutokset ja kinemaattiset yhtälöt	161
12.1.2 Jännitystensori ja tasapainoyhtälöt	163
12.1.3 Virtuaalisen työn periaate	172
12.2 Myötöehto	173
12.2.1 Hydrostaattisesta jännityksestä riippumattomat myötöehdot	175
12.2.2 Hydrostaattisesta jännityksestä riippuvat myötöehdot	178
12.3 Myötösääntö	182
12.3.1 Plastisen tehon maksimin periaate	188
12.4 Jännitysten ja muodonmuutosten väliset yhtälöt	189
12.4.1 Kimmoiset konstitutiiviset yhtälöt	189
12.4.2 Kimmoplastiset jännityksen ja muodonmuutoksen väliset yhtälöt ideaaliplastiselle aineelle	193
12.4.3 Myötölujittumissäännöt	202
12.4.4 Stabiili kimmoplastinen aine ja Druckerin postulaatti	204
12.4.5 Myötölujittuvan aineen kimmoplastiset jännityksen ja muodonmuutoksen väliset yhtälöt	209
12.5 Rajakuormamenetelmän peruslauseet	213
12.6 Mukautumislauseet useampiulotteisessa jännitystilassa	217
13 Tasomuodonmuutostilan ylä- ja alarajaratkaisut	221
13.1 Yläajaratkaisut	221
13.2 Alarajaratkaisut	229
14 Liukuviivateoriaa	239
14.1 Henckyn yhtälöt	242
14.2 Nopeusyhtälöt	243
14.3 Henckyn teoreemat	246

14.3.1	Henckyn ensimmäinen teoreema	246
14.3.2	Henckyn 2. teoreema	248
14.4	Liukuviivaesimerkkejä	249
14.4.1	Liukuviivaviuhka	249
14.4.2	Tasainen jännitystila	250
14.4.3	Leimapaineprobleema	251
14.4.4	Hillin esittämä ratkaisu leimapainetehtävälle	253
14.4.5	Säröllinen vetokappale	256
14.4.6	Lovellinen vetokappale	259
14.4.7	Penkereen rajakuorma	263
15	Plastisuusteorian soveltaminen laattoihin	265
15.1	Laatan kinemaattiset yhtälöt	265
15.2	Tasapainoyhtälöt	266
15.3	Myötöehto	268
15.3.1	Homogeeninen isotrooppinen laatta	268
15.3.2	Teräsbetoni­laatan myötöehto	269
15.4	Myötöviivateoriaa	275
15.4.1	Sisäinen virtuaalinen työ komponenttimuodossa	281
15.5	Alarajaratkaisut	292

Luku 1

Johdanto

Kuormien kasvaessa riittävän suuriksi rakenteissa tapahtuu plastisia, palautumattomia eli pysyviä muodonmuutoksia. Sitkeillä aineilla plastinen muodonmuutos on suuri ennen murtumista, mutta hauraalla aineella kuten esimerkiksi keraamilla se voi olla häviävän pieni.

Plastiset muodonmuutokset ovat riippumattomia muodonmuutosnopeudesta. Joillakin aineilla ei-elastiset muodonmuutokset ovat ajasta riippuvia. Tällaista ilmiötä nimitetään virumiseksi. Esimerkiksi betoni, muovit ja metallit (korkeissa lämpötiloissa) viruvat. Todellisten aineiden käyttäytymistä kuormien vaikutusten alaisina kuvataan konstitutiivisilla malleilla eli materiaalimalleilla:

Kimmoteoria

Lineaarissa kimmoteoriassa, yksiulotteisessa tapauksessa, venymän ja jännityksen suhde on lineaarinen eli

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (1.1)$$

Plastisuusteoria

Plastisuusteorian mukaan aineen myötörajan saavuttamisen jälkeen plastiset muodonmuutokset ovat ajasta riippumattomia ja palautumattomia.

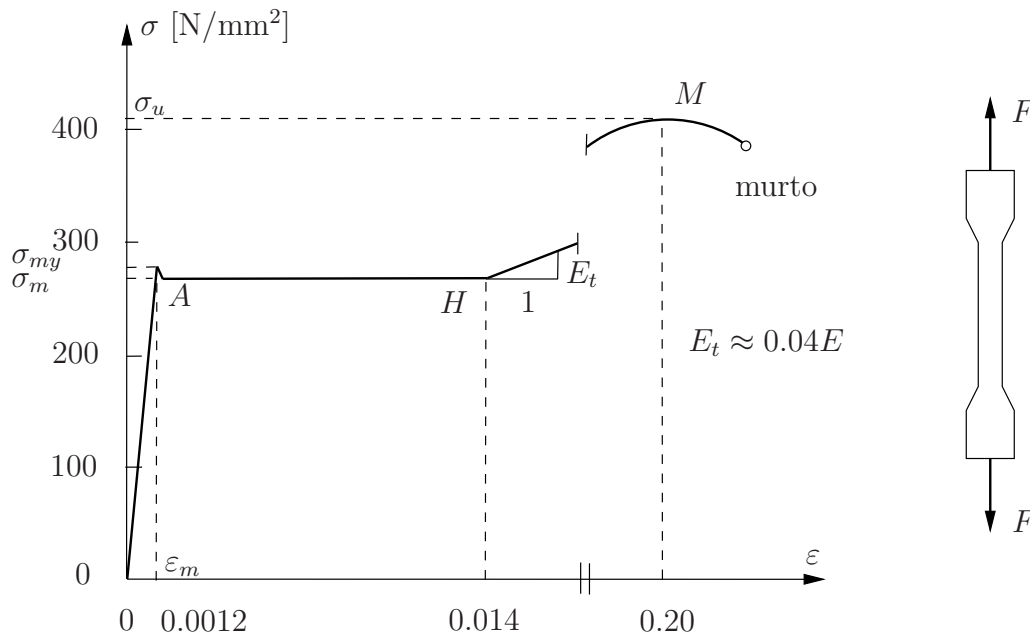
Viskoelastisuusteoria

Viskoelastisuusteoria kuvaa ajasta riippuvia muodonmuutoksia, jotka voivat palautua.

Viskoplastisuusteoria

Viskoplastisuusteoria on plastisuusteorian kaltainen, mutta materiaalin käyttäytyminen riippuu nyt muodonmuutosnopeudesta.

Plastisuusteoria soveltuu parhaiten metalleille ja se kehitettiin metalleilla tehtyjen kokeiden perusteella. Plastisuusteoriaa käytetään myös teräsbetonirakenteiden analysointiin. Tällöin on varmistettava, että rakenteella on riittävä muodonmuutoskyky.



Kuva 1.1 Rakenneteräksen venymäpiirros.

Materiaalin ns. venymäpiirros määritetään vetokokeen avulla. Koekappaleena on veto-sauva, kuva 1.1. Tarkastellaan esimerkkinä rakenneteräksen venymäpiirrosta. Kuvassa 1.1 on erään kuumavalssatun niukkahiilisen teräksen venymäpiirros.

Rakenneteräksen ominaisuuksia ovat:

- kimmokerroin $E = 2.05 \cdot 10^5$ MPa (205 kN/mm²),
- myötöraja $\sigma_m = 250$ N/mm²,
- myötövenymä $\varepsilon_m = 1.2$ ‰,
- myötölujittuminen alkaa pisteestä H , jota vastaa venymä $\varepsilon = 0.014$,
- jännityksen suurin arvo saavutetaan kohdassa $\varepsilon = 0.2$ ja $\sigma_u = 410$ N/mm².

Venymäpiirroksessa havaitaan osat:

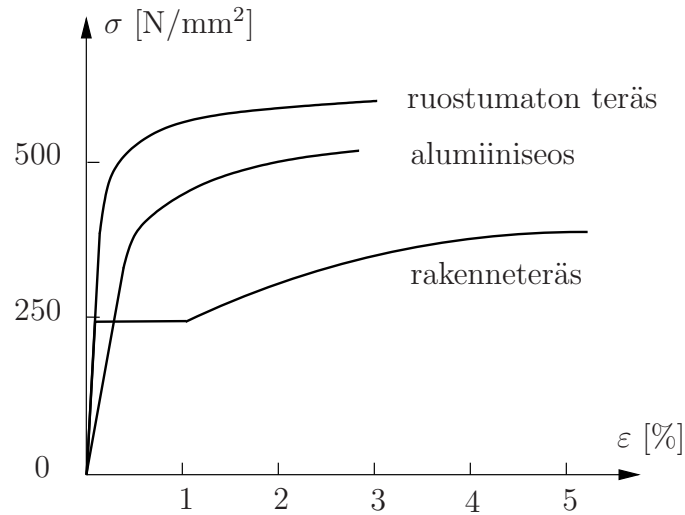
- kimmainen osa $0A$, jolloin $\sigma = E\varepsilon$,
- plastinen osa AHM ; välillä HM tapahtuu myötölujenemista.

Rakenneteräksen suhteellisuusraja σ_s vastaa venymää $\varepsilon = 0.2$ ‰. Jännityksen arvoilla $\sigma < \sigma_s$ muodonmuutos on täydellisesti palautuva. Kuvan 1.1 teräksen myötöraja on $\sigma_m = 250$ N/mm².

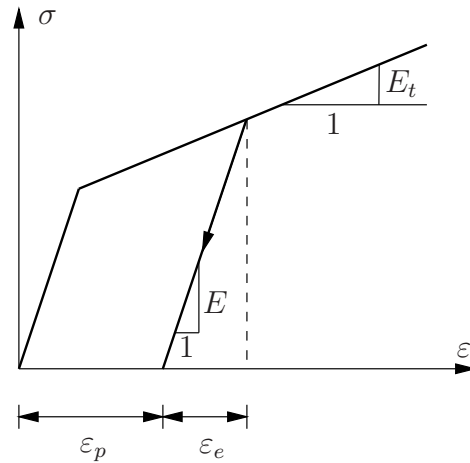
Jos aineella ei ole selvästi havaittavaa myötörajaa, niin myötörajaksi σ_m määritellään pysyvää venymää $\varepsilon_p = 0.2$ ‰ vastaava jännitys $\sigma_{0.2}$, kuva 1.4.

Muodonmuutos ε jaetaan kimmoiseen ja plastiseen osaan:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p. \quad (1.2)$$



Kuva 1.2 Venymäpiirroksia.



Kuva 1.3 Kimmoplastisen aineen bilineaarinen yksiulotteinen malli.

Kimmainen muodonmuutos on

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}. \quad (1.3)$$

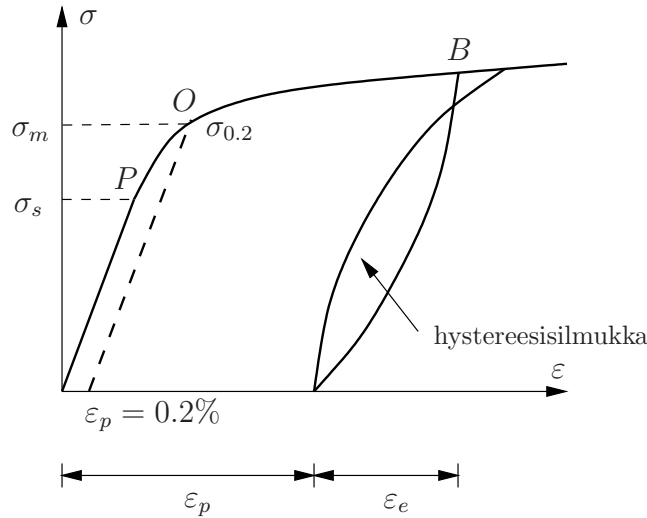
Joillakin aineilla havaittava hystereesi-ilmiö on merkityksellinen jaksollisen kuormituksen tapauksessa. Vaihtelevan kuormituksen tapauksessa saattaa esiintyä ns. Bauschingerin ilmiö.

Veto/puristus-kokeessa venymäpiirrokset OAB ja $OA'B'$, kuvassa 1.5, ovat samanmuotoiset. Jos kuorman suunta vaihdetaan pisteessä B vedon jälkeen puristukseksi, alkaa plastinen myötö ennenkuin saavutetaan jännityksen arvo $-\sigma_1$ tai edes $-\sigma_0$.

Rakenteen analysointia varten aineen todellista venymäpiirrosta joudutaan idealisoimaan, esim. kuvan 1.6 esittämällä tavoilla.

Kuvan 1.6 malli α voidaan lausua kaavoilla muodossa

$$\sigma = E\varepsilon, \text{ kun } |\varepsilon| \leq \varepsilon_m, \quad (1.4)$$



Kuva 1.4 Plastisen aineen yksiulotteinen malli.

$$\sigma = A|\varepsilon|^k \operatorname{sgn}(\varepsilon), \text{ kun } |\varepsilon| > \varepsilon_m. \quad (1.5)$$

Vastaavasti kuvan 1.6d malli β on kaavan muodossa

$$\sigma = E\varepsilon, \text{ kun } |\varepsilon| \leq \varepsilon_m, \quad (1.6)$$

tai

$$\sigma = \sigma_m \operatorname{sgn}(\varepsilon) + E_t(\varepsilon - \varepsilon_m), \text{ kun } |\varepsilon| > \varepsilon_m. \quad (1.7)$$

Esim. alumiinille on sovellettu Rambergin-Osgoodin mallia

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left[1 + \alpha \left| \frac{\sigma}{\sigma_0} \right|^{\beta-1} \right], \quad (1.8)$$

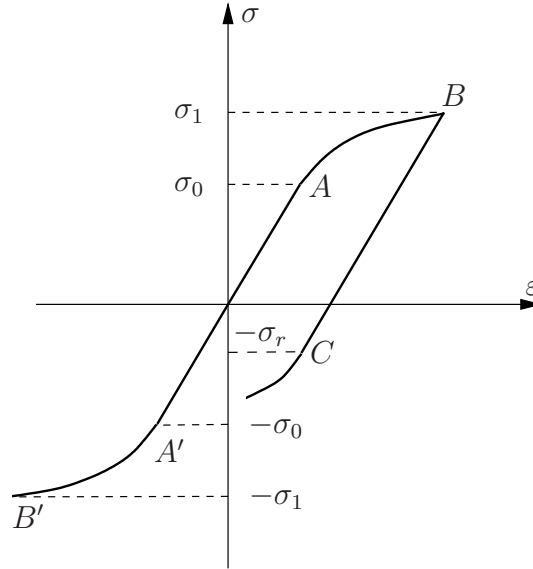
missä $\alpha = 3/7$ ja β on kokonaisluku.

Kuvassa 1.7 on esitetty eräs yksinkertainen kinemaattisesti myötölujuenevan aineen malli, jollainen tulee kyseeseen jaksollisen kuormituksen tapauksessa, esim. maanjäristyskuormituksessa.

Rakenteen plastinen rajakuorma määritetään jäykän, ideaaliplastisen mallin avulla. Jos geometrian muutokset (siirtymät) ennen rajakuorman saavuttamista jätetään huomioonottamatta, niin kimmoplastisella mallilla ja ideaaliplastisella mallilla saadaan sama rajakuorma, ts. kimmoiset muodonmuutokset eivät vaikuta rajakuorman arvoon.

Metallien plastisuusteoriassa plastisten muodonmuutosten syntyminen selitetään ns. dislokaatioteorialla. Täydellisen kiderakenteen omaavat metallit kestäisivät paljon suurempia rasituksia kuin kokeissa on havaittu. Aineessa (metallissa) olevat dislokaatiot (kidevirheet) kertautuvat (monistuvat) kuormitettaessa ja kulkeutuvat muutoin täydellisesti järjestäytyneen kidehilan läpi. Makroskooppiselta kannalta tarkasteltuna koekappaleeseen syntyy plastisia muodonmuutoksia.

Johdantona rakenteiden plastisuusteoriaan tarkastellaan seuraavaksi yksinkertaisia ristikkoesimerkkejä, joissa sovelletaan edellä esiteltyä kimmoista ideaaliplastista materiaali-mallia.



Kuva 1.5 Bauschingerin ilmiö.

Esimerkki 1.1 *Lasketaan staattisesti määrätyn ristikon rajakuorma.*

Kuvan 1.8 ristikko on staattisesti määrätty. Sauvavoimat ratkaistaan kahdesta tasapainoyhtälöstä:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow S_a \cos 45^\circ - S_b \cos 30^\circ = 0, \quad (1.9)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow S_a \sin 45^\circ + S_b \sin 30^\circ = P, \quad (1.10)$$

eli

$$S_a \frac{\sqrt{2}}{2} - S_b \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow S_a \approx 1.225 S_b, \quad (1.11)$$

$$S_a \frac{\sqrt{2}}{2} + S_b \frac{1}{2} = P \Rightarrow S_a \approx 0.897 P, \quad S_b \approx 0.732 P. \quad (1.12)$$

Sauvojen a ja b poikkileikkausten pinta-alat ovat A ja $2A$. Sauvojen jännitykset ovat tällöin

$$\sigma_a = 0.897 \frac{P}{A}, \quad \sigma_b = 0.366 \frac{P}{A}. \quad (1.13)$$

Kuorman P kasvaessa sauva a plastisoituu, kun $\sigma_a = 0.897 \frac{P}{A} = \sigma_m$ (myötöraja), eli myötökuorman arvo on $P_m = 1.115 A \sigma_m$. Tässä tapauksessa myötökuorma P_m on sama kuin plastinen rajakuorma (kantokuorma) P_p , ts. rakenteen rasitetuimman osan myötäessä rakenne samalla sortuu. Kun $P = P_m = P_p$, sauvan a pituus kasvaa rajatta.

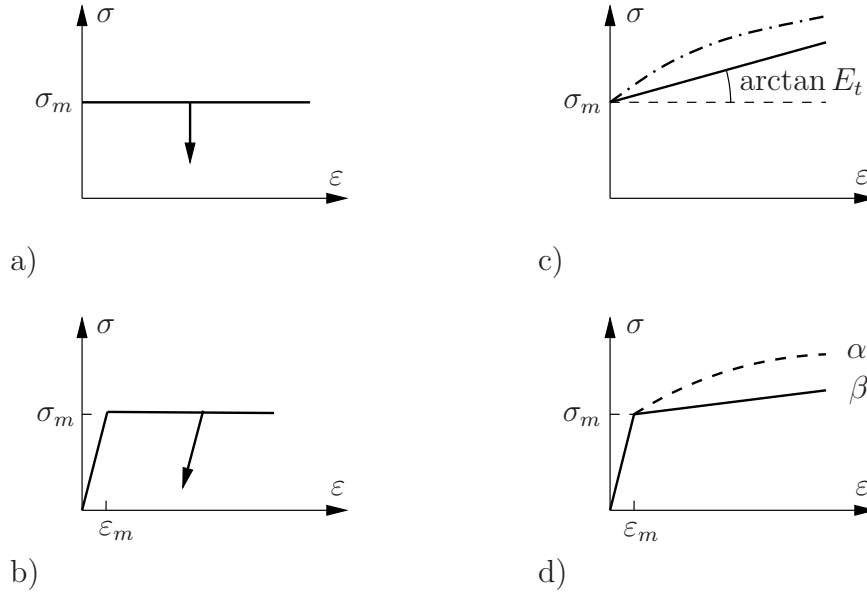
Esimerkki 1.2 *Määritetään staattisesti määräämättömän ristikon rajakuorma.*

Tarkastellaan kuvan 1.9 ristikkoa, jonka sauvojen pinta-alat ovat yhtä suuret: $A_a = A_b = A_c = A$. Symmetrian takia sauvojen a ja c sauvavoimat ovat yhtä suuret, eli $S_a = S_c$. Myös vaakasuuntaisen tasapainoehdon

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -S_a \frac{\sqrt{2}}{2} + S_c \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (1.14)$$

perusteella saadaan

$$S_a = S_c. \quad (1.15)$$



Kuva 1.6 Idealisoituja yksiulotteisia materiaaalmalleja. a) Jäykkä ideaaliplastinen malli, b) kimminen ideaaliplastinen malli, c) jäykkä, myötölujittuva malli, d) kimminen myötölujittuva malli (α tai β).

Pystysuuntainen tasapainoehto on

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow S_a \frac{\sqrt{2}}{2} + S_b + S_c \frac{\sqrt{2}}{2} = P. \quad (1.16)$$

Ristikön pisteen A pystysiirtymän v ja sauvan pituudenmuutoksen δ välinen yhteensopivuusehto on kuvan 1.10 perusteella

$$\delta = v \sin \alpha. \quad (1.17)$$

Kulmassa α olevan (vinon) sauvan muodonmuutos on

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L/\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{L} v, \quad (1.18)$$

ja jännitys on

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{L} v \sin^2 \alpha, \quad (1.19)$$

joten sauvavoima taipuman avulla lausuttuna on

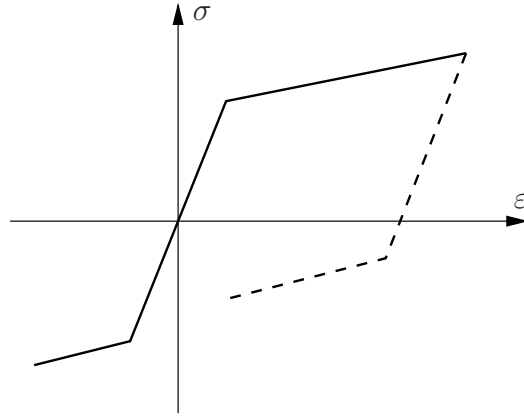
$$S = A\sigma = \frac{EA}{L} v \sin^2 \alpha. \quad (1.20)$$

Yhteensopivuus solmussa A säilyy, jos piste A siirtyy pystysuunnassa. Tällöin, kuva 1.10, $\delta_a = \delta_c = v \sin 45^\circ = \frac{v}{\sqrt{2}}$ ja $\delta_b = v$. Sauvavoimat ovat vastaavasti

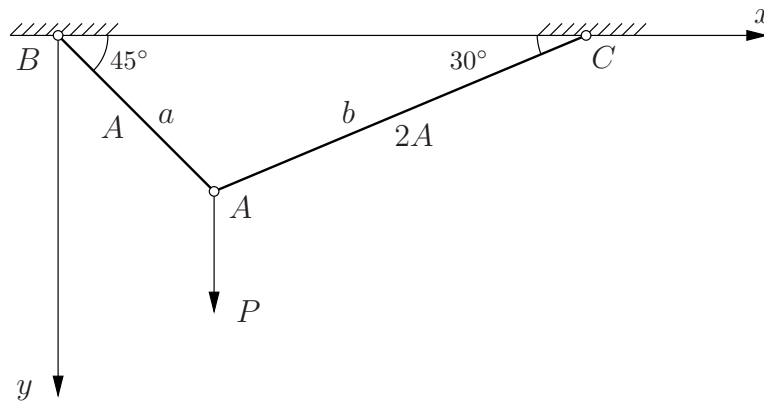
$$S_a = S_c = \frac{EA}{L} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 v = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} v \quad \text{ja} \quad S_b = \frac{EA}{L} v = 2S_a. \quad (1.21)$$

Tasapainoehdosta $\sum F_y = 0$ seuraa yhtälö

$$\sqrt{2}S_a + S_b = P \quad \text{eli} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \frac{EA}{L} v = P, \quad (1.22)$$



Kuva 1.7 Kinemaattisesti myötölujittuvan aineen malli, joka ottaa huomioon Bauschingerin ilmiön.



Kuva 1.8 Staattisesti määrätty ristikko.

josta ratkaistaan ristikon pisteen A siirtymä (positiivinen alaspäin)

$$v = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \frac{L}{EA} P. \quad (1.23)$$

Tämä ristikon taipuman kaava on voimassa, kun mikään sauva ei ole plastisoitunut. Sauvavoimat ovat tässä kuormitusvaiheessa

$$S_b = \frac{2}{\sqrt{2} + 2} P \approx 0.586P, \quad S_a = S_c = \frac{1}{\sqrt{2} + 2} P \approx 0.293P, \quad (1.24)$$

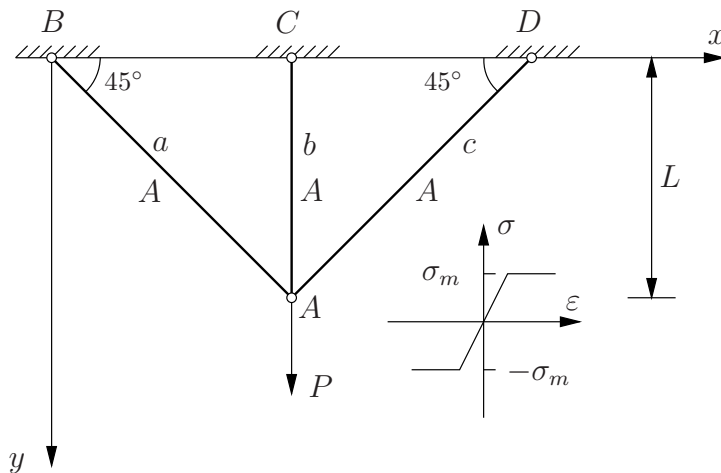
ja sauvojen jännitykset ovat vastaavasti

$$\sigma_a = \sigma_c = \frac{1}{\sqrt{2} + 2} \frac{P}{A} \approx 0.293 \frac{P}{A}, \quad \sigma_b = \frac{2}{\sqrt{2} + 2} \frac{P}{A} \approx 0.586 \frac{P}{A}. \quad (1.25)$$

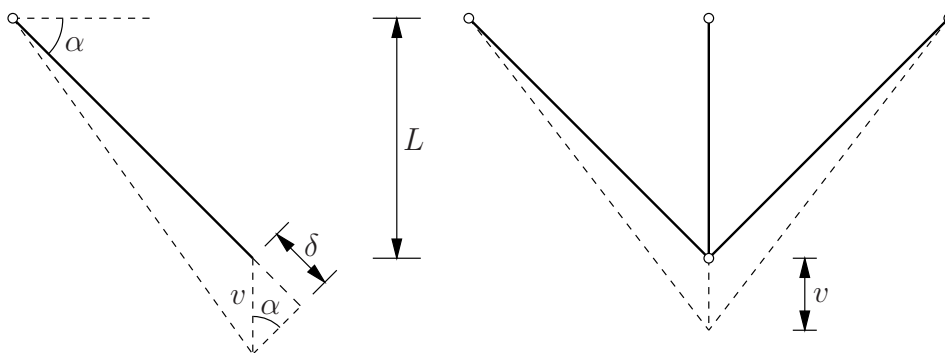
Sauva b myötää ensimmäisenä kuorman arvolla $P = P_1$, kun $\sigma_b = 2/(2 + \sqrt{2})P_1/A \approx 0.586P_1/A = \sigma_m$ (myötöraja), mistä ratkaistaan

$$P_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} A \sigma_m \approx 1.707 A \sigma_m. \quad (1.26)$$

Tällöin $\sigma_b = \sigma_m$ ja $\sigma_a = \sigma_c = 0.5\sigma_m$.



Kuva 1.9 Staattisesti määräämätön ristikko.



Kuva 1.10 Ristikon nurkan yhteensopivuus.

Taipuma myötökuorman arvolla saadaan taipuman avulla lausutusta tasapainoehdosta (1.22) tai esim. kaavasta

$$S_b = A\sigma_m = \frac{EA}{L}v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{\sigma_m L}{E}. \quad (1.27)$$

Kuormaa P voidaan kasvattaa arvosta $P_1 = P_m$, koska sauvojen a ja c jännitys on vasta puolet myötörajasta. Kuorman arvolla $P > P_m$ rakenne on staattisesti määrätty, koska nyt sauvan b sauvavoima $S_b = A\sigma_m$ on tunnettu. Tasapainoehdoista seuraa

$$\sqrt{2}S_a = P - A\sigma_m \Rightarrow S_a = (P - A\sigma_m)/\sqrt{2}. \quad (1.28)$$

Sauvat a ja c plastisoituvat, kun $S_a = A\sigma_m$. Merkitään, että tällöin $P \equiv P_2$, ja tasapainoehdosta $(P_2 - A\sigma_m)/\sqrt{2} = A\sigma_m$ seuraa

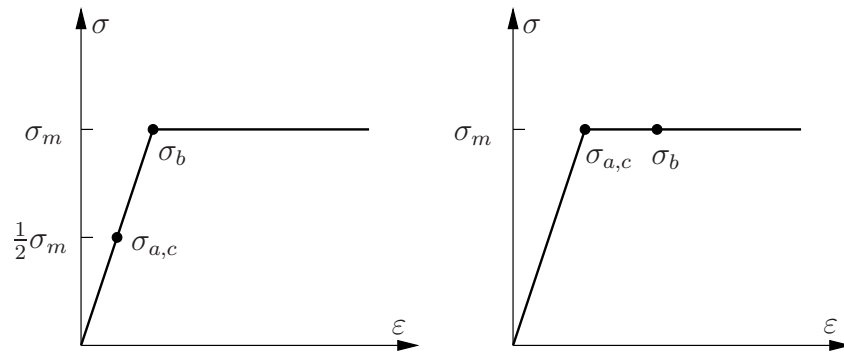
$$P_2 = (1 + \sqrt{2})A\sigma_m \approx 2.414A\sigma_m. \quad (1.29)$$

Kuorman arvoa $P = P_2$ vastaava taipuma on sauvan a sauvavoiman kaavan (1.21) avulla

$$v_2 = 2\frac{\sigma_m L}{E}. \quad (1.30)$$

Kun $P = P_2$, niin kaikki sauvat myötäävät. Ristikon kantokuorma (ko. kuormitustapaukselle) on siten $P_p = P_2$.

Esimerkin perusteella voidaan tehdä seuraavat johtopäätökset:



Kuva 1.11 Ristikon sauvojen jännitys-venymäkuvaajat. a) Sauvojen jännitykset, kun $P = P_1$, b) sauvojen jännitykset, kun $P = P_2$.

Taulukko 1.1 Ristikon sauvavoimat

Kuorma	P_1	$P_2 = P_p$
S_c/S_c	1	1
S_b/S_c	1/2	1

1. staattisen määräämättömyyden aste pienenee, kun sauvat plastisoituvat,
2. sauvavoimat jakautuvat uudelleen, ks. taulukko 1.1,
3. ristikon jäykkyys $K_t = dP/dv$ pienenee kuorman kasvaessa.

Välillä $0 \rightarrow G$ ristikon jäykkyys pystykuorman suhteen on

$$K_t \equiv K_{t0} = \frac{P_1 - P_0}{v_1 - v_0} = \frac{P_1}{v_1} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{EA}{L} \approx 1.707 \frac{EA}{L}, \quad (1.31)$$

ja välillä $G \rightarrow H$ vastaavasti

$$K_t \equiv K_{t1} = \frac{P_2 - P_1}{v_2 - v_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{EA}{L} \approx 0.707 \frac{EA}{L}. \quad (1.32)$$

Tarkastellaan, mitä tapahtuu, kun kuorma $P = P_p$ pienennetään nollaan eli siirrytään kuorma-siirtymäkäyrällä pisteestä H pisteeseen I . Palautuminen $P_p \rightarrow 0$ eli $H \rightarrow I$ tapahtuu kimmoisesti.

Sauvat a ja c ovat kimmoisia, joten

$$S_a = S_c = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} v. \quad (1.33)$$

Sauvan b venymä hetkellä 2 on

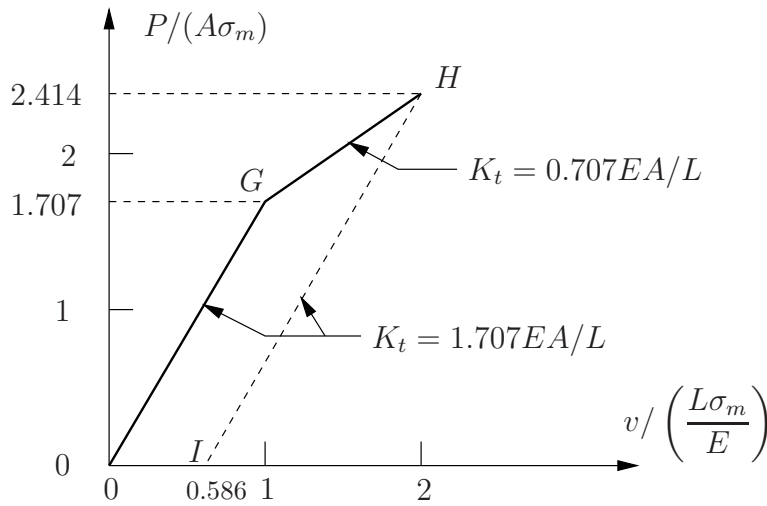
$$\varepsilon_{b2} = \frac{v_2}{L} = 2 \frac{\sigma_m}{E}. \quad (1.34)$$

Sauvan b jännitys on

$$\sigma_b = \sigma_m + E(\varepsilon_b - \varepsilon_{b2}) = E \frac{v}{L} - \sigma_m, \quad (1.35)$$

ja sauvavoima S_b on

$$S_b = A\sigma_b = \frac{EA}{L} v - A\sigma_m. \quad (1.36)$$



Kuva 1.12 Ristikön kuorma-siirtymäkäyrä.

Sijoittamalla taipuman avulla lausutut sauvavoimat pystysuoraan tasapainoehtoon

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(S_a + S_c) + S_b = P \quad (1.37)$$

ja ottamalla huomioon vaakasuora tasapainoehto $S_a = S_c$ tulee

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{EA}{L} v + \frac{EA}{L} v - A\sigma_m = P. \quad (1.38)$$

Taipuma kuorman arvolla $P \equiv P_3 = 0$ on

$$v_3 = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \frac{\sigma_m L}{E} \approx 0.586 \frac{\sigma_m L}{E}. \quad (1.39)$$

Taipuman arvoa $v = v_3$ vastaavat sauvavoimat ovat

$$S_{a3} = S_{c3} = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} v_3 = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} A\sigma_m \approx 0.293 A\sigma_m, \quad (1.40)$$

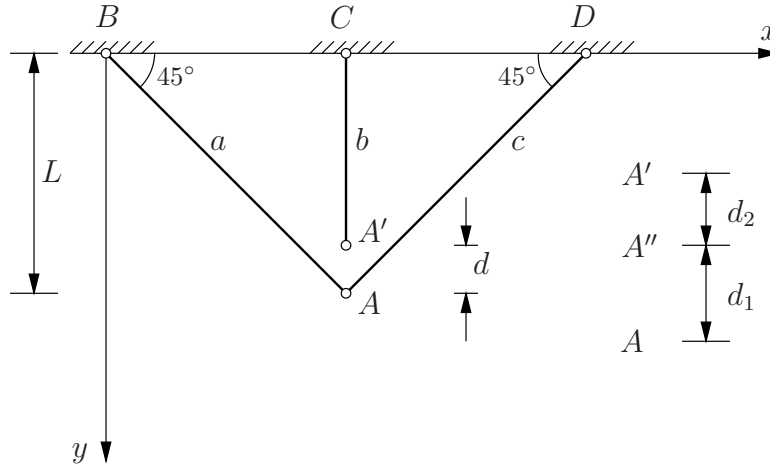
$$S_{b3} = \frac{EA}{L} v_3 - A\sigma_m = \left(\frac{2}{2 + \sqrt{2}} - 1 \right) A\sigma_m \approx -0.414 A\sigma_m. \quad (1.41)$$

Kuorman arvoa $P = P_3$ vastaavat voimat $S_{a3} = S_{c3} \equiv S_c^r$ ja $S_{b3} \equiv S_b^r$ ovat ns. jäännösvoimat (vastaavat ulkoisen kuorman arvoa $P = 0$), ja ne toteuttavat homogeenisen tasapainoehdon

$$\sqrt{2}S_c^r + S_b^r = 0. \quad (1.42)$$

Esimerkki 1.3 Tutkitaan ristikköä, jossa on yhteensopimaton sauva.

Tarkastellaan edellisen esimerkin ristikköä, jonka sauva b on valmistettu (vahingossa) lyhyemmäksi kuin väli AC määrän d . Olkoon $d = 0.75 \frac{L\sigma_m}{E}$. Jos väli AA' pakotetaan nolllaksi, niin sauva b venyy ja sauvat a ja c puristuvat (lyhyemmiksi). Samalla ristikon piste A kohoaa. Sauvaan b syntyvä vetovoima olkoon $S_b = F$. Pystysuoran tasapainoehdon perusteella saadaan



Kuva 1.13 Ristikon sauva b on yhteensopimaton.

$$\sqrt{2}S_a + F = 0 \quad \Rightarrow \quad S_a = -\frac{F}{\sqrt{2}}. \quad (1.43)$$

Sauvan b venymä on

$$d_2 = S_b \frac{L}{EA} = F \frac{L}{EA}. \quad (1.44)$$

Pisteen A siirtymä ylöspäin, sauvojen a ja c puristuessa kokoon, on kaavan

$$v = \frac{\delta}{\sin \alpha} \quad (1.45)$$

mukaisesti

$$d_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} S_a \frac{\sqrt{2}L}{EA} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \frac{FL}{EA}. \quad (1.46)$$

Yhteensä

$$|d_1| + |d_2| = d = 0.75L \frac{\sigma_m}{E}. \quad (1.47)$$

Sijoittamalla d_1 :n ja d_2 :n lausekkeet tulee

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \right) \frac{FL}{EA} = 0.75L \frac{\sigma_m}{E}, \quad (1.48)$$

josta ratkaistaan voima F

$$F = \frac{0.75\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} A\sigma_m \approx 0.311A\sigma_m, \quad (1.49)$$

ja sauvavoimat kuorman arvolla $P = 0$:

$$S_{a0} = -\frac{0.75}{2 + \sqrt{2}} A\sigma_m \approx -0.220A\sigma_m, \quad S_{b0} = \frac{0.75\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} A\sigma_m \approx 0.311A\sigma_m. \quad (1.50)$$

Ristikon taipuma kuorman arvolla $P = 0$ on

$$d_1 = -\frac{1.5}{2 + \sqrt{2}} A\sigma_m \frac{L}{EA} \approx -0.439 \frac{\sigma_m L}{E}. \quad (1.51)$$

Todetaan, että sauvavoimat $S_a = S_{a0}$, $S_b = S_{b0}$ ja $S_c = S_{c0}$ toteuttavat homogeenisen tasapainoyhtälön solmussa A (ovat keskenään tasapainossa).

Kuormitetaan sitten ristikköä kuten esimerkissä 1.2. Merkitään edelleen, että ristikon pisteen A pystysiirtymä on v . Alkutilassa pisteen A siirtymä on $v_0 = d_1 \approx -0.439 \frac{\sigma_m L}{E}$. Kuorman P funktiona saadaan ratkaisu samalla tavalla kuin esimerkissä 1.2.

Kuorman arvoilla $P > 0$ on voimassa tasapainoehto

$$\sqrt{2}S_a + S_b = P, \quad (1.52)$$

missä

$$S_a = S_{a0} + \Delta S_a, \quad S_b = S_{b0} + \Delta S_b, \quad \text{ja} \quad P = P_0 + \Delta P. \quad (1.53)$$

Vastaavasti taipuma kuorman arvolla $P = P_0 + \Delta P$ on $v = v_0 + \Delta v$.

Alkutilassa $P = P_0 = 0$ on voimassa tasapainoehto

$$\sqrt{2}S_{a0} + S_{b0} = P_0 = 0, \quad (1.54)$$

joten inkrementit (lisäykset) toteuttavat ehdon

$$\sqrt{2}\Delta S_a + \Delta S_b = \Delta P. \quad (1.55)$$

Sauva b plastisoituu ensimmäisenä (a ja c ovat aluksi puristettuja). Kun sauvat ovat kimmoisia, niin sauvavoimien muutokset ovat

$$\Delta S_a = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} \Delta v, \quad \Delta S_b = \frac{EA}{L} \Delta v. \quad (1.56)$$

Sauva b plastisoituu, kun

$$S_{b0} + \Delta S_b = A\sigma_m \Rightarrow \frac{0.75\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} A\sigma_m + \frac{EA}{L} \Delta v = A\sigma_m, \quad (1.57)$$

josta ratkaistaan

$$\Delta v \equiv \Delta v_1 = \frac{2 + 0.25\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \frac{\sigma_m L}{E}. \quad (1.58)$$

Sauvavoiman muutos sauvassa a on

$$\Delta S_{a1} = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} \Delta v_1 = \frac{1 + 0.125\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} A\sigma_m. \quad (1.59)$$

Taipuma, sauvavoimat ja kuorma sauvan b plastisoitumisen hetkellä ovat

$$v_1 = v_0 + \Delta v_1 = 0.25 \frac{\sigma_m L}{E}, \quad (1.60)$$

$$S_{a1} = S_{a0} + \Delta S_{a1} = 0.125 A\sigma_m, \quad S_{b1} = S_{b0} + \Delta S_{b1} = A\sigma_m, \quad (1.61)$$

$$P_1 = 0 + \Delta P_1 = \sqrt{2}\Delta S_{a1} + \Delta S_{b1} = (1 + 0.125\sqrt{2}) A\sigma_m \approx 1.178 A\sigma_m. \quad (1.62)$$

Tutkitaan tapausta kuorman arvoilla $P > P_1$. Merkitään seuraavassa, että $\Delta P = P - P_1$. Koska sauva b on plastisoitunut, $S_b = A\sigma_m$ ja $\Delta S_b \equiv S_b - S_{b1} = 0$. Tasapainoehdosta

$$\sqrt{2}\Delta S_a + 0 = \Delta P \quad (1.63)$$

seuraa, (kun $P > P_1$),

$$\sqrt{2} \frac{1}{2} \frac{EA}{L} \Delta v = \Delta P \Rightarrow \Delta v = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{L}{EA} \Delta P. \quad (1.64)$$

Taulukko 1.2 Yhteenveto ristikon kuormituksesta

$\frac{P}{A\sigma_m}$	$\frac{S_a}{A\sigma_m}$	$\frac{S_b}{A\sigma_m}$	$\frac{v}{L\sigma_m/E}$	
0	-0.220	0.311	-0.439	
1.178	0.125	1	0.250	b myötää
2.414	1	1	2	

Ristikön sauva a myötää, kun

$$S_{a1} + \Delta S_a = A\sigma_m, \quad (1.65)$$

eli

$$0.125A\sigma_m + \Delta S_a = A\sigma_m \Rightarrow \Delta S_a \equiv \Delta S_{a2} = 0.875A\sigma_m. \quad (1.66)$$

Tarvittava kuorman lisäys sauvan a plastisoitumiseksi on siten

$$\Delta P_2 = \sqrt{2}\Delta S_{a2} = 0.875\sqrt{2}A\sigma_m \approx 1.237A\sigma_m. \quad (1.67)$$

Tasapainoyhtälöstä ratkaistaan vastaava taipuman muutos

$$\Delta v_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{L}{EA} \Delta P_2 = 1.75 \frac{\sigma_m L}{E}, \quad (1.68)$$

ja taipuma sauvan a plastisoituessa on

$$v_2 = v_1 + \Delta v_2 = (0.25 + 1.75) \frac{\sigma_m L}{E} = 2 \frac{\sigma_m L}{E}. \quad (1.69)$$

Kuorma hetkellä 2 (sauvan a plastisoituessa) on

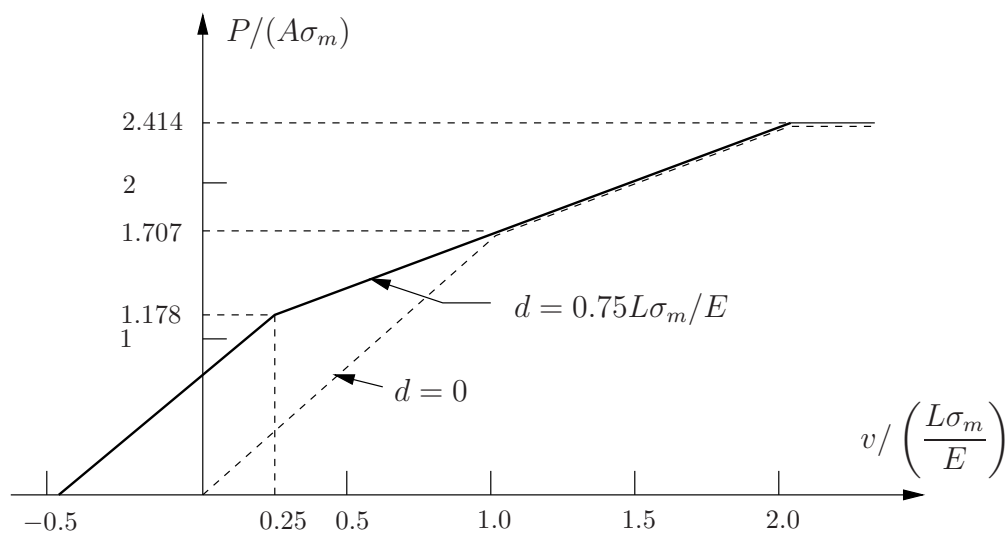
$$P_2 = P_1 + \Delta P_2 = (1 + 0.125\sqrt{2} + 0.875\sqrt{2})A\sigma_m = (1 + \sqrt{2})A\sigma_m \approx 2.414A\sigma_m. \quad (1.70)$$

Rajakuorman arvo on sama kuin virheettömälle ristikolle, eli $P_p = 2.414A\sigma_m$.

Rajakuorma P_p voidaan laskea yksinkertaisesti pystysuorasta tasapainoehdosta (ilman edellä esitettyjä välivaiheita) sijoittamalla $S_a = S_b = S_c = A\sigma_m$:

$$2A\sigma_m \frac{\sqrt{2}}{2} + A\sigma_m = P_p \Rightarrow P_p = 2.414A\sigma_m. \quad (1.71)$$

Yhteenveto ristikon kuormituksesta on esitetty taulukossa 1.2 ja kuvassa 1.14.



Kuva 1.14 Muotovirheellisen ristikon kuorma-siirtymäkäyrä.

Luku 2

Palkin plastinen taivutus

2.1 Poikkileikkauksen plastisoituminen

Kuvan 2.1 vapaasti tuetun palkin pistekuorman ja keskipisteen taipuman välinen riippuvuus voidaan määrittää taivutuskokeen avulla. Metallipalkille tyypillinen kuorma-siirtymäkäyrä on kuvassa 2.1. Välillä OA palkki on kimmainen. Välillä AB palkin keskiosaan syntyy plastista muodonmuutosta. Jos kuorma P poistetaan pisteen B saavuttamisen jälkeen, niin palkkiin jää pysyvä taipuma w_p . Edelleen kuormitettaessa taipuma w kasvaa nopeasti välillä BC . Palkin taipuneessa muodossa havaitaan taite. Kimmoisen ideaaliplastisen aineen tapauksessa BC on vaakasuora.

Teknillisen taivutusteorian mukaan palkin x -akselin suuntainen siirtymä ja venymä ovat

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

Merkitään

$$\varepsilon = \varepsilon_x \quad \text{ja} \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \equiv -w_{,xx}. \quad (2.2)$$

Palkin materiaali otaksutaan kimmoiseksi, ideaaliplastiseksi, kuva 2.2. Jännityksen ja muodonmuutoksen välinen yhteys on sama vedossa ja puristuksessa. Kaavan muodossa

$$\sigma = E\varepsilon \quad , \quad \text{kun} \quad |\varepsilon| \leq \frac{\sigma_m}{E} \quad , \quad \sigma = \text{sgn}(\varepsilon)\sigma_m \quad , \quad \text{kun} \quad |\varepsilon| > \frac{\sigma_m}{E}. \quad (2.3)$$

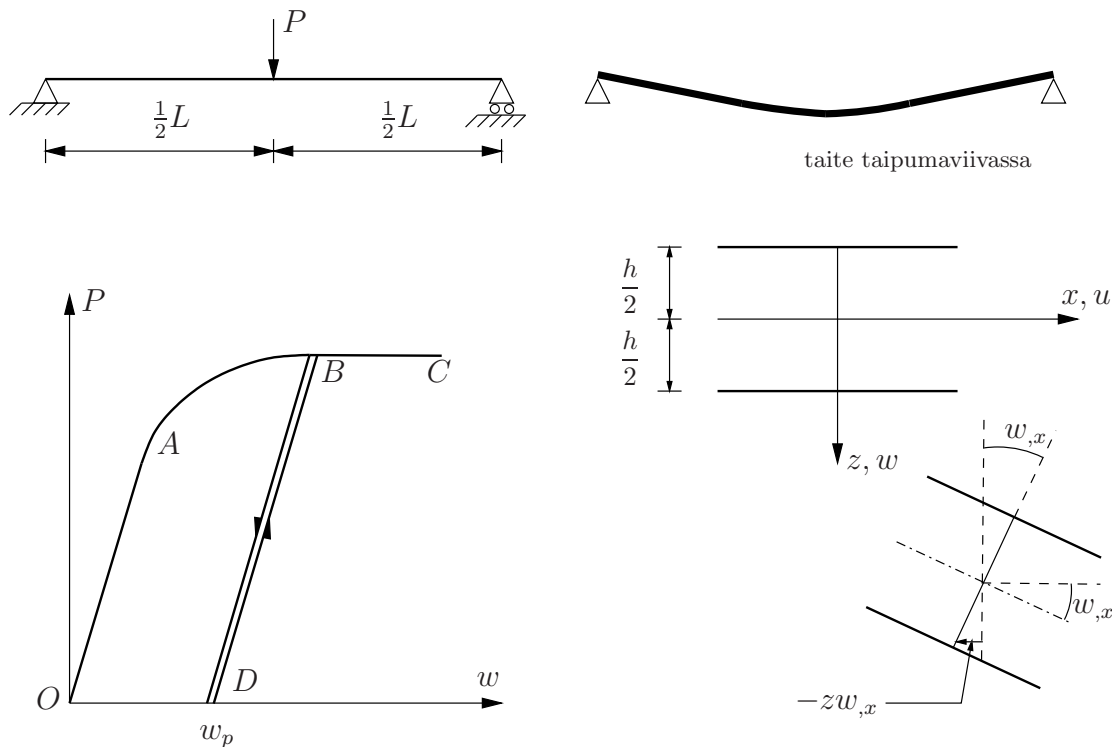
Tarkastellaan esimerkkinä suorakaidepoikkileikkauksen plastisoitumista, kuva 2.3.

Muodonmuutos ε jakautuu lineaarisesti z :n funktiona. Poikkileikkauksen plastisoituminen alkaa reunoilta, kun σ saavuttaa myötörajan σ_m tai $-\sigma_m$. Kimmoisen alueen korkeus on αh . Kuvassa 2.3 (a) $\alpha = 1$ ja kuvan (c) tilanteessa $\alpha = 0$, kun poikkileikkaus on täysin plastisoitunut. Kuvan 2.3 tilannetta (a) vastaava taivutusmomentti on

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma b \, dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{2z}{h} \sigma_m b \, dz = \frac{bh^2}{6} \sigma_m \quad (2.4)$$

eli

$$M = W \sigma_m = M_m, \quad (2.5)$$



Kuva 2.1 Palkin plastinen taivutus.

missä $W = bh^2/6$ on suorakaidepoikkileikkauksen taivutusvastus ja M_m on myötömomentti. Täysin plastisoituneen poikkileikkauksen tapauksessa (c) saadaan vastaavasti

$$M = \int_A z \sigma dA = (-\sigma_m) \int_{-h/2}^0 z dA + \sigma_m \int_0^{h/2} z dA = 2\sigma_m \int_0^{h/2} zb dz = \sigma_m \frac{bh^2}{4} \quad (2.6)$$

eli

$$M = M_p = \sigma_m W_p, \quad (2.7)$$

missä $W_p = bh^2/4$ on suorakaidepoikkileikkauksen plastinen taivutusvastus ja M_p on poikkileikkauksen täysplastinen momentti. Suureiden W ja W_p avulla määritetään poikkileikkauksen muotokerroin

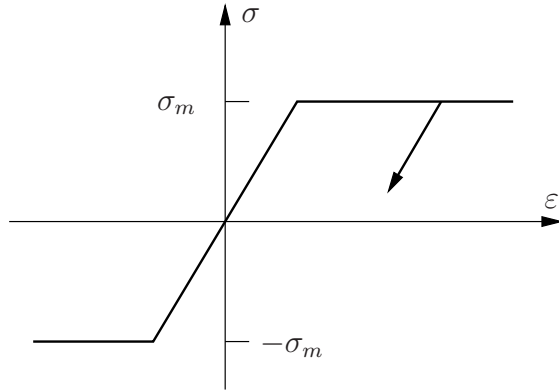
$$\Phi = \frac{W_p}{W}. \quad (2.8)$$

Suorakaidepoikkileikkauksen tapauksessa

$$\Phi = \frac{bh^2/4}{bh^2/6} = \frac{3}{2}. \quad (2.9)$$

Kuormitustason symmetrisen poikkileikkauksen tapauksessa, jos palkkia ei kuormita sen akselin suuntaisia kuormia, saadaan kuvan 2.4 tilanteessa tasapainoehto normaali voimalle

$$N = A_1(-\sigma_m) + A_2\sigma_m \Rightarrow A_1 = A_2, \quad (2.10)$$



Kuva 2.2 Kimmoinen ideaaliplastinen materiaali.

eli neutraaliakseli jakaa tässä tapauksessa poikkileikkauksen kahteen yhtä suureen osaan.

Osan $i = 1, 2$ painopisteen etäisyys neutraaliakselista olkoon z_i . Poikkileikkauksen täysplastinen momentti voidaan siten laskea kaavasta

$$M_p = \sigma_m A_1 z_1 + \sigma_m A_2 z_2 = (A_1 z_1 + A_2 z_2) \sigma_m = W_p \sigma_m, \quad (2.11)$$

missä

$$W_p = z_1 A_1 + z_2 A_2. \quad (2.12)$$

Suorakaidepoikkileikkaukselle $A_1 = A_2 = bh/2$, $z_1 = z_2 = h/4$ ja $W_p = bh^2/4$. Kuvan 2.5 I -poikkileikkaukselle $W_p = bt_l(h - t_l) + t_u(h - 2t_l)^2/4$, missä l tarkoittaa laippaa ja u uumaa.

Osittain plastisoituneen suorakaidepoikkileikkauksen jännitysjakauma on kuvan 2.6 mukainen.

Kuvan 2.6 jännitysjakaumaa vastaava taivutusmomentti on

$$M = \int_A z \sigma dA \quad (2.13)$$

eli

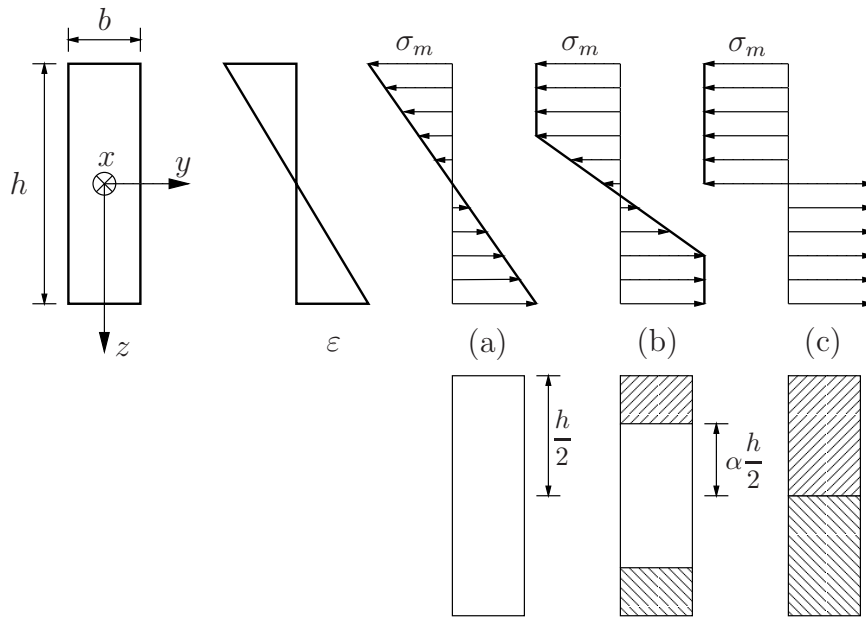
$$M = 2 \int_0^{\alpha h/2} z \sigma b dz + 2 \int_{\alpha h/2}^{h/2} \sigma_m b dz, \quad (2.14)$$

josta saadaan edelleen

$$M = 2 \int_0^{\alpha h/2} z \frac{z}{\alpha h/2} \sigma_m b dz + 2 \sigma_m b \int_{\alpha h/2}^{h/2} z dz. \quad (2.15)$$

Suorittamalla integroinnit tulee momentille lauseke

$$M = \frac{bh^2}{6} \sigma_m \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \alpha^2 \right), \quad (2.16)$$



Kuva 2.3 Suorakaidepoikkileikkauksen plastisoituminen.

missä

$$M_m = \frac{bh^2}{6} \sigma_m = W \sigma_m. \quad (2.17)$$

W on nimeltään taivutusvastus.

Jakamalla suureella M_m saadaan

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1}{2} (3 - \alpha^2). \quad (2.18)$$

Kun $\alpha = 0$, niin poikkileikkaus on täysin plastisoitunut. Kun $\alpha = 1$, niin myötö alkaa poikkileikkauksen ylä- ja alareunassa. Kuvassa 2.7 on verrattu suorakaide- ja I -poikkileikkauksen momentin ja käyrityksen välisiä riippuvaisuuksia. Myöhemmin osoitetaan, että suorakaidepoikkileikkaukselle

$$\alpha = \frac{\kappa_m}{\kappa}, \quad (2.19)$$

missä alaindeksillä m on merkitty käyritymää myötön alkaessa.

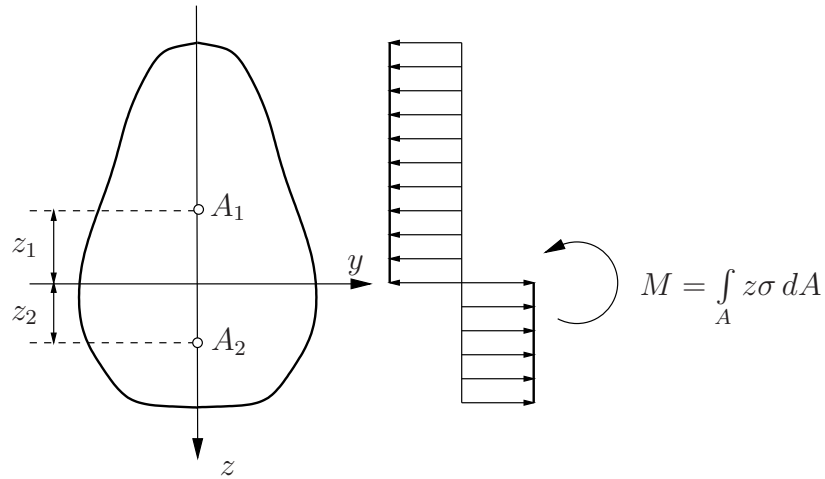
2.2 Palkin plastisoituminen

Tarkastellaan vapaasti tuettua palkkia, jonka jänteen keskellä vaikuttaa pistekuorma P . Momentti pisteessä $x = a$ on $M(a) = 0.5Pa$. Pisteessä $x = a$ momentti on toisaalta myötömomentin suuruinen eli $M(a) = M_m$. Pisteessä x , välillä $(0, a)$, $M(x) = 0.5Px$ tai

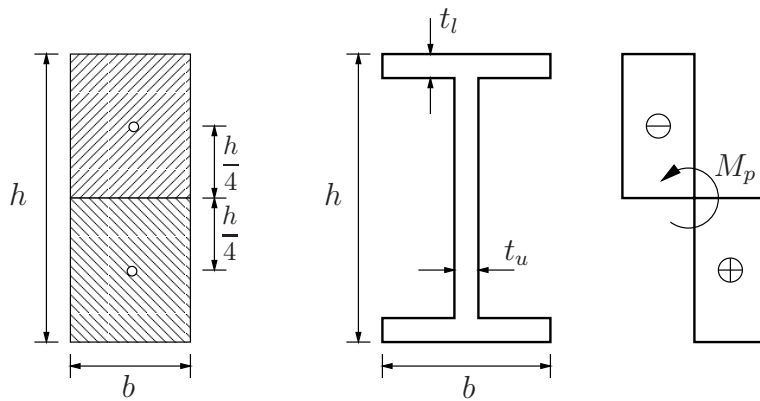
$$M(x) = \frac{x}{a} M_m. \quad (2.20)$$

Kaavan (2.16) perusteella saadaan

$$M(x) = \frac{x}{a} M_m = \frac{1}{2} M_m (3 - \alpha^2), \quad (2.21)$$



Kuva 2.4 Symmetrinen poikkileikkaus.



Kuva 2.5 Suorakaide- ja I-poikkileikkaus.

mistä seuraa

$$\frac{x}{a} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha^2 \Rightarrow \alpha = \pm \sqrt{3 - \frac{2x}{a}}, \quad a < x < \frac{L}{2}. \quad (2.22)$$

Kimmoisen alueen korkeus on $h_e = \alpha h$. Kun palkin keskileikkaus on täysin plastisoitunut, eli $\alpha = 0$, saadaan $(L/2)/a = 3/2$ ja $a = L/3$.

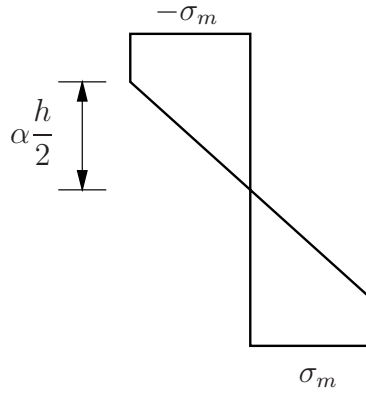
2.3 Momentin ja käyrityksen välinen riippuvuus

Tutkitaan edelleen pistevoiman kuormittamaa nivelellisesti tuettua palkkia. Kimmoisessa alueessa, $0 < x < a$, $\epsilon = z\kappa$. Pisteessä $x = a$ käyritymä on

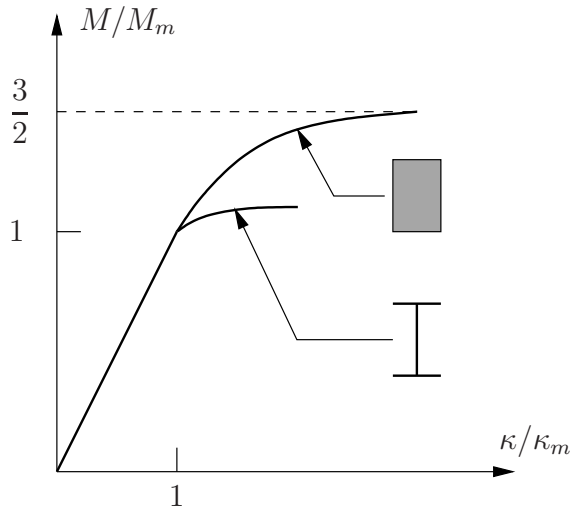
$$\kappa(a) = \frac{\epsilon_m}{h/2} = \kappa_m, \quad (2.23)$$

ja välillä $(0, a)$

$$\kappa(x) = \frac{x}{a} \kappa_m. \quad (2.24)$$



Kuva 2.6 Suorakaidepoikkileikkauksen jännitysjaakauma.



Kuva 2.7 Suorakaide- ja I-poikkileikkauksen momentin ja käyrityksen välinen riippuvaisuus.

Kimmoplastisessa alueessa $a < x < L/2$, $\varepsilon = z\kappa$. Kuvan 2.9 perusteella

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} = \frac{\kappa}{\kappa_m} = \frac{h/2}{\alpha(h/2)} = \frac{1}{\alpha} \quad (2.25)$$

eli

$$\alpha = \frac{\kappa_m}{\kappa} \quad (2.26)$$

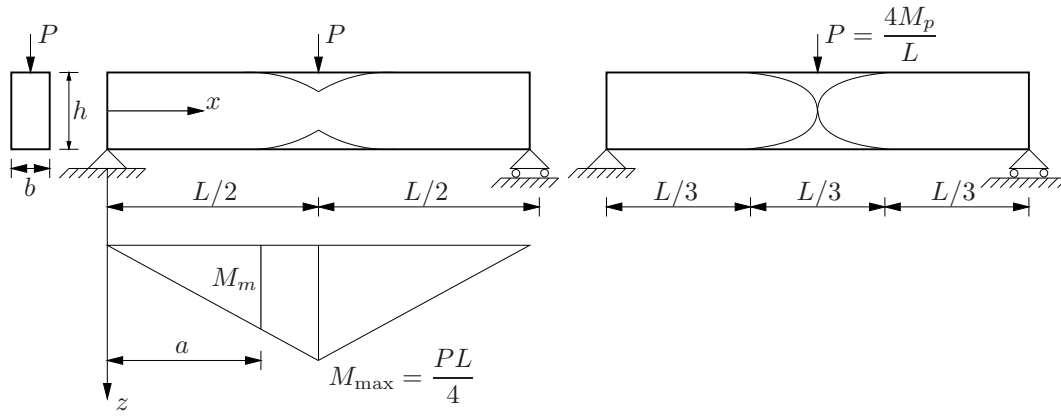
ja

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1}{2}(3 - \alpha^2) \quad (2.27)$$

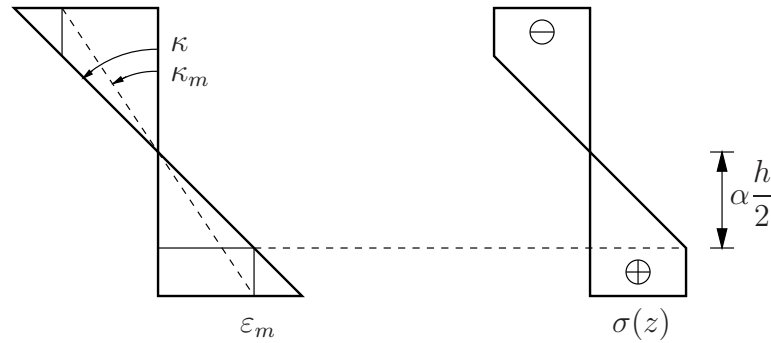
eli

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{\kappa_m}{\kappa} \right)^2 \right]. \quad (2.28)$$

Kaava (2.28) pätee suorakaidepoikkileikkaukselle. Kun käyritymä lähenee ääretöntä, niin



Kuva 2.8 Vapaasti tuettu palkki, pistekuorma keskellä.



Kuva 2.9 Suorakaidepoikkileikkauksen muodonmuutos- ja jännitys jakauma.

momentti M lähestyy arvoa $1.5M_m$. Poikkileikkauksen muotokerroin on

$$\Phi = \frac{M_p}{M_m} = \frac{W_p}{W}, \quad (2.29)$$

ja se ilmaisee taivutusmomenttireservin siirryttäessä lineaarisesta jännitysjaumasta, jossa reunajännitys on σ_m , täysin plastisoituneen poikkileikkauksen jännitysjaumaan.

I -poikkileikkauksen muotokerroin on pienempi kuin kuvan 2.10 poikkileikkauksilla.

2.4 Palkin taipuman laskenta

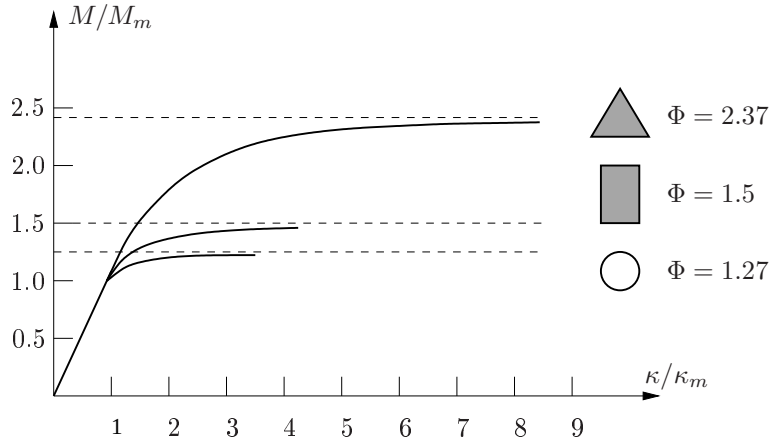
Palkin mielivaltaisen pisteen taipuma voidaan laskea virtuaalisen voiman periaatteella. Kuvan 2.11 merkinnöillä

$$\tilde{1}w = \int_0^L \tilde{M}\kappa dx, \quad (2.30)$$

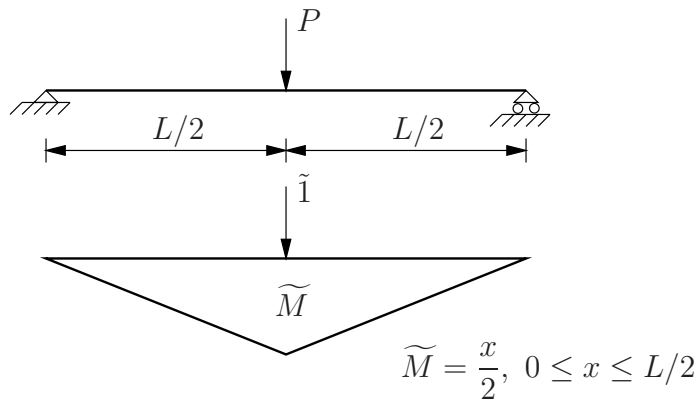
missä $\tilde{M}$ on virtuaalisen (kuvitellun) yksikkövoiman aiheuttama taivutusmomenttijakauma, w on (todellinen) taipuma ja κ on palkin käyristymä.

Virtuaalinen momenttijakauma on

$$\tilde{M} = \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \frac{L}{2}. \quad (2.31)$$



Kuva 2.10 Momentin ja käyritymän välinen riippuvaisuus kolmio- ja suorakaidepoikkileikkauksille ja ympyräputkelle.



Kuva 2.11 Virtuaalinen momenttijakauma.

Kuvan 2.11 tapauksessa palkin keskipisteen taipuma on

$$w = \int_0^{L/2} x \kappa(x) dx. \quad (2.32)$$

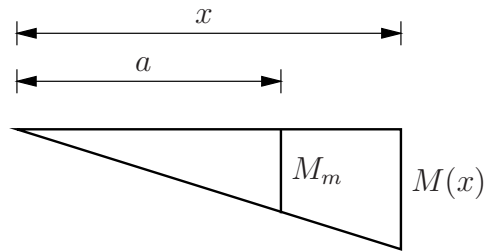
Suorakaidepoikkileikkauksen momentin ja käyritymän välisen riippuvaisuuden ja kuvan 2.12 perusteella saadaan yhteydet

$$\frac{M(x)}{M_m} = \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{\kappa_m}{\kappa} \right)^2 \right], \quad (2.33)$$

mistä seuraa

$$\kappa = \frac{\kappa_m}{\sqrt{3 - \frac{2x}{a}}}, \quad a < x < \frac{L}{2}. \quad (2.34)$$

Keskipisteen taipuma $w(L/2)$ määritetään integroimalla kaavasta (2.30). Välivaiheit-



Kuva 2.12 Palkin momenttijakauma.

tain saadaan

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = \int_0^a \kappa_m \frac{x}{a} dx + \int_a^{L/2} \frac{\kappa_m}{\sqrt{3 - \frac{2x}{a}}} dx, \quad (2.35)$$

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{3}\kappa_m a^2 + \kappa_m \left[\frac{L/2}{a} - \frac{2\left(6 + \frac{2x}{a}\right)}{3\left(\frac{2}{a}\right)^2} \sqrt{3 - 2\frac{x}{a}} \right]_a^{L/2} \quad (2.36)$$

eli

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = \left[\frac{5}{3}a^2 - \left(a^2 + a\frac{L}{6}\right) \sqrt{3 - \frac{L}{a}} \right] \kappa_m. \quad (2.37)$$

Pisteessä $x = a$ momentilla on arvo $M(a) = M_m$. Toisaalta $M(a) = Pa/2 = M_m = P_m L/4$, joten

$$a = \left(\frac{L}{2}\right) \frac{P_m}{P}, \quad (2.38)$$

missä P_m on myötökuorma. Keskipisteen taipuman lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{w}{w_m} = \left(\frac{P_m}{P}\right)^2 \left\{ 5 - \left(3 + \frac{P}{P_m}\right) \sqrt{3 - 2\frac{P}{P_m}} \right\}. \quad (2.39)$$

Suurin taipuma saavutetaan, kun $P = P_p = 1.5P_m$. Tällöin

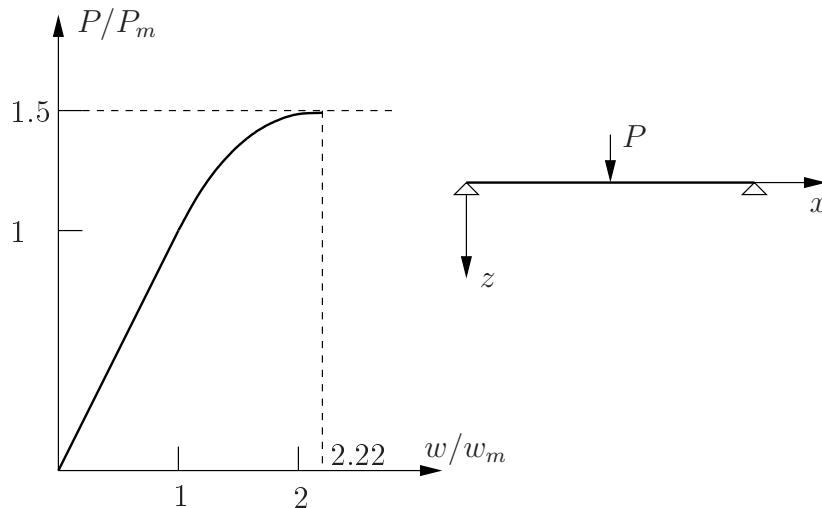
$$\frac{w_p}{w_m} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left\{ 5 - \left(3 + \frac{3}{2}\right) \cdot 0 \right\} = \frac{20}{9} \approx 2.22. \quad (2.40)$$

Kun $P = P_m$, niin keskipisteen taipuma on

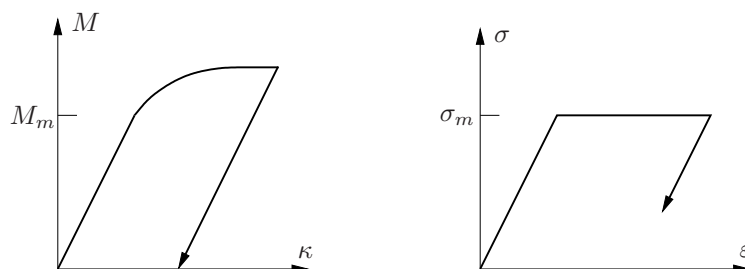
$$w = w_m = \frac{L^2 \kappa_m}{12}. \quad (2.41)$$

2.5 Jännösjännitykset

Tarkastellaan palkin poikkileikkausta, johon kuormitus on aiheuttanut plastisia muodonmuutoksia. Kuormituksen poiston jälkeen poikkileikkauksessa taivutusmomentti olkoon nolla eli $M(x) = 0$. (Staattisesti määräämättömään palkkiin voi jäädä ns. jännösmomenttijakauma kuorman poistamisen jälkeen.)



Kuva 2.13 Vapaasti tuetun palkin kuorma-siirtymäkäyrä.



Kuva 2.14 Palkin kuormituksen palautuminen.

Jännitys palautuu kimmoisesti ja tällöin ovat voimassa seuraavat yhtälöt

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.42)$$

$$M = EI\kappa, \quad (2.43)$$

missä EI on kimmoinen taivutusjäykkyys. Kuorman (taivutusmomentin) poistamisen jälkeenkin poikkileikkaukseen jää **jäännösjännitys jakauma**. Jäännösjännitysten jakauma saadaan selville lisäämällä suurimman taivutusmomentin vaikutushetkellä vallinneeseen epälineaariseen (z :n suhteen) jännitys jakaumaan yhtä suuren mutta vastakkaismerkkisen momentin $\bar{M} = -M$ synnyttämä kimmoinen, lineaarinen jännitys jakauma.

Tarkastellaan esimerkkinä suorakaidepoikkileikkausta. Suorakaidepoikkileikkauksen tapauksessa

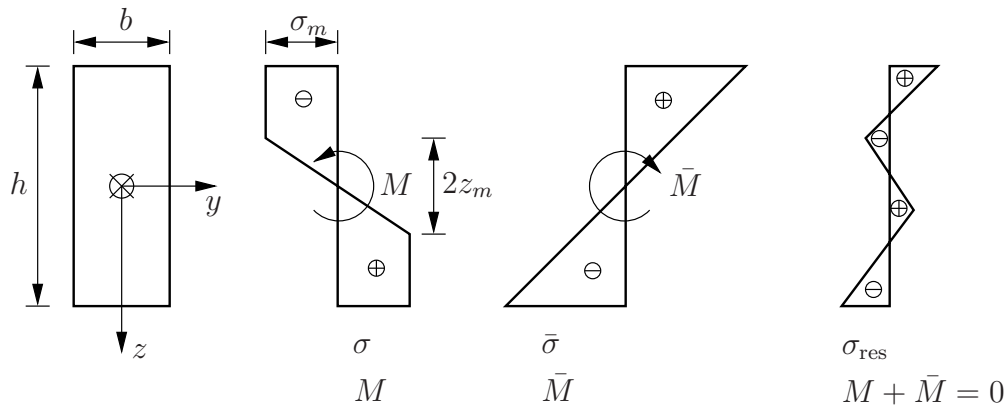
$$M = \frac{1}{2}\sigma_m W(3 - \alpha^2), \quad (2.44)$$

missä

$$\alpha = \frac{2z_m}{h}. \quad (2.45)$$

Momenttia M vastaava jännitys jakauma on

$$\sigma = \sigma_m \frac{z}{z_m}, \quad |z| \leq z_m \quad (2.46)$$



Kuva 2.15 Suorakaidepoikkileikkauksen jäännösjännitys jakauma.

tai

$$\sigma = \sigma_m \operatorname{sgn}(z), \quad \frac{h}{2} \geq |z| \geq z_m. \quad (2.47)$$

Momenttia

$$\bar{M} = -M = -\frac{1}{2}\sigma_m W(3 - \alpha^2) \quad (2.48)$$

vastaava jännitys jakauma on

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{M}}{I}z = -\frac{\sigma_m z(3 - \alpha^2)}{h}, \quad (2.49)$$

koska

$$W = \frac{bh^2}{6} \quad \text{ja} \quad I = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.50)$$

Jäännösjännitys σ_{res} on

$$\sigma_{\text{res}}(z) = \sigma(z) + \bar{\sigma}(z). \quad (2.51)$$

Sijoitusten jälkeen saadaan

$$\sigma_{\text{res}}(z) = \sigma_m \left[1 - \frac{z_m}{h}(3 - \alpha^2) \right] \left(\frac{z}{z_m} \right), \quad \text{kun} \quad |z| \leq z_m, \quad (2.52)$$

tai

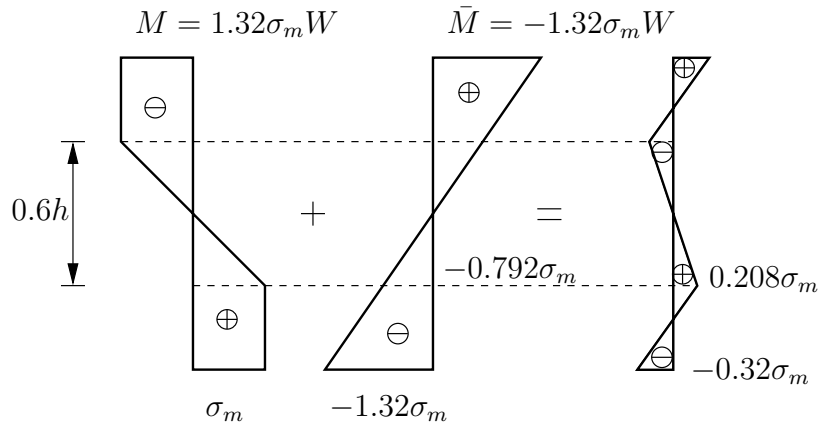
$$\sigma_{\text{res}} = \sigma_m \left[1 - \frac{|z|}{h}(3 - \alpha^2) \right] \operatorname{sgn}(z), \quad \text{kun} \quad z_m \leq |z| \leq \frac{h}{2}. \quad (2.53)$$

Uudelleen kuormitettaessa uusia plastisia muodonmuutoksia syntyy vasta, kun poikkileikkauksen alkuperäinen momentin arvo ylitetään.

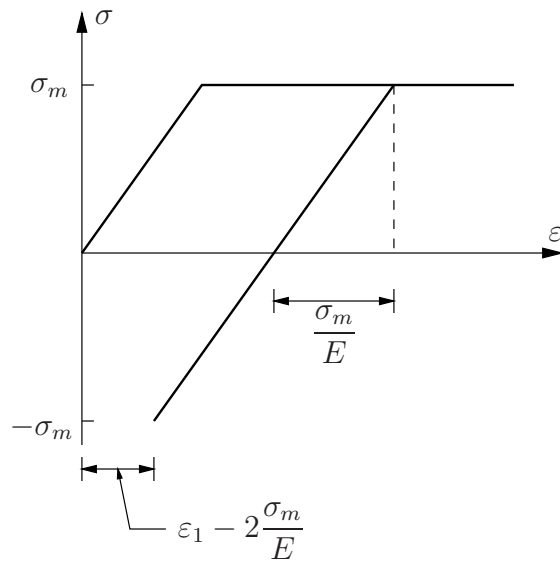
Esimerkki 2.1 Määritetään kuvan 2.8 palkin suorakaidepoikkileikkauksen jäännösjännitys jakauma.

Kuvan 2.8 vapaasti tuetun palkin tapauksessa taivutusmomentti palautuu nollaan jokaisessa poikkileikkauksessa, kun kuorma poistetaan. Otaksutaan plastisen alueen korkeudeksi $2z_m = 0.6h$ maksimikuorman arvolla tarkasteltavassa poikkileikkauksessa, kuva 2.16.

Poikkileikkauksen taivutusmomentti on tällöin $M = \frac{1}{2}\sigma_m W(3 - 0.6^2) = 1.32W\sigma_m$. Koska momentti palautuu nollaan (kuorman poiston jälkeen), jännitys jakaumaan on



Kuva 2.16 Suorakaidepoikkileikkauksen jäännösjännitysjaakauma momentista $M = 1.32M_m$.



Kuva 2.17 Jäännösvenymä.

lisätään sellainen lineaarinen jännitysjaakauma, josta laskettu momentti on $-1.32W\sigma_m$. Lisäjännitysjaakauma tai jännityksen muutos z :n mukana on lineaarinen, koska jännitys palautuu kimmoisesti.

Vastakkaiseen suuntaan taivutettaessa (kuormitettaessa) plastisia venymiä syntyy esi-merkin tapauksessa, kun

$$M = -0.68\sigma_m W, \quad (2.54)$$

ts. poikkileikkauksen alareunan piste $z = h/2$ plastisoituu puristuksessa, kun siihen lisätään negatiivinen jännitys $-0.68\sigma_m$. Palkin poikkileikkauksen uloin piste (tai säie) myötää toiseen suuntaan kuormitettaessa, kun siinä pisteessä venymä saa arvon

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - 2\frac{\sigma_m}{E}. \quad (2.55)$$

Luku 3

Normaalivoiman ja leikkausvoiman vaikutus täysplastiseen momenttiin

3.1 Suorakaidepoikkileikkaus

Tarkastellaan ensin suorakaidepoikkileikkausta, johon vaikuttavat taivutusmomentti M ja normaalivoima N .

Täysin plastisoituneen poikkileikkauksen jännitys jakauma saadaan laskemalla yhteen kuvan 3.1 kuvioiden (a) ja (b) esittämät jännitys jakaumat. Kuvion (a) jakaumaa σ_a vastaa normaalivoima

$$N = ab\sigma_m \quad (3.1)$$

ja taivutusmomentti

$$M = 0. \quad (3.2)$$

Helposti todetaan, että kuvion (b) mukaista jännitys jakaumaa vastaa puolestaan momentti

$$M = \frac{h^2 - a^2}{4} b\sigma_m = \frac{bh^2}{4} \sigma_m \left[1 - \left(\frac{a}{h} \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

eli

$$M = M_p \left[1 - \left(\frac{a}{h} \right)^2 \right] \quad (3.4)$$

ja normaalivoima

$$N = 0. \quad (3.5)$$

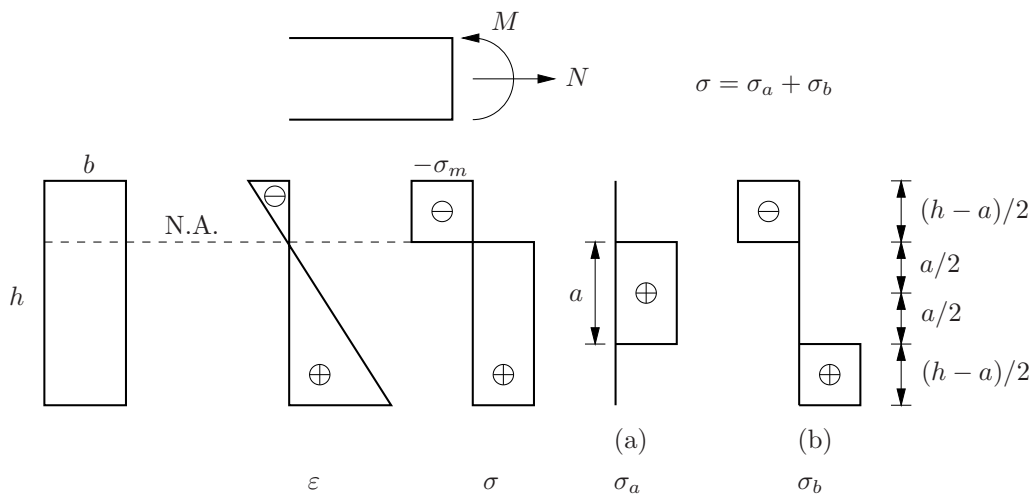
Suurin normaalivoima, jonka poikkileikkaus kestää ¹, on

$$N_p = \sigma_m bh. \quad (3.6)$$

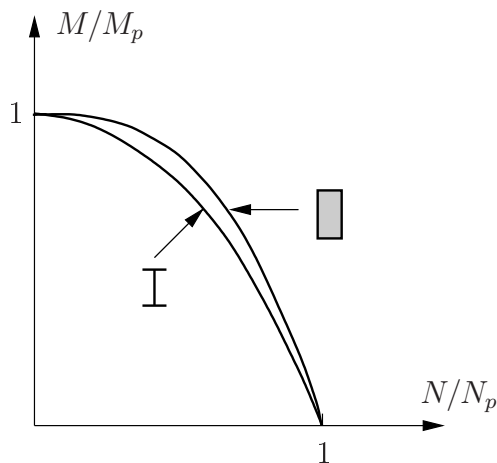
Jakamalla normaalivoiman kaava suureella N_p saadaan

$$\frac{N}{N_p} = \frac{a}{h}. \quad (3.7)$$

¹Nurjahdusta ei oteta nyt huomioon.



Kuva 3.1 Suorakaidepoikkileikkaus, taivutusmomentti M ja normaalivoima N .



Kuva 3.2 Taivutusmomentin ja normaalivoiman välinen vuorovaikutuskäyrä suorakaidepoikkileikkaukselle ja I -poikkileikkaukselle.

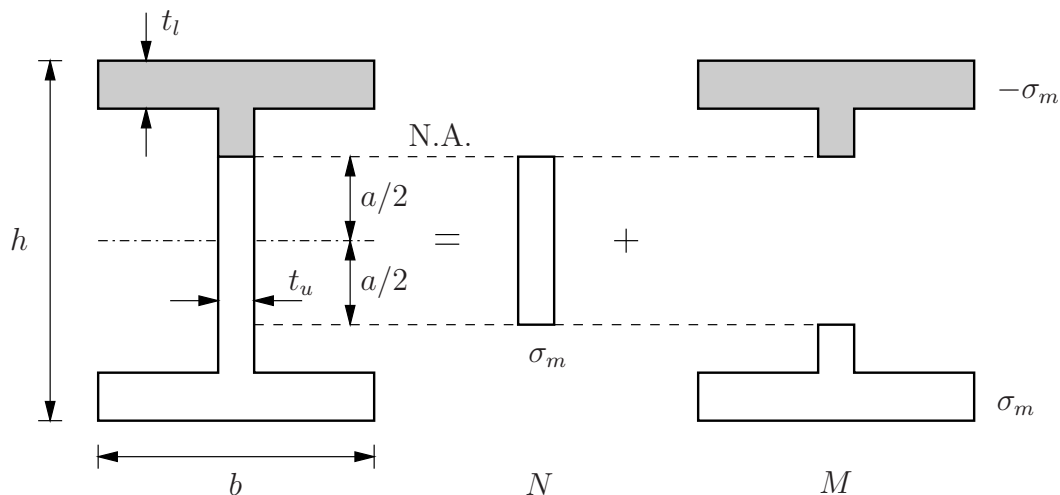
Eliminoimalla suhde a/h momentin kaavasta seuraa

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{N}{N_p} \right)^2 \quad (3.8)$$

eli toisella tavalla kirjoitettuna

$$\left(\frac{N}{N_p} \right)^2 + \frac{M}{M_p} = 1, \quad (3.9)$$

joka esittää momentin ja normaalivoiman välisen riippuvaisuuden suorakaidepoikkileikkauksen tapauksessa.



Kuva 3.3 I-poikkileikkaus, taivutusmomentti M ja normaalivoima N .

3.2 I-poikkileikkaus, normaalivoima ja momentti

Neutraaliakseli uumassa

Kuvan 3.3 tapauksessa, jossa neutraaliakseli leikkaa I -poikkileikkauksen uuman, normaalivoima on

$$N = at_u\sigma_m, \quad (3.10)$$

missä t_u on uuman paksuus. Suurin mahdollinen normaalivoima (eli täysplastinen normaalivoima) on

$$N_p = A\sigma_m, \quad (3.11)$$

missä A on poikkileikkauksen pinta-ala. Jakamalla edelliset kaavat puolittain saadaan

$$\frac{N}{N_p} = \frac{at_u}{A} \Rightarrow a = \frac{A}{t_u} \frac{N}{N_p}. \quad (3.12)$$

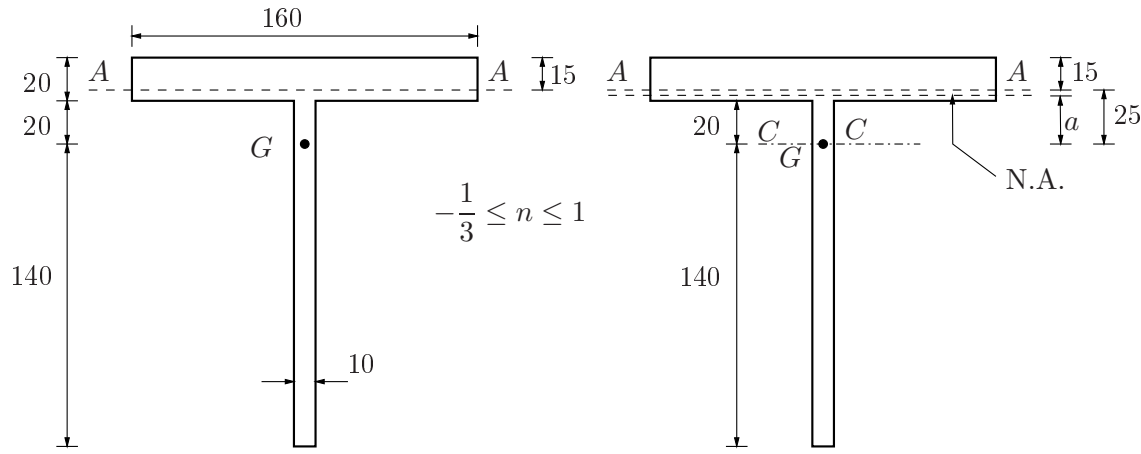
Kuvan 3.3 tilannetta vastaava taivutusmomentti on

$$M = M_p - \frac{1}{4}t_u a^2 \sigma_m. \quad (3.13)$$

Eliminoimalla neutraaliakselin leikkauskohdan ja symmetria-akselin välinen etäisyys momentin kaavassa seuraa I -poikkileikkauksen momentin ja normaalivoiman välille vuorovaikutuskaava

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{A^2}{4t_u W_p} \right) \left(\frac{N}{N_p} \right)^2, \quad (3.14)$$

missä $M_p = \sigma_m W_p$ on täysplastinen momentti. Edellä johdettu momentin ja normaalivoiman vuorovaikutuskaava on voimassa niin pitkään, kuin neutraaliakseli on uuman alueella, eli $a/2 \leq h/2 - t_l$, missä t_l on laipan paksuus.



Kuva 3.4 T-poikkileikkaus, taivutusmomentti M ja normaalivoima N , mitat [mm].

Neutraaliakseli leikkaa laipan

Samalla tavalla kuin edellä käsitellään myös tapaus $a/2 > h/2 - t_l$. Tässä tapauksessa

$$N = [A - (h - a)b]\sigma_m, \quad N_p = A\sigma_m \quad (3.15)$$

ja

$$\frac{N}{N_p} \equiv n = 1 - \frac{b(h - a)}{A}. \quad (3.16)$$

Poikkileikkauksen täysplastinen momentti on $M_p = \sigma_m W_p$. Taivutusmomentti on nyt

$$M = \left(\frac{h + a}{2}\right) \left(\frac{h - a}{2}\right) b\sigma_m, \quad (3.17)$$

missä

$$h - a = \frac{A}{b}(1 - n), \quad h + a = 2h - \frac{A}{b}(1 - n) \quad (3.18)$$

kaavan (3.16) perusteella. Lopulta momentin ja normaalivoiman vuorovaikutuskaava saadaan muotoon

$$m = \frac{A^2}{4bW_p}(1 - n) \left(\frac{2bh}{A} - 1 + n \right), \quad (3.19)$$

missä on merkitty

$$n = \frac{N}{N_p}, \quad m = \frac{M}{M_p}. \quad (3.20)$$

Esimerkki 3.1 Tutkitaan normaalivoiman vaikutusta T-poikkileikkauksen plastiseen momenttiin.

Tarkastellaan kuvan 3.4 poikkileikkausta. Viiva AA jakaa poikkileikkauksen yhtä suuriin osiin. Poikkileikkauksen pinta-ala on $A = 160 \cdot 20 + 160 \cdot 10 = 4800$. Painopisteen G etäisyys x yläreunasta, viivalle CC, saadaan kaavasta $Ax = 160 \cdot 10 \cdot 100 + 160 \cdot 20 \cdot 10$, josta tulee $x = 40$.

Lasketaan ensin täysplastinen momentti M_p , esim. akselin AA suhteen,

$$\begin{aligned} M_p &= \left[160 \cdot 15 \cdot \frac{15}{2} + 160 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} + 10 \cdot 160 \cdot \left(\frac{5 + 165}{2} \right) \right] \sigma_m \\ &= [18000 + 2000 + 136000] \sigma_m = 156000 \sigma_m. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Määritetään sitten (N, M) -riippuvaisuus olettaen ensin, että neutraaliakseli on laipassa.

a) Neutraaliakseli (N.A.) on laipassa ja $M > 0$

Jännitys jakaumaa vastaava normaalivoima on

$$\begin{aligned} N &= 160(40 - a)(-\sigma_m) + 160(a - 20)\sigma_m + 160 \cdot 10\sigma_m \\ &= (-8000 + 320a)\sigma_m \end{aligned} \quad (3.22)$$

ja $N_p = A\sigma_m = 4800\sigma_m$, joten

$$\frac{N}{N_p} = \frac{-8000 + 320a}{4800} = -\frac{5}{3} + \frac{1}{15}a \Rightarrow a = 25 + 15n, \quad (3.23)$$

missä on merkitty $n \equiv N/N_p$. Koska $20 \leq a \leq 40$, niin $-1/3 \leq n \leq 1$.

a1) Momentti painopisteen suhteen

Painopisteen (akselin CC) suhteen laskettu momentti on

$$M = \frac{160 \cdot (40^2 - a^2)}{2}\sigma_m - \frac{160 \cdot (a^2 - 20^2)}{2}\sigma_m + \frac{10 \cdot (140^2 - 20^2)}{2}\sigma_m. \quad (3.24)$$

Yksittäisen suorakaideosan osuus momenttiin on itseisarvoltaan $b(h_2 - h_1)\frac{1}{2}(h_2 + h_1)\sigma_m = \frac{b(h_2^2 - h_1^2)}{2}\sigma_m$, missä b on osan leveys, h_2 ja h_1 ovat alueen ala- ja yläreunan z -koordinaatit poikkileikkauksen painopisteakselin suhteen, kun koordinaatti z lähtee alaspäin painopisteestä G ja momenttia lasketaan nyt painopisteakselin suhteen. Momentin lausekkeen kunkin osuuden kiertosuunta ja etumerkki päätellään erikseen. Yllä toinen osuus momenttiin on nyt negatiivinen.

Jakamalla momentilla M_p ja yksinkertaistamalla tulee

$$\frac{M}{M_p} = \frac{1600 - a^2}{975} = \frac{1}{13}(1 - n)(13 + 3n). \quad (3.25)$$

Kun $n = 1$, $a = 40$, niin $M = 0$. Kun $n = -1/3$, $a = 20$, niin $M = 16/13M_p$!

a2) Momentti AA :n suhteen (AA jakaa poikkileikkauksen kahtia)

Merkitään painopistekoordinaatiston poikittaista koordinaattia z :lla. Tällöin

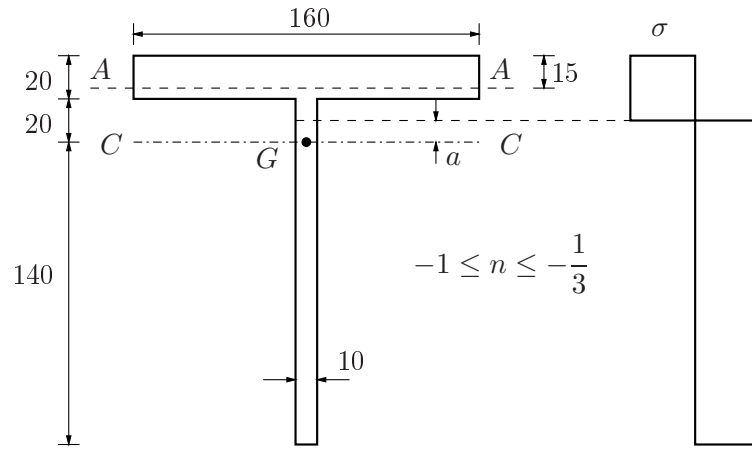
$$M^{CC} \equiv M = \int_A z\sigma dA. \quad (3.26)$$

Vastaavasti akselin AA suhteen laskettu taivutusmomentti on

$$M^{AA} = \int_A \bar{z}\sigma dA, \quad (3.27)$$

missä $\bar{z} = z + c = z + 25$ esimerkin tapauksessa, ja momentin M^{AA} kaava voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$M^{AA} = \int_A (z + c)\sigma dA = M + cN = M + 25N. \quad (3.28)$$



Kuva 3.5 T-poikkileikkaus, taivutusmomentti M akselin AA suhteen.

Kuvan 3.5 tapauksessa saadaan siten

$$\begin{aligned}
 \frac{M^{AA}}{M_p} &= \frac{M}{M_p} + \frac{25N}{M_p} \\
 &= \frac{1}{13}(13 - 10n - 3n^2) + \frac{25 \cdot 4800 \cdot n}{156 \cdot 10^3} \\
 &= \frac{1}{13}(13 - 10n - 3n^2) + \frac{10 \cdot n}{13} \\
 &= 1 - \frac{3}{13}n^2.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

b1) Neutraaliakseli uumassa, momentti CC :n suhteen, $M > 0$

Tässä tapauksessa

$$N = [160 \cdot 20 + (20 - a) \cdot 10](-\sigma_m) + (140 + a) \cdot 10 \cdot \sigma_m, \tag{3.30}$$

ja

$$N_p = A\sigma_m = 4800\sigma_m, \tag{3.31}$$

joten

$$n = \frac{-3200 - 200 + 1400}{4800} + \frac{10 + 10}{4800}a \tag{3.32}$$

ja

$$a = 240n + 100. \tag{3.33}$$

Kuvan 3.5 jännitysjakautumaa vastaava momentti on

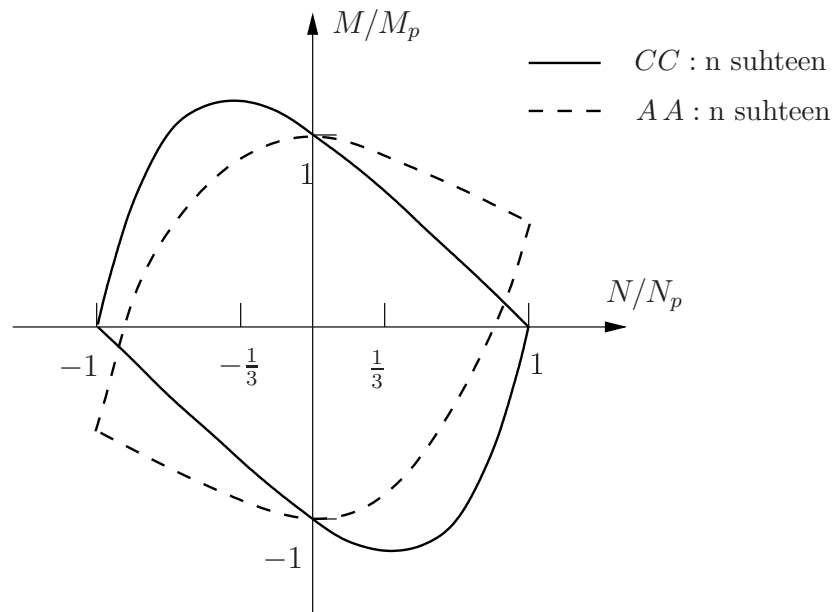
$$M = \left[160 \cdot 20 \cdot 30 + \frac{(20^2 - a^2) \cdot 10}{2} + \frac{10 \cdot (140^2 - a^2)}{2} \right] \sigma_m. \tag{3.34}$$

Jakamalla täysplastisen momentin arvolla M_p saadaan

$$\frac{M}{M_p} = \frac{96 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 + 98 \cdot 10^3}{156 \cdot 10^3} - \frac{10 \cdot a^2}{156 \cdot 10^3} = \frac{196}{156} - \frac{(24 \cdot n + 10)^2}{156} \tag{3.35}$$

eli

$$\frac{M}{M_p} = \frac{96 - 480 \cdot n - 24^2 \cdot n^2}{156} = \frac{8 \cdot (1 + n)(1 - 6n)}{13}. \tag{3.36}$$



Kuva 3.6 T-poikkileikkauksen taivutusmomentin ja normaalivoiman vuorovaikutuskäyrät.

b2) Momentti leikkauksen AA suhteen

Tässä tapauksessa johdetaan samalla tavalla kuin edellä kaava

$$\frac{M^{AA}}{M_p} = \frac{8 + 5n - 6n^2}{13}. \quad (3.37)$$

Edellä johdetut T -poikkileikkauksen normaalivoiman ja momentin väliset vuorovaikutuskäyrät on koottu kuvaan 3.6. Kumpikin vuorovaikutuskaava kelpaa palkin plastiiseen analyysiin, jos momentti lasketaan johdonmukaisesti kaikissa vaiheissa alunperin valitun akselin, joko CC tai AA , suhteen. Lopputulos on sama.

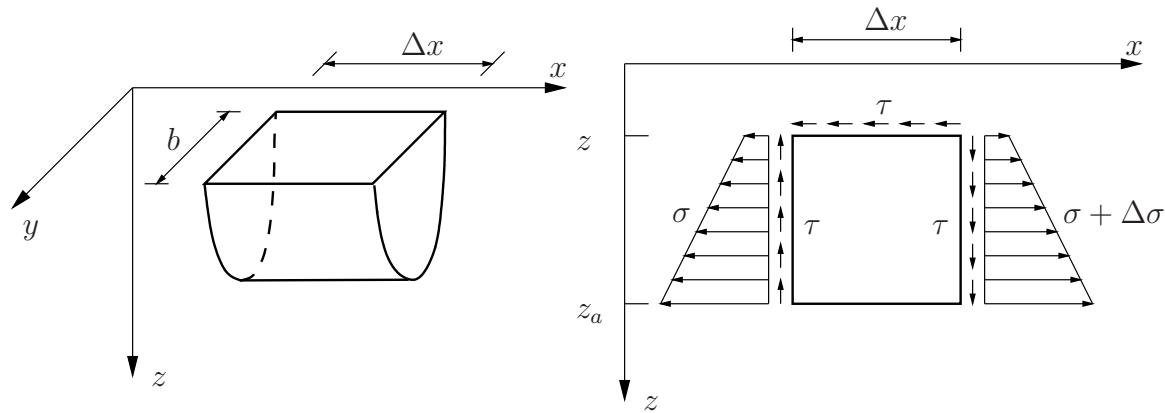
3.3 Leikkausvoiman vaikutus täysplastiseen momenttiin

Eulerin-Bernoullin palkkiteoriassa leikkausvoima ja leikkausjännitys määritetään tasapainoehdon perusteella. Tarkastellaan palkin alareunasta leikattua poikkileikkauksen levyistä ja Δx :n mittaista palasta. Kuvan 3.7 perusteella tarkasteltavalle alkiolle johdetaan helposti tasapainoehto

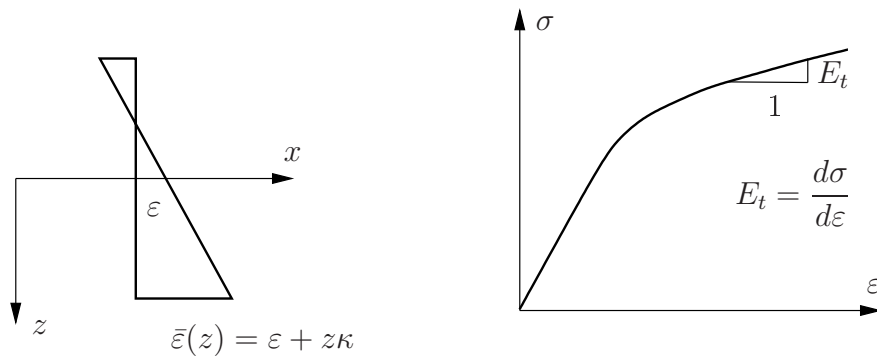
$$-\tau(z)b(z)\Delta x + \int_z^{z_a} \Delta\sigma b(z) dz = 0, \quad (3.38)$$

mistä seuraa

$$\tau(z) = \frac{1}{b(z)} \int_z^{z_a} \frac{d\sigma}{dx} b(z) dz. \quad (3.39)$$



Kuva 3.7 Palkin alkio.



Kuva 3.8 Palkin muodonmuutos ja sitä vastaava jännitys

Palkin poikkileikkauksessa neutraaliakselista etäisyydellä z sijaitsevan säikeen venymä on

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon + z\kappa, \quad (3.40)$$

missä ε on palkin akselin venymä ja κ on palkin käyristymä. Jännityksen ja muodonmuutoksen välinen yhteys lausutaan toistaiseksi yleisessä muodossa

$$\sigma = f(\bar{\varepsilon}). \quad (3.41)$$

Sijoittamalla venymän ja jännityksen kaavat aiemmin johdettuun tasapainoehtoon saadaan

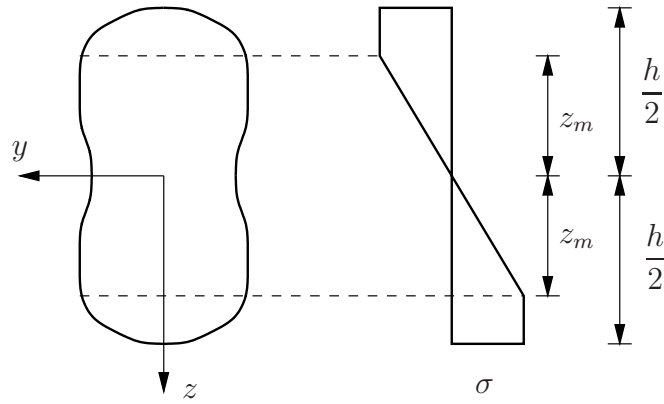
$$\tau(z) = \frac{1}{b(z)} \left[\frac{d\varepsilon}{dx} \int_z^{z_a} E_t(z) b(z) dz + \frac{d\kappa}{dx} \int_z^{z_a} E_t(z) b(z) dz \right], \quad (3.42)$$

missä $E_t(z) = d\sigma/d\varepsilon$ on tangenttimoduuli. Ideaaliplastisen aineen tapauksessa

$$E_t = E, \quad \text{kun } |\varepsilon| \leq \frac{\sigma_m}{E}, \quad (3.43)$$

$$E_t = 0, \quad \text{kun } |\varepsilon| > \frac{\sigma_m}{E}. \quad (3.44)$$

Poikkileikkauksen plastisoituneessa osassa $\tau = 0$, koska $E_t = 0$. Sama asia voidaan myös päätellä siitä, että plastisoituneessa osassa $\sigma = \sigma_m$ on vakio ja $\Delta\sigma = 0$.



Kuva 3.9 Kaksoissymmetrinen poikkileikkaus.

Koska leikkausvoima määritellään kaavalla

$$Q = \int_A \tau dA, \quad (3.45)$$

on osittain plastisoituneen poikkileikkauksen leikkausjännityksellä vastaavasti suurempi maksimiarvo. Tarkastellaan lähemmin kaksoissymmetristä poikkileikkausta, jonka materiaali on ideaaliplastista, ja otaksutaan lisäksi, että $N = 0$ ja $\varepsilon = 0$. Tällöin

$$\sigma = \sigma_m \frac{z}{z_m}, \quad \text{kun } |z| \leq z_m, \quad (3.46)$$

ja

$$\sigma = \sigma_m \operatorname{sgn}(z), \quad \text{kun } |z| > z_m. \quad (3.47)$$

Tasapainoehto kuuluu nyt

$$\tau = \frac{1}{b(z)} \int_z^{h/2} \frac{d\sigma}{dx} b(z) dz. \quad (3.48)$$

Kaksoissymmetrisen poikkileikkauksen taivutusmomentti lasketaan kaavalla

$$M = 2\sigma_m \int_{z_m}^{h/2} z b(z) dz + 2 \frac{\sigma_m}{z_m} \int_0^{z_m} z^2 b(z) dz. \quad (3.49)$$

Leikkausvoima saadaan määritettyä niinikään tasapainoehdosta

$$Q = \frac{dM}{dx}, \quad (3.50)$$

missä

$$\frac{dM}{dx} = -2 \frac{\sigma_m}{z_m^2} \left(\int_0^{z_m} z^2 b(z) dz \right) \frac{dz_m}{dx}. \quad (3.51)$$

Derivoimalla jännityksen σ kaava x :n suhteen tulee

$$\frac{d\sigma}{dx} = -\sigma_m z \frac{1}{z_m^2} \frac{dz_m}{dx} = -\sigma_m z \left(-\frac{Q}{\sigma_m I_m} \right) = \frac{Qz}{I_m}, \quad (3.52)$$

missä

$$I_m = \int_{-z_m}^{z_m} z^2 b(z) dz. \quad (3.53)$$

Leikkausjännitykselle on näin saatu johdettua kaava

$$\tau = \frac{1}{b} \frac{Q}{I_m} \int_z^{z_m} z b(z) dz = \frac{Q S_m(z)}{b I_m}, \quad (3.54)$$

missä

$$S_m = \int_z^{z_m} z b(z) dz \quad (3.55)$$

on leikkauksen z alapuolisen poikkileikkauksen osan staattinen momentti.

Erikoistapaus: suorakaide, $N = 0$, $\varepsilon = 0$.

Tässä erikoistapauksessa saadaan yleisen kaksoissymmetrisen poikkileikkauksen leikkausjännityksen kaavasta

$$\begin{aligned} \tau(z) &= \frac{1}{b} \int_z^{z_m} \frac{d\sigma}{dx} b dz \\ &= \int_z^{z_m} E \frac{d\kappa}{dx} z dz \\ &= E \frac{d\kappa}{dx} \int_z^{z_m} z dz \\ &= E \frac{d\kappa}{dx} \frac{1}{2} (z_m^2 - z^2). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Toisaalta

$$Q = \int_A \tau dA = E \frac{d\kappa}{dx} \frac{b}{2} \int_{-z_m}^{z_m} (z_m^2 - z^2) dz = \frac{2}{3} E \frac{d\kappa}{dx} b z_m^3, \quad (3.57)$$

joten

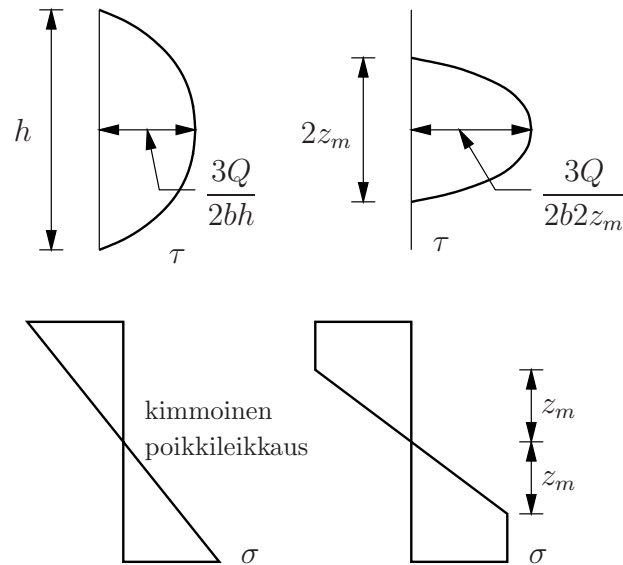
$$E \frac{d\kappa}{dx} = \frac{3}{2} \frac{Q}{b z_m^3} \quad (3.58)$$

ja

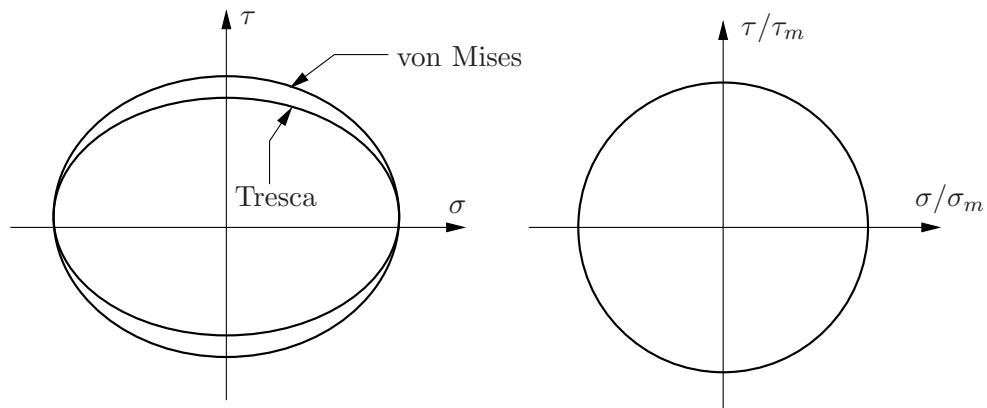
$$\tau(z) = \frac{3}{4} \frac{Q}{b z_m^3} (z_m^2 - z^2) = \frac{3Q}{4b z_m} \left[1 - \left(\frac{z}{z_m} \right)^2 \right]. \quad (3.59)$$

Leikkausjännityksen maksimiarvo on

$$\tau_{\max} = \tau(0) = \frac{3Q}{4b z_m}. \quad (3.60)$$



Kuva 3.10 Suorakaidepoikkileikkauksen leikkausjännitys ja normaalijännitys.



Kuva 3.11 Kaksiulotteisia myötöehtoja.

3.4 Myötöehto kaksiulotteisessa jännitystilassa

Kaksiulotteisen jännitystilassa, $(\sigma \neq 0, \tau \neq 0)$, von Misesin ja Trescan myötöehdot on piirretty kuvaan 3.11. von Misesin myötöehto on nyt

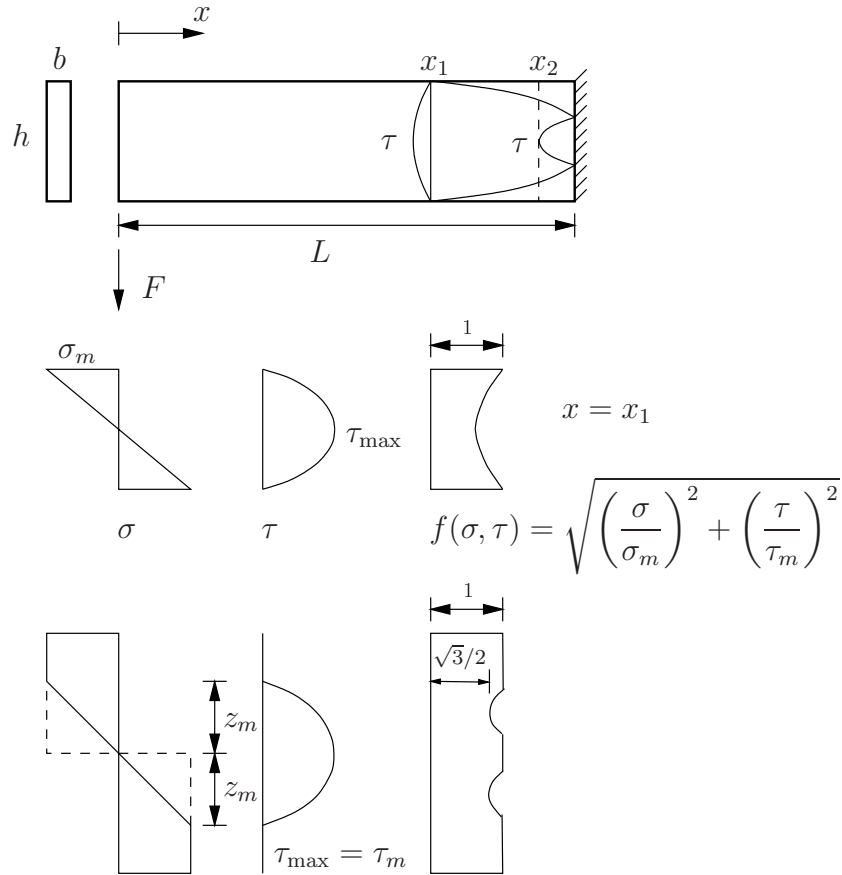
$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma_m, \quad (3.61)$$

ja Trescan ehto on puolestaan

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_m. \quad (3.62)$$

Kumpikin ehto voidaan kirjoittaa muodossa

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_m}\right)^2 = 1. \quad (3.63)$$



Kuva 3.12 Pistevoiman kuormittama uloke.

Esimerkki 3.2 Tutkitaan ulokepalkin plastisoitumista normaalijännityksen ja leikkajännityksen alaisena, kun palkin poikkileikkaus on suorakaiteen muotoinen.

Poikkileikkauksen uloimmat säikeet plastisoituvat ensin, ellei uloke ole erittäin lyhyt. Kuvan 3.12 ulokkeen leikkauksessa $x = x_1$ ylä- ja alareunan säikeet ovat juuri plastisoitumassa. Parabolisesti jakautuneen leikkajännityksen suurin arvo on

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{F}{bh} \leq \tau_m,$$

joten pistevoiman F on toteutettava ehto

$$F \leq \frac{2}{3} \tau_m bh. \quad (3.64)$$

Taivutusmomentti leikkauksessa $x = x_1$ on

$$M(x_1) = Fx_1 = M_m = \frac{bh^2}{6} \sigma_m,$$

ja kaavan (3.64) perusteella saadaan

$$\frac{bh^2}{6} \sigma_m = Fx_1 \leq \left(\frac{2}{3} \tau_m bh \right) x_1,$$

josta seuraa ehto

$$\frac{x_1}{h} \geq \frac{1}{4} \frac{\sigma_m}{\tau_m}. \quad (3.65)$$

Trescan myötöehdon mukaan $\sigma_m = 2\tau_m$, joten ehto (3.65) saadaan muotoon

$$\frac{x_1}{h} \geq \frac{1}{4} \frac{2\tau_m}{\tau_m} = \frac{1}{2}.$$

Vastaavasti otaksumalla aineen noudattavan von Misesin myötöehtoa, jonka mukaan $\sigma_m = \sqrt{3}\tau_m$, päädytään ehtoon

$$\frac{x_1}{h} \geq \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}\tau_m}{\tau_m} \approx 0.433.$$

Esimerkkitapauksessa suhteelle x_1/h saadut ehdot toteutuvat, jos palkkiteoriaa ylipäänsä voidaan soveltaa, ja palkin plastisoituminen tapahtuu kuvassa 3.12 esitetyllä tavalla reunoilta alkaen.

Kuvassa 3.12 on esitetty leikkauksen $x = x_1$ jännitysjaakaumat ja myötöehdon perusteella muodostetun vertailusuureen

$$f(\sigma, \tau) = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_m}\right)^2}$$

jakauma poikkileikkauksen korkeuden yli. Kuvassa 3.12 on esitetty myös vastaavien suureiden jakaumat leikkauksessa $x = x_2 > x_1$.

Leikkauksessa $x = x_2$ momentti ja leikkausvoima ovat

$$M(x_2) = Fx_2, \quad Q = F,$$

missä kuvan 3.12 jakaumien perusteella

$$M = b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z_m^2}{3} \right) \sigma_m, \quad Q = \frac{4}{3} b z_m \tau_m.$$

Myötöehto

$$f(\sigma, \tau) = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_m}\right)^2} = 1$$

saavutetaan lähes koko poikkileikkauksessa, joten momentti $M = Fx_2$ ja leikkausvoima $Q = F$ riittävät likimain täysplastisen tilan saavuttamisen koko poikkileikkauksessa $x = x_2$.

3.4.1 Suorakaidepoikkileikkaus

Kuvan 3.13 normaali-jännitysjaakumaa vastaa momentti

$$M = b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z_m^2}{3} \right) \sigma_m, \tag{3.66}$$

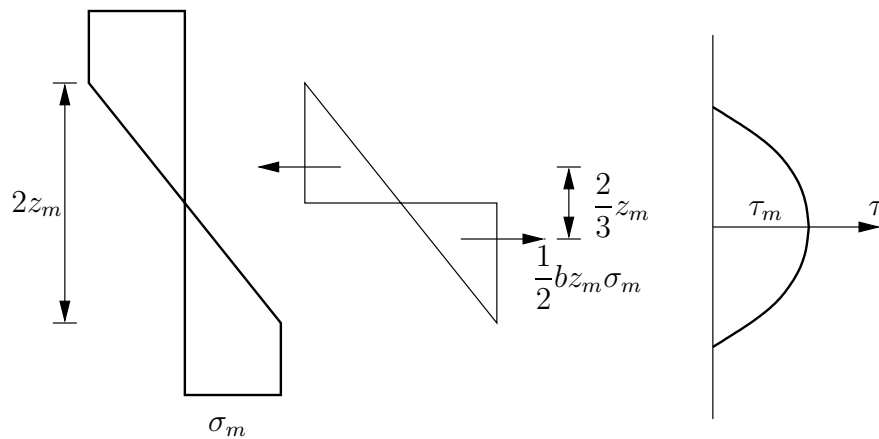
ja leikkausjännitysjaakumaa vastaava leikkausvoima Q on

$$Q = \frac{4}{3} b z_m \tau_m. \tag{3.67}$$

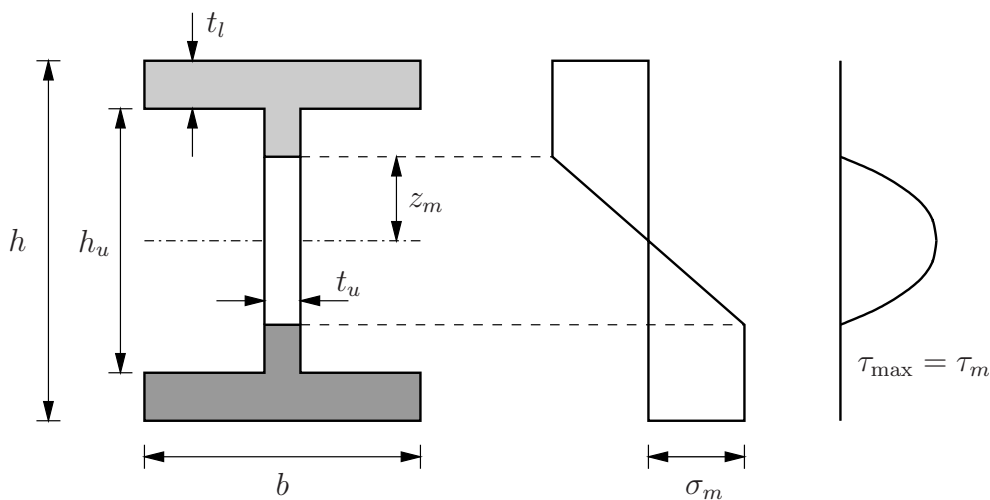
Koska täysplastiset arvot ovat $M_p = \sigma_m b h^2/4$ ja $Q_p = b h \tau_m$, saadaan momentin kaava kirjoitettua muotoon

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^2. \tag{3.68}$$

Kaava pätee arvoilla $Q/Q_p < 2/3$, koska z_m :n suurin mahdollinen arvo on $h/2$.



Kuva 3.13 Suorakaidepoikkileikkauksen jännitys jakauma.



Kuva 3.14 *I*-poikkileikkauksen jännitys jakauma.

3.4.2 *I*-poikkileikkaus

Leikkausvoiman vaikutus täysplastisen momentin arvoon on suorakaidepoikkileikkauksella lähes aina merkityksetön. Sen sijaan *I*-poikkileikkauksella Q :n vaikutus voi olla merkittävä.

Varmalla puolella oleva ratkaisu saadaan kuvan 3.14 jännitys jakaumilla. Määritellään uumalle

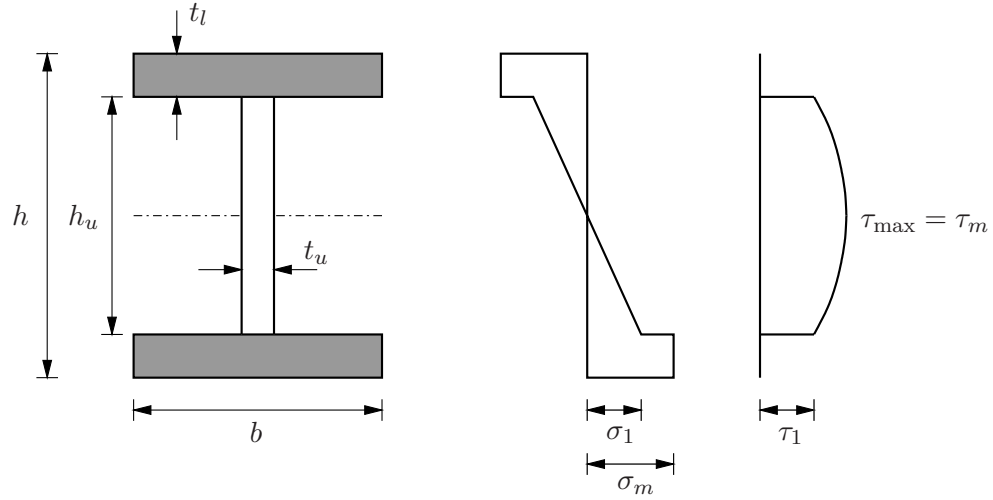
$$M_{pu} = \frac{t_u (h_u)^2}{4} \sigma_m, \quad Q_{pu} = t_u h_u \tau_m, \quad (3.69)$$

missä h_u on uuman korkeus ja t_u on uuman paksuus.

a) Taivutuksen plastisen vyöhykkeen reunat uumassa

Normaalijännitys jakaumaa vastaa momentti

$$M = M_p - \frac{1}{3} \sigma_m t_u z_m^2, \quad (3.70)$$



Kuva 3.15 *I*-poikkileikkauksen jännitysjauma, kun $Q/Q_{pu} > 2/3$.

ja leikkausjännitysjaumaa vastaa leikkausvoima

$$Q = \frac{2}{3} 2z_m t_u \tau_m = \frac{4}{3} t_u z_m \tau_m, \quad (3.71)$$

joten

$$\frac{Q}{Q_{pu}} = \frac{4}{3} \frac{z_m}{h_u}. \quad (3.72)$$

Eliminoimalla z_m tulee

$$\begin{aligned} M &= M_p - \frac{\sigma_m t_u (h_u)^2}{3} \cdot \frac{9}{4 \cdot 4} \left(\frac{Q}{Q_{pu}} \right)^2 \\ &= M_p - \frac{3}{4} \left(\frac{Q}{Q_{pu}} \right)^2 M_{pu}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Kaava on (3.73) voimassa, kun

$$\frac{2z_m}{h_u} = \frac{3}{2} \frac{Q}{Q_{pu}} \leq 1 \Rightarrow \frac{Q}{Q_{pu}} \leq \frac{2}{3}. \quad (3.74)$$

b) Tapaus $\frac{Q}{Q_{pu}} > \frac{2}{3}$

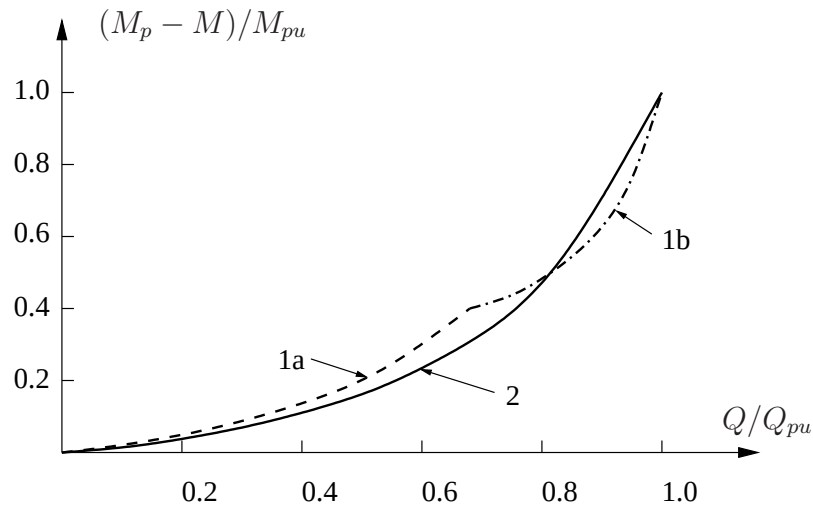
Varmalla puolella oleva ratkaisu saadaan kuvan 3.15 jännitysjaumilla. Tapaus käsitellään samalla tavalla kuin edellä a)-kohta. Tässä tapauksessa toteutuu ehto $Q/Q_{pu} > 2/3$.

Leikkausjännitysjauman perusteella lasketaan leikkausvoima $Q = \int_A \tau dA$

$$Q = h_u t_u \tau_1 + h_u t_u \left[\frac{2}{3} (\tau_m - \tau_1) \right]. \quad (3.75)$$

Jakamalla uuman täysplastisella leikkausvoimalla $Q_{pu} = h_u t_u \tau_m$ saadaan

$$\frac{Q}{Q_{pu}} = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{\tau_1}{\tau_m} \right), \quad (3.76)$$



Kuva 3.16 *I*-poikkileikkauksen momentin ja leikkausvoiman väliset vuorovaikutuskäyrät.

josta ratkaistaan suhde

$$\frac{\tau_1}{\tau_m} = 3 \frac{Q}{Q_{pu}} - 2. \quad (3.77)$$

Momentin $M = \int_A z \sigma dA$ lausekkeeksi saadaan kuvan 3.15 jännitys jakauman perusteella

$$\begin{aligned} M &= M_p - M_{pu} + \frac{h_u^2 t_u}{6} \sigma_1 \\ &= M_p - M_{pu} + \frac{2}{3} M_{pu} \frac{\sigma_1}{\sigma_m}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Kaksiulotteisen myötöehdon mukaan ainepiste myötää, kun normaali- ja leikkausjännityksen yhdistelmä toteuttaa ehdon

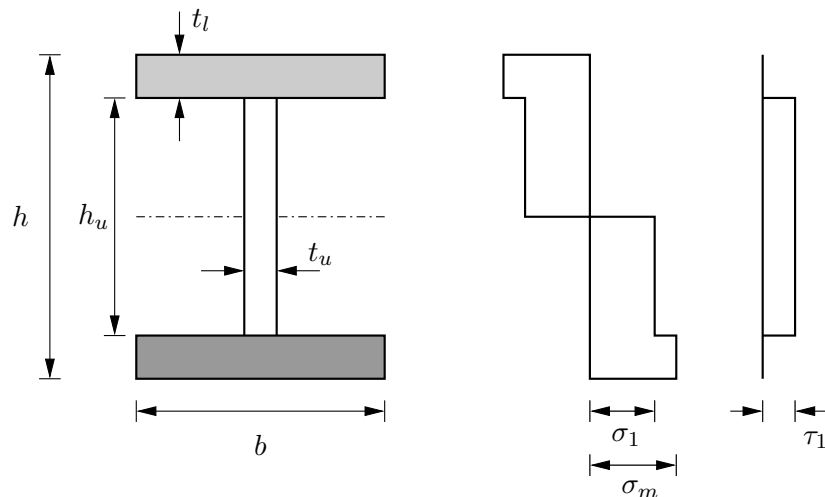
$$f(\sigma_1, \tau_1) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_m}\right)^2 + \left(\frac{\tau_1}{\tau_m}\right)^2} = 1, \quad (3.79)$$

josta voidaan ratkaista suhde

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_m} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_1}{\tau_m}\right)^2}. \quad (3.80)$$

Sijoittamalla momentin kaavaan (3.78) suhde (3.80) ja kaava (3.77) tulee

$$\begin{aligned} M &= M_p - M_{pu} + \frac{2}{3} M_{pu} \frac{\sigma_1}{\sigma_m} \\ &= M_p - M_{pu} + \frac{2}{3} M_{pu} \sqrt{1 - \left(3 \frac{Q}{Q_{pu}} - 2\right)^2} \\ &= M_p - \left[1 - \frac{2}{3} \sqrt{1 - \left(3 \frac{Q}{Q_{pu}} - 2\right)^2}\right] M_{pu}, \end{aligned} \quad (3.81)$$



Kuva 3.17 *I*-poikkileikkauksen otaksutut paloittain vakiot jännitysjaakaumat.

joka on voimassa, kun

$$\frac{2}{3} \leq \frac{Q}{Q_{pu}} \leq 1. \quad (3.82)$$

Momentin ja leikkausvoiman väliset vuorovaikutuskaavat (3.73), (3.81) on esitetty kuvassa 3.16 käyrinä (1a) ja (1b) akselistossa $(Q/Q_{pu}, (M_p - M)/M_{pu})$, missä M_p on täysplastinen momentti, kun $Q = 0$, ja indeksi u viittaa uumaan.

Otaksumalla kuvan 3.17 mukaiset normaalijännityksen ja leikkausjännityksen jakaumat saadaan taivutusmomentille kaava

$$M = M_p - \left(\frac{\sigma_m - \sigma_1}{\sigma_m} \right) M_{pu} \quad (3.83)$$

ja leikkausvoimalle

$$Q = \frac{\tau_1}{\tau_m} Q_{pu}. \quad (3.84)$$

Jännitysjaakaumat toteuttavat jokaisessa ainepisteessä myötöehdon

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_m} \right)^2 + \left(\frac{\tau_1}{\tau_m} \right)^2 = 1, \quad (3.85)$$

josta seuraa

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_m} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_1}{\tau_m} \right)^2} \quad (3.86)$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{Q}{Q_{pu}} \right)^2}. \quad (3.87)$$

Sijoittamalla suhde σ_1/σ_m momentin kaavaan (3.83) saadaan nyt vuorovaikutuskaava

$$M = M_p - \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Q}{Q_{pu}} \right)^2} \right] M_{pu}, \quad (3.88)$$

joka on voimassa, kun $Q/Q_{pu} \leq 1$. Kaavaa (3.88) esittää käyrä 2 kuvassa 3.16.

Luku 4

Rajakuorman määrittäminen yksinkertaisille rakenteille

Aikaisemmin johdettiin taivutusmomentin ja käyrityksen välinen riippuvaisuus suorakaidepoikkileikkaukselle ja määritettiin vapaasti tuetun palkin taipuma jänteen keskellä olevasta pistekuormasta. Laskelman tuloksena saatiin selville myös palkin plastinen rajakuorma.

Rajakuorma voidaan määrittää hyvin yksinkertaisesti, jos vasemman kuvan 4.1 (M, κ)-riippuvuus idealisoidaan oikeanpuoleisen kuvan esittämällä tavalla eli kimmoisella ideaaliplastisella mallilla. Plastiset muodonmuutokset rajoittuvat kuvan esimerkin tapauksessa palkin jänteen keskelle, mihin syntyy 'plastinen nivel', kun pistekuorma P saa arvon P_p ja momentti $M(L/2) = PL/4$ saa arvon M_p . Rajakuorma on siten

$$P_p = \frac{4M_p}{L}. \quad (4.1)$$

Tarkastellaan seuraavaksi kuvan 4.2 staattisesti määräämättömän palkin kuorman ja taipuman välistä riippuvaisuutta. Materiaali otaksutaan kimmoiseksi ideaaliplastiseksi.

Suurin momentti on pisteessä A . Kimmoisen palkin oikean tuen tukireaktio on $R_C = 5P/16$. Kuorman arvolla P_m pisteeseen A syntyy myötönivel ja pisteen A momentti on tällöin

$$M_A = -M_p = -\frac{3}{16}P_m L \quad (4.2)$$

eli

$$P_m = \frac{16}{3} \frac{M_p}{L} \approx 5.333 \frac{M_p}{L}. \quad (4.3)$$

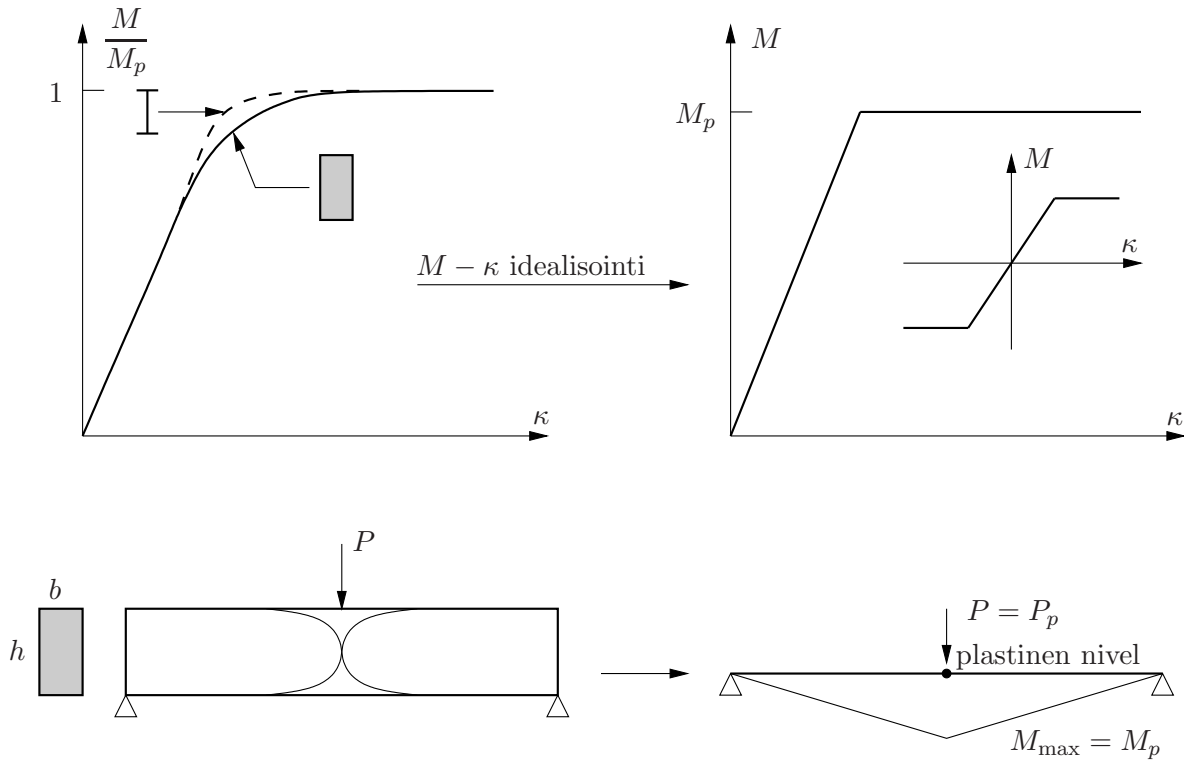
P_m on palkin myötökuorma (piste A myötää). Pisteen B taipuma on tällä kuorman arvolla

$$w_{B1} = \frac{7}{768} \frac{16}{3} \frac{M_p L^2}{EI} = \frac{7}{144} \frac{M_p L^2}{EI}, \quad (4.4)$$

ja pisteen B momentti on vastaavasti

$$M_B = \frac{5}{32} \frac{16}{3} M_p = \frac{5}{6} M_p < M_p. \quad (4.5)$$

Rakenne ei vielä sorru, vaan kuormaa voidaan kasvattaa, kunnes pisteeseen B syntyy myötönivel. Tällöin rakenne muuttuu mekanismiksi.



Kuva 4.1 Momentin ja käristymän välisen riippuvaisuuden idealisointi.

Pisteeseen B syntyy plastinen nivel, kun

$$\frac{5}{6}M_p + \frac{\Delta PL}{4} = M_p \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \frac{2}{3} \frac{M_p}{L}, \quad (4.6)$$

missä ΔP on tarvittava kuorman lisäys. Kuorma on nyt rajakuorman suuruinen, koska palkkiin on syntynyt kahden plastisen nivelen myötä mekanismi eikä rakenne kestä suurempaa kuormaa. Merkitään, että $P \equiv P_2$. Tällöin

$$P_2 = P_m + \Delta P = 6 \frac{M_p}{L} = P_p. \quad (4.7)$$

Kuorman lisäyksen $\Delta P = P_p - P_m$ aiheuttama lisätaipuma pisteessä B on

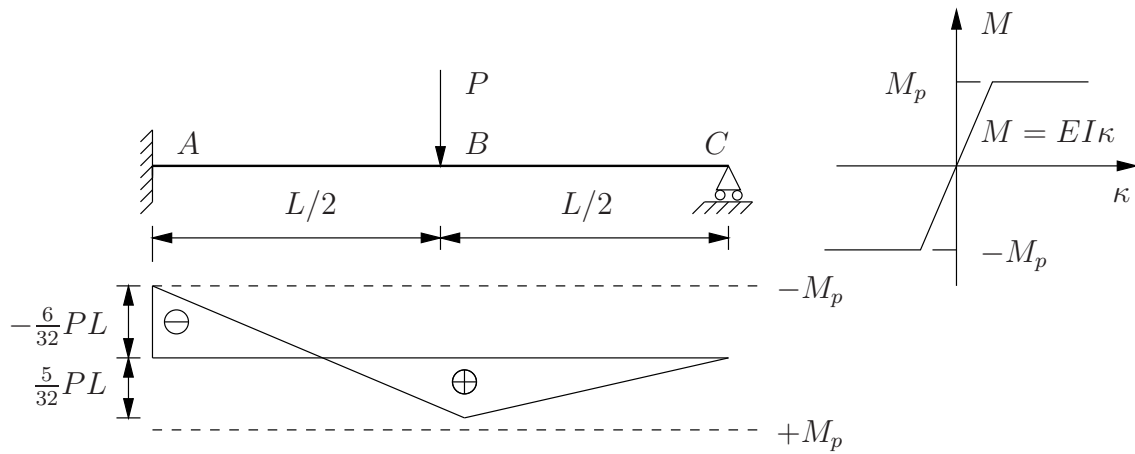
$$\Delta w_B = \frac{1}{48} \frac{\Delta PL^3}{EI} = \frac{1}{48} \frac{\frac{2}{3} \frac{M_p}{L} L^3}{EI} = \frac{1}{72} \frac{M_p L^2}{EI}. \quad (4.8)$$

Pisteen B taipuma sortumishetkellä on siten

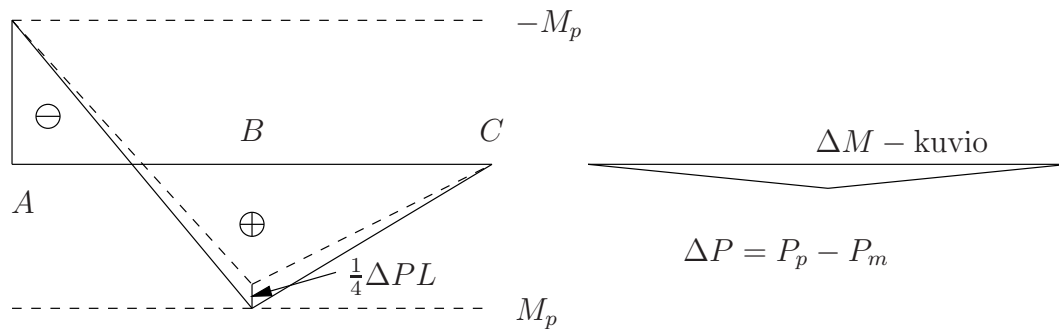
$$w_B \equiv w_{B2} = w_{B1} + \Delta w_B = \left(\frac{7}{144} + \frac{1}{72} \right) \frac{M_p L^2}{EI} = \frac{9}{144} \frac{M_p L^2}{EI}. \quad (4.9)$$

Esimerkkitapauksessa rajakuorma voidaan määrittää helpommin tutkimalla momenttikuviota hetkellä, jolloin rakenteesta on tullut mekanismi.

Esimerkki 4.1 Määritetään kuvan 4.6 staattisesti määräämättömän palkin plastinen rajakuorma tutkimalla sen taivutusmomenttikuviota.



Kuva 4.2 Staattisesti määrämätön palkki, jota kuormittaa pistevoima P jänteen keskellä.



Kuva 4.3 Momenttikuvio, kun piste B myötää.

Määritetään palkin taivutusmomenttikuvio yhdistämällä tukimomenttikuvio M_1 ¹ ja vastaavan staattisesti määrätyn 2-tukisen palkin momenttikuvio M_0 .

Palkin keskipisteessä saadaan kuvan 4.6 perusteella rajakuorman laskemiseen ehto

$$|M_1\left(\frac{L}{2}\right)| + M_p = |M_0| \quad (4.10)$$

eli

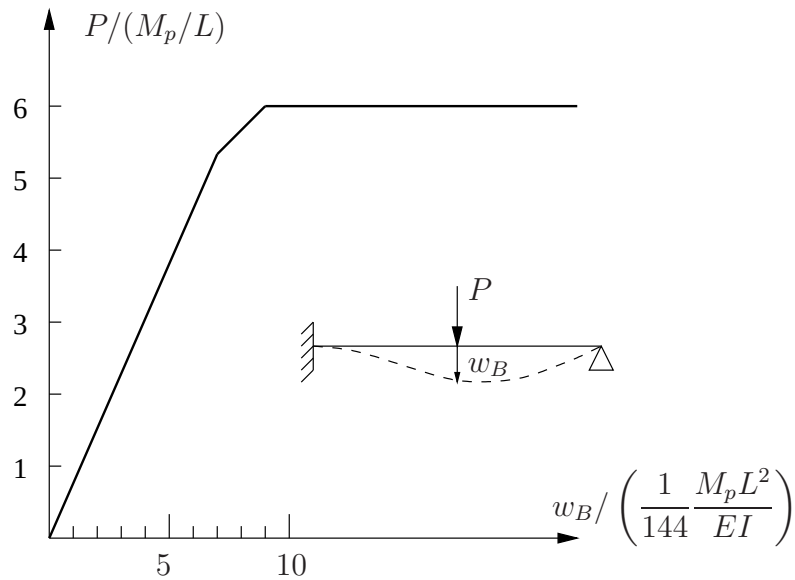
$$\frac{1}{2}M_p + M_p = \frac{PL}{4} \Rightarrow P_p = \frac{6M_p}{L}, \quad (4.11)$$

missä P_p on plastinen rajakuorma.

Esimerkki 4.2 Määritetään kuvan 4.7 staattisesti määrämättöman palkin rajakuorma, kun kuormitus koostuu kahdesta pistevoimasta P .

Esimerkin palkki on kerran staattisesti määrämätön. Mekanismin syntymiseen tarvitaan siten kaksi niveltä. Toinen nivel syntyy epäilemättä tuelle, mutta kentän nivel voi syntyä jommankumman pistekuorman kohdalle.

¹Tuella momentti on $-M_p$ rajatilassa.



Kuva 4.4 Palkin kuorma-siirtymäkäyrä.

Tutkitaan siis kaksi vaihtoehtoa samalla tavalla kuin edellä. Tapauksessa *a* saadaan yhtälö

$$M_p + \frac{1}{3}M_p = \frac{1}{3}PL \quad \Rightarrow \quad P_p^+ = 4M_p/L. \quad (4.12)$$

Tapauksessa *b* tulee kuvan 4.7 perusteella

$$\frac{2}{3}M_p + M_p = \frac{1}{3}PL \quad \Rightarrow \quad P_p^+ = 5M_p/L. \quad (4.13)$$

Indekseistä *p* tarkoittaa plastista rajakuormaa ja indeksi + merkitsee ylärajaa.

Mekanismi *b* ei tule kyseeseen, koska $M_D = 4/3M_p > M_p$ ja pisteessä *D* rikotaan myötöehtoa $|M| \leq M_p$.

4.1 Virtuaalisen työn yhtälö

Rakenteen plastinen rajakuorma voidaan määrittää virtuaalisen työn yhtälön avulla. Kehien ja palkkien tapauksessa momentin ja käyristymän välinen yhteys otaksutaan ideaaliplastisen mallin mukaiseksi.

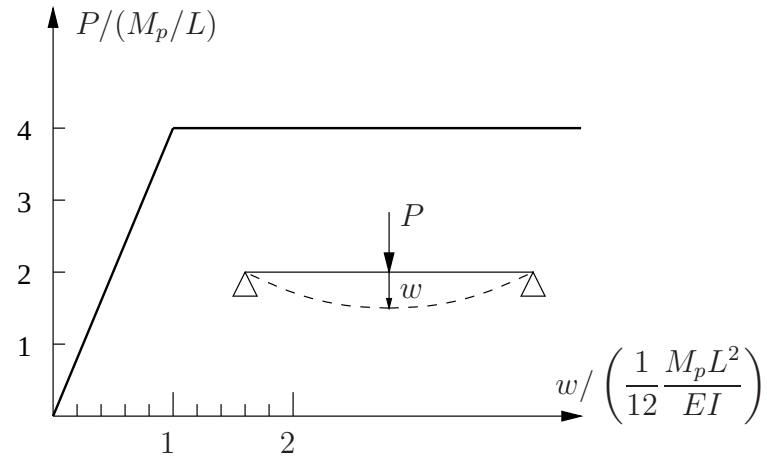
Rakenteelle otaksutaan tietty sortumismekanismi. Virtuaalisten siirtymien periaatteen mukaan

$$W_u + W_s = 0, \quad (4.14)$$

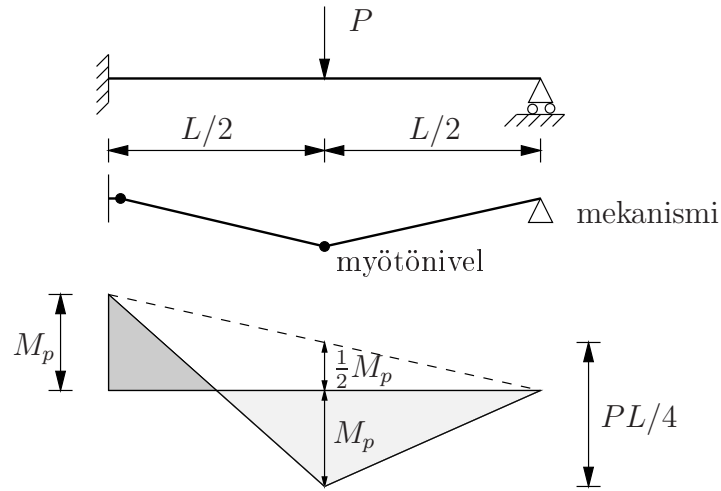
missä W_u on ulkoisen kuorman tekemä virtuaalinen työ ja W_s on sisäinen virtuaalinen työ kuvitellun (virtuaalisen) liikkeen aikana.

Kimmoisen palkin tapauksessa alkiossa dx on

$$dW_s = -Md\varphi = -Mdk \, dx \quad (4.15)$$



Kuva 4.5 Vapaasti tuetun palkin kuorma-siirtymäkäyrä.



Kuva 4.6 Rajakuorman määrittäminen momenttikuvion avulla.

ja

$$W_s = - \int_0^L M \kappa dx. \quad (4.16)$$

Plastisen nivelen kohdalla kaltevuuskulmalla dw/dx on epäjatkuvuus

$$\Delta\varphi = -\frac{dw^+}{dx} + \frac{dw^-}{dx} = \theta. \quad (4.17)$$

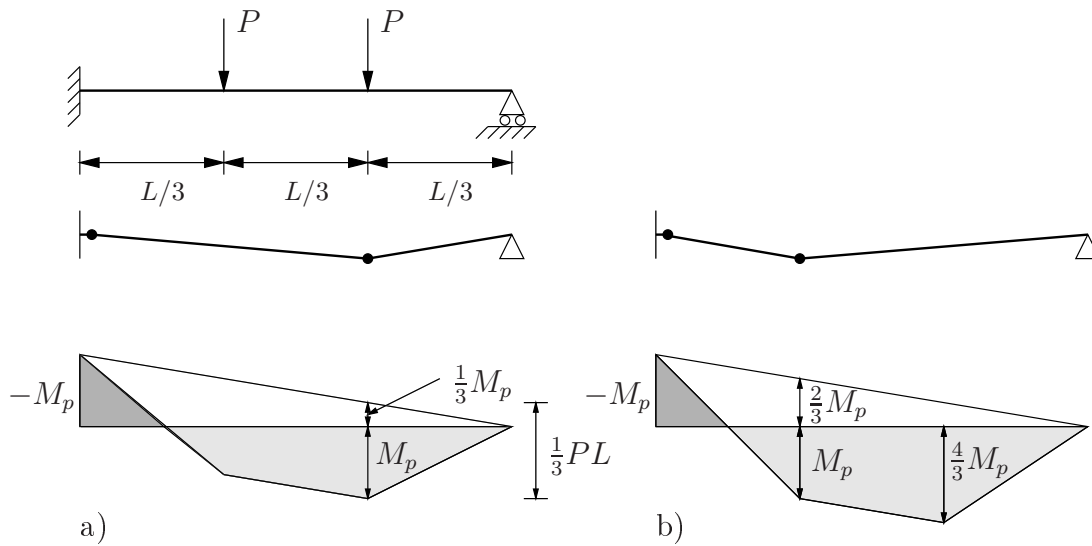
Plastisen nivelen kohdalla tehty virtuaalinen työ on

$$W_s = -M_p \theta. \quad (4.18)$$

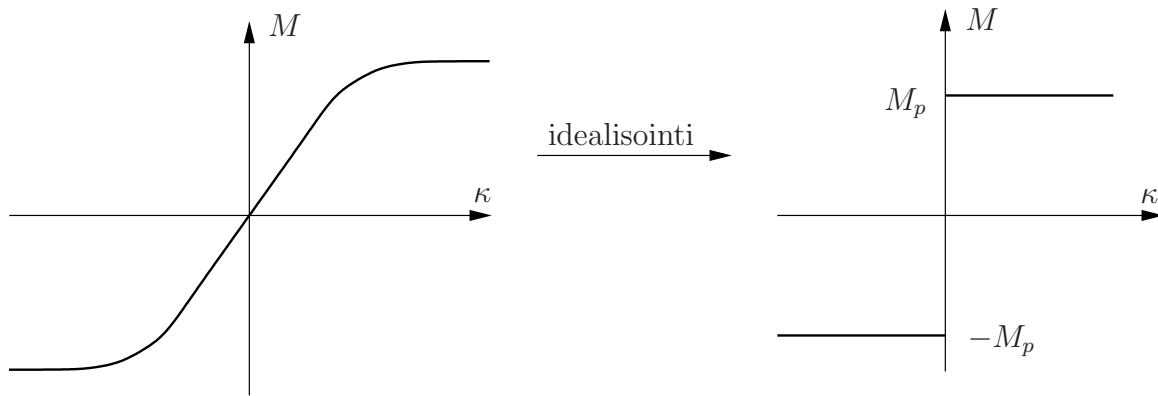
Jos kuormitus koostuu pelkästään pistekuormista, niin ulkoinen virtuaalinen työ on

$$W_u = \sum F_k v_k, \quad (4.19)$$

missä F_k ovat pistekuormat ja v_k virtuaaliset siirtymät kuormien suunnassa.



Kuva 4.7 Kaksitukinen staattisesti määräämätön palkki. a) Mekanismi *a*, b) mekanismi *b*.



Kuva 4.8 Palkin momentin ja käyristymän välisen yhteyden idealisointi.

Yhtälöstä

$$W_u + W_s = 0 \quad (4.20)$$

seuraa nyt

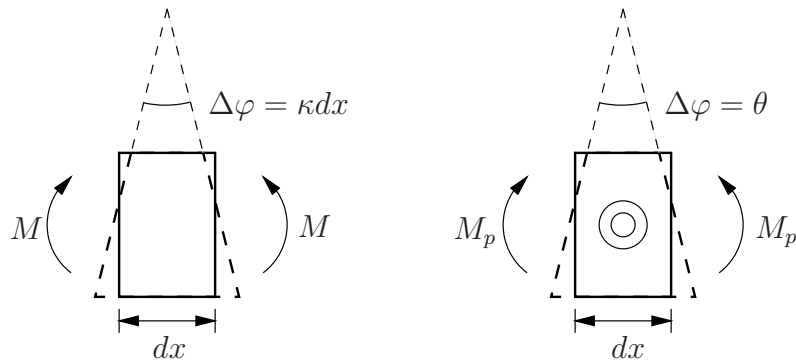
$$\sum_{n=1}^N |M_{pn}\theta_n| + \int_0^L M\kappa dx = \sum_{k=1}^K F_kv_k, \quad (4.21)$$

missä N on plastisten nivelten lukumäärä ja K on pistekuormien lukumäärä. Valitsemalla sellainen virtuaalinen siirtymä, jossa $\kappa = 0$, saadaan työyhtälö muotoon

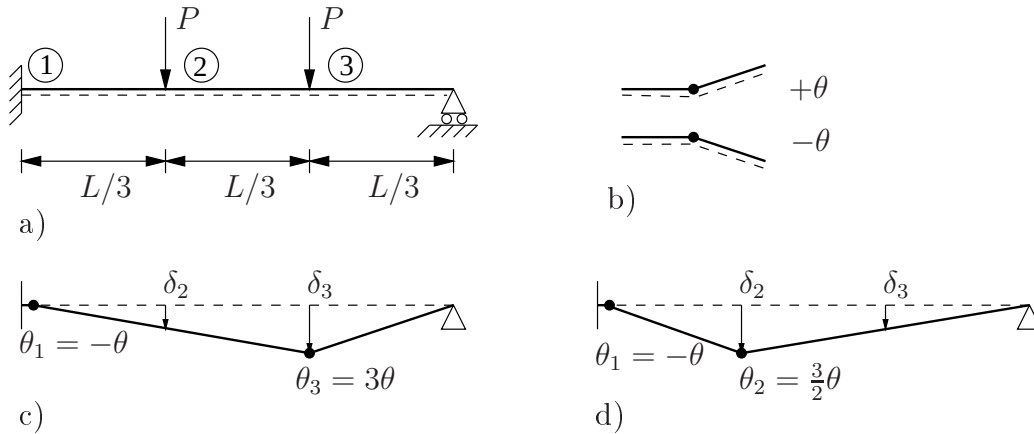
$$\sum |M_{pn}\theta_n| = \sum F_kv_k. \quad (4.22)$$

Esimerkki 4.3 Määritetään edellä käsitellyn esimerkin palkin plastinen rajakuorma virtuaalisen työn periaatteen avulla.

Tarkastellaan kahden pistekuorman kuormittamaa palkkia, kuva 4.10a. Plastisen nivelen positiivinen nivelkiertymä on määritelty kuvassa 4.10b. Nivelkiertymä on posi-



Kuva 4.9 a) Palkin alkio dx . b) Idealisoitu myötönivel.



Kuva 4.10 a) Kahden pistekuorman kuormittama palkki. b) Positiiviset nivelkiertymät. c) Mekanismi *a*. d) Mekanismi *b*.

tiivinen, jos palkin ns. alapinta on vedetty. Palkin alapinta voidaan määrittellä piirtämällä valitun alapinnan puolelle katkoviiva. Alapinta on palkin paikallisen poikittaisen koordinaatin suunnassa.

Nivelen kohdalla taivutusmomentin M merkki on sama kuin nivelkiertymän merkki. Myös taivutusmomentti $M(x)$ on positiivinen, jos alapinnan säikeet ovat vedettyjä.

Valitaan ensin kuvan 4.10c mukainen mekanismi *a*. Virtuaalisen työn yhtälö (VTY) on

$$\sum |M_{pi}\theta_i| = \sum F_k\delta_k. \quad (4.23)$$

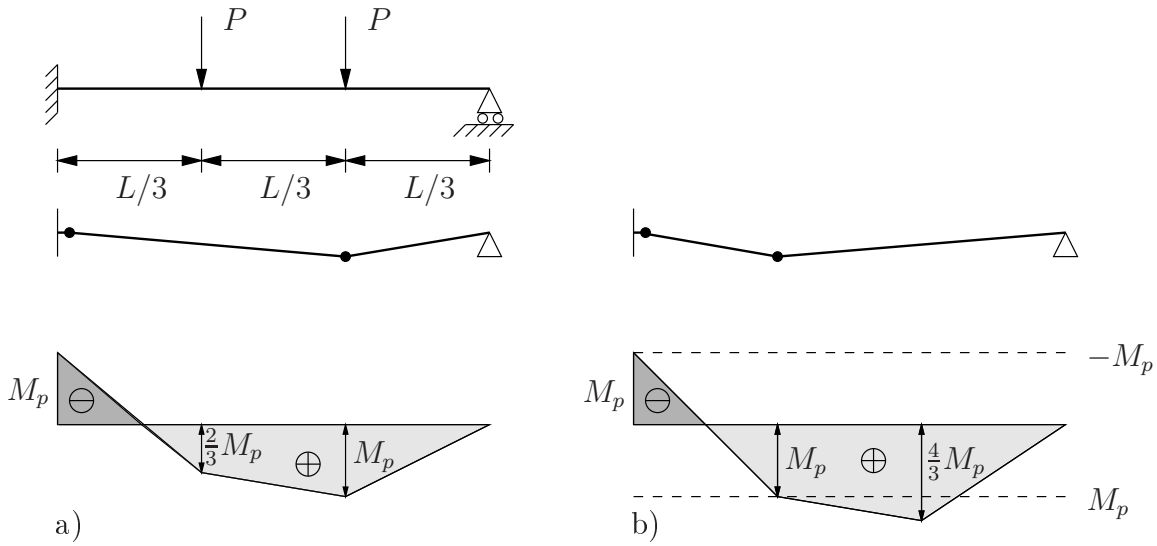
Esimerkin tapauksessa $M_{p1} = M_{p2} = M_{p3} = M_p$. Mekanismia *a* vastaava VTY on

$$M_p\theta + M_p3\theta = P\theta\frac{L}{3} + P\theta\frac{2L}{3} = P\theta L, \quad (4.24)$$

ja rajakuorma on ²

$$P_p = \frac{4M_p}{L}. \quad (4.25)$$

²Koska θ on mielivaltainen nollasta eroava virtuaalinen kiertymä, se voidaan jakaa pois virtuaalisen työn yhtälön termeistä.



Kuva 4.11 a) Mekanismin *a* vastaava momenttikuvio. b) Mekanismin *b* vastaava momenttikuvio.

Mekanismin *b* tapauksessa VTY on

$$M_p \theta + M_p \frac{3}{2} \theta = P \frac{\theta L}{3} + P \frac{1}{2} \theta \frac{L}{3} \quad (4.26)$$

eli

$$\frac{5}{2} M_p \theta = \frac{3}{6} P L \theta \Rightarrow P_p = \frac{5 M_p}{L}. \quad (4.27)$$

Todetaan, että mekanismi *a* antaa pienemmän rajakuorman kuin mekanismi *b*.

Määritetään mekanismin *a* ja rajakuormaa $P_p = 4 M_p / L$ vastaava taivutusmomenttikuvio. Pisteessä 1 $M_1 = -M_p$ (myötönivel) ja pisteessä 3 $M_3 = M_p$. Pisteessä 2 momentti M_2 voidaan määrittää mekanismin *b* työyhtälön avulla:

$$M_1(-\theta) + M_2 \left(\frac{3}{2} \theta \right) = (P_p)_a \frac{\theta L}{3} + (P_p)_a \frac{\theta L}{6} = \frac{3}{6} \frac{4 M_p}{L} \theta. \quad (4.28)$$

Koska $M_1 = -M_p$, saadaan

$$M_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{12}{6} - 1 \right) M_p = \frac{2}{3} M_p < M_p. \quad (4.29)$$

Mekanismin *b* VTY on samanarvoinen erään tasapainoyhtälön kanssa, ja M_2 ratkaistiin itse asiassa tasapainoyhtälöstä. Mekanismin *a* vastaava momenttikuvio on kuvan 4.11a mukainen. Kaikkialla pätee, että $|M| < M_p$. Myötöehtoa ei rikota.

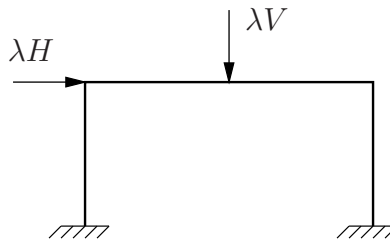
Mekanismin *b* vastaavat pisteiden 1 ja 2 momentit ovat $M_1 = -M_p$ ja $M_2 = M_p$. Pisteessä 3 momentti M_3 ratkaistaan mekanismin *a* VTY:n avulla. Työyhtälöstä

$$(-M_p)(-\theta) + M_3 3\theta = (P_p)_b \theta L = \left(\frac{5 M_p}{L} \right) \theta L \quad (4.30)$$

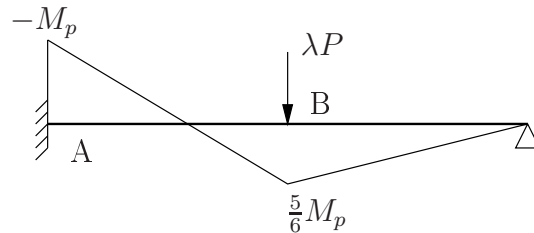
ratkaistaan

$$M_3 = \frac{1}{3} (5 - 1) M_p = \frac{4}{3} M_p > M_p ! \quad (4.31)$$

Koska myötöehtoa nyt rikotaan, ei $P = 5 M_p / L$ ole oikea rajakuorma.



Kuva 4.12 Portaalikehän suhteellinen kuormitus.



Kuva 4.13 Palkin rajakuorman alaraja.

Todellinen rajakuorma toteuttaa seuraavat ehdot:

1. Myötöehtoa $|M| \leq M_p$ ei rikota missään rakenteen osassa (myötöehto).
2. Momentti $M(x)$ on tasapainossa kuormien kanssa (tasapainoehto).
3. Rakenteeseen syntyy riittävä määrä myötöniveliä mekanismin muodostumista varten (mekanismiehto).

Jos ehdot 1, 2 ja 3 on täytetty, niin kuormakerroin $\lambda = \lambda_p$, missä λ_p on plastinen rajakuormakerroin. Jos ehto 3 ei toteudu, niin $\lambda < \lambda_p$ (alaraja). Jos ehto 1 ei toteudu, niin $\lambda > \lambda_p$ (yläraja). Kaikkien kuormien on otaksuttu muuttuvan yhden kuormakertoimen λ mukana (suhteellinen kuormitus), kuten esimerkiksi kuvassa 4.12.

Esimerkki 4.4 Määritetään kuvan 4.13 palkin rajakuorma alarajalauseen perusteella.

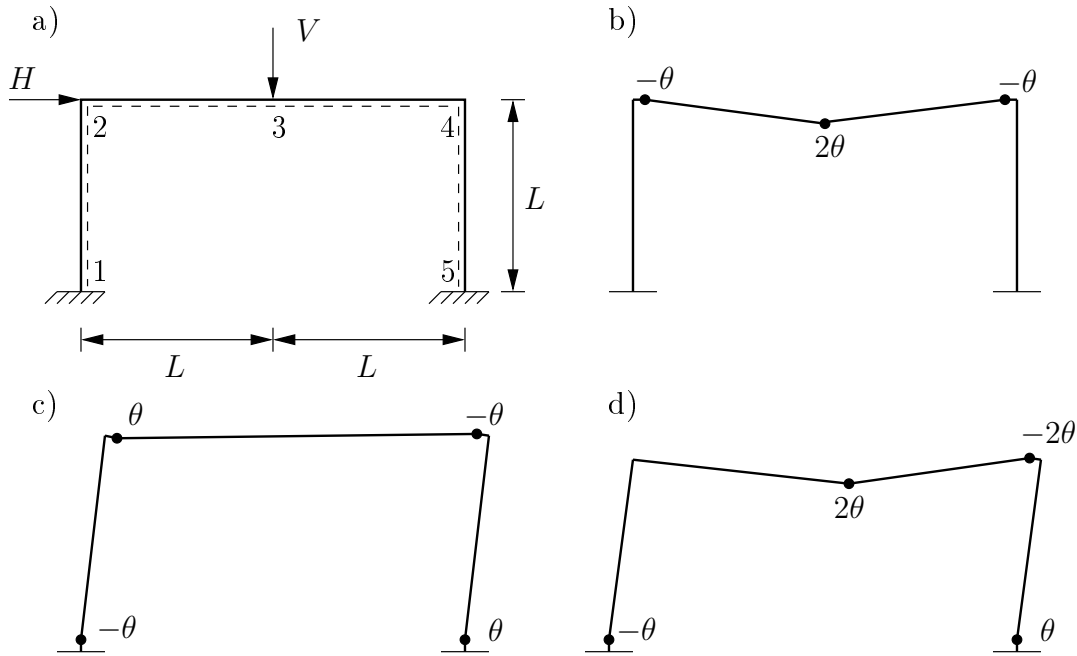
Eräs tasapainoehto ja myötöehdon toteuttava momenttijakauma saadaan aikaisemmin käsitellylle esimerkille kertomalla kuvan 4.13 kimmoinen momenttikuvio sellaisella luvulla, että $M_{\max}$ saa arvon M_p eli

$$\lambda M_A = M_p \quad \Rightarrow \quad \lambda \left(-\frac{3}{16} PL \right) = -M_p \quad \Rightarrow \quad \lambda P = \frac{16}{3} \frac{M_p}{L}. \quad (4.32)$$

Saatu λP on todellisen rajakuorman $\lambda_p P = 6M_p/L$ alaraja, koska yksi myötönivel ei tee esimerkin palkista mekanisme.

Esimerkki 4.5 Määritetään kuvan 4.10 palkin rajakuorma ylärajalauseen avulla.

Edellä käsitellyn esimerkin 4.3 yhteydessä mekanismin b tapauksessa rikottiin myötöehtoa. Tämän vuoksi mekanisme b vastaava kuormakerroin $\lambda P = 5M_p/L$ on todellisen rajakuorman yläraja.



Kuva 4.14 a) Yksiaukkoinen kehä. b) Palkin mekanismi. c) Sivusiirtymämekanismi. d) Yhdistetty mekanismi.

4.2 Rajamekanismin määrittäminen

Tarkastellaan rajamekanismin määrittämistä yksinkertaisen kehäesimerkin avulla. Otaksutaan, että kuvan 4.14 kehän sauvojen M_p on vakio eli leikkauksessa i $M_{pi} = M_p$.

Voidaan osoittaa, että riippumattomien alkeismekanismien lukumäärä on

$$m = s - n_s, \quad (4.33)$$

missä s on kriittisten leikkausten lukumäärä³, ja n_s on staattisen määräämättömyyden kertaluku.

Kuvan 4.14 tapauksessa $s = 5$, ja $n_s = 3$. Alkeismekanismien lukumäärä on $m = 5 - 3 = 2$, ja alkeismekanismit ovat: palkkimekanismi, sivusiirtymämekanismi ja yhdistetty mekanismi, kuva 4.14.

Mekanismien a ja b yhdistelmä on kuvan 4.14d mukainen. Nivelkiertymien positiivinen suunta on kuvan 4.10b mukainen.

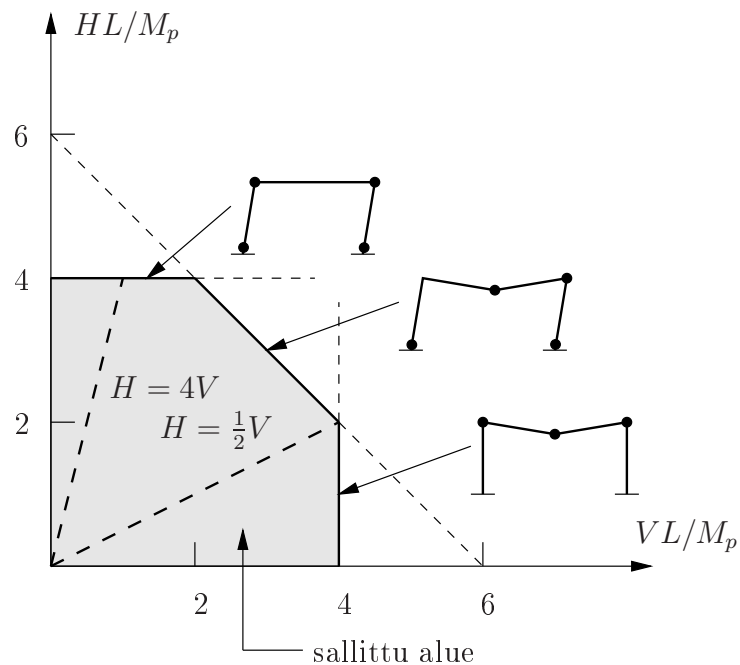
Mekanismien a VTY on

$$M_p\theta + M_p2\theta + M_p\theta = VL\theta \quad \Rightarrow \quad V = 4\frac{M_p}{L}. \quad (4.34)$$

Mekanismien b VTY on puolestaan

$$4M_p\theta = HL\theta \quad \Rightarrow \quad H = 4\frac{M_p}{L}. \quad (4.35)$$

³Kriittinen leikkaus tarkoittaa pistettä, jonka momentin arvo on tunnettava momenttikuvion määrittämistä varten.



Kuva 4.15 Portaali-kehän kuormien H ja V sallittu alue, kun $H \geq 0$ ja $V \geq 0$.

Yhdistetyn mekanismin $a + b$ avulla muodostettu VTY on

$$6M_p\theta = HL\theta + VL\theta \quad \Rightarrow \quad H + V = 6\frac{M_p}{L}. \quad (4.36)$$

Piirretään suorien (4.34), (4.35) ja (4.36) yhtälöt koordinaatistoon, jonka akselit ovat HL/M_p ja VL/M_p , kuvaan 4.15.

Kuormien H ja V suhteesta riippuu, minkä mekanismin mukaisesti kehä sortuu. Jos esimerkiksi $H/V = 4$, eli kuormat ovat $H = 4\lambda$ ja $V = \lambda$, kehä sortuu (joutuu plastiseen rajatilaan) sivusiirtymämekanismin mukaisesti. Jos taas kuormien suhde on $H/V = 1/2$, niin sekä mekanismi a että yhdistetty mekanismi $a + b$ antaa saman rajakuorman.

Eri mekanismien työyhtälöistä saadut yhtälöt rajaavat tasossa ($HL/M_p, VL/M_p$) sallitun alueen, jolla kuormien arvot voivat vaihdella kehän sortumatta. Sallitun alueen reuna on kuormien H ja V vuorovaikutuskäyrä (itse asiassa murtoviiva).

Sallittu alue on **konvekksi** eli kupera. Samanlainen myötöehto voidaan piirtää kuormatason kolmeen muuhun neljännekseen, jos kuormat H ja V voivat saada myös negatiivisia arvoja.

Luku 5

Mekanismimenetelmä

5.1 Plastisten nivelten lukumäärä

Rajamekanismin syntymiseen tarvittava plastisten nivelten lukumäärä on yleensä

$$n = n_s + 1, \quad (5.1)$$

missä n_s on staattisen määräämättömyyden kertaluku. Jos n on pienempi kuin $n_s + 1$, on kyseessä alitäydellinen mekanismi. Jos n on suurempi kuin $n_s + 1$, niin mekanismi on ylitäydellinen. Kuvassa 5.1 on esimerkkejä palkkien ja kehien mekanismeista.

Kuvassa 5.2 on kaksi alitäydellistä mekanismia. Kehän pisteiden A ja E momentteja ei voida ratkaista pelkästään tasapainoyhtälöistä. Leikkausvoimien ja vaakakuorman tasapainoehdosta, (kuva 5.3),

$$Q_{BA} + Q_{DE} = 0 \quad (5.2)$$

seuraa yhtälö

$$M_{AB} + M_{ED} = 0 \quad (5.3)$$

eli

$$M_A = M_E. \quad (5.4)$$

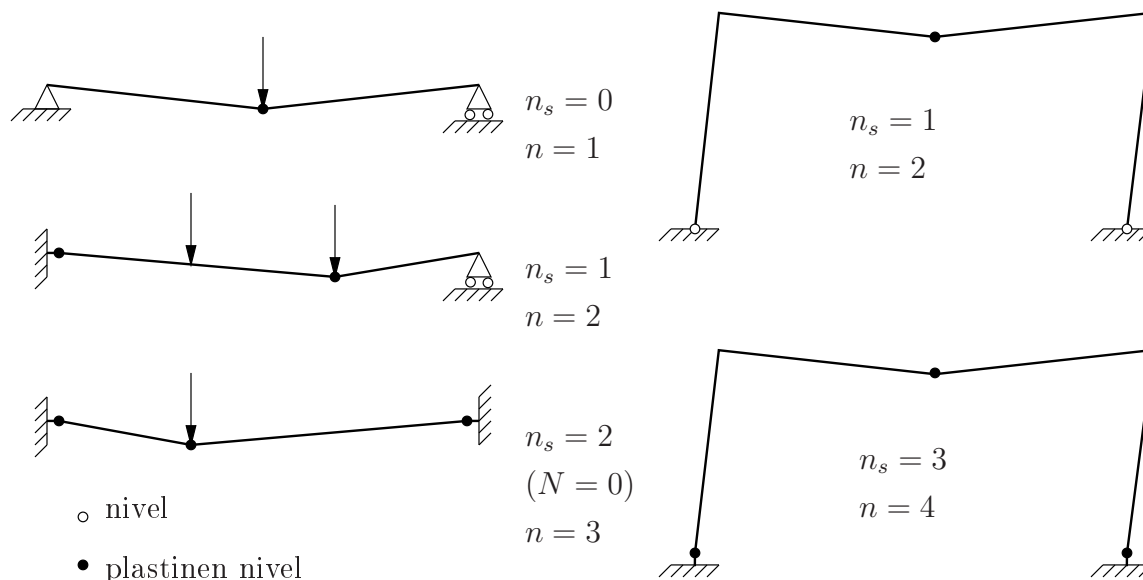
Lisäksi tarvittaisiin yksi yhtälö, josta voitaisiin ratkaista M_A tai M_E . Tasapainoehto ja myötöehto toteutuvat, jos

$$M_A = M_E \quad (5.5)$$

ja

$$|M_A| < M_p. \quad (5.6)$$

Kuvasta 4.15 nähdään, että rajamekanismi on ylitäydellinen, jos vaakakuorman H suhde pystykuorman V on $H/V = 2$ tai $H/V = 1/2$. Näissä tapauksissa kaksi mekanismia antaa saman rajakuorman.



Kuva 5.1 Täydellisiä mekanismeja.

5.2 Mekanismien yhdistelymenetelmä

Mekanismien yhdistelymenetelmän esittivät Neal ja Symonds, 1952. Menetelmässä määritetään ensin kriittisten leikkausten lukumäärä s . Kriittisiä leikkauksia ovat momenttikuvion ääriarvopisteet. Toisistaan riippumattomien **perusmekanismien** lukumäärä m on

$$m = s - n_s, \quad (5.7)$$

missä n_s on staattisen määräämättömyyden kertaluku.

Kuvan 5.4 kehän riippumattomat mekanismit ovat:

- 3 palkkimekanismia,
- 2 sivusiirtymämekanismia,
- 2 nurkkakiertymämekanismia.

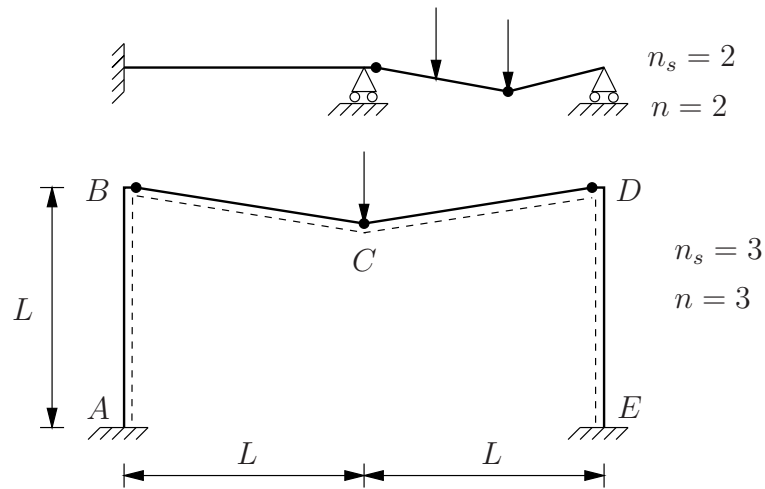
Seuraavassa mekanismien yhdistelymenetelmää tai lyhyemmin mekanismimenetelmää esitellään esimerkkien avulla.

Esimerkki 5.1 Määritetään kuvan 5.6 kehän plastisen rajakuorman yläraja-arvo mekanismimenetelmällä.

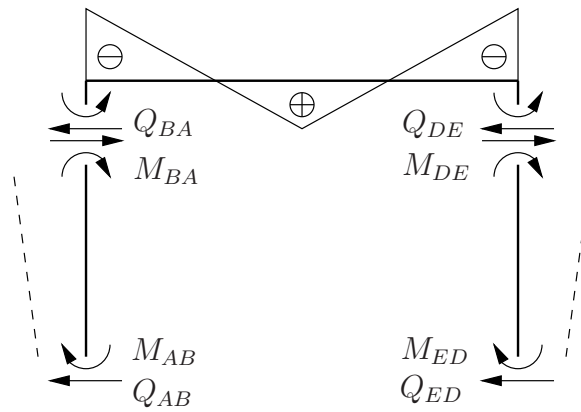
Kuormien suhteelle V/H valitaan arvo 2. Otaksutaan kaikkien sauvojen täysplastiselle momentille M_p sama arvo. Perusmekanismien lukumäärä on

$$m = s - n_s = 5 - 3 = 2. \quad (5.8)$$

Kuvan 5.6 kehän perusmekanismit ovat palkkimekanismi (kuva 5.7a) ja sivusiirtymämekanismi (kuva 5.7b). On huomattava, että eri mekanismeissa nivelet on asetettava samoihin kohtiin. Esimerkin kehän palkkien ja pilarien M_p on sama. Otaksutaan, että ylänurkkien läheisyyteen syntyvä mahdollinen plastinen nivel tulee pilarin puolelle.



Kuva 5.2 Alitäydellisiä mekanismeja.



Kuva 5.3 Portaalikeyhän alitäydellinen mekanismi.

Vaihtoehtoisesti voitaisiin asettaa kriittiset leikkaukset kehän nurkissa sekä palkkien että pilarien päihin ja ottaa perusmekanismien joukkoon nurkkien kiertymämekanismit.

Mekanismin a työyhtälö on

$$(-\theta)M_2 + (2\theta)M_3 + (-\theta)M_4 = \lambda L\theta \quad (5.9)$$

eli

$$(-\theta)(-M_p) + (2\theta)(M_p) + (-\theta)(-M_p) = \lambda L\theta, \quad (5.10)$$

josta saadaan edelleen

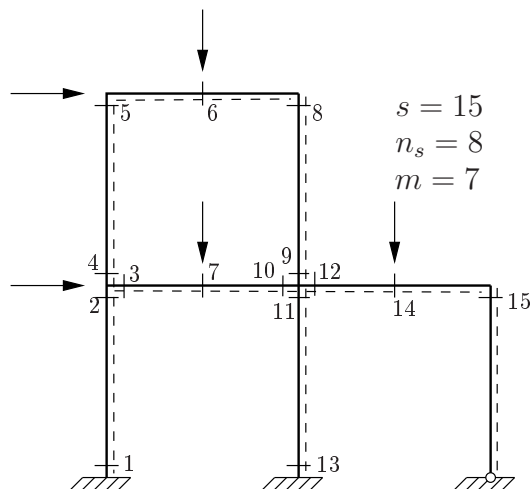
$$4M_p\theta = \lambda L\theta \Rightarrow \lambda = 4\frac{M_p}{L}. \quad (5.11)$$

Mekanismin b työyhtälö on puolestaan

$$(-\theta)M_1 + (\theta)M_2 + (-\theta)M_4 + (\theta)M_5 = \frac{1}{2}\lambda L\theta, \quad (5.12)$$

josta seuraa

$$4M_p\theta = \frac{1}{2}\lambda L\theta \Rightarrow \lambda = 8\frac{M_p}{L}. \quad (5.13)$$



Kuva 5.4 Kehän kriittiset leikkaukset.

Taulukko 5.1 Portaalikehän mekanismien yhdistely. Perusmekanismit a ja b , yhdistetyt mekanismit $a + b$ ja $2a + b$.

	1	2	3	4	5	$\sum M_{pj}\theta_j $	$\sum F_i\delta_i$	λ
a		$-\theta$	2θ	$-\theta$		$4M_p\theta$	$\lambda L\theta$	$4M_p/L$
b	$-\theta$	θ		$-\theta$	θ	$4M_p\theta$	$\frac{1}{2}\lambda L\theta$	$8M_p/L$
$a + b$	$-\theta$	0	2θ	-2θ	θ	$6M_p\theta$	$\frac{3}{2}\lambda L\theta$	$4M_p/L$
$2a + b$	$-\theta$	$-\theta$	4θ	-3θ	θ	$10M_p\theta$	$\frac{5}{2}\lambda L\theta$	$4M_p/L$

Kootaan saadut tulokset taulukkoon 5.1. Riveillä a ja b ovat perusmekanismien leikkausten i nivelkiertymät, sisäinen työ, ulkoinen työ ja kuormakerroin. Seuraavilla riveillä on muodostettu uusia mekanismeja perusmekanismien avulla. Uusien mekanismien nivelkiertymät ja ulkoinen työ saadaan lineaarisina yhdistelminä perusmekanismeista. Sensijaan sisäinen työ on laskettava erikseen jokaiselle mekanismille.

Nähdään, että mekanismit a ja $a + b$ antavat saman rajakuorman. Rajakuorma on yksikäsitteinen, mutta rajakuorman antava mekanismi ei välttämättä ole yksikäsitteinen. Oikea rajakuorma toteuttaa **mekanismiehdon**, **tasapainoehdon** ja **myötöehdon**. Myötöehdon tarkistamista varten tarvitaan esimerkin kehän pisteen 2 momentin arvo M_2 . Mekanismin $a + b$ tapauksessa $M_1 = -M_p$, $M_3 = M_p$, $M_4 = -M_p$, $M_5 = M_p$.

Leikkauksen 2 momentti M_2 voidaan määrittää tasapainoehdon (mekanismin b) avulla:

$$M_1(-\theta) + M_2\theta + M_4(-\theta) + M_5(\theta) = \frac{1}{2} \left(4 \frac{M_p}{L} \right) L\theta \quad (5.14)$$

eli

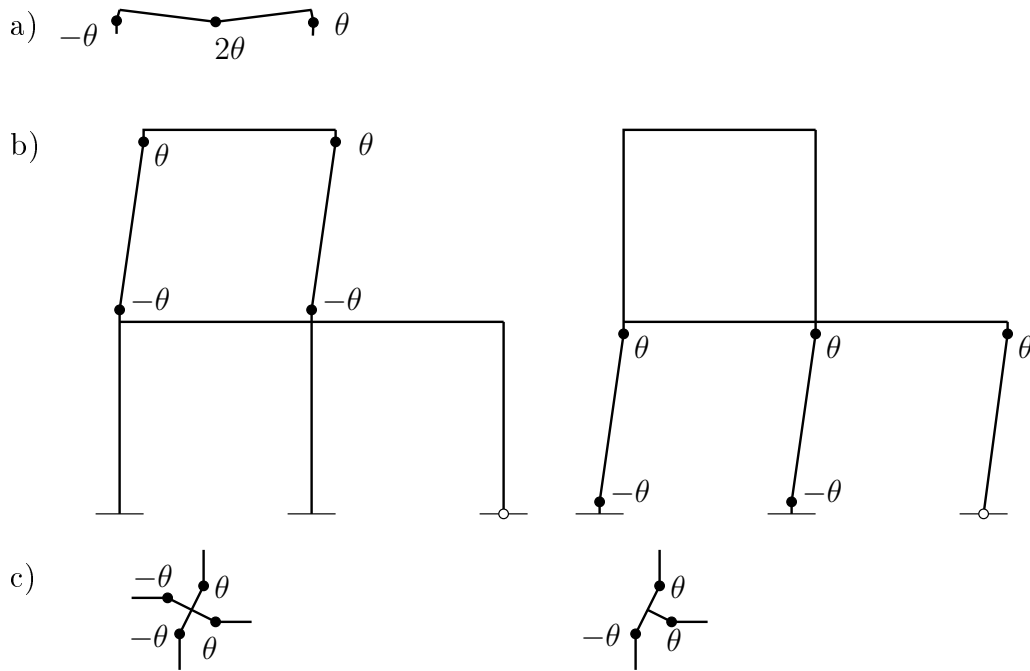
$$M_p + M_2 + M_p + M_p = 2M_p \Rightarrow M_2 = -M_p. \quad (5.15)$$

Todetaan, että kaikkialla $|M| \leq M_p$, joten rajakuormakerroin on

$$\lambda_p = 4 \frac{M_p}{L}. \quad (5.16)$$

Koska mekanismi a antaa myös rajakuorman $\lambda_p = 4M_p/L$, on $M_2 = -M_p$.

Mekanismi a on osittainen eli alitäydellinen. Mekanismi $a + b$ on täydellinen, eli sen niveltien lukumäärä on $n = 4$. Pisteessä 2 on itseasiassa plastinen nivel, koska $M_2 =$

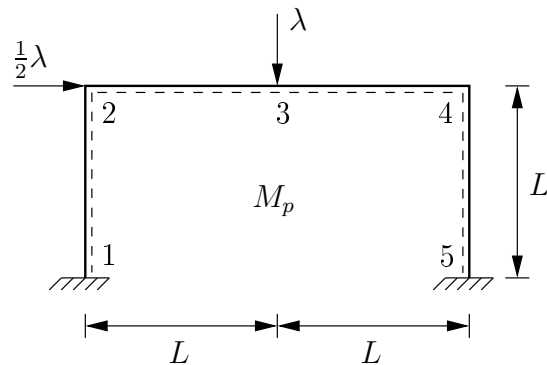


Kuva 5.5 Kehän perusmekanismit. a) Palkkimekanismi. b) Sivusiirtymämekanismit. c) Nurkkakiertymämekanismit.

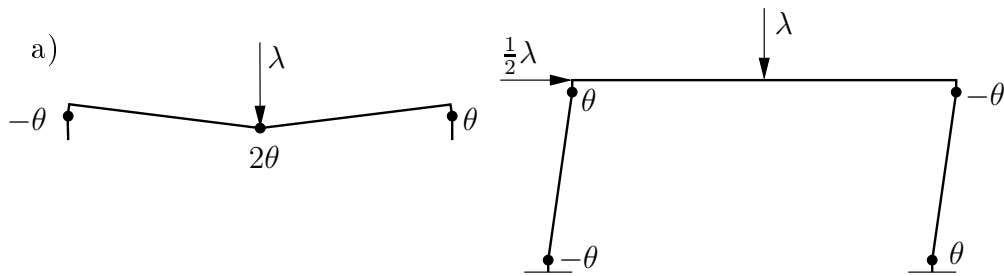
$-M_p$. Ylitäydellinen mekanismi $2a+b$, jossa on viisi niveltä (eli $n > n_s+1$), antaa tässä tapauksessa myös rajakuorman $\lambda_p = 4M_p/L$. Ylitäydellinen mekanismi voi syntyä, jos kaksi mekanismia antaa saman rajakuorman.

Esimerkki 5.2 Määritetään kuvan 5.10 kehän rajakuorman yläraja mekanismien yhdistelymenetelmällä.

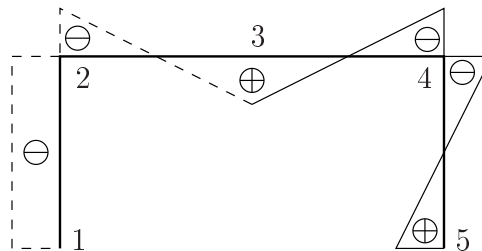
Perusmekanismien lukumäärä on nyt $m = s - n_s = 10 - 6 = 4$. Suoritetaan mekanismien yhdistely taulukossa. Kirjoitetaan perusmekanismeja vastaavat työyhtälöt ensin taulukkoon 5.2 ja yhdistellään sitten mekanismeja mahdollisimman pienen rajakuorman yläraja-arvon saamiseksi. Lopuksi tarkistetaan, että rajakuorman ehdokasta vastaava momenttikuvio toteuttaa myötehdon $|M| \leq M_p$ kaikkialla kehässä. Taulukon 5.2 sarakkeissa on kriittisten leikkausten nivelkiertymät esitetty lukuina. Esimerkiksi



Kuva 5.6 Portaalikehä, $H/V = 1/2$.



Kuva 5.7 Portaalikeyhän perusmekanismit. a) Palkkimekanismi. b) Sivusiirtymämekanismi.



Kuva 5.8 Portaalikeyhän momenttikuvio rajatilassa.

mekanismin a nivelkiertymät leikkauksissa 2, 3 ja 4 ovat $-\theta$, 2θ ja $-\theta$.

Uusien, yhdistettyjen mekanismien nivelkiertymät ja ulkoiset työt saadaan lineaarisina kombinaatioina perusmekanismeista, mutta sisäiset työt on laskettava erikseen jokaiselle mekanismille. Yhdistetyn mekanismin nivelkiertymät ovat

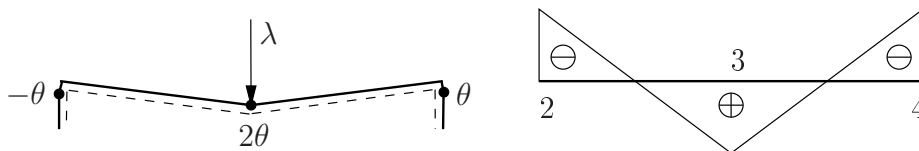
$$\theta_j = \sum_{k=1}^m \alpha_k \theta_{jk}, \quad (5.17)$$

missä α_k ovat kombinoitokertoimet, θ_{jk} ovat perusmekanismien $k = 1, \dots, m$ nivelkiertymät pisteessä j ja m on perusmekanismien lukumäärä. Esimerkiksi mekanismin a tapauksessa $\theta_{2a} = -\theta$, $\theta_{3a} = 2\theta$ ja $\theta_{4a} = -\theta$, ja yhdistetyn mekanismin $e = a + c$ nivelkiertymä pisteessä 2 on $\theta_{2e} = \alpha_a \theta_{2a} + \alpha_c \theta_{2c} = 1 \cdot (-\theta) + 1 \cdot \theta = 0$. Vastaavasti yhdistetyn mekanismin ulkoinen työ voidaan laskea lineaarikombinaationa perusmekanismien ulkoisten töiden lausekkeista kaavalla

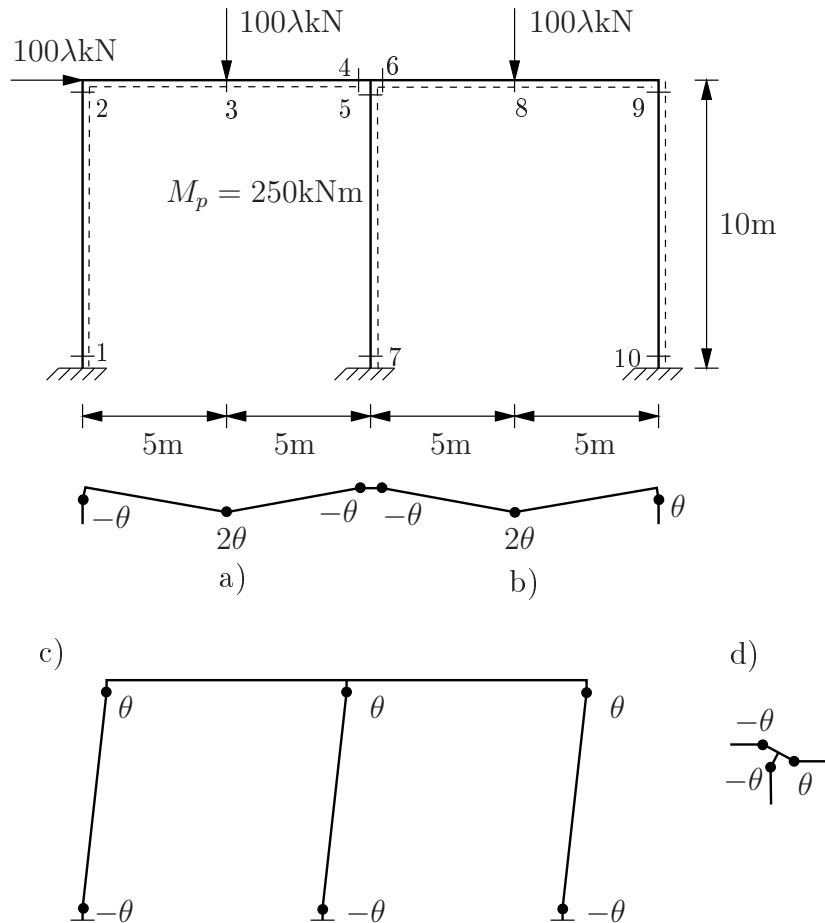
$$W_u = \sum_{k=1}^m \alpha_k W_{uk}, \quad (5.18)$$

missä α_k ovat samat kombinoitokertoimet kuin nivelkiertymiä laskettaessa.

Taulukon 5.2 yhdistetyt mekanismit ovat $e = a + c$, $f = (b + c)$, $g = (b + c) + d$ ja $h = ((b + c) + d) + a$. Esimerkiksi mekanismin e tapauksessa kombinoitokertoimet ovat $\alpha_a = 1$, $\alpha_b = 0$, $\alpha_c = 1$ ja $\alpha_d = 0$.



Kuva 5.9 Portaalikeyhän palkin mekanismi ja momenttikuvio rajatilassa.



Kuva 5.10 Kaksiaukkoisen kehän kriittiset leikkaukset ja perusmekanismit. a) Palkkimekanismi *a*, b) palkkimekanismi *b*, c) sivusiirtymämekanismi *c*, d) nurkkakiertymämekanismi *d*.

Mekanismin virtuaalisen työn yhtälö (VTY) on

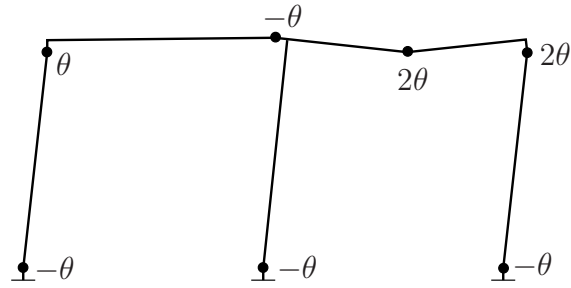
$$W_s = W_u \quad \text{eli} \quad \sum_j |M_{pj}\theta_j| = \lambda \sum_i F_i \delta_i, \quad (5.19)$$

ja siitä ratkaistaan kuormakerroin

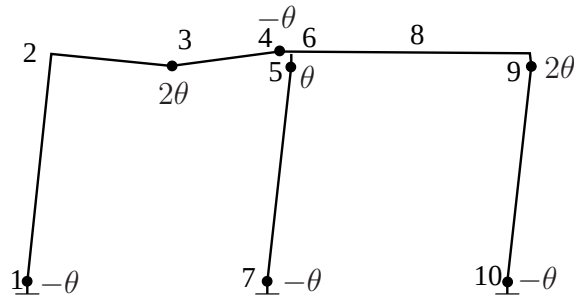
$$\lambda = \frac{\sum_j |M_{pj}\theta_j|}{\sum_i F_i \delta_i}. \quad (5.20)$$

Mekanismeja yhdistelemällä on tarkoitus löytää pienin kerroin λ . Yhdistetyn mekanismin ulkoinen työ W_u on osamekanismien ulkoisten töiden lineaarikombinaatio. Raja-kuormakertoimen λ löytämiseksi mekanismeja yhdistellään siten, että mahdollisimman monta plastista niveltä samalla eliminoiduu (eli W_s pienenee).

Esimerkin tapauksessa sivusiirtymämekanismi antaa pienemmän arvon $\lambda = 1.5$ kuin muut perusmekanismit. Siten on järkevää lähteä liikkeelle mekanismeista *c* ja yhdistellä siihen muita perusmekanismeja. Yhdistelmällä *a* + *c* eliminoiduu nivel pisteessä 2,



Kuva 5.12 Mekanismi $((b + c) + d)$.



Kuva 5.13 Mekanismi $(a + c)$.

ratkaistaan M_2 :

$$M_2 = 750 \text{ kNm} - \frac{2000}{3} \text{ kNm} = 83.33 \text{ kNm}. \quad (5.22)$$

Mekanismin d avulla ratkeaa M_6 :

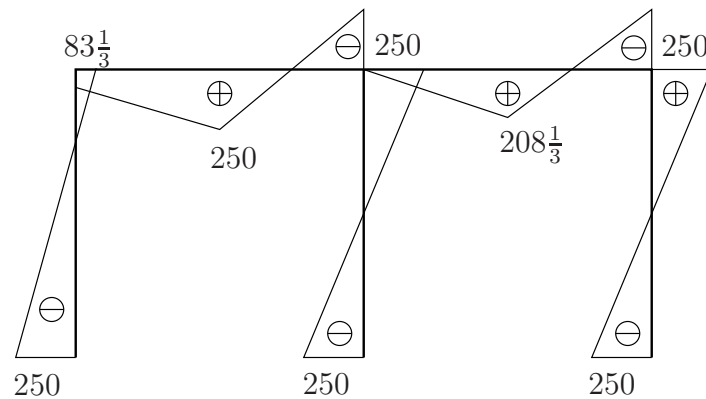
$$(-\theta)M_4 + (-\theta)M_5 + \theta M_6 = 0 \Rightarrow M_6 = -M_p + M_p = 0. \quad (5.23)$$

Mekanismin b avulla saadaan kirjoitettua työyhtälö

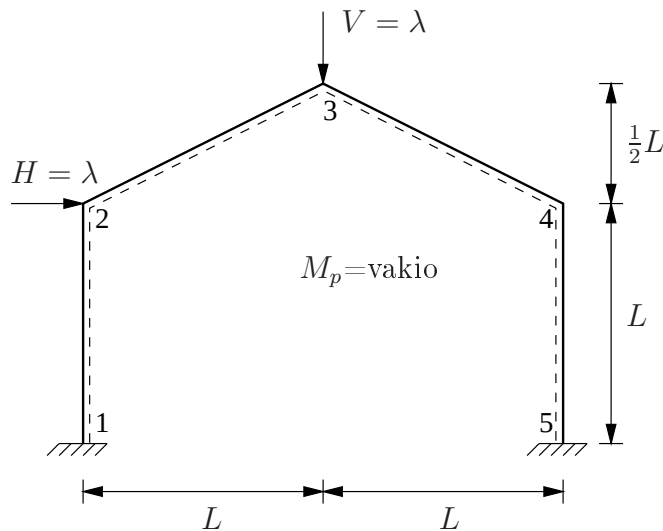
$$(-\theta)M_6 + 2\theta M_8 + \theta M_9 = 500 \cdot \frac{4}{3}\theta, \quad (5.24)$$

ja siitä ratkaistaan momentti M_8 leikkauksessa 8:

$$M_8 = \frac{1}{2} \left(-250 + \frac{2000}{3} \right) \text{ kNm} = 208.33 \text{ kNm}. \quad (5.25)$$



Kuva 5.14 Kaksiaukkoisen kehän momenttikuvio rajatilassa.



Kuva 5.15 Harjakehä.

Taulukko 5.3 Harjakehän mekanismien yhdistely. Perusmekanismit a ja b , yhdistetty mekanismi $a + b$.

	1	2	3	4	5	$\sum M_p \theta $	$\sum F \delta$	λ
a		$-\theta$	2θ	-2θ	θ	$6M_p \theta$	$\lambda L \theta$	$6M_p/L$
b	$-\theta$	θ		$-\theta$	θ	$4M_p \theta$	$\lambda L \theta$	$4M_p/L$
$a + b$	$-\theta$	0	2θ	-3θ	2θ	$8M_p \theta$	$2\lambda L \theta$	$4M_p/L$

Momenttikuvio on esitetty kuvassa 5.14. Kaikkialla on voimassa $|M| \leq M_p$. Siten $\lambda_p = 4/3$ on oikea rajakuormakerroin.

Esimerkki 5.3 Määritetään kuvan 5.15 harjakehän plastinen rajakuorma mekanisminen menetelmällä.

Perusmekanismien lukumäärä $m = s - n_s = 5 - 3 = 2$.

Sauvan 3–4 kiertokeskiö on K_{34} . Kuvassa 5.16b esitetyn kuvion perusteella nähdään, että $\varphi = \theta$ ja $\psi = \theta$. Mekanismin a työyhtälö on

$$M_p[\varphi + (\varphi + \theta) + (\theta + \psi) + \psi] = VL\varphi \quad (5.26)$$

eli

$$6M_p\theta = VL\theta \quad \Rightarrow \quad V = \lambda = 6\frac{M_p}{L}. \quad (5.27)$$

Mekanismin b työyhtälön avulla tulee

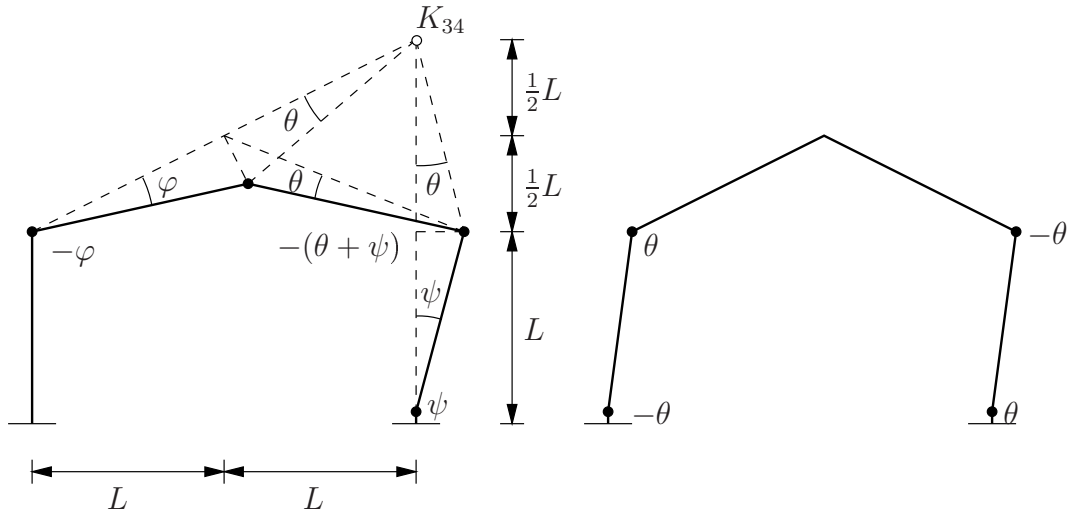
$$4M_p\theta = \lambda L\theta \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4\frac{M_p}{L}. \quad (5.28)$$

Määritetään seuraavaksi harjakehän momenttikuvio. Mekanismin $(a + b)$ perusteella tiedetään jo, että

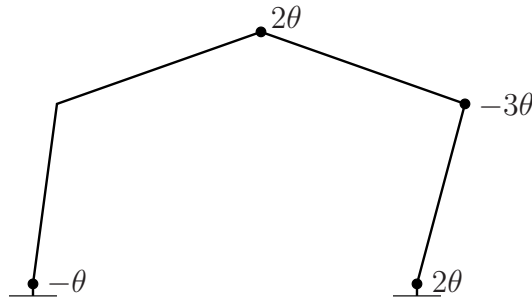
$$M_1 = -M_p, \quad M_3 = M_p, \quad M_4 = -M_p, \quad M_5 = M_p.$$

Momentti M_2 määritetään esim. mekanismin a avulla. Työyhtälöstä

$$(-\theta)M_2 + 2\theta M_3 - 2\theta M_4 + \theta M_5 = \frac{4M_p}{L} \cdot L\theta \quad (5.29)$$



Kuva 5.16 Harjakehän mekanismit. a) Mekanismi a , b) mekanismi b .



Kuva 5.17 Harjakehän mekanismi $(a + b)$.

seuraa

$$(-\theta)M_2 + 2\theta M_p - 2\theta(-M_p) + \theta M_p = 4M_p\theta, \quad (5.30)$$

joten

$$M_2 = (5 - 4)M_p = M_p. \quad (5.31)$$

Koska $|M| \leq M_p$ kaikkialla, on oikea rajakuormakerroin $\lambda_p = 4M_p/L$.

Esimerkki 5.4 Tutkitaan kuvan 5.19 staattisesti määräämättömän palkin plastista rajakuormaa, kun palkilla on tasainen kuorma λq .

Merkitään, että $\theta_1 \equiv \theta$. Tällöin kuvan perusteella

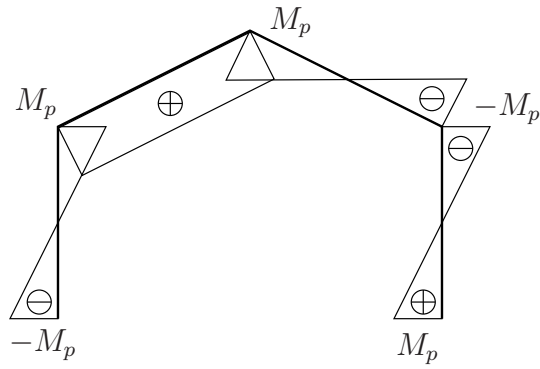
$$\theta_2 = \frac{1}{1 - \xi}\theta. \quad (5.32)$$

Virtuaalisen työn yhtälö (VTY) on nyt

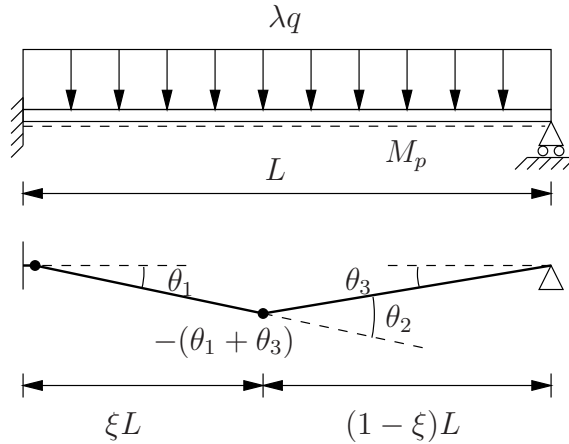
$$\theta M_p + \frac{1}{1 - \xi}\theta M_p = \lambda q \cdot \xi L \theta \cdot \frac{L}{2}, \quad (5.33)$$

josta seuraa

$$\lambda q = \frac{2(2 - \xi)}{\xi(1 - \xi)} \frac{M_p}{L^2}. \quad (5.34)$$



Kuva 5.18 Harjakehän momenttikuvio.



Kuva 5.19 Tasainen kuorma palkilla.

Kuorman ääriarvo saadaan ehdosta

$$\frac{d(\lambda q)}{d\xi} = 0, \quad (5.35)$$

josta seuraa yhtälö

$$\frac{(-2)\xi(1-\xi) - (4-2\xi)(1-2\xi)}{\xi^2(1-\xi)^2} \frac{M_p}{L^2} = 0 \quad (5.36)$$

eli

$$\xi^2 - 4\xi + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-2}. \quad (5.37)$$

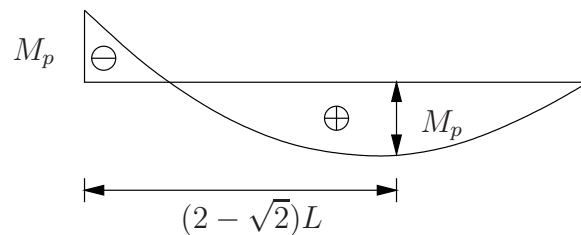
Valitaan alempi juuri $\xi_2 = 2 - \sqrt{2}$. Sijoittamalla ratkaistu ξ kuorman kaavaan tulee

$$(\lambda q)_p = (6 + 4\sqrt{2}) \frac{M_p}{L^2} \approx 11.66 \frac{M_p}{L^2}. \quad (5.38)$$

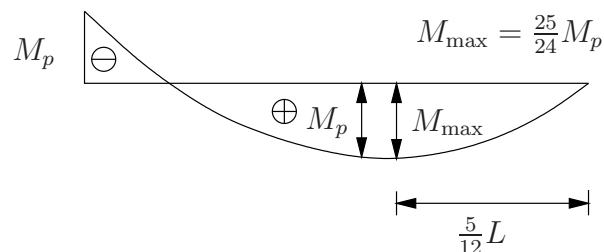
Likimääräinen tapa

Otaksutaan nivel palkin jätteen keskelle. Virtuaalisen työn yhtälöstä seuraa

$$3M_p\theta = \lambda q \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2}\theta \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{12M_p}{qL^2}. \quad (5.39)$$



Kuva 5.20 Palkin tasaisen kuorman aiheuttama momenttikuvio rajatilassa.



Kuva 5.21 Palkin tasaisen kuorman ylärajaratkaisu.

Myötöehdon $|M| \leq M_p$ toteuttava ratkaisu saadaan kertomalla $\lambda = 12M_p/qL^2$ luvulla $24/25$, kuva 5.22. Nivelet katoavat tällöin pisteistä 1 ja 2, ja palkissa ei ole enää mekanismeja. Näin saatu ratkaisu

$$\lambda_p = \frac{24}{25} \cdot 12 \frac{M_p}{qL^2} \approx 11.52 \frac{M_p}{qL^2} \quad (5.40)$$

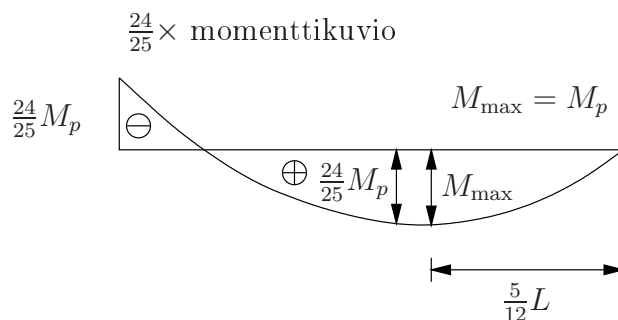
on **alarajaratkaisu**. Todellinen λ_p on välillä

$$11.52 \frac{M_p}{qL^2} < \lambda_p < 12 \frac{M_p}{qL^2}. \quad (5.41)$$

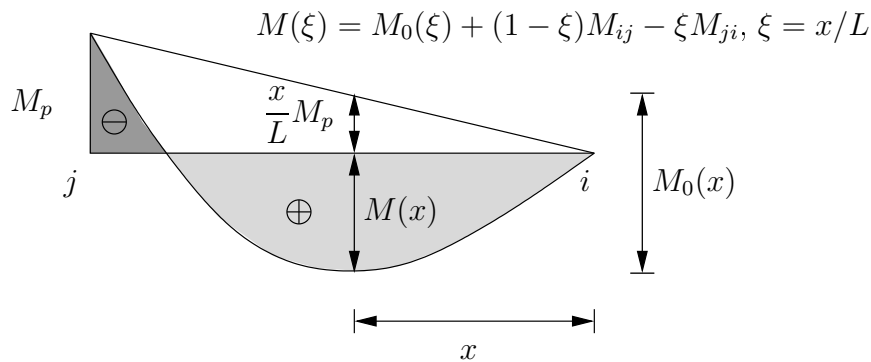
Muunnetaan mekanismeja siten, että nivel on momentin maksimikohdassa ($5/12L$ oikealta tuelta). Tällöin saadaan

$$\lambda \approx 11.66 \frac{M_p}{qL^2}, \quad (5.42)$$

mikä on lähes sama kuin tarkka ratkaisu.



Kuva 5.22 Palkin tasaisen kuorman alarajaratkaisu.



Kuva 5.23 Palkin momenttikuvio tukimomenttikuvion M_1 ja vastaavan staattisesti määrätyn palkin momenttikuvion M_0 avulla.

Vaadittava plastinen momentti momenttikuvion avulla

Rajakuorma $\lambda_p q$ tai vaadittava plastinen momentti M_p voidaan määrittää myös tutkimalla momenttikuvioita, kuva 5.23. Kahden nivelen ja yhden vapausasteen mekanismi syntyy, kun tuella ja pisteessä x momentti on M_p . Merkitään $\xi \equiv x/L$. Tällöin yhtälöstä

$$\frac{x}{L}M_p + M_p = \frac{\lambda q L}{2}x - \frac{\lambda q}{2}x^2 \equiv M_0(x) \quad (5.43)$$

saadaan

$$M_p = \frac{\lambda q L^2}{2} \frac{\xi(1 - \xi)}{1 + \xi}. \quad (5.44)$$

Maksimoidaan täysplastinen momentti $M_p(\xi)$. Maksimin välttämättömästä ehdosta

$$\frac{dM_p}{d\xi} = 0 \quad (5.45)$$

seuraa toisen asteen yhtälö

$$\xi^2 + 2\xi - 1 = 0, \quad (5.46)$$

jonka juuri on

$$\xi = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414, \quad (5.47)$$

ja vaadittava täysplastinen momentti kantamaan kuorma λq on

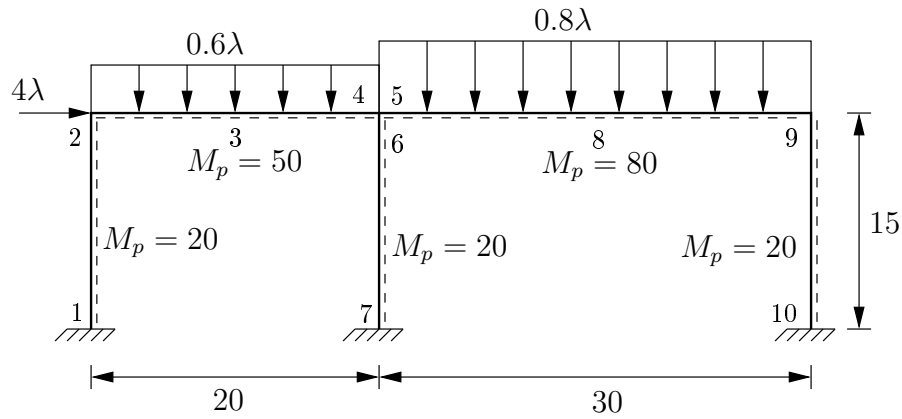
$$M_p = \frac{\lambda q L^2}{6 + 4\sqrt{2}} \approx \frac{\lambda q L^2}{11.66}, \quad (5.48)$$

tai vaihtoehtoisesti plastinen rajakuorma on

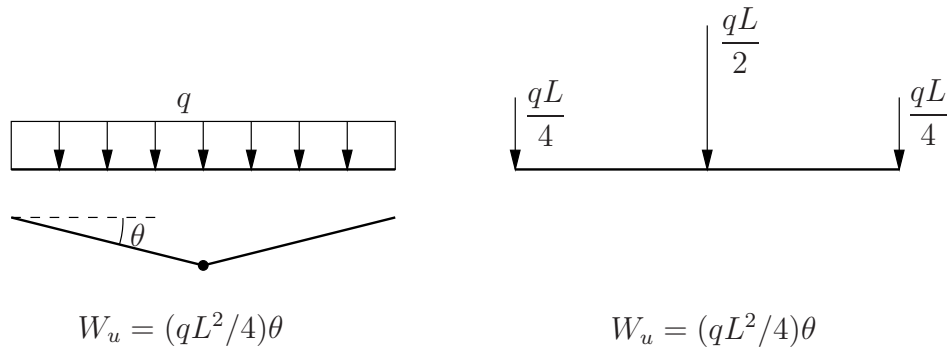
$$\lambda_p q = (6 + 4\sqrt{2}) \frac{M_p}{L^2} \approx 11.66 \frac{M_p}{L^2}. \quad (5.49)$$

Esimerkki 5.5 Määritetään kuvan 5.24 kehän rajakuorma, kun kehällä on pistekuormien lisäksi palkeilla tasaista kuormaa.

Likimääräisessä menetelmässä otaksutaan nivelten muodostuvan tasaisen kuorman kuormittamien palkkien päihin ja (tai) jänteen keskelle. Jos tasainen kuorma q korvataan oheisen kuvan 5.25 tapaan pistekuormilla, on ulkoinen työ kuvan mekanismeissa sama kummassakin tapauksessa.



Kuva 5.24 Kaksiaukkoisella kehällä tasaista kuormaa.



Kuva 5.25 Tasaisen kuorman muuntaminen pistekuormiksi.

Pienimmän rajakuorman antaa kuvan 5.26 mekanismi, jonka VTY:stä

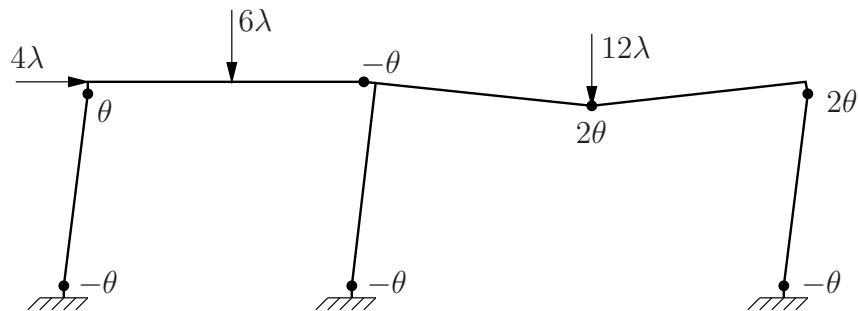
$$20 \cdot 6\theta + 50 \cdot \theta + 80 \cdot 2\theta = 4\lambda \cdot \theta \cdot 15 + 12\lambda \cdot \theta \cdot 15 = 240\lambda\theta \quad (5.50)$$

ratkaistaan

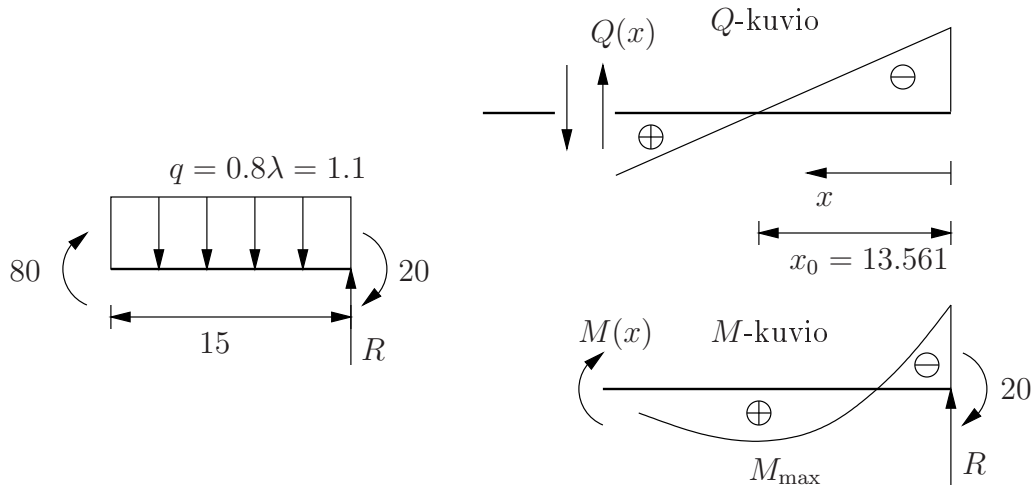
$$\lambda = \frac{330}{240} = \frac{11}{8} = 1.375. \quad (5.51)$$

Tarkastellaan palkkia 5–9. Tukireaktio pisteessä 9 voidaan määrittää muodostamalla momentin tasapainoyhtälö pisteen 8 suhteen:

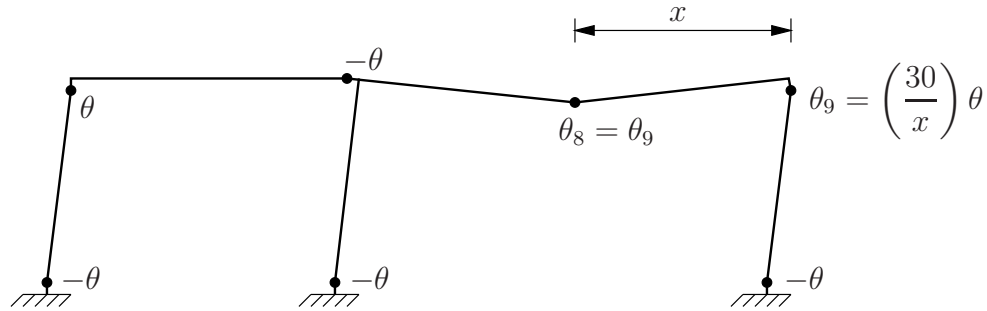
$$R \cdot 15 - 80 - 20 - 1.1 \cdot 15 \cdot \frac{15}{2} = 0 \Rightarrow R \approx 14.9166. \quad (5.52)$$



Kuva 5.26 Kehän ekvivalentit pistekuormat ja rajamekanismi.



Kuva 5.27 Kehän sauvan 5 – 9 leikkausvoima ja momentti.



Kuva 5.28 Kehän rajamekanismi, kun nivel 8 on etäisyydellä x oikealta tuelta.

Leikkausvoima $Q(x)$ on

$$Q(x) = -R + q \cdot x = -14.917 + 1.1x, \quad (5.53)$$

ja leikkausvoima on nolla eli $Q(x) = 0$, kun $x_0 \approx 13.561$.

Taivutusmomentti $M(x)$ palkissa on

$$M(x) = R \cdot x - qx^2/2 - 20. \quad (5.54)$$

Suurin momentin arvo $M_{\max}$ on kohdassa, jossa $dM/dx = Q = 0$ eli $R - qx = 0$. Momentin maksimin kohdaksi ratkaistaan $x_0 = 13.561$ ja

$$M(x_0) = M_{\max} = 81.14 > M_p = 80. \quad (5.55)$$

Alarajaratkaisu saadaan kertomalla $\lambda = 1.375$ luvulla $80/81.14$. Tällöin alaraja-arvio on $\lambda^- = (80/81.14)1.375 = 1.356$. Näin on saatu arvio: $1.356 \leq \lambda_p \leq 1.375$.

Saatua λ_p :n ylärajaa 1.375 voidaan tarkentaa otaksumalla nivel palkissa 5 – 9 kohtaan $x = 13.561$, kuva 5.28. Pisteiden 8 ja 9 kiertymät ovat

$$\theta + \left[\frac{30 - x}{x} \right] \theta = \frac{30}{x} \theta. \quad (5.56)$$

Virtuaalisen työn yhtälöstä ratkaistaan nyt $\lambda = 1.3652$. Tämän jälkeen laskua voidaan jatkaa kuten edellä tehtiin: lasketaan uusi x_0 ja λ jne. Iteraatio suppenee nopeasti kohti tarkkaa ratkaisua.

Tehtävän tarkka ratkaisu ¹ saadaan kuvan 5.28 mekanismin avulla pitämällä nivelen 8 etäisyyttä x pisteestä 9 tuntemattomana. VTY on nyt

$$4\lambda(15 \cdot \theta) + \frac{1}{2}0.8\lambda \cdot 30 \cdot (30 - x)\theta = 20 \cdot 4\theta + 50 \cdot \theta + 80 \cdot \left(\frac{30}{x}\right)\theta + 20 \cdot \left(\frac{30}{x}\right)\theta, \quad (5.57)$$

josta ratkaistaan

$$\lambda = \frac{5}{6} \frac{(300 + 13x)}{(35 - x)x}. \quad (5.58)$$

Ehdosta $d\lambda/dx = 0$ seuraa toisen asteen yhtälö $13x^2 + 600x - 10500 = 0$, jonka nyt kyseeseen tuleva juuri on $x = 13.53232011$. Plastisen rajakuormakertoimen arvo on $\lambda_p = 1.365197$, mikä poikkeaa edellä lasketusta 2. iteraatiokierroksen arvosta $\lambda = 1.3652$ hyvin vähän.

¹Olettaen, että rajamekanismin tyyppi ei muutu.

Luku 6

Rajakuormamenetelmän peruslauseet

Staattinen lause (alarajalause)

Lause 6.1 Jos löydetään taivutusmomenttijakauma, joka on tasapainossa ulkoisen kuormituksen kanssa ja toteuttaa myötöehdon $|M| \leq M_p$ kaikkialla, niin kuorma on enintään rajakuorman suuruinen. (Kaikkien kuormien oletetaan muuttuvan kertoimien λ mukana, t.s. kuormien suhteet pysyvät vakioina).

Todistus. Olkoon todellinen rajakuormakerroin λ_p . Merkitään, että rajamekanismin nivelkiertymät ovat θ_j , nivelet ovat paikoissa h_j ja rajamekanismin (rajakuorman antava mekanismi) liiketilaa vastaavat kuormien F_i suuntaiset siirtymät ovat Δ_i . Virtuaalisen työn yhtälö (VTY) kirjoitetaan muodossa

$$\lambda_p \sum_i F_i \Delta_i = \sum_j M_{pj} \theta_j. \quad (6.1)$$

Koska $\lambda_p > 0$ ja $\sum M_{pj} \theta_j > 0$, on $\sum F_i \Delta_i > 0$ (M_{pj} :n ja θ_j :n merkki on sama).

Tarkastellaan mielivaltaisella kertoimen λ arvolla momenttijakaumaa M_j , joka toteuttaa tasapainoehdot ja myötöehdon

$$-|M_{pj}| \leq M_j \leq |M_{pj}|. \quad (6.2)$$

Rajamekanismin $(\theta_j, h_j, \Delta_i)$ avulla muodostettu VTY on

$$\lambda \sum_i F_i \Delta_i = \sum_j M_j \theta_j. \quad (6.3)$$

Kaavojen (6.1) ja (6.3) avulla saadaan

$$(\lambda_p - \lambda) \sum_i F_i \Delta_i = \sum_j (M_{pj} - M_j) \theta_j. \quad (6.4)$$

Koska jokainen termi $M_{pj} \theta_j$ on positiivinen ja $-|M_{pj}| \leq M_j \leq |M_{pj}|$, on kaavan (6.4) oikea puoli positiivinen tai nolla. Siten $\lambda_p \geq \lambda$.

Seurauslause. Rajakuorman arvo ei pienene, jos rakenteen jonkin osan lujuutta kasvatetaan. Alkuperäisen rakenteen plastista rajatilaa ($\lambda = \lambda_{p1}$) vastaava momenttijakauma toteuttaa muunnetun (vahvistetun) rakenteen tasapaino- ja myötöehdon kertoimen λ arvolla λ_{p1} . Siten $\lambda_{p1} \leq \lambda_{p2}$.

Kinemaattinen lause (ylärajalause)

Lause 6.2 *Mielivaltaisen mekanismin virtuaalisen työn yhtälön avulla laskettu rajakuorma on vähintään todellisen rajakuorman suuruinen.*

Todistus. Merkitään, että otaksutun mekanismin nivelkiertymät, nivelten paikat ja vastaavat plastiset momentit ovat θ_j , h_j ja M_{pj} sekä kuormia F_i vastaavat mekanismin siirtymät ovat Δ_i . Kuormakerroin λ määritetään VTY:n avulla:

$$\lambda \sum_i F_i \Delta_i = \sum_j M_{pj} \theta_j, \quad (6.5)$$

missä $\sum F_i \Delta_i$ on positiivinen, koska λ on positiivinen ja jokainen $M_{pj} \theta_j$ on positiivinen.

Todellista rajakuormaa $\lambda_p F_i$ vastaavat momentit M_j pisteissä h_j toteuttavat myötöehdon

$$-|M_{pj}| \leq M_j \leq |M_{pj}|. \quad (6.6)$$

Muodostetaan kuormia $\lambda_p F_i$ vastaava VTY:

$$\lambda_p \sum_i F_i \Delta_i = \sum_j M_j \theta_j. \quad (6.7)$$

Kaavojen (6.5) ja (6.7) avulla saadaan yhtälö

$$(\lambda - \lambda_p) \sum_i F_i \Delta_i = \sum_j (M_{pj} - M_j) \theta_j. \quad (6.8)$$

Koska kaavan (6.8) oikea puoli on positiivinen, on $\lambda \geq \lambda_p$.

Seurauslause. Rajakuorma ei suurene, jos rakenteen jonkin osan lujuutta (M_p) pienennetään.

Kuormakerroin λ on

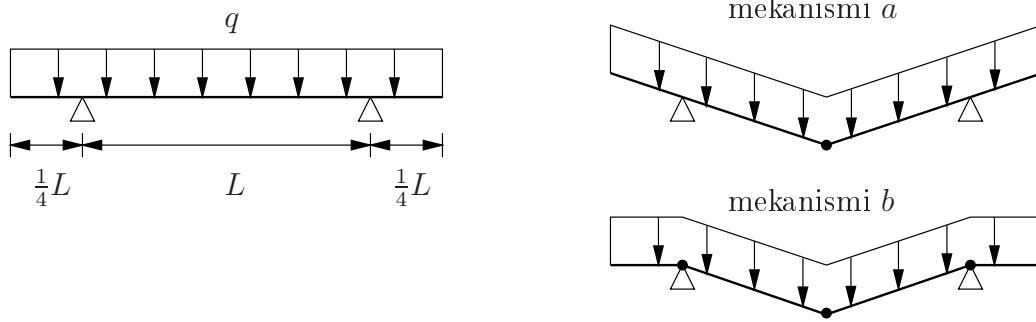
$$\lambda = \frac{\sum M_{pj} \theta_j}{\sum F_i \Delta_i}. \quad (6.9)$$

Alkuperäisen rakenteen rajatilaa ($\lambda = \lambda_{p1}$) vastaava mekanismi antaa muunnetun rakenteen työyhtälön avulla pienemmän tai yhtäsuuren ylärajan kuin λ_{p1} . Siten $\lambda_{p2} \leq \lambda_{p1}$.

Ylärajalauseen todistuksessa ei edellytetä, että taivutusmomenttijakauma on tasapainossa ulkoisen kuorman kanssa. Kuvan 6.1 palkin tapauksessa mekanismi *a* antaa oikean rajakuorman $q_p = 10\frac{2}{3}M_p/L^2$. Mekanismi *b* antaa rajakuorman ylärajan $q_p = 16M_p/L^2$, vaikka palkin reunaosat eivät olekaan tasapainossa.

Yksikäsitteisyyslause. Jos kuormakerroimen arvolla λ taivutusmomenttijakauma toteuttaa tasapainoehtoa, myötöehdon ja mekanismiehtoa, niin λ on plastisen rajakuormakerroimen suuruinen eli $\lambda = \lambda_p$.

Seurauslause 1. Alkujännitykset eivät vaikuta rajakuorman arvoon.



Kuva 6.1 Ulokkeellisen palkin mekanisme.ja.

Seurauslause 2. Rakenne sortuu kuormitustavasta riippumatta heti, kun momenttijakauma toteuttaa tasapaino-, myötö- ja mekanismiehdon.

Lauseet seuraavat yksikäsitteisyyslauseesta. Myöskään lämpöjännitykset ja tukien painumat eivät vaikuta rajakuorman arvoon.

Esimerkki 6.1 Määritetään paksuudeltaan muuttuvan palkin rajakuorma kinemaattisella menetelmällä ja staattisella menetelmällä.

a) Kinemaattinen menetelmä

Oletetaan, että M_p muuttuu lineaarisesti x :n funktiona eli

$$M_p(\xi) = M_{p0}(1 + \xi), \quad \xi = x/L. \quad (6.10)$$

Kuvan 6.2 mekanismin avulla johdetaan virtuaalisen työn yhtälö

$$\frac{1}{2}\alpha\xi L^2 q = M_{p0}[(1 + \xi)\theta + 2\beta], \quad (6.11)$$

missä

$$\alpha = (1 - \xi)\theta, \quad \text{ja} \quad \beta = \xi\theta. \quad (6.12)$$

Ratkaisemalla työyhtälö (6.11) kuorman q suhteen tulee

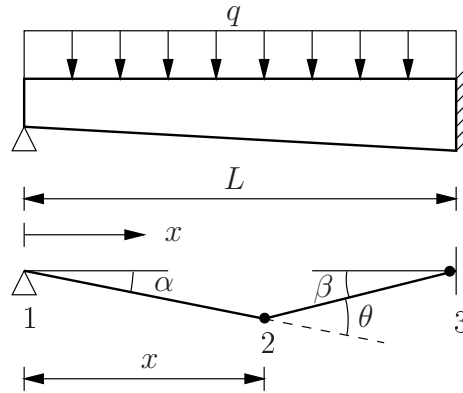
$$q = \frac{2M_{p0}}{L^2} \frac{1 + 3\xi}{\xi - \xi^2}. \quad (6.13)$$

Nivelen paikka ξ ratkeaa ehdosta $dq/d\xi = 0$ eli

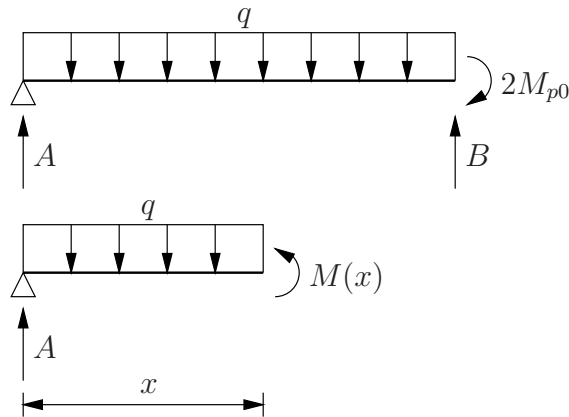
$$3\xi^2 + 2\xi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{3} \quad (\text{tai} \quad \xi = -1). \quad (6.14)$$

Laaduttoman koordinaatin $\xi = \frac{1}{3}$ arvoa vastaava tasaisen kuorman intensiteetti on

$$q = 18 \frac{M_{p0}}{L^2}. \quad (6.15)$$



Kuva 6.2 Paksuudeltaan muuttuva palkki.



Kuva 6.3 Paksuudeltaan muuttuva palkki. Staattinen menetelmä.

b) Staattinen menetelmä

Tukipisteen momentti on $M_3 = -qL^2/8$. Tarkastellaan tilannetta, jossa $M_3 = -2M_{p0}$.

Tukireaktiot toteuttavat tasapainoehdot

$$A + B = qL, \quad (6.16)$$

$$2M_{p0} + qL\frac{L}{2} - BL = 0, \quad (6.17)$$

joista ratkaistaan

$$B = 2\frac{M_{p0}}{L} + q\frac{L}{2}, \quad (6.18)$$

$$A = -2\frac{M_{p0}}{L} + q\frac{L}{2}. \quad (6.19)$$

Taivutusmomentti on

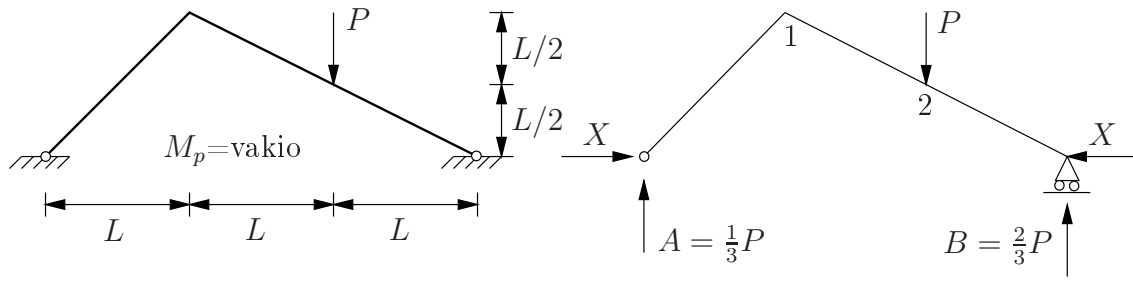
$$M(x) = Ax - qx\frac{x}{2} \quad (6.20)$$

eli

$$M(x) = -2M_{p0}\frac{x}{L} + qx\frac{L}{2} - q\frac{x^2}{2}. \quad (6.21)$$

Asetetaan

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{dM_p}{dx} \Rightarrow \frac{1}{2}qL - qx - 2\frac{M_{p0}}{L} = \frac{M_{p0}}{L}, \quad (6.22)$$



Kuva 6.4 Kerran staattisesti määräämätön kehä.

josta ratkaistaan

$$x = \frac{L}{2} - 3 \frac{M_{p0}}{qL}, \quad (6.23)$$

ja saadaan ko. pisteessä taivutusmomentti

$$M \left(\frac{L}{2} - 3 \frac{M_{p0}}{qL} \right) = \frac{1}{8} qL^2 - M_{p0} + \frac{3}{2} \frac{M_{p0}^2}{qL^2}. \quad (6.24)$$

Myötömomentti kohdassa

$$x = \frac{L}{2} - 3 \frac{M_{p0}}{qL} \equiv b \quad (6.25)$$

on

$$M_p = \frac{3}{2} M_{p0} - 3 \frac{M_{p0}^2}{qL^2}. \quad (6.26)$$

Koska on oltava voimassa $M(b) \leq M_p(b)$, saadaan ehto

$$(qL^2)^2 - 20qL^2 M_{p0} + 36M_{p0}^2 \leq 0, \quad (6.27)$$

josta seuraa sama kuorman arvo kuin edellä mekanismimenetelmällä

$$q_p = 18 \frac{M_{p0}}{L^2}, \quad (6.28)$$

joten saatiin tarkka tulos.

Esimerkki 6.2 Sovelletaan alarajaratkaisua kuvan 6.4 keuhän.

Valitaan kuvan 6.4 mukainen staattisesti määrätty perusmuoto. Taivutusmomentit kriittisissä leikkauksissa 1 ja 2 ovat M_1 ja M_2 , joille ovat voimassa tasapainoehdot

$$M_1 = \frac{1}{3} PL - XL \quad (6.29)$$

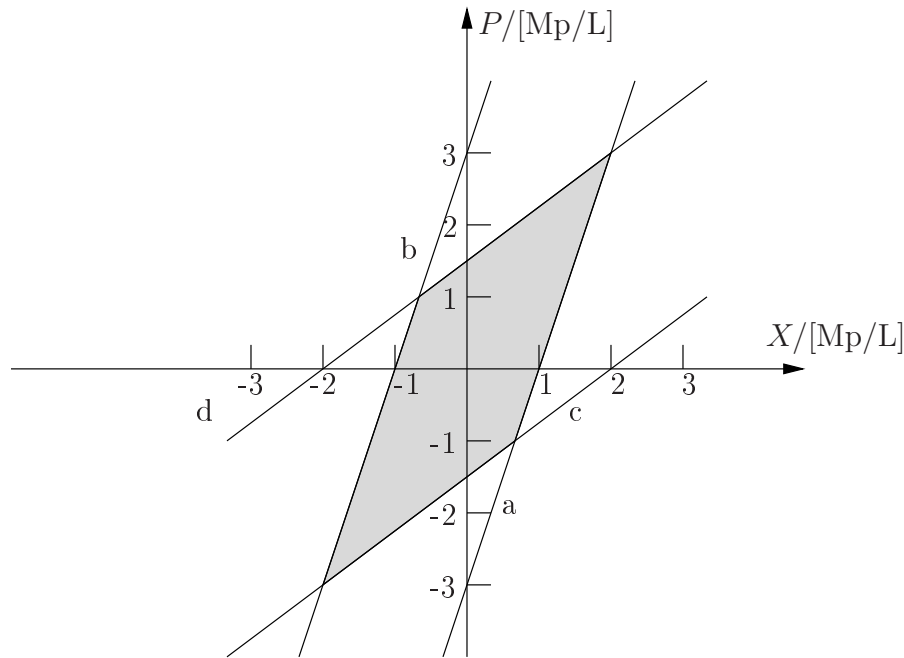
ja

$$M_2 = \frac{2}{3} PL - X \frac{L}{2}. \quad (6.30)$$

Myötöehdon $|M| \leq M_p$ perusteella saadaan ehdot

$$\frac{1}{3} PL - XL \geq -M_p \Rightarrow P \geq -3 \frac{M_p}{L} + 3X, \quad (6.31)$$

$$\frac{1}{3} PL - XL \leq M_p \Rightarrow P \leq 3 \frac{M_p}{L} + 3X, \quad (6.32)$$



Kuva 6.5 Kehän kuorman sallittu alue.

$$\frac{2}{3}PL - \frac{XL}{2} \geq -M_p \Rightarrow P \geq -\frac{3}{2}\frac{M_p}{L} + \frac{3}{4}X, \quad (6.33)$$

$$\frac{2}{3}PL - \frac{XL}{2} \leq M_p \Rightarrow P \leq \frac{3}{2}\frac{M_p}{L} + \frac{3}{4}X, \quad (6.34)$$

jotka (yhtäläisyysmerkin tapauksessa suorat a , b , c ja d kuvassa 6.5) rajaavat voimien P ja X sallitun alueen.

Suurin pistevoiman P arvo, joka toteuttaa myötöehdon on

$$P_p^- = 3\frac{M_p}{L}. \quad (6.35)$$

Esimerkki 6.3 Määritetään *plastisella alustalla olevan plastisen palkin pistekuorman P yläraja ja alaraja.*

Palkin ja alustan saumakohta otaksutaan kitkattomaksi ja vetoakestämättömäksi. Lisäksi otaksutaan läpituokemattomuusehto. Palkin myötömomentti on M_p , ja alustan myötöraja on $\bar{p}$.

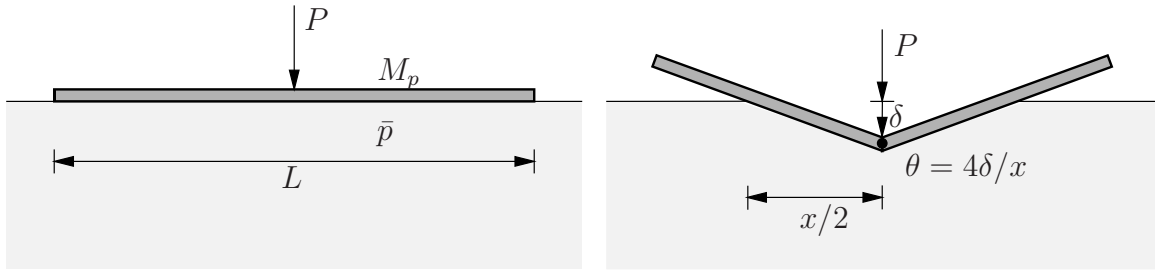
a) Kinemaattinen menetelmä

Otaksutaan kuvan 6.6 mekanismi. Työyhtälö on

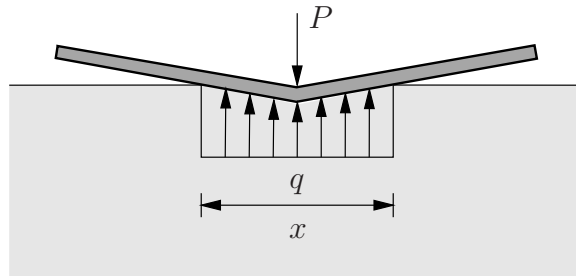
$$P\delta = M_p\theta + 2 \int_0^{x/2} \bar{p}w(s)ds, \quad (6.36)$$

missä w on palkin taipuma. Koska taipuma on lineaarinen x :n funktio, saadaan helposti

$$P\delta = M_p\theta + 2\bar{p}\frac{1}{2}\delta\frac{x}{2}. \quad (6.37)$$



Kuva 6.6 Palkki plastisella alustalla



Kuva 6.7 Staattisen menetelmän otaksuttu pohjapaineen jakauma.

Lausumalla taipuma δ kiertymän θ avulla tulee

$$P\theta \frac{x}{4} = M_p\theta + \bar{p}\theta \frac{x^2}{8}. \quad (6.38)$$

Koska θ on mielivaltainen ja nollasta eriävä virtuaalinen kiertymä, saadaan ratkaistua

$$P = 4\frac{M_p}{x} + \bar{p}\frac{x}{2}. \quad (6.39)$$

Pienin yläraja saadaan ehdosta $dP/dx = 0$ eli

$$\frac{1}{2}\bar{p} - 4\frac{M_p}{x^2} \Rightarrow x = \sqrt{8\frac{M_p}{\bar{p}}}, \quad (6.40)$$

ja rajakuorma on

$$P_p^+ = \sqrt{8M_p\bar{p}}, \quad (6.41)$$

$$\text{jos } M_p \leq \frac{\bar{p}L^2}{8}.$$

b) Staattinen menetelmä

Otaksutaan kuvan 6.7 mukainen pohjapaineen q jakauma.

Palkin tasapainoehdot ovat

$$M = \frac{qx^2}{8} \quad (6.42)$$

ja

$$qx = P. \quad (6.43)$$

Myötöehdot palkille ja alustalle ovat

$$M \leq M_p \quad (6.44)$$

ja

$$q \leq \bar{p}. \quad (6.45)$$

Ehtojen avulla saadaan

$$\frac{qx^2}{8} = \frac{Px}{8} \leq M_p \quad (6.46)$$

eli

$$P \leq 8 \frac{M_p}{x} \quad (6.47)$$

ja

$$qx = P \leq \bar{p}x, \quad (6.48)$$

joten

$$8 \frac{M_p}{x} = \bar{p}x \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{8 \frac{M_p}{\bar{p}}}, \quad (6.49)$$

ja rajakuorman alaraja-arvo on

$$P_p^- = \sqrt{8\bar{p}M_p}. \quad (6.50)$$

Jos $x > L$ eli $M_p > \bar{p}L^2/8$, niin palkki painuu alustaan taipumatta.

Luku 7

Taipumien määrittäminen rajatilassa

Rakenteet täytyy suunnitella riittävän lujiksi kestäämään tietyllä varmuudella odotettavissa olevat kuormitukset. Usein on tarpeen myös varmistaa, etteivät siirtymät kasva haitallisen suuriksi. Rakenteiden on oltava paitsi riittävän lujia myös riittävän jäykkiä. Esimerkiksi, jos kuvan nosturipalkin kiskoja kannattavan kehän jänneväli L muuttuu liian paljon, pyörät jumituvat, ja nosturi ei enää liiku.

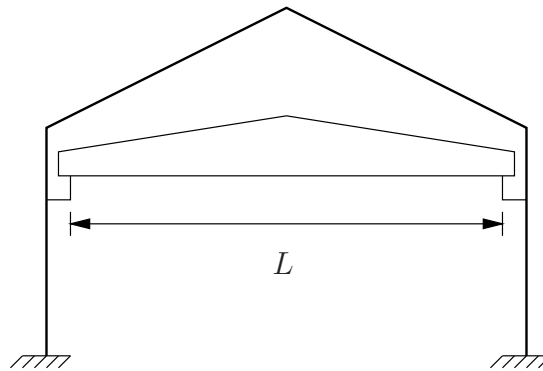
Mekanismin menetelmässä kehän materiaali otaksuttiin jäykäksi ideaaliplastiseksi, ja muodonmuutokset ennen rajatilan saavuttamista jätettiin huomioonottamatta. Todellisuudessa rakenteen täytyy kuitenkin deformoitua ennen rajatilan saavuttamista.

Taipumat voivat pienentää merkittävästi rakenteen rajakuormaa. Erityisesti joustaviin rakenteisiin siirtymät voivat aiheuttaa odottamattoman sortumismekanismin nurjahduksen takia. Taipumien laskennan merkitys kasvaa suunniteltaessa rakenteita korkealujuuksista teräksistä.

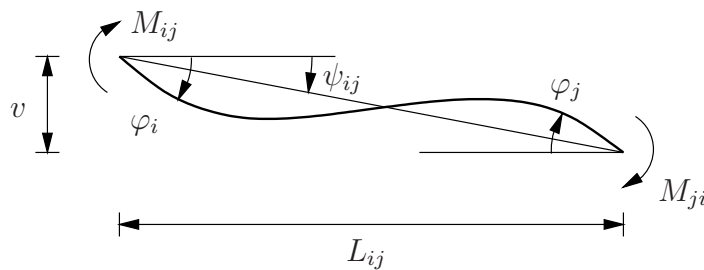
Seuraavassa esitetään yksinkertainen tapa taipumien määrittämiseksi rajatilassa. Rakenteen stabiiliutta ei tutkita tässä yhteydessä. Otaksutaan edelleen kuten mekanismin menetelmässä, että plastiset muodonmuutokset tapahtuvat plastisissa nivelissä, joiden välissä kehäsauva on kimmoinen.

Sauvan $i-j$ päiden kiertymien ja sauvanpäämomenttien välille voidaan johtaa yhteydet

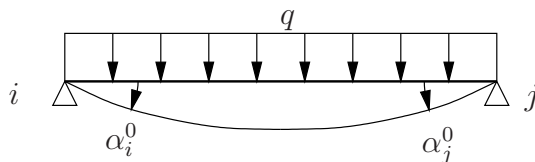
$$\varphi_{ij} = \alpha_{ij}M_{ij} - \beta_{ij}M_{ji} + \psi_{ij} + \alpha_{ij}^0, \quad (7.1)$$



Kuva 7.1 Hallin kehä, joka kannattaa nosturipalkkia.



Kuva 7.2 Sauvanpäämomentit ja kiertymät.



Kuva 7.3 Sauvanpääkiertymät tasaisesta kuormasta.

$$\varphi_{ji} = -\beta_{ji}M_{ij} + \alpha_{ji}M_{ji} + \psi_{ij} + \alpha_{ji}^0, \quad (7.2)$$

missä

$$\psi_{ij} = \frac{v}{L_{ij}} \quad (7.3)$$

on sauvakiertymä ja suure α_{ij}^0 on kuormituksen aiheuttama sauvanpääkiertymä. Jos taivutusjäykkyys EI on vakio ja kuorma q on vakio, niin

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \frac{L_{ij}}{3EI}, \quad \beta_{ij} = \beta_{ji} = \frac{L_{ij}}{6EI}, \quad (7.4)$$

ja

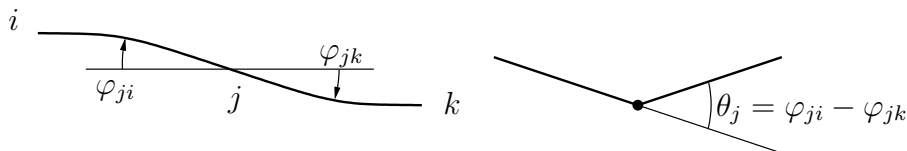
$$\alpha_{ij}^0 = -\alpha_{ji}^0 = \frac{qL_{ij}^3}{24EI}. \quad (7.5)$$

Kaavojen (7.1) ja (7.2) avulla voidaan muodostaa yhteensopivuusehtoja kiertymille. Jos pisteessä j ei ole plastista niveltä, niin on voimassa yhteensopivuusehto

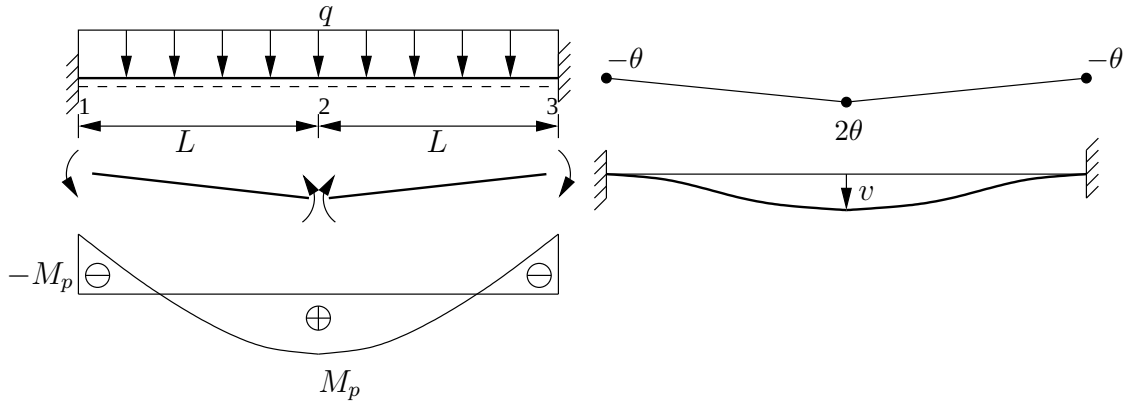
$$\varphi_{ji} = \varphi_{jk}, \quad (7.6)$$

kuva 7.4. Sensijaan jos pisteessä j on plastinen nivel, niin plastisen nivelen kiertymä on

$$\theta_j = \varphi_{ji} - \varphi_{jk}. \quad (7.7)$$



Kuva 7.4 Positiivinen plastinen nivelkiertymä.



Kuva 7.5 Palkin momenttikuvio rajatilassa.

Rajatilan taipumat voidaan määrittää tarkastelemalla tilannetta viimeisen plastisen nivelen syntymishetkellä, kun kehään syntyy mekanismi. Koska ei tiedetä, mikä nivel syntyy viimeisenä, täytyy tutkia eri vaihtoehdot.

Esimerkki 7.1 Määritetään jäykästi tuetun palkin taipuma rajatilassa tasaisesta kuormasta q .

Kuvan 7.5 palkin plastinen rajakuorma saadaan yhtälöstä

$$4M_p\theta = \frac{1}{2}q2L \cdot L\theta, \quad (7.8)$$

ja se on

$$q_p = 4\frac{M_p}{L^2}. \quad (7.9)$$

Jaetaan palkki kahdeksi sauvaksi 1–2 ja 2–3 pituuksiltaan L ja L .

Sauvanpäämomentit ovat

$$M_{12} = -M_p, \quad M_{21} = -M_p, \quad (7.10)$$

$$M_{23} = M_p, \quad M_{32} = M_p. \quad (7.11)$$

Valituilla merkkisopimuksilla on voimassa

$$M_{ij} = M_i, \quad M_{ji} = -M_j, \quad (7.12)$$

missä M_i on momenttikuvioista saatava momentti pisteessä i . Kaavojen (7.1) ja (7.2) mukaiset sauvanpääkiertymät ovat

$$\varphi_{12} = \frac{L}{3EI}(-M_p) - \frac{L}{6EI}(-M_p) + \frac{v}{L} + \frac{4M_p}{L^2} \frac{L^3}{24EI}, \quad (7.13)$$

$$\varphi_{21} = \frac{L}{3EI}(-M_p) - \frac{L}{6EI}(-M_p) + \frac{v}{L} - \frac{4M_p}{L^2} \frac{L^3}{24EI}, \quad (7.14)$$

$$\varphi_{23} = \frac{L}{3EI}(M_p) - \frac{L}{6EI}(M_p) - \frac{v}{L} + \frac{4M_p}{L^2} \frac{L^3}{24EI}, \quad (7.15)$$

$$\varphi_{32} = \frac{L}{3EI}(M_p) - \frac{L}{6EI}(M_p) - \frac{v}{L} - \frac{4M_p}{L^2} \frac{L^3}{24EI}, \quad (7.16)$$

eli

$$\varphi_{12} = \frac{v}{L}, \quad (7.17)$$

$$\varphi_{21} = -\frac{L}{3EI}M_p + \frac{v}{L}, \quad (7.18)$$

$$\varphi_{23} = \frac{L}{3EI}M_p - \frac{v}{L}, \quad (7.19)$$

$$\varphi_{32} = \frac{v}{L}. \quad (7.20)$$

Määritetään siirtymät viimeisen nivelen syntymishetkellä. Koska ei tiedetä, mikä on viimeinen nivel, niin otaksutaan kukin plastinen nivel vuoronperään viimeiseksi.

a) Viimeinen nivel syntyy pisteeseen 1 (ja 3 symmetrian perusteella)

Yhteensopivuusehdon perusteella

$$\varphi_{12} = 0 \quad (\text{tai } \varphi_{32} = 0) \quad (7.21)$$

eli

$$\frac{v}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0. \quad (7.22)$$

Lasketaan edellä saatua tulosta $v = 0$ vastaavat nivelkiertymät kaavalla

$$\theta_j = \varphi_{ji} - \varphi_{jk}, \quad (7.23)$$

kuva 7.4. Yhteensopivuusehdon perusteella tiedetään, että

$$\theta_1 = \theta_3 = 0. \quad (7.24)$$

Pisteessä 2 nivelkiertymä on

$$\theta_2 = \varphi_{21} - \varphi_{23} = -\frac{2L}{3EI}M_p. \quad (7.25)$$

b) Viimeinen nivel syntyy pisteeseen 2

Tämän otaksuman perusteella on voimassa yhteensopivuusehto

$$\varphi_{21} = \varphi_{23} \quad (7.26)$$

juuri ennen plastisen nivelen syntymistä eli

$$-\frac{2L}{3EI}M_p + \frac{2v}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{3} \frac{M_p L^2}{EI}. \quad (7.27)$$

Tätä keskipisteen taipumaa v vastaavat aikaisemmin syntyneiden plastisten nivelten 1 ja 3 kiertymät ovat

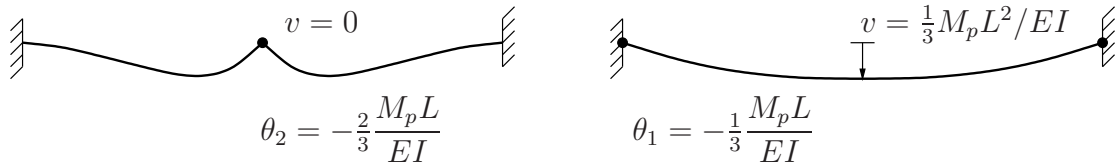
$$\theta_1 = -\varphi_{12} = -\frac{v}{L} = -\frac{1}{3} M_p \frac{L}{EI} \quad (7.28)$$

ja

$$\theta_3 = -\frac{1}{3} M_p \frac{L}{EI}. \quad (7.29)$$

Viimeistä niveltä koskevia otaksumia a ja b vastaavat taipuneet muodot on piirretty kuvaan 7.6. Nähdään, että otaksuma b , jonka mukaan viimeinen plastinen nivel syntyy pisteeseen 2, on oikea ja keskipisteen taipuma rajakuorman $q_p = 4M_p/L^2$ saavuttamisen hetkellä on

$$v = \frac{1}{3} \frac{M_p L^2}{EI} = \frac{1}{12} \frac{q L^4}{EI}. \quad (7.30)$$



Kuva 7.6 Otaksomia a ja b vastaavat palkin taipumat.

Jos plastisten nivelkiertymien tarkistaminen tulee liian hankalaksi, niin voi käyttää seuraavaa siirtymiä koskevaa lausetta:

Lause 7.1 *Jos kuormituksen aikana mikään syntynyt plastinen nivel ei ole palautunut (alkanut kiertyä vastakkaiseen suuntaan), niin suurin siirtymä on oikea, kun siirtymät on määritetty olettaen vuoronperään kunkin plastisen nivelen syntyneen viimeiseksi.*

Mekanismimenetelmän avulla ei saada selville onko jokin nivel syntynyt ja sitten poistunut. Tällainen tapaus on kuitenkin harvinainen. Siten suurin eo. tavalla määritetty siirtymä on tavallisesti oikea.

Tutkitaan seuraavaksi hieman monimutkaisempaa kehärakennetta ja sen siirtymiä rajatilassa.

Esimerkki 7.2 Määritetään kuvan 7.7 kehän pisteen 2 vaakasiirtymä ja pisteen 3 pystysiirtymä plastisessa rajatilassa.

Otaksutaan, että M_p on vakio ja EI on vakio.

Rajakuorman määrittää tässä tapauksessa yhdistetty mekanismi työyhtälöstä

$$5M_p\theta = FL\theta + FL\theta \Rightarrow F_p = \frac{5}{2} \frac{M_p}{L}. \quad (7.31)$$

Palkkimekanismin avulla saadaan puolestaan määritettyä M_2 :

$$M_2(-\theta) + M_3\left(\frac{3}{2}\theta\right) + M_4\left(-\frac{1}{2}\theta\right) = \frac{5}{2}M_p\theta \Rightarrow M_2 = \left(2 - \frac{5}{2}\right)M_p = -\frac{1}{2}M_p. \quad (7.32)$$

Momenttikuvioista voidaan lukea sauvanpäämomentit kullekin sauvalle $i-j$ siten, että

$$M_{ij} = M_i, \quad M_{ji} = -M_j. \quad (7.33)$$

Tässä tapauksessa

$$M_{12} = -M_p, \quad M_{21} = \frac{1}{2}M_p, \quad (7.34)$$

$$M_{23} = -\frac{1}{2}M_p, \quad M_{32} = -M_p, \quad (7.35)$$

$$M_{34} = M_p, \quad M_{43} = M_p, \quad (7.36)$$

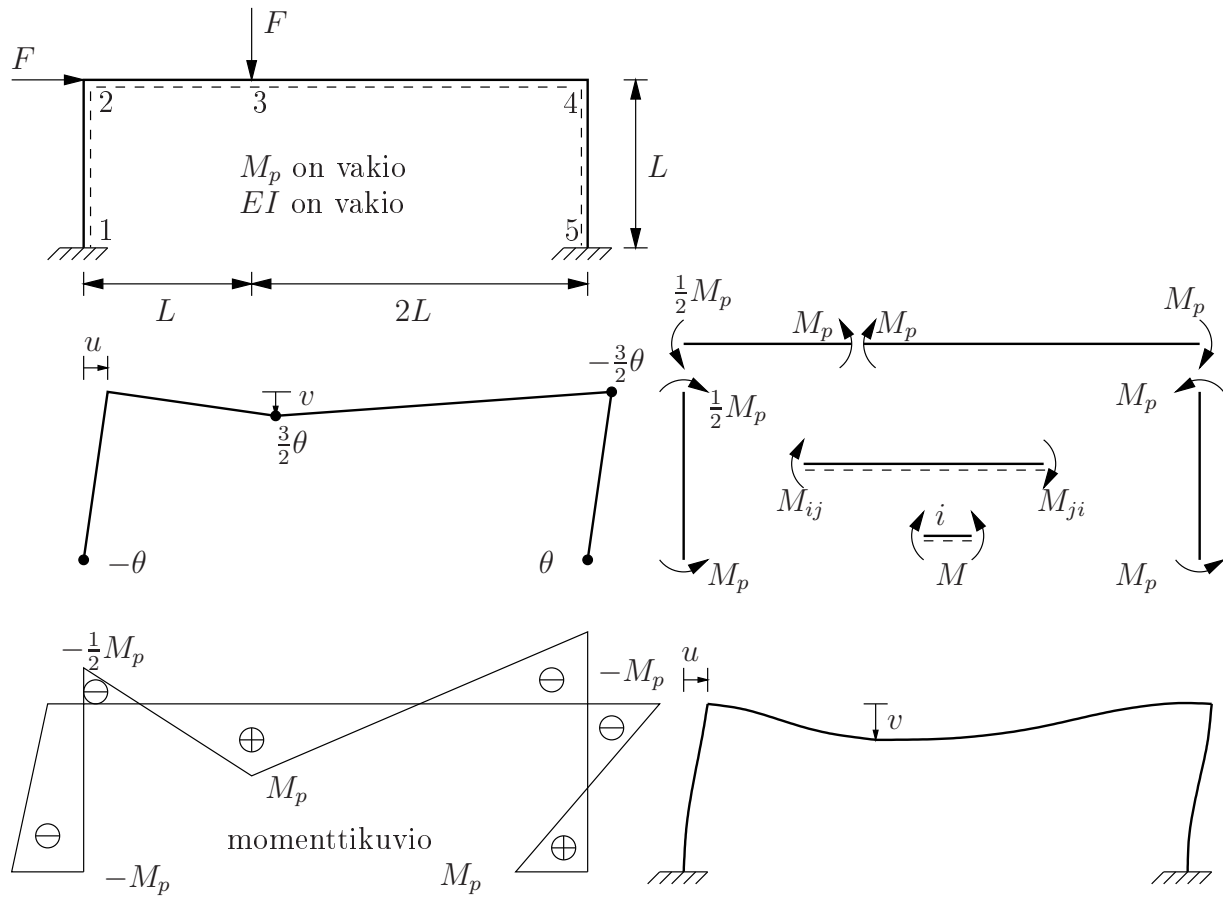
$$M_{45} = -M_p, \quad M_{54} = -M_p. \quad (7.37)$$

Kuvan 7.7 perusteella

$$\psi_{12} = \frac{u}{L}, \quad \psi_{23} = \frac{v}{L}, \quad \psi_{34} = -\frac{v}{2L}, \quad \psi_{45} = \frac{u}{L}. \quad (7.38)$$

Soveltamalla kaavoja (7.1) ja (7.2) tulee

$$\varphi_{12} = \frac{L}{6EI}(-2M_p - \frac{1}{2}M_p) + \frac{u}{L} = -\frac{5}{12}M_p \frac{L}{EI} + \frac{u}{L}, \quad (7.39)$$



Kuva 7.7 Jäykkäkantainen kehä.

$$\varphi_{21} = \frac{L}{6EI}(M_p + M_p) + \frac{u}{L} = \frac{4}{12}M_p \frac{L}{EI} + \frac{u}{L}, \quad (7.40)$$

$$\varphi_{23} = \frac{L}{6EI}(-M_p + M_p) + \frac{v}{L} = \frac{v}{L}, \quad (7.41)$$

$$\varphi_{32} = \frac{L}{6EI}(-2M_p + \frac{1}{2}M_p) + \frac{v}{L} = -\frac{3}{12}M_p \frac{L}{EI} + \frac{v}{L}, \quad (7.42)$$

$$\varphi_{34} = \frac{2L}{6EI}(2M_p - M_p) - \frac{v}{2L} = \frac{4}{12}M_p \frac{L}{EI} - \frac{v}{2L}, \quad (7.43)$$

$$\varphi_{43} = \frac{2L}{6EI}(2M_p - M_p) - \frac{v}{2L} = \frac{4}{12}M_p \frac{L}{EI} - \frac{v}{2L}, \quad (7.44)$$

$$\varphi_{45} = \frac{L}{6EI}(-2M_p + M_p) + \frac{u}{L} = -\frac{2}{12}M_p \frac{L}{EI} + \frac{u}{L}, \quad (7.45)$$

$$\varphi_{54} = \frac{L}{6EI}(-2M_p + M_p) + \frac{u}{L} = -\frac{2}{12}M_p \frac{L}{EI} + \frac{u}{L}. \quad (7.46)$$

Yhteensopivuusehto pisteessä 2

Pisteessä 2 ei ole plastista niveltä. Jatkuvuuden nojalla

$$\varphi_{21} = \varphi_{23} \quad (7.47)$$

eli

$$\frac{4}{12} \frac{M_p L}{EI} + \frac{u}{L} = \frac{v}{L}. \quad (7.48)$$

Pisteissä 1, 3, 4 ja 5 on plastinen nivel yhdistetyssä mekaniismissä. Oletetaan vuoronperään viimeinen nivel pisteisiin 1, 3, 4 ja 5.

a) Nivel 1 viimeinen

Pisteen 1 yhteensopivuusehdosta seuraa

$$\varphi_{12} = 0 \Rightarrow -\frac{5}{12} \frac{M_p L}{EI} + \frac{u}{L} = 0 \Rightarrow u = \frac{5}{12} \frac{M_p L^2}{EI} = \frac{15}{36} \frac{M_p L^2}{EI}, \quad (7.49)$$

joten kaavan (7.48) perusteella saadaan

$$\frac{4}{12} \frac{M_p L}{EI} + \frac{5}{12} \frac{M_p L}{EI} = \frac{v}{L} \Rightarrow v = \frac{9}{12} \frac{M_p L^2}{EI} = \frac{27}{36} \frac{M_p L^2}{EI}. \quad (7.50)$$

Tarkistetaan seuraavaksi plastisten nivelten kiertymät. Plastisen nivelen kiertymän kaavan

$$\theta_i = \varphi_{ik} - \varphi_{il} \quad (7.51)$$

perusteella tulee

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = \varphi_{32} - \varphi_{34} = \left(-\frac{3}{12} - \frac{4}{12} \right) \frac{M_p L}{EI} + \frac{3v}{2L} = \frac{13}{24} \frac{M_p L^2}{EI} > 0, \quad (7.52)$$

$$\theta_4 = \varphi_{34} - \varphi_{45} = \frac{6}{12} \frac{M_p L}{EI} - \frac{v}{2L} - \frac{u}{L} = \left(\frac{12}{24} - \frac{9}{24} - \frac{10}{24} \right) \frac{M_p L}{EI} = -\frac{7}{24} \frac{M_p L}{EI} < 0 \quad (7.53)$$

ja

$$\theta_5 = \varphi_{54} = \left(-\frac{2}{12} + \frac{5}{12} \right) \frac{M_p L}{EI} = \frac{3}{12} \frac{M_p L}{EI} > 0. \quad (7.54)$$

Todetaan, että plastisten nivelten kiertymien merkit ovat sopusoinnussa kehän muodonmuutosten kanssa.

b) Nivel 3 viimeinen

Pisteen 3 yhteensopivuusehdosta seuraa

$$\varphi_{32} - \varphi_{34} = 0 \Rightarrow -\frac{7}{12} \frac{M_p L}{EI} + \frac{v}{L} + \frac{v}{2L} = 0 \Rightarrow v = \frac{14}{36} \frac{M_p L^2}{EI}, \quad (7.55)$$

ja kaavan (7.48) perusteella saadaan

$$\frac{u}{L} = \left(\frac{14}{36} - \frac{4}{12} \right) \frac{M_p L}{EI} \Rightarrow u = \frac{2}{36} \frac{M_p L^2}{EI}. \quad (7.56)$$

Tarkistetaan sitten otaksumaan b liittyen plastiset nivelkiertymät:

$$\theta_1 = -\varphi_{12} = \left(\frac{5}{12} - \frac{2}{36} \right) \frac{M_p L}{EI} = \frac{13}{36} \frac{M_p L}{EI} > 0. \quad (7.57)$$

Tulos ei ole sopusoinnussa kuvan 7.7 mekanismin kanssa. Oletus ei siten ole oikea.

Taulukko 7.1 Kehän siirtymät rajatilassa viimeisen plastisen nivelen mukaisesti.

	a	b	c	d	max
$u/(M_p L^2/36EI)$	15	2	8	6	15
$v/(M_p L^2/36EI)$	27	14	20	18	27

c) Nivel 4 viimeinen

Pisteen 4 yhteensopivuusehdosta seuraa

$$\varphi_{43} - \varphi_{45} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{12} \frac{M_p L}{EI} - \frac{v}{2L} - \frac{u}{L} = 0, \quad (7.58)$$

ja kaavan (7.48) mukaan

$$\frac{4}{12} \frac{M_p L}{EI} - \frac{v}{L} + \frac{u}{L} = 0, \quad (7.59)$$

joten

$$v = \frac{20}{36} \frac{M_p L^2}{EI} \quad \text{ja} \quad u = \frac{8}{36} \frac{M_p L^2}{EI}. \quad (7.60)$$

Otaksuman c perusteella määritetty nivelkiertymä nivelessä 1 on

$$\theta_1 = -\varphi_{12} = \left(\frac{5}{12} - \frac{8}{36} \right) \frac{M_p L}{EI} = \frac{7}{36} \frac{M_p L}{EI} > 0, \quad (7.61)$$

joten oletus c ei ole oikea.

d) Nivel 5 viimeinen

Pisteen 5 yhteensopivuusehdosta seuraa

$$\varphi_5 = \varphi_{54} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{12} \frac{M_p L}{EI} + \frac{u}{L} = 0, \quad (7.62)$$

ja kaavan (7.48) perusteella saadaan

$$\left(\frac{4}{12} + \frac{2}{12} \right) \frac{M_p L}{EI} = \frac{v}{L}, \quad (7.63)$$

joten

$$u = \frac{6}{36} \frac{M_p L^2}{EI} \quad \text{ja} \quad v = \frac{18}{36} \frac{M_p L^2}{EI}. \quad (7.64)$$

Tarkistetaan vielä nivelkiertymät:

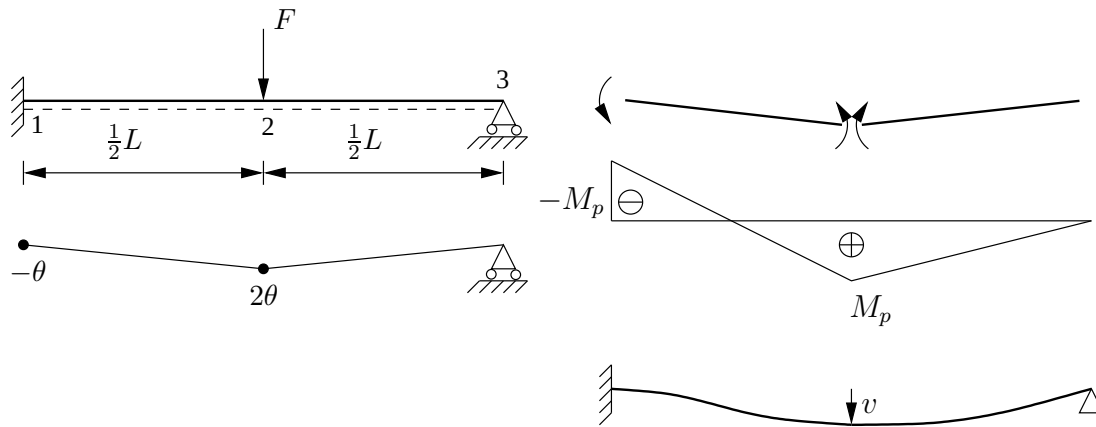
$$\theta_1 = -\varphi_{12} = \left(\frac{5}{12} - \frac{2}{12} \right) \frac{M_p L}{EI} = \frac{3}{12} \frac{M_p L}{EI} > 0, \quad (7.65)$$

joten oletus d on väärä.

Lopputulos on, että viimeinen nivel syntyy pisteeseen 1 ja siirtymät rajatilassa ovat

$$u = \frac{5}{12} \frac{M_p L^2}{EI} \quad \text{ja} \quad v = \frac{9}{12} \frac{M_p L^2}{EI}. \quad (7.66)$$

Kootaan vielä eri otaksumilla saadut tulokset taulukkoon 7.1.



Kuva 7.8 Pistevoiman kuormittama palkki.

Edellisten esimerkkien laskelmat hieman yksinkertaistuvat, jos sauvanpääkiertymien kaavat (7.1) ja (7.2) kirjoitetaan suoraan pisteiden i ja j momenttien avulla muotoon

$$\varphi_{ij} = \beta(2M_i + M_j) + \psi_{ij} + \alpha_{ij}^0, \quad (7.67)$$

$$\varphi_{ji} = -\beta(M_i + 2M_j) + \psi_{ij} + \alpha_{ji}^0, \quad (7.68)$$

missä on merkitty

$$\beta = \frac{L}{6EI}. \quad (7.69)$$

Esimerkki 7.3 Määritetään vasemmasta päästä jäykästi tuetun ja oikeasta päästä nivelöidyn palkin taipuma jänteen keskellä vaikuttavasta pistevoimasta F plastisessa rajatilassa.

Kuvan 7.8 palkin plastinen rajakuorma määritetään virtuaalisen työn yhtälöstä

$$3M_p\theta = F\frac{1}{2}L\theta, \quad (7.70)$$

josta seuraa

$$F_p = 6\frac{M_p}{L}. \quad (7.71)$$

Jaetaan palkki jälleen osiin 1 – 2 ja 2 – 3, joiden pituudet ovat $\frac{1}{2}L$. Osien jäykän kappaleen kiertymät ovat

$$\psi_{12} = \psi_{21} = \frac{2v}{L}, \quad \psi_{23} = -\frac{2v}{L}. \quad (7.72)$$

Tässä tapauksessa $\alpha_{ij}^0 = 0$. Merkitään $\beta = \frac{L}{12EI}$, koska osasauvojen pituus on nyt $L/2$.

Kaavojen (7.67) ja (7.68) mukaiset sauvanpääkiertymät ovat

$$\varphi_{12} = \beta(-2M_p + M_p) + \frac{2v}{L} = -\beta M_p + \frac{2v}{L}, \quad (7.73)$$

$$\varphi_{21} = -\beta(-M_p + 2M_p) + \frac{2v}{L} = -\beta M_p + \frac{2v}{L}, \quad (7.74)$$

$$\varphi_{23} = \beta(2M_p) - \frac{2v}{L} = 2\beta M_p - \frac{2v}{L}. \quad (7.75)$$

Määritetään siirtymät viimeisen nivelen syntymishetkellä. Otaksutaan kukin plastinen nivel vuoronperään viimeiseksi.

a) Viimeinen nivel syntyy pisteeseen 1

Yhteensopivuusehdon

$$\theta_1 = -\varphi_{12} = 0 \quad (7.76)$$

perusteella tulee

$$-\beta M_p + \frac{2v}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}\beta M_p L \quad (7.77)$$

tai

$$v = \frac{1}{24} \frac{M_p L^2}{EI}. \quad (7.78)$$

Tarkistetaan jo syntyneen nivelen 2 nivelkiertymä

$$\begin{aligned} \theta_2 = \varphi_{21} - \varphi_{23} &= -\beta M_p + \frac{2v}{L} - 2\beta M_p + \frac{2v}{L} \\ &= -\beta M_p + \beta M_p - 2\beta M_p + \beta M_p = -\beta M_p < 0, \end{aligned} \quad (7.79)$$

joten oletus viimeisen nivelen syntymisestä leikkaukseen 1 ei ilmeisesti ole oikea.

b) Viimeinen nivel syntyy pisteeseen 2

Tämän otaksuman perusteella on voimassa juuri ennen plastisen nivelen syntymistä yhteensopivuusehto

$$\theta_2 = \varphi_{21} - \varphi_{23} = 0 \quad (7.80)$$

eli

$$-\beta M_p + \frac{2v}{L} - 2\beta M_p + \frac{2v}{L} = 0, \quad (7.81)$$

josta seuraa

$$v = \frac{3}{4}\beta M_p L = \frac{3}{48} \frac{M_p L^2}{EI}. \quad (7.82)$$

Tätä keskipisteen taipumaa v vastaa aikaisemmin syntyneen plastisen nivelen 1 kiertymä

$$\theta_1 = -\varphi_{12} = \beta M_p - \frac{2v}{L} = -\frac{1}{2}\beta M_p < 0, \quad (7.83)$$

joten otaksuma b on ilmeisesti oikea ja palkin taipuma plastisessa rajatilassa on

$$v = \frac{9}{144} \frac{M_p L^2}{EI}. \quad (7.84)$$

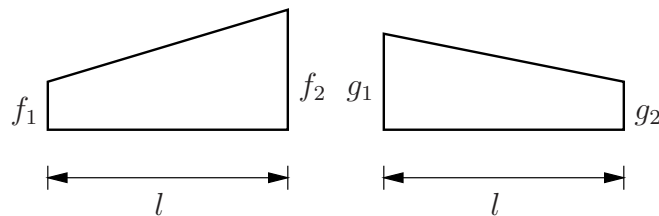
Virtuaalisen voiman periaate

Kehärakenteen taipumat rajatilassa voidaan määrittää myös virtuaalisten voimien periaatteella. Asettamalla kehälle kysytyn siirtymän δ suuntainen virtuaalinen (ajateltu) yksikkökuorma saadaan työyhtälö

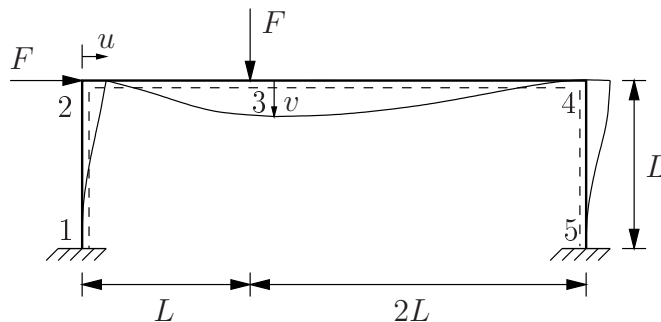
$$\tilde{1}\delta = \int \tilde{M} \frac{M}{EI} ds + \sum \tilde{M}_i \theta_i, \quad (7.85)$$

missä viimeinen termi tulee plastisista nivelistä. Virtuaalisen voimatilan $\tilde{M}$ tulee toteuttaa tasapainoyhtälöt. Virtuaalinen momenttijakauma $\tilde{M}$ voidaan valita siten, että plastisissa nivelissä $\tilde{M}_i = 0$. Kun kehän siirtymät on määritetty soveltamalla kaavaa (7.85), nivelen k kiertymä θ_k voidaan laskea kaavasta

$$\tilde{M}_k \theta_k = \delta - \int \tilde{M} \frac{M}{EI} ds \quad (7.86)$$



Kuva 7.9 Lineaariset funktiot f ja g .



Kuva 7.10 Portaalikeyhän siirtymät.

valitsemalla nyt sellainen virtuaalinen voimatila $\tilde{M}$, että $\tilde{M}_i = 0$, kun $i \neq k$, δ on virtuaalisen yksikkövoiman suuntainen siirtymä.

Integraalin $\int_0^l f(s)g(s)ds$ laskemista varten on olemassa valmiita taulukoita. Jos f ja g ovat lineaarisia pituuskoordinaatin funktioita

$$f(\xi) = (1 - \xi)f_1 + \xi f_2, \quad (7.87)$$

ja

$$g(\xi) = (1 - \xi)g_1 + \xi g_2, \quad (7.88)$$

missä $\xi = s/l$ ja l on integroimisvälin pituus kuten kuvassa 7.9, niin funktioiden tulo integraaliksi tulee

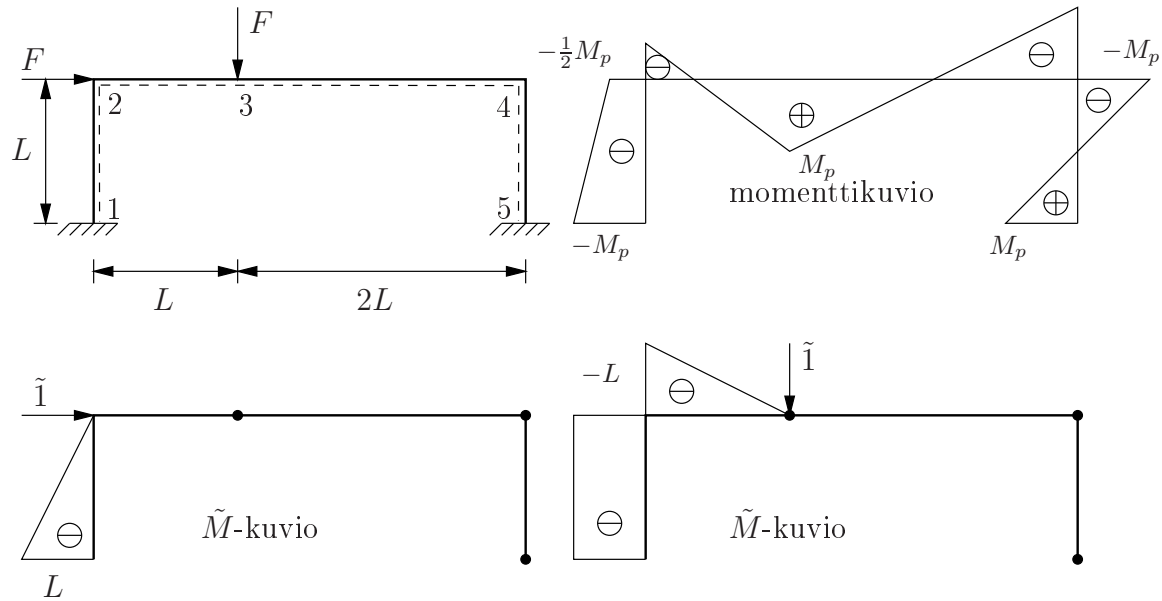
$$\int_0^l f(s)g(s)ds = \frac{l}{6}[f_1(2g_1 + g_2) + f_2(g_1 + 2g_2)]. \quad (7.89)$$

Esimerkki 7.4 Määritetään uudelleen jäykkäkantaisen kehän taipumat rajatilassa virtuaalisten voimien periaatteen avulla.

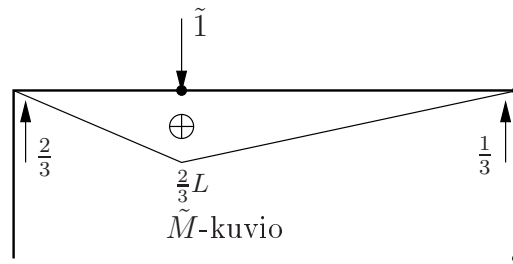
Kuvan 7.10 kehän pisteen 2 vaakasiirtymä on u ja pisteen 3 pystysiirtymä on v . Otaksutaan, että plastinen nivel 1 syntyy viimeisenä. Valitaan kuvan 7.11 virtuaalinen voimatila (uloke 1 – 2 kantaa kuorman $\tilde{1}$). Nivelpisteissä 3, 4 ja 5 $\tilde{M}_i = 0$. Tällöin saadaan kuvien 7.11a ja 7.11b jakaumilla ja integraalikaavalla (7.89)

$$EIu = \int \tilde{M}M ds = \frac{L}{6}(-L)(-2M_p - \frac{1}{2}M_p) = \frac{5}{12}M_p L^2. \quad (7.90)$$

Siirtymän v määrittämiseksi asetetaan pisteeseen 3 virtuaalinen ykkösvoima kuvassa 7.11c. Kuvan 7.11c jakauma $\tilde{M}$ toteuttaa tasapainoyhtälöt ja ehdot $\tilde{M}_3 = \tilde{M}_4 = \tilde{M}_5 = 0$.



Kuva 7.11 Portaalikehän momenttikuviot.



Kuva 7.12 Portaalikehän virtuaalinen momentti pisteen 3 yksikkökuormasta.

Kaavan (7.85) perusteella saadaan

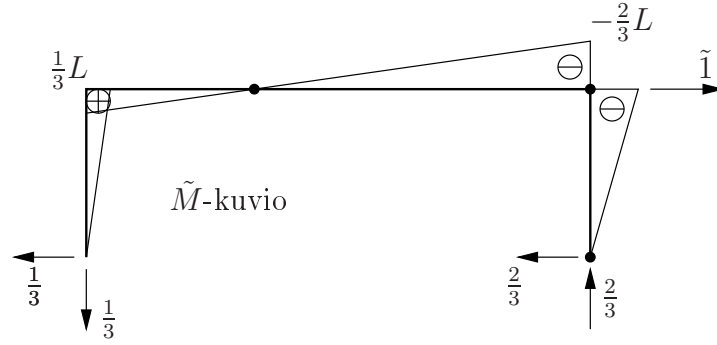
$$\begin{aligned}
 EIV &= \int \tilde{M} M ds \\
 &= \frac{L}{6} [(-L)(-2M_p - \frac{1}{2}M_p) + (-L)(-M_p - M_p)] \\
 &\quad + \frac{L}{6} [(-L)(-M_p + M_p)] \\
 &= \frac{9}{12} M_p L^2.
 \end{aligned} \tag{7.91}$$

Nivelkiertymät pisteissä 1 ja 2 ovat $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

Kiertymän θ_3 määrittämiseksi valitaan kuvan 7.12 voimatila $\tilde{M}$, joka toteuttaa ehdot $\tilde{M}_3 \neq 0$, $\tilde{M}_4 = \tilde{M}_5 = 0$.

Kaavan (7.86) mukaisesti

$$\frac{2}{3} L \theta_3 = \frac{9}{12} \frac{M_p L^2}{EI} - \int \tilde{M} \frac{M}{EI} ds, \tag{7.92}$$



Kuva 7.13 Portaalikehän virtuaalinen momentti pisteen 4 yksikkökuormasta.

missä

$$\begin{aligned} \int \tilde{M} M ds &= \frac{L}{6} \left(\frac{2}{3} L \right) \left(-\frac{1}{2} M_p + 2 M_p \right) \\ &\quad + \frac{2L}{6} \left(\frac{2}{3} L \right) (2 M_p - M_p) \\ &= \left(\frac{3}{18} + \frac{4}{18} \right) M_p L^2 = \frac{7}{18} M_p L^2, \end{aligned} \quad (7.93)$$

joten

$$\theta_3 = \left(\frac{27}{24} - \frac{21}{36} \right) M_p \frac{L}{EI} = \frac{13}{24} M_p \frac{L}{EI} > 0. \quad (7.94)$$

Kuvan 7.13 virtuaalisen voimatilan valinnalla saadaan kirjoitettua yhtälö

$$\tilde{1} u_4 = \int \tilde{M} \frac{M}{EI} ds + \tilde{M}_4 \theta_4, \quad (7.95)$$

mistä seuraa

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} L \theta_4 &= -\frac{5}{12} \frac{M_p L^2}{EI} + \frac{L}{6} \left(\frac{L}{3} \right) (-M_p - M_p) \frac{1}{EI} + \frac{L}{6} \left(\frac{L}{3} \right) (-M_p + M_p) \frac{1}{EI} \\ &\quad + \frac{2L}{6} \left(-\frac{2L}{3} \right) (M_p - 2M_p) \frac{1}{EI} + \frac{L}{6} \left(-\frac{2}{3} L \right) (-2M_p + M_p) \frac{1}{EI}, \end{aligned} \quad (7.96)$$

ja kiertymälle tulee arvo

$$\theta_4 = -\frac{7}{24} \frac{M_p L}{EI} < 0. \quad (7.97)$$

Kuvan 7.14 voimasysteemillä saadaan virtuaalisen työn yhtälö

$$\tilde{1} u_4 = \int \tilde{M} \frac{M}{EI} ds + \tilde{M}_5 \theta_5, \quad (7.98)$$

mistä seuraa

$$L \theta_5 = \frac{5}{12} \frac{M_p L^2}{EI} - \frac{L}{6} (L) (-M_p + 2M_p) \frac{1}{EI}, \quad (7.99)$$

joten

$$\theta_5 = \frac{3}{12} \frac{M_p L}{EI} > 0. \quad (7.100)$$

Sitten otaksutaan, että nivel 3 on viimeinen ja jatketaan laskua edellä esitetyllä tavalla.



Kuva 7.14 Portaali-kehän eräs virtuaalinen momenttijakauma pisteen 4 yksikkökuormasta.

Luku 8

Plastinen momentinjakomenetelmä

Plastinen momentinjakomenetelmä perustuu alarajalauseeseen. Palkille tai kehälle määritetään momenttijakauma, joka on tasapainossa ulkoisen kuorman kanssa. Menetelmällä voidaan määrittää annetun rakenteen rajakuorma tai mitoittaa rakenne annetulle kuormitukselle.

Rakenteen analysoinnissa valitaan ensin tasapainoehdot toteuttava momenttijakauma. Jos myötöehtoa ei rikota, niin momenttijakaumaa vastaava kuorma on rajakuorman alaraja. Seuraavassa vaiheessa pyritään pienentämään itseisarvoltaan suurinta momenttia pitäen samalla tasapainoehdot voimassa.

Analysoinnissa momentinjakomenetelmä ei ole ehkä yhtä kätevä kuin mekanismimenetelmä. Sen sijaan se on hyödyllinen rakenteiden mitoituksessa.

Seuraavassa tarkastelussa otaksutaan, että:

- kehän sauvat liittyvät toisiinsa suorassa kulmassa,
- kuormat vaikuttavat solmuissa tai jänteen keskellä,
- plastiset nivelet syntyvät sauvojen päihin tai keskelle.

Tarkastellaan aluksi kuvan 8.1 sauvaa AB , jonka jänteen keskellä on pistekuorma P . Kuvan perusteella saadaan yhtälö

$$\frac{PL}{4} = \frac{1}{2}(M_{BA} - M_{AB}) + M_C. \quad (8.1)$$

Sauvan AB momentti laaduttoman koordinaatin $s = x/L$ funktiona välillä $s \in [0, \frac{1}{2}]$ on

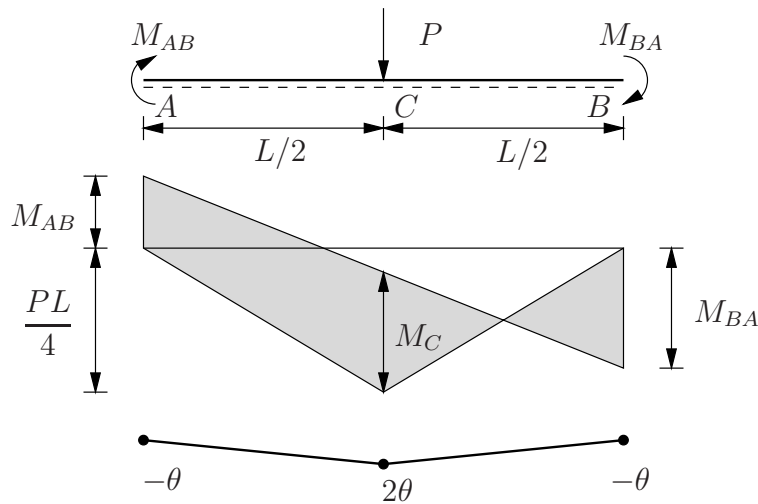
$$M(s) = sM_{AB} - (1-s)M_{BA} + \frac{1}{2}PLs, \quad (8.2)$$

joten

$$M(\frac{1}{2}) = M_C = \frac{1}{2}M_{AB} - \frac{1}{2}M_{BA} + \frac{1}{4}PL. \quad (8.3)$$

Kaava (8.1) voidaan johtaa myös kuvan 8.1 palkkimekanismilla virtuaalisen työn yhtälöstä

$$M_{AB}(-\theta) + M_C 2\theta + (-M_{BA})(-\theta) = P \frac{L}{2} \theta, \quad (8.4)$$



Kuva 8.1 Sauvan momenttikuvio.

Taulukko 8.1 Tasapainotusoperaatiot 1, 2 ja 3.

operaatio	ΔM_{AB}	ΔM_C	ΔM_{BA}
1	1	$\frac{1}{2}$	0
2	0	$-\frac{1}{2}$	1
3	1	0	1

missä $M_{AB} = M_A$, $M_{BA} = -M_B$, eli yhtälöstä

$$M_{AB} - M_{BA} - 2M_C = -PL/2. \quad (8.5)$$

Tasapaino säilyy kuorman arvolla P , jos muutokset ΔM_{ij} toteuttavat yhtälön

$$\Delta M_{AB} - \Delta M_{BA} - 2\Delta M_C = 0. \quad (8.6)$$

Yhtälö (8.6) toteutuu esim. kuvan 8.2 esittämissä tapauksissa:

$$\Delta M_{BA} = 0, \quad \Delta M_C = \frac{1}{2}\Delta M_{AB}, \quad (\text{operaatio 1})$$

$$\Delta M_{AB} = 0, \quad \Delta M_C = -\frac{1}{2}\Delta M_{BA}, \quad (\text{operaatio 2}) \quad (8.7)$$

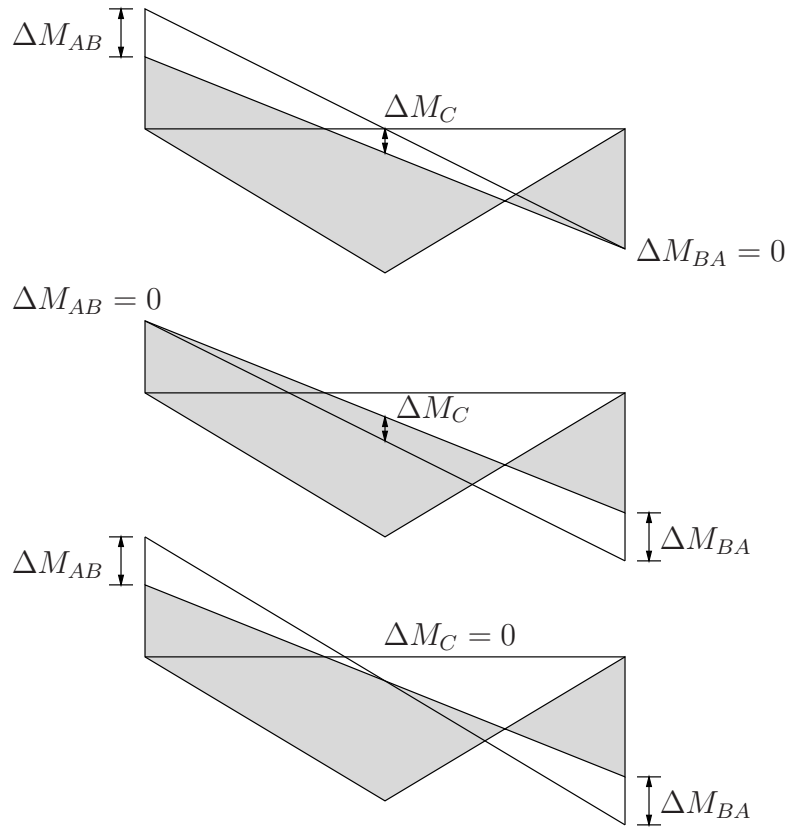
$$\Delta M_C = 0, \quad \Delta M_{AB} = \Delta M_{BA}. \quad (\text{operaatio 3})$$

Tasapainotilan muutokset, (operaatiot) 1, 2 ja 3 on esitetty taulukossa 8.1.

Jos yhtälö (8.6) on voimassa, niin palkkimekanismien avulla määritetyt tasapainoyhtälöt toteutuvat.

Jatkuvan palkin ja kehän liitosten tulee olla tasapainossa. Jos liitokseen i ei vaikuta ulkoista momenttia, niin saadaan tasapainoyhtälö

$$\sum_{j=1}^J M_{ij} = 0, \quad (8.8)$$



Kuva 8.2 Tasapainotusoperaatiot 1, 2 ja 3.

missä J on liitoksen muodostavien sauvojen lukumäärä, kuva 8.3. Muutosten ΔM_{ij} tulee toteuttaa yhtälö

$$\sum_{j=1}^J \Delta M_{ij} = 0. \quad (8.9)$$

Kerroskehän siirtymämekanismien avulla saadaan muodostettua loput tarvittavista tasapainoyhtälöistä. Kuvan 8.4 kerroskehän tapauksessa työyhtälö on

$$M_{AB}(-\theta) + (-M_{BA})\theta + M_{CD}(-\theta) + (-M_{DC})\theta + M_{EF}(-\theta) + (-M_{FE})\theta = PH\theta + QH\theta. \quad (8.10)$$

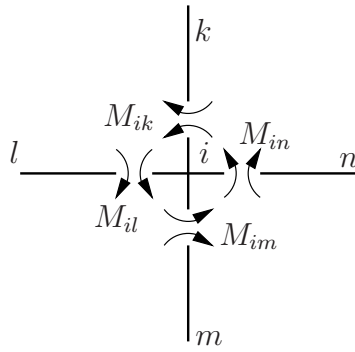
Jakamalla virtuaalisella kiertymällä θ seuraa yhtälö

$$M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC} + M_{EF} + M_{FE} = -PH - QH. \quad (8.11)$$

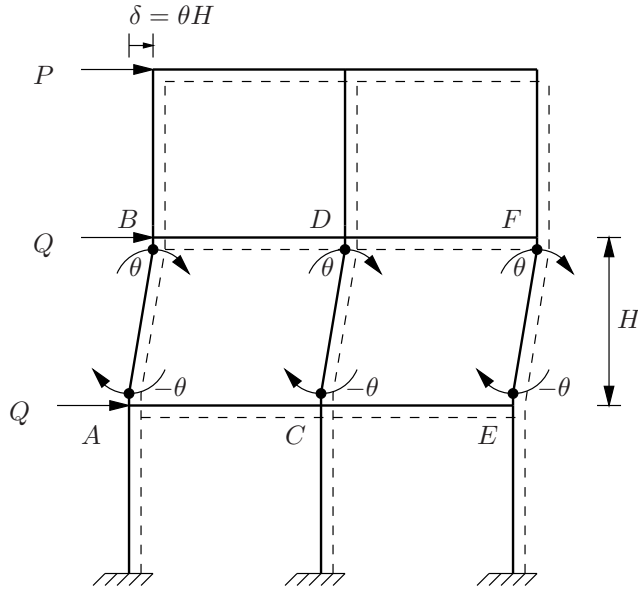
Kuormien P ja Q pysyessä muuttumattomina tasapaino säilyy, jos muutokset ΔM_{ij} toteuttavat ehdon

$$\Delta M_{AB} + \Delta M_{BA} + \Delta M_{CD} + \Delta M_{DC} + \Delta M_{EF} + \Delta M_{FE} = 0. \quad (8.12)$$

Riippumattomien perusmekanismien lukumäärä on $m = s - n_s$, missä n_s on staattisen määräämättömyyden kertaluku ja s on kriittisten leikkausten lukumäärä. Inkrementaalisia tasapainoyhtälöitä (8.6), (8.9) ja (8.12) on m kappaletta.



Kuva 8.3 Kehän nurkan tasapaino.



Kuva 8.4 Kerroskehän sivusiirtymämekanismi.

Esimerkki 8.1 Mitoitetaan kuvan 8.5 jatkuva palkki momentinjakomenetelmällä.

Määritetään ensin momentit pitäen jokaista väliä jäykästi kiinnitettynä palkkina. Palkkimekanismin avulla saadaan

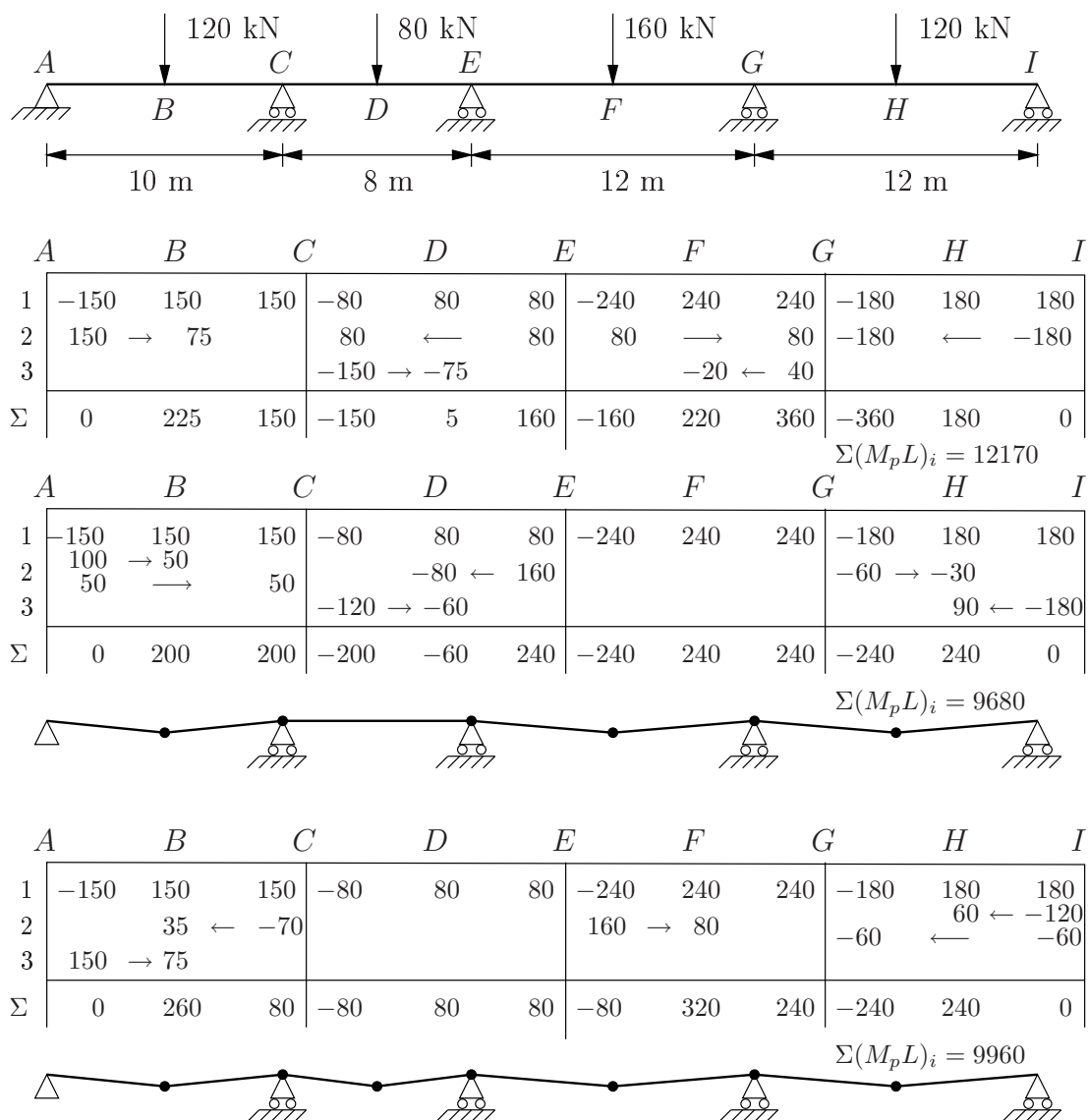
$$-M_{AB} = M_B = M_{CB} = M_p = \frac{PL}{8}. \quad (8.13)$$

Kuvan 8.5a rivin 1 momentit on määritetty jäykästi kiinnitetyn palkin mekanismin perusteella. Momentit eivät toteuta tasapainoehtoja (8.8) solmuissa A , C , E , G ja I . Solmu A saadaan tasapainoon lisäämällä $\Delta M_{AB} = 150$. Koska $\Delta M_{AB} \neq 0$, täytyy soveltaa taulukon 8.1 operaatioita. Esim. rivin 1 operaation perusteella $\Delta M_B = \frac{1}{2}\Delta M_{AB} = 75$.

Pisteen E epätasapainomomentti on

$$M_{ED} + M_{EF} = -160. \quad (8.14)$$

Piste E saadaan tasapainoon lisäämällä momentti $\Delta M_E = 160$, joka on jaettu (miehivaltaisesti) yhtäsuuriin osiin $\Delta M_{ED} = 80$ ja $\Delta M_{EF} = 80$. Lisäksi on sovellettu tau-



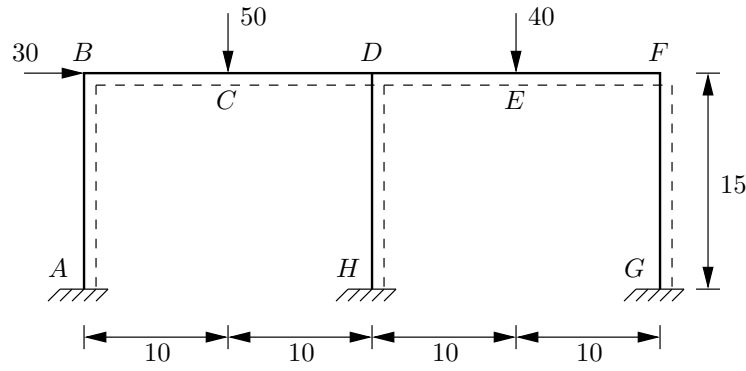
Kuva 8.5 Jatkuvan palkin mitoitus plastisella momentinjakomenetelmällä.

luku 8.1 rivin kolme operaatioita $\Delta M_{CD} = \Delta M_{ED}$, $\Delta M_{GF} = \Delta M_{EF}$. Seuraavaksi tasapainotetaan pisteet I, G ja C. Viimeisellä rivillä on laskettu lopulliset momentit, jotka toteuttavat solmujen tasapainoyhtälöt.

Näin on löydetty eräs mahdollinen mitoitus. Valitaan väleille AC, CE, EG ja GI poikkileikkaukset, joiden M_p -arvot ovat 225, 160, 360 ja 360 kNm. Tämä mitoitus ei ole kovin taloudellinen. Esim. yhdellekään välille ei ole syntynyt mekanismia.

Kuvan 8.5b mukaisessa mitoituksessa on pyritty siihen, että väleille AC ja EG tarvittaisiin mahdollisimman pieni poikkileikkaus (pieni M_p). Välin AC suurin momentti saadaan mahdollisimman pieneksi, kun pisteen A tasapainottava momentti 150 kNm jaetaan osiin 100 kNm ja 50 kNm, jotka siirretään taulukon 8.1 operaatioilla pisteisiin B ja C.

Välin EG minimimomentti on 240 kNm. Pisteet E ja G saadaan tasapainoon siirtämällä epätasapainomomentit väleille CE ja GI. Lopuksi saatetaan pisteet C ja I



Kuva 8.6 Kaksiaukkoinen kehä.

tasapainoon. Välille AC valitaan poikkileikkaus, jonka $M_p = 200$ kNm, ja muille väleille otetaan poikkileikkaus, jonka $M_p = 240$ kNm. Kuvassa 8.5b on esitetty tilannetta vastaava mekanismi.

Kuvan 8.5c mitoituksessa pyritään minimipoikkileikkaukseen väleillä CE ja GI . Väleille AC , CE , EG ja GI tarvitaan poikkileikkaukset, joiden M_p -arvot ovat 260, 80, 320 ja 240 kNm.

Otaksuen, että rakenteen paino on verrannollinen lukuun $G = \sum (M_p L)_{ij}$, todetaan mitoituksen 8.5b olevan kevyempi kuin kuvan 8.5c mitoitus, vaikka kuvan 8.5c tapauksessa jokaiselle välille on syntynyt mekanismi.

Esimerkki 8.2 Mitoitetaan kuvan 8.6 kehä momentinjakomentelmällä.

Valitaan kuvan 8.6 kaksiaukkoisen kehän pilareille samanlaiset poikkileikkaukset ja samoin palkeille.

Palkkimekanismin ja sivusiirtymämekanismin avulla saadaan tasapainoyhtälöt

$$-M_{BC} + 2M_C + M_{DC} = 500, \quad (a) \quad (8.15)$$

$$-M_{DE} + 2M_E + M_{FE} = 400, \quad (b) \quad (8.16)$$

$$-M_{AB} - M_{BA} - M_{HD} - M_{DH} - M_{GF} - M_{FG} = 450. \quad (c) \quad (8.17)$$

Solmuissa B , D ja F tasapainotilassa

$$M_{BA} + M_{BC} = 0, \quad (d) \quad (8.18)$$

$$M_{DC} + M_{DH} + M_{DE} = 0, \quad (e) \quad (8.19)$$

$$M_{FE} + M_{FG} = 0. \quad (f) \quad (8.20)$$

Määritetään lähtömomentit mekanismien a , b ja c avulla. Yhtälö a toteutuu, jos esimerkiksi

$$M_{BC} = -125, \quad M_C = 125 \quad \text{ja} \quad M_{DC} = 125. \quad (8.21)$$

Samalla tavalla voidaan valita

$$-M_{DE} = M_E = M_{FE} = 100, \quad (8.22)$$

$$M_{AB} = M_{BA} = M_{HD} = M_{DH} = M_{GF} = M_{FG} = -75. \quad (8.23)$$

Taulukko 8.2 Kehän momenttien tasapainotus pilareille.

	BA	BC	C	DC	DH	DE	E	FE	FG	mek. c
a	-75	-125	125	125	-75	-100	100	100	-75	
b	+200				+50				-25	+225
c	125	-125	125	125	-25	-100	100	100	-100	
d					-50	50	$\rightarrow 25$ -12.5	$\leftarrow 25$	-25	-75
e	125	-125	125	125	-75	-50	112.5	125	-125	
	AB				HD				GF	mek. c
a'	-75				-75				-75	
b'	-75				-75				-75	-225
c'	-150				-150				-150	
d'	25				25				25	75
e'	-125				-125				-125	

Lähtömomenttijakauma ei toteuta solmujen tasapainoehtoja (d), (e) ja (f). Solmujen B , D ja F epätasapainomomentit ovat

$$M_{BA} + M_{BC} = -200, \quad M_{DC} + M_{DH} + M_{DE} = -50, \quad M_{FE} + M_{FG} = 25. \quad (8.24)$$

Momentin tasapainotus suoritetaan kätevimmin kaaviossa taulukon 8.1 operaatioilla. Tasapainotus (mitoitus) voidaan tehdä monella tavalla. Kaksi selväpiirteistä vaihtoehtoa ovat: a) siirretään epätasapainomomentit pilareille, tai b) siirretään epätasapainomomentit palkeille. Tarkastellaan ensin vaihtoehtoa a. Nurkka A tasapainotetaan lisäämällä momentti 200 pilarin AB päähän B , momentti 50 pilarin DH päähän D ja momentti -25 pilarin FG päähän F .

Palkeissa tarvitaan vähintään $M_p = 125$ (palkki BCD). Nurkat B , D ja F saatiin tasapainoon momenteilla $\Delta M_{BA} = 200$, $\Delta M_{DH} = 50$ ja $\Delta M_{FG} = -25$. Kaavan (8.17) mukaan sivusiirtymämekanismiin on toteutettava yhtälö

$$\Delta M_{AB} + \Delta M_{BA} + \Delta M_{HD} + \Delta M_{DH} + \Delta M_{GF} + \Delta M_{FG} = 0 \quad (g) \quad (8.25)$$

eli

$$\Delta M_{AB} + \Delta M_{HD} + \Delta M_{GF} = -225 \quad (\text{rivi } b') \quad (h) \quad (8.26)$$

Taulukossa 8.2 on valittu $\Delta M_{AB} = \Delta M_{HD} = \Delta M_{GF} = -75$ (rivillä b'), koska pilarit mitoitetaan yhtä vahvoiksi. Laskemalla momentit riveiltä a ja b (b') yhteen saadaan rivin c (c') momentit, jotka ovat tasapainossa ulkoisen kuorman kanssa. Valitaan palkeille $M_p = 125$ ja pilareille $M_p = 150$. Ratkaisu ei ole välttämättä kovin edullinen, koska kehä sortuisi osittaisen palkkimekanismiin BCD mukaisesti.

Huomataan, että pilareiden M_p -arvoa voidaan pienentää tarvitsematta kasvattaa palkkien täysplastista momenttia. Pilareiden M_p :n tulee olla vähintään 125, jotta tasapaino nurkassa B olisi mahdollinen (palkin BCD $M_p = 125$).

Taulukon 8.2 rivillä d' yritetään pienentää pilareiden momenttia arvoon 125 siten, että

$$\Delta M_{AB} = \Delta M_{HD} = \Delta M_{GF} = 25. \quad (8.27)$$

Yhtälön (g) toteuttamiseksi valitaan pilareiden yläpäihin momenttien muutokset

$$\Delta M_{FG} = -25, \quad \Delta M_{DH} = -50, \quad \Delta M_{BA} = 0. \quad (8.28)$$

Taulukko 8.3 Kehän momenttien tasapainotus palkeille.

	BA	BC	C	DC	DH	DE	E	FE	FG	mek. c
a	-75	-125	125	125	-75	-100	100	100	-75	
b		200	$\rightarrow 100$	$\leftarrow 50$			12.5	$\leftarrow -25$		
c	-75	75	200	175	-75	-100	112.5	75	-75	
d			-8.3	$\leftarrow 16.7$		-16.7	$\rightarrow -8.3$			
e	-75	75	191.7	191.7	-75	-116.7	104.2	75	-75	
	AB				HD				GF	mek. c
a'	-75				-75				-75	
b'	0				0				0	
c'	-75				-75				-75	
d'	0				0				0	
e'	-75				-75				-75	

Taulukko 8.4 Kaksiaukkoisen kehän mitoitus a ja b .

	a	b
palkin M_p	125	191.7
pilarin M_p	125	75

Nurkka D saadaan tasapainoon lisäämällä momentti $\Delta M_{DE} = 50$, josta puolet siirretään pisteeseen E taulukon 8.1 operaatiolla 1 eli $\Delta M_E = \frac{1}{2}\Delta M_{DE}$. Samalla tavalla tasapainotetaan nurkka F lisäämällä $\Delta M_{FE} = 25$ ja siirtämällä $\Delta M_E = -\frac{1}{2}\Delta M_{FE} = -12.5$ operaatiolla 2. Havaitaan, että sekä palkeissa että pilareissa riittää $M_p = 125$. Vaihtoehtoon b mukaan valitaan pilareille minimi $M_p = 75$, ja määritetään palkeille vaadittava M_p . Tämä on tehty taulukossa 8.3.

Taulukon 8.3 rivi a on sama kuin edellisessä tapauksessa taulukossa 8.2. Pisteiden B , D ja F epätasapainomomentit

$$\sum M_{BJ} = -200, \quad \sum M_{DJ} = -50 \quad \text{ja} \quad \sum M_{FJ} = 25 \quad (8.29)$$

siirretään palkeille rivillä b soveltaen taulukon 8.1 operaatioita. Tasapainoehdot toteuttava momenttijakauma saadaan laskemalla yhteen rivit a ja b , jolloin päädytään rivin c momentteihin. Palkkien suurimmat momentit ovat $M_C = 200$ ja $M_{DC} = 175$.

Mitoitus saadaan edullisemmaksi lisäämällä $\Delta M_{DC} = 16.7$, josta siirtyy $\Delta M_C = -\frac{1}{2}\Delta M_{DC} = -8.3$ pisteeseen C . Tämän toimenpiteen jälkeen $M_C = M_{DC} = 191.7$ rivillä e . Solmuun D lisätty ΔM_{DC} tasapainotetaan lisäämällä $\Delta M_{DE} = -16.7$. Operaation 1 avulla $\Delta M_E = -8.3$. Valitsemalla palkeille $M_p = 191.7$ ja pilareille $M_p = 75$ kehä kantaa annetun kuormituksen.

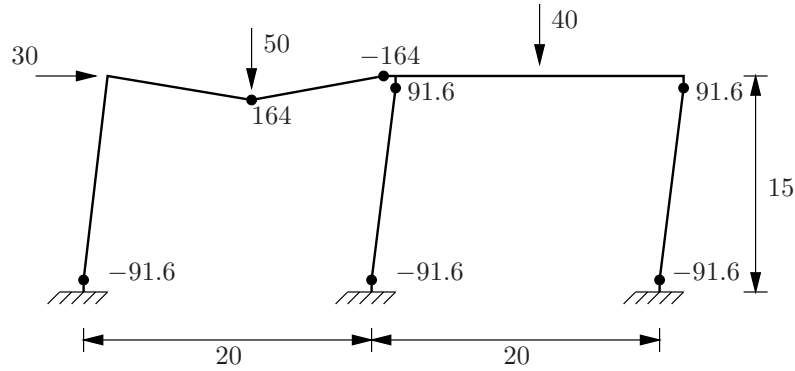
Vaihtoehtoisilla mitoitusavoilla on saatu tulokset, jotka on esitetty taulukossa 8.4

Käytännössä poikkileikkauksia on käytettävissä rajallinen määrä. Tarkastellaan lopuksi tilannetta, että palkille löytyy arvojen 125 ja 191.7 välistä poikkileikkaus, jonka $M_p = 164$. Valitaan palkeille $M_p = 164$ ja määritetään pilareille vaadittava M_p .

Edellisen tarkastelun perusteella päätellään, että täysplastinen momentti saavutetaan leikkauksissa C ja DC . Tasapainotetaan momentit siten, että saadaan $M_C = 164$

Taulukko 8.5 Kehän momenttien tasapainotus, kun palkin $M_p = 164$.

	BA	BC	C	DC	DH	DE	E	FE	FG	mek. c
a	-75	-125	125	125	-75	-100	100	100	-75	
b	83	78	$\leftarrow 39$				12.5	$\leftarrow -25$		
		39	$\leftarrow$	39		11	$\rightarrow 5.5$			83
c	8	-8	164	164	-75	-89	118	75	-75	
d					-16.6	16.6	$\rightarrow 8.3$	$\leftarrow 16.6$	-16.6	-33.2
							-8.3			
e	8	-8	164	164	-91.6	-72.4	118	91.6	-91.6	
	AB				HD				GF	mek. c
a'	-75				-75				-75	
b'	-27.7				-27.7				-27.7	-83
c'	-102.7				-102.7				-102.7	
d'	11.1				11.1				11.1	33.3
e'	-91.6				-91.6				-91.6	

**Kuva 8.7** Kaksiaukkoisen kehän erästä mitoitus vastaa mekaniismi.

eli lisätään $\Delta M_C = 39$ ja $\Delta M_{DC} = 39$ sekä siirretään $\Delta M_{BC} = 39 + 78$ taulukon 8.1 operaatioilla. Nurkka B tasapainotetaan lisäämällä $\Delta M_{BA} = 83$. Tällöin syntyy sivusiirtymämekanismiin epätasapainomomentti, jonka suuruus on 83. Jaetaan tämän vastaluku -83 pilarien alapäihin kolmeen yhtäsuureen osaan

$$\Delta M_{AB} = \Delta M_{HD} = \Delta M_{GF} = -27.7. \quad (8.30)$$

Taulukon 8.5 rivillä c (c') on esitetty tässä vaiheessa aikaansaatu tasapainotila.

Pilareissa rivillä c (c') suurimmat momentit ovat $M_{AB} = M_{HD} = M_{GF} = -102.7$, mutta M_{DH} ja M_{FG} ovat vain -75 ja $M_{BA} = 8$. Edullisempi mitoitus saadaan muuntamalla momentteja niin, että lopulta

$$M_{AB} = M_{HD} = M_{GF} = M_{DH} = M_{FG} = -91.6. \quad (8.31)$$

Palkissa DEF tehdään tasapainon ylläpitämiseksi vaadittavat korjaukset. Lopullisessa mitoituksessa pilarien $M_p = 91.6$. Tilannetta vastaava mekaniismi on esitetty kuvassa 8.7.

Luku 9

Minimipainomitoitus

Rakenteiden plastisessa analyysissä määritetään annetun rakenteen rajakuorma. Plastisessa mitoituksessa puolestaan rakenne suunnitellaan siten, että se kantaa sortumatta tietyt kuormat. Tarkastellaan plastista mitoitusta ensin yksinkertaisen esimerkin avulla.

Esimerkki 9.1 *Mitoitetaan kuvan 9.1 jatkuva palkki annetulle kuormitustapaukselle.*

Kuvissa 9.1b ja 9.1c on kaksi vaihtoehtoista mitoitusta. Kuvan b tapauksessa on valittu sauvan CE plastinen momentti mahdollisimman pieneksi. Sauvoissa AC ja EG vaaditaan $M_p = 10$ ja $M_p = 13$.

Kuvan 9.1 jatkuvan palkin mitoitustehtävälle on olemassa äärettömän monta ratkaisua, ja muut seikat kuin lujuus voivat olla määrääviä. Sellaisia voivat olla esimerkiksi:

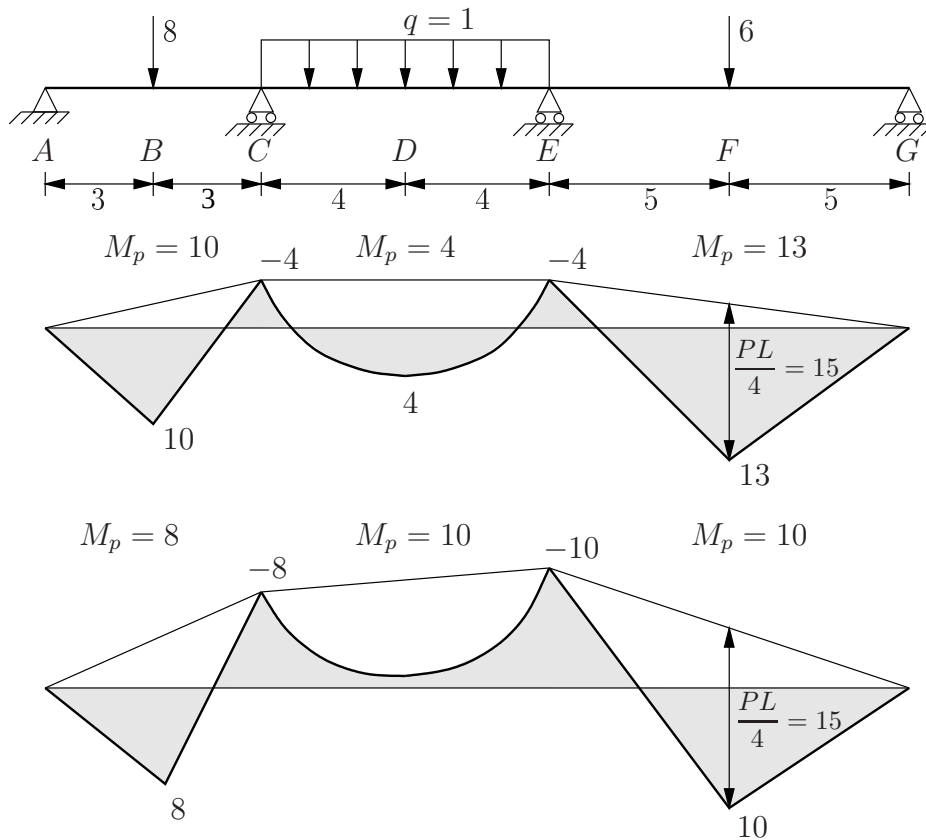
- painon minimointi,
- siirtymät,
- käytettävissä olevat poikkileikkaukset,
- valmistusteknilliset seikat,
- kokonaiskustannukset.

Esimerkin tapauksessa todennäköisesti valittaisiin tasavahva palkki, jonka $M_p = 10$. Esimerkin palkkia monimutkaisemmissa tapauksissa on vaikeampaa päätellä, mikä on käytännön kannalta paras ratkaisu. Sen vuoksi tarvitaan systemaattisempia menetelmiä rakenteiden optimointiin.

9.1 Minimipainon määrittäminen mekanismien työyhtälöiden avulla

Matemaattiseen käsittelyyn hyvin sopiva optimointikriteeri on rakenteen minimipaino. Palkin tai kehän yksikköpainon g (paino/pituusyksikkö) ja poikkileikkauksen plastisen momentin M_p välinen riippuvuus voidaan antaa kaavalla

$$g = kM_p^n, \tag{9.1}$$



Kuva 9.1 Jatkuvan palkin plastinen mitoitus.

jossa k ja n ovat parametrejä. Yksikköpaino voidaan linearisoida tarkasteluvälillä muotoon

$$g = kM_p. \quad (9.2)$$

Tasavahvoista (M_p on vakio osassa i) sauvoista koostuvan rakenteen paino on

$$G = k \sum_i M_{pi} L_i, \quad (9.3)$$

missä L_i on sauvan i pituus. Vaihtuvan poikkileikkauksen tapauksessa voitaisiin käyttää kaavaa

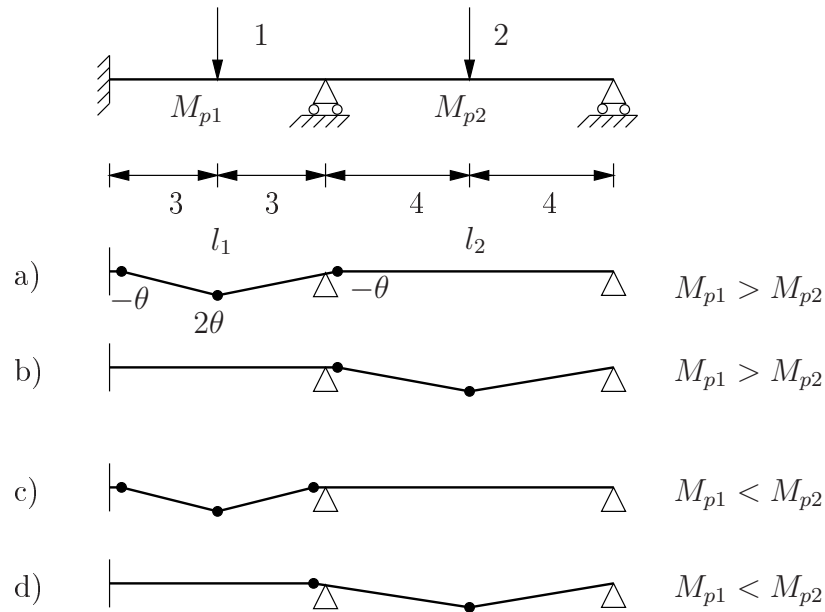
$$G = k \int M_p ds. \quad (9.4)$$

Sovelletaan seuraavaksi lineaarista painofunktiota yksinkertaisille palkki- ja kehärakenteille. Optimoinnin rajoitusehdot muodostetaan mekanismien työyhtälöiden avulla. Graafinen ratkaisu tulee kyseeseen, kun tuntemattomia poikkileikkaussuureita on kaksi. Monimutkaisemmissa tapauksissa minimipainon haku voidaan pukea lineaarisen ohjelmointitehtävän muotoon. Tämän matemaattisen menetelmän soveltamiseen löytyy runsaasti valmisohjelmia, eikä tuntemattomien lukumäärälle ole käytännössä ylärajaa.

Esimerkki 9.2 Tehdään kuvan 2 jatkuvalle palkille minimipainomitoitus.

Palkin paino on verrannollinen lausekkeeseen

$$G = M_{p1} L_1 + M_{p2} L_2 = 6M_{p1} + 8M_{p2}. \quad (9.5)$$



Kuva 9.2 Palkin minimipainomitoitus.

Palkilla on neljä mahdollista mekanismia a , b , c ja d , koska ei tiedetä etukäteen kumpi plastinen momentti M_{p1} vai M_{p2} on suurempi.

Mekanismin a työyhtälö on

$$a : \quad \theta M_{p1} + 2\theta M_{p1} + \theta M_{p2} = 3 \cdot \theta \cdot 1 \quad (9.6)$$

eli

$$a : \quad 3M_{p1} + M_{p2} = 3. \quad (9.7)$$

Samalla tavalla johdetaan muille meknismeille yhtälöt

$$b : \quad 3M_{p2} = 8, \quad (9.8)$$

$$c : \quad 4M_{p1} = 3 \quad (9.9)$$

ja

$$d : \quad M_{p1} + 2M_{p2} = 8. \quad (9.10)$$

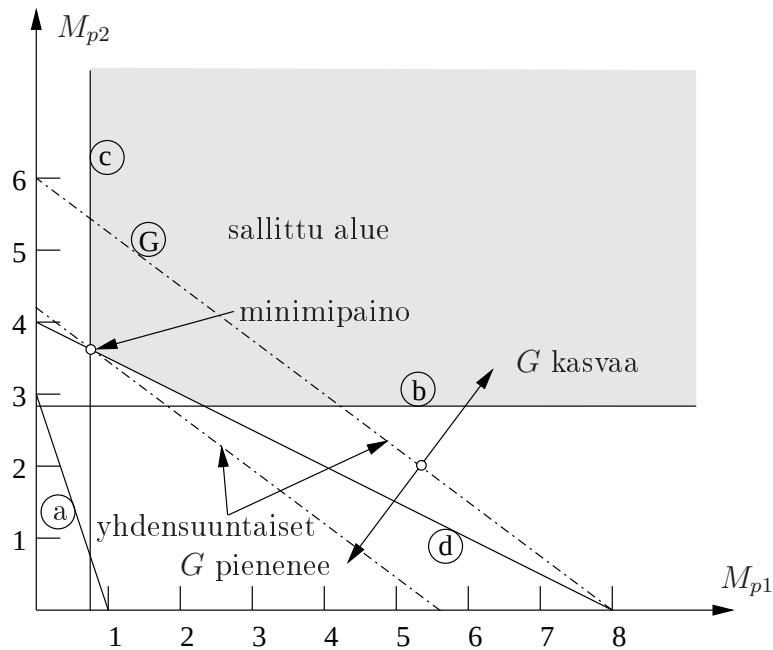
Piirretään mekanismit a , b , c ja d sekä painosuora G kuvaan 9.3, jonka akselit ovat M_{p1} ja M_{p2} . Mekanismeja vastaavat suorien yhtälöt rajaavat kuvassa 9.3 sallitun alueen, jolla rakenne kestää annetut kuormat. Minimipainomitoitusta esittää piste, jossa painosuora G sivuaa sallitun alueen reunaa. Minimipainoratkaisu on piste D , jossa $M_{p1} = 0.75$, $M_{p2} = 3.625$, ja palkin paino $G = 33.5k$.

Kuvan 9.3 pisteessä D leikkaavat toisensa mekanismien c ja d työyhtälöitä kuvaavat suorat. Painosuoran G suunta on suorien c ja d välissä. Suorien c ja d yhtälöt ovat

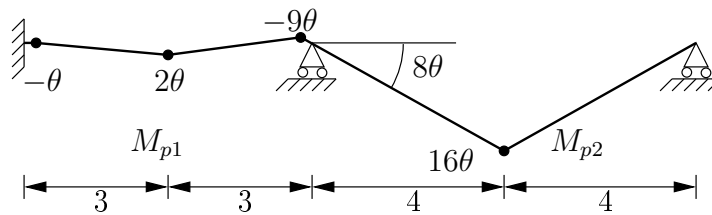
$$c : \quad 4M_{p1} = 3 \quad (9.11)$$

ja

$$d : \quad M_{p1} + 2M_{p2} = 8. \quad (9.12)$$



Kuva 9.3 Palkin plastisten momenttien sallittu alue ja minimipaino.



Kuva 9.4 Palkin minimipainoa vastaava mekanismi eli painosuoramekanismi.

Suorien c ja d lineaarikombinaatio on $c + \gamma d$ eli

$$(4 + \gamma)M_{p1} + 2\gamma M_{p2} = 3 + 8\gamma. \quad (9.13)$$

Valitsemalla $\gamma = 8$ saadaan suora, joka on painosuoran G suuntainen eli

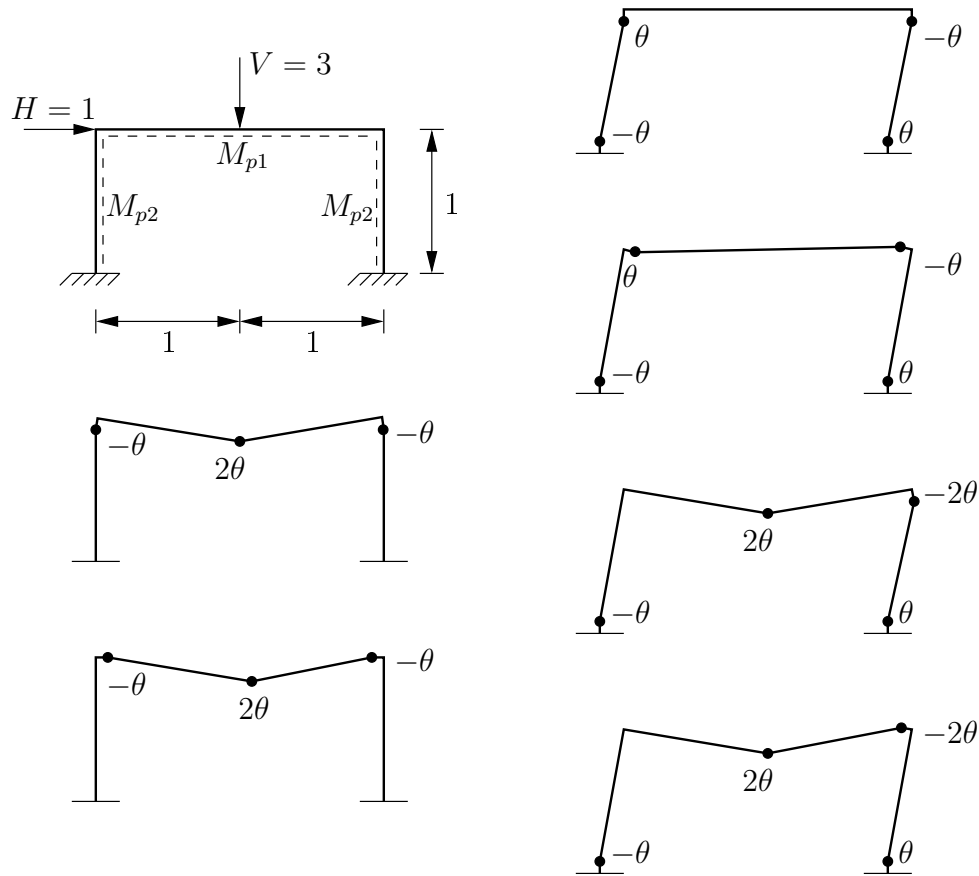
$$12M_{p1} + 16M_{p2} = 67. \quad (9.14)$$

Yhtälö esittää kuvan 9.4 mukaisen mekanismin työyhtälöä. Mekanismi on nimeltään painosuoramekanismi eli Foulkes-mekanismi. Painosuoramekanismin työyhtälössä kuhunkin plastiseen momenttiin M_{pj} liittyvien nivelkiertymien summat $\sum_k \theta_{jk}$ suhtautuvat toisiinsa kuten M_{pj} :n vahvuisten sauvojen kokonaispituudet. Esimerkin tapauksessa Foulkes-mekanismin työyhtälö on

$$12\theta M_{p1} + 16\theta M_{p2} = 67\theta, \quad (9.15)$$

ja

$$\frac{12\theta}{16\theta} = \frac{3}{4} = \frac{L_1}{L_2}. \quad (9.16)$$



Kuva 9.5 Portaalikehän mekanismit.

Mille tahansa kehälle pätee: *Jos löydetään painosuoramekanismi ja jos tasapaino- ja myötoehdot toteutuvat, niin kehän paino on mahdollisimman pieni.*

Esimerkki 9.3 Määritetään kuvan 9.5 kehän minimipaino otaksumalla lineaarinen painofunktio.

Kuvan 9.5 yksiaukkoisen kehän painosuoran yhtälö on

$$G = k(2M_{p1} + 2M_{p2}). \quad (9.17)$$

Mekanismien työyhtälöiksi saadaan

$$a : \quad 2M_{p1} + 2M_{p2} = 3, \quad (9.18)$$

$$b : \quad 4M_{p1} = 3, \quad (9.19)$$

$$c : \quad 4M_{p2} = 1, \quad (9.20)$$

$$d : \quad 2M_{p1} + 2M_{p2} = 1, \quad (9.21)$$

$$e : \quad 2M_{p1} + 4M_{p2} = 4 \quad (9.22)$$

ja

$$f : \quad 4M_{p1} + 2M_{p2} = 4. \quad (9.23)$$

osien pituudet L_j . Minimoitava kohdefunktio on edellä esitettyyn tapaan

$$G = k \sum_j M_{pj} L_j. \quad (9.25)$$

Yksikäsitteisyyslause

Lause 9.1 *Otaksutaan, että löytyy mekanismi, jonka työyhtälössä*

$$\sum_j M_{pj} \phi_j = \sum_i F_i \Delta_i \quad (9.26)$$

plastiset kokonaiskiertymät toteuttavat ehdot

$$\phi_j = \alpha L_j, \quad (9.27)$$

missä kiertymät ϕ_j liittyvät positiivisiin plastisiin momentteihin M_{pj} ja siirtymät Δ_i liittyvät kuormiin F_i , (Foulkes-mekanismi). Plastisiin momentteihin M_{pj} liittyvät plastiset kokonaiskiertymät ϕ_j koostuvat pisteiden h_{jk} yksittäisistä positiivisista kiertymistä θ_{jk}

$$\phi_j = \sum_k \theta_{jk}. \quad (9.28)$$

Jos taivutusmomentit toteuttavat tasapainoehdot ja myötöehdot, niin rakenteen paino on mahdollisimman pieni (minimipaino) annetulle kuormitukselle.

Todistus. Otaksutaan (mikä tahansa) mitoitus, jonka plastiset momentit ovat M_{pj}^* ja paino on

$$G^* = k \sum_j M_{pj}^* L_j. \quad (9.29)$$

Otaksuttuun mitoitukseen liittyvät, kuormitusta $\{F_i\}$ vastaavat taivutusmomentit pisteissä (leikkauksissa) h_{jk} ovat M_{jk} . Tasapainoehtojen perusteella

$$\sum_j \left(\sum_k M_{jk} \theta_{jk} \right) = \sum_i F_i \Delta_i. \quad (9.30)$$

Koska momentit M_{jk} toteuttavat oletuksen mukaan myötöehdot

$$-M_{pj}^* \leq M_{jk} \leq M_{pj}^*, \quad (9.31)$$

yhtälöstä (9.30) seuraa kaavan (9.28) avulla

$$\sum_j M_{pj}^* \phi_j \geq \sum_i F_i \Delta_i. \quad (9.32)$$

Sijoittamalla kaavaan (9.32) $\phi_j = \alpha L_j$ ja $G^* = k \sum_j M_{pj}^* L_j$ tulee

$$\frac{\alpha}{k} G^* \geq \sum_i F_i \Delta_i. \quad (9.33)$$

Kaavojen (9.25), (9.26) ja (9.27) perusteella

$$\frac{\alpha}{k}G = \sum_i F_i \Delta_i, \quad (9.34)$$

joten ottamalla huomioon (9.33) saadaan

$$G^* \geq G. \quad (9.35)$$

Siten mitoitus antaa rakenteelle minimipainon, jos se toteuttaa

- tasapainoehdot,
- myötöehdot,
- mekanismiehdon,
- plastisia nivelkiertymiä koskevan ehdon (9.27), (Foulkes–mekanismi).

Minimipainon yläraja

Tasapainoehdot ja myötöehdot toteuttava mitoitus on minimipainomitoituksen yläraja. Tämä seuraa alarajalauseesta. Tasapainoehdot ja myötöehdot toteuttava mitoitus $\{M_{pi}\}$ on sallitun alueen sisällä, ja se ei voi olla lähempänä origoa kuin sallittua aluetta sivuava painosuora.

Tasapainoehdot, myötöehdot ja mekanismiehdon toteuttava mitoitus sortuu annetuilla kuormilla ja antaa myös ylärajan minimipainolle. Tällainen mitoitus $\{M_{pi}\}$ on siis sallitun alueen reunalla.

Minimipainon alaraja

Lause 9.2 *Mekanismiehdon ja plastisten nivelkiertymien ehdon toteuttava mitoitus antaa rakenteen minimipainolle alarajan.*

Todistus. Otaksutaan plastiset momentit M_{pj}^* , joihin liittyvät nivelten plastiset kokonaiskiertymät ovat $\phi_j^* = \sum_k \theta_{jk}^*$, missä yksittäiset positiiviset nivelkiertymät θ_{jk}^* tapahtuvat pisteissä h_{jk}^* . Otaksutaan momentteihin M_{pj}^* liittyvien nivelten kokonaiskiertymien toteuttavan ehdon (9.27) eli

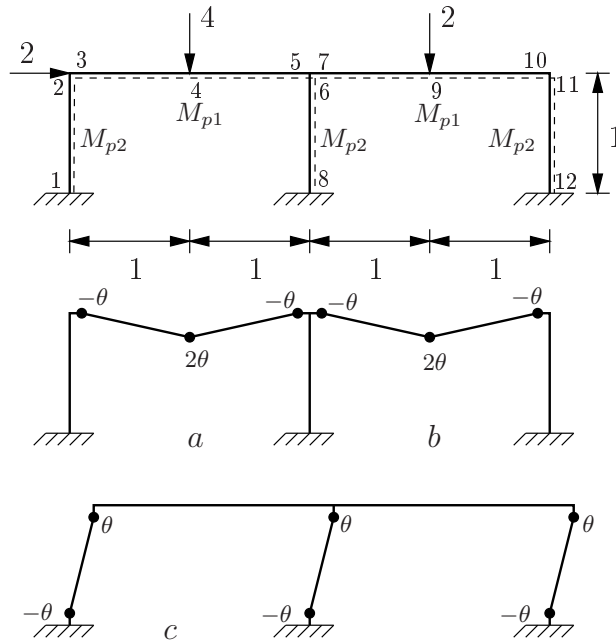
$$\phi_j^* = \alpha L_j, \quad (9.36)$$

ja niihin liittyvien siirtymien Δ_i^* toteuttavan työyhtälön

$$\sum_j M_{pj}^* \phi_j^* = \sum_i F_i \Delta_i^*. \quad (9.37)$$

Rakenteen paino on

$$G^* = k \sum_j M_{pj}^* L_j = \frac{k}{\alpha} \sum_i F_i \Delta_i^*. \quad (9.38)$$



Kuva 9.7 Kaksiaukkoinen kehä. Palkkimekanismit a ja b , sivusiirtymämekanismi c .

Otaksutaan, että minimipainorakenteen plastiset momentit ovat M_{pj} ja että sen paino on G . Minimipainorakenteen momentit M_{jk} pisteissä (leikkauksissa) h_{jk}^* kuormista $\{F_i\}$ toteuttavat myötöehdot, eli

$$-M_{pj} \leq M_{jk} \leq M_{pj}. \quad (9.39)$$

Koska minimipainoratkaisu G toteuttaa myös tasapainoehdot, voidaan kiertymien θ_{jk}^* ja niitä vastaavien siirtymien Δ_i^* sekä minimipainorakenteen momenttien avulla kirjoittaa virtuaalisen työn yhtälö

$$\sum_j \left(\sum_k M_{jk} \theta_{jk}^* \right) = \sum_i F_i \Delta_i^*, \quad (9.40)$$

missä

$$\sum_j \left(\sum_k M_{jk} \theta_{jk}^* \right) \leq \sum_j M_{pj} \phi_j^* \Rightarrow \sum_j M_{pj} \phi_j^* \geq \sum_i F_i \Delta_i^*. \quad (9.41)$$

Kaavojen (9.36) ja (9.41) perusteella päätellään rakenteen painosta, että

$$G = k \sum_j M_{pj} L_j = \frac{k}{\alpha} \sum_j M_{pj} \phi_j^* \geq \frac{k}{\alpha} \sum_i F_i \Delta_i^*, \quad (9.42)$$

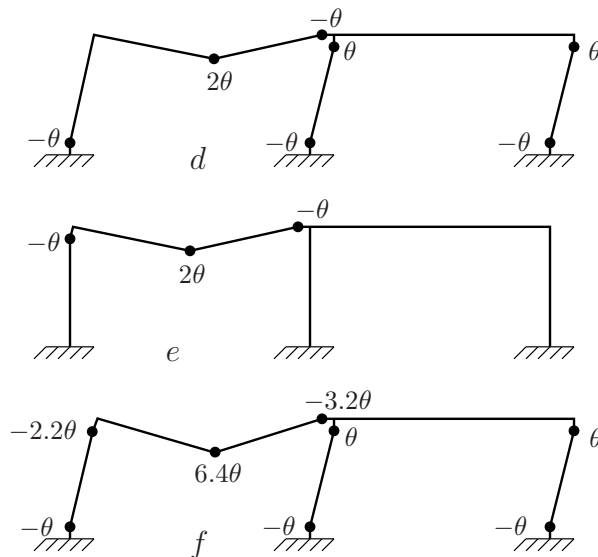
joten kaavan (9.38) perusteella saadaan

$$G^* \leq G. \quad (9.43)$$

Esimerkki 9.4 Määritetään minimipainoa koskevien rajalauseiden perusteella kuvan 9.7 kehän minimipaino.

Rakenteen paino on kuvan 9.7 tietojen perusteella verrannollinen lukuun

$$G = 4M_{p1} + 3M_{p2}. \quad (9.44)$$



Kuva 9.8 Kaksiaukkoinen kehä. Yhdistetyt mekanismit d , e ja f .

Alaraja-arviot plastisille momenteille saadaan perusmekanismien avulla. Mekanismin a perusteella $M_{p1} = 1$, ja mekanismista b seuraa arvo $M_{p1} = \frac{1}{2}$. Vastaavasti mekanismin c perusteella $M_{p2} = \frac{1}{3}$. Pisteessä A kuvassa 9.9 $(M_{p1}, M_{p2}) = \left(1, \frac{1}{3}\right)$, ja vastaava minimipainon ala-raja on $G^- = 4(1) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = 5$.

Seuraavaksi yritetään kasvattaa G :n arvoa pitämällä plastisten momenttien suhde samana kuin pisteessä A eli $M_{p1} = 3M_{p2}$. Suora $M_{p1} = 3M_{p2}$ kulkee mekanismien a ja c työyhtälöitä kuvaavien suorien leikkauspisteen A kautta.

Vaadittavat plastisten momenttien arvot M_{p1} ja M_{p2} kuormakertoimen arvolla yksi ($\lambda = 1$) tapauksessa $M_{p1} = 3M_{p2}$ voidaan määrittää esim. mekanismimenetelmällä. Tässä tapauksessa murtumismekanismi on kuvan 9.8d mukainen.

Mekanismin d avulla ratkaistaan, (kun $\lambda = 1$, $M_{p1} = 3M_{p2}$),

$$M_{p1} = 3M_{p2} = \frac{9}{7}, \quad (9.45)$$

jota esittää piste B kuvassa 9.9 sallitun alueen rajalla ja mekanismin d työyhtälön suoralla.

Lasketaan sitten mekanismiin d liittyvän ratkaisun muiden kuin myötönivelpisteiden momentit kuormakertoimen arvolla yksi. Mekanismin e avulla kirjoitetaan virtuaalisen työn yhtälö

$$M_2(-\theta) + M_{p1}2\theta + M_{p1}\theta = 4\theta, \quad (9.46)$$

josta seuraa

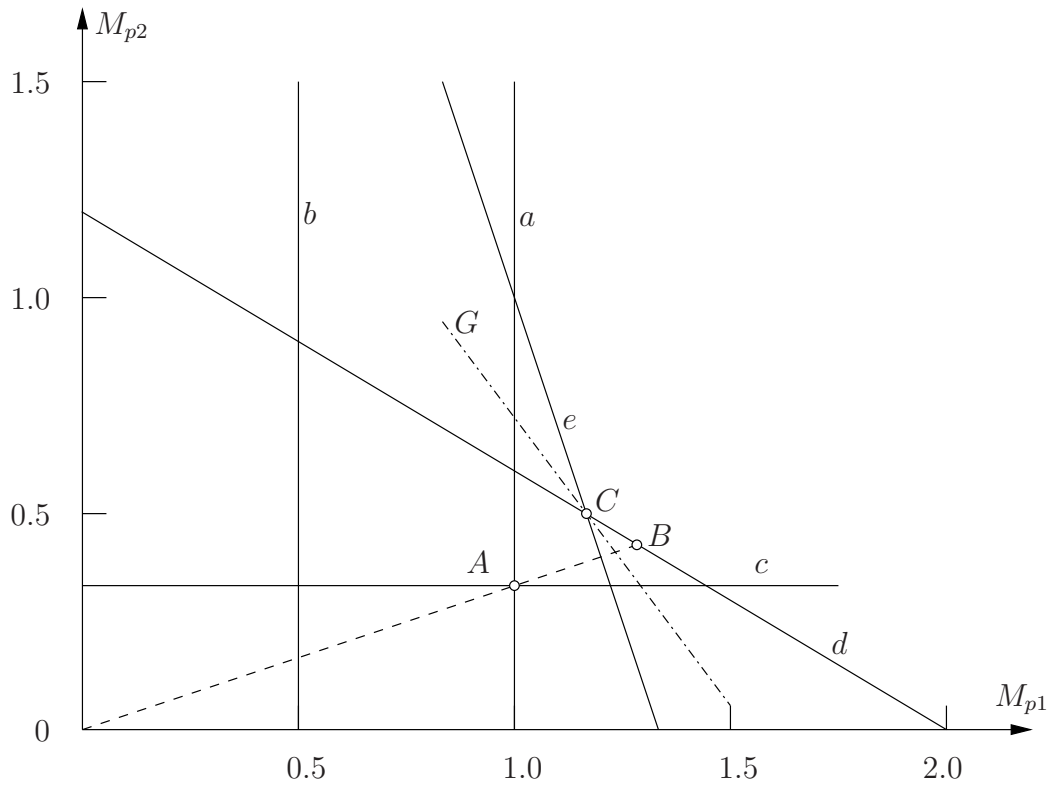
$$M_2 = 3M_{p1} - 4 = (27 - 28)/7 = -1/7. \quad (9.47)$$

Nurkan 5 – 6 – 7 nurkkakiertymämekanismin avulla saadaan yhtälö

$$M_5(-\theta) + M_6(-\theta) + M_7\theta = 0, \quad (9.48)$$

josta ratkaistaan

$$M_7 = M_5 + M_6 = -M_{p1} + M_{p2} = -\frac{9}{7} + \frac{3}{7} = -\frac{6}{7}. \quad (9.49)$$



Kuva 9.9 Kaksiaukkoinen kehä. Mekanismien työyhtälöitä kuvaavat suorat.

Palkkimekanismin, jossa on nivelkiertymät $-\theta$, 2θ ja θ leikkauksissa 7, 9 ja 11, avulla saadaan

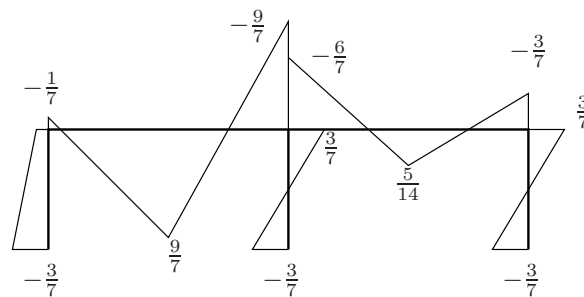
$$-\theta \left(-\frac{6}{7} \right) + 2\theta M_9 + \theta \left(\frac{3}{7} \right) = 2, \quad (9.50)$$

josta saadaan

$$M_9 = \left(2 - \frac{9}{7} \right) / 2 = \frac{5}{14}. \quad (9.51)$$

Koska momentit toteuttavat tasapaino- ja myötöehdot, saadaan ratkaisua vastaava minimipainon yläraja

$$G^+ = 4M_{p1} + 3M_{p2} = 4 \left(\frac{9}{7} \right) + 3 \left(\frac{3}{7} \right) \approx 6.43. \quad (9.52)$$



Kuva 9.10 Kaksiaukkoinen kehä. Mekanismin d liittyvä taivutusmomenttikuvio.

Tässä vaiheessa tiedetään, että minimipaino on rajoissa

$$5 \leq G_{\min} \leq 6.43. \quad (9.53)$$

Pisteen B kautta kulkevan mekanismin d työyhtälö on

$$3M_{p1} + 5M_{p2} = 6. \quad (9.54)$$

Eliminoimalla painosuoran yhtälön (9.44) ja työyhtälön (9.54) avulla plastinen momentti M_{p2} tulee

$$G = 3.6 + 2.2M_{p1} \quad (9.55)$$

mekanismin d suoralla. Paino G pienenee, kun M_{p1} pienenee (ja M_{p2} :n itseisarvo kasvaa). Plastisen momentin M_{p1} pienentämistä voidaan jatkaa kunnes myötöehtoa rikotaan jossain leikkauksessa. Nurkan 2 momentti (mekanismista e (9.46))

$$M_2 = 3M_{p1} - 4 \quad (9.56)$$

tulee kriittiseksi ja itseisarvoltaan yhtäsuureksi kuin M_{p2} , kun $M_{p1} = \frac{7}{6}$ ja suoraa d pitkin siirrytään pisteeseen C : $(M_{p1}, M_{p2}) = \left(\frac{7}{6}, \frac{1}{2}\right)$. Kehä sortuu nyt myös mekanismin e mukaisesti. Mekanismin e työyhtälö on

$$3M_{p1} + M_{p2} = 4. \quad (9.57)$$

Koska painosuoran kulmakerroin $(-4/3)$ on mekanismeja d ja e vastaavien suorien kulmakerrointen $(-3/5, \text{ ja } -3)$ välissä, esittää pisteen C kautta kulkeva painosuora erästä mekanismeista, joka toteuttaa mekanismiehdon. Pisteen C kautta kulkevan painosuoran yhtälö saadaan mekanismien d ja e suorien lineaarikombinaationa

$$3M_{p1} + 5M_{p2} + \lambda(3M_{p1} + M_{p2}) = 6 + \lambda 4. \quad (9.58)$$

Kombinointikertoimelle λ haetaan sellainen arvo, että lineaarikombinaatiosuoran kulmakerroin on sama kuin painosuoraparven suorilla (9.44):

$$\frac{3(1+\lambda)}{5+\lambda} = \frac{4}{3} \Rightarrow \lambda = 2.2. \quad (9.59)$$

Haetun suoran yhtälö on siis

$$9.6M_{p1} + 7.2M_{p2} = 14.8, \quad (9.60)$$

ja se on kuvan 9.8 mekanismin f työyhtälö. Kehän minimipaino on

$$G_{\min} = 4M_{p1} + 3M_{p2} = 4\left(\frac{7}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) \approx 6.17. \quad (9.61)$$

Pisteessä C toteutuvat minimipainolta vaadittavat ehdot.

Luku 10

Muuttuva toistuva kuormitus

Palkkien ja kehien plastinen rajakuorma määritettiin edellä otaksumalla kuormitus suhteelliseksi, jolloin kaikki kuormat kasvavat tasaisesti, kunnes tietyllä kuormakertoimen arvolla rakenne sortuu.

Käytännössä rakenteisiin vaikuttavat kuormat voivat olla osaksi muuttuvia, kuten liikkuva kuorma, tuulikuorma ja lumikuorma ja osaksi pysyviä, kuten omapaino. Kuormien tulevaa aikahistoriaa on vaikea määrittää kovinkaan tarkasti. Sensijaan kuormien ääriarvoja voidaan arvioida paremmin.

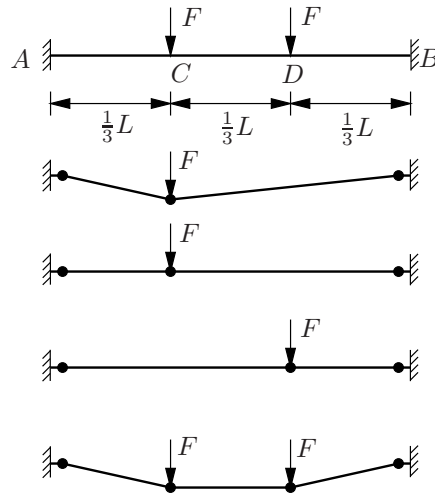
Jos kehän kuormat muuttuvat toisistaan riippumatta tietyissä rajoissa toistuvasti, niin se voi sortua plastista rajakuormakerrointa λ_p pienemmällä kuormakertoimen arvolla vähittäismurron seurauksena tai vastakkaisiin suuntiin tapahtuvan plastisoitumisen takia.

Muuttuvassa toistuvassa kuormituksessa eri kuormien muuttuessa toisistaan riippumatta jokin kuormitustilanne voi aiheuttaa rajoittunutta paikallista plastisoitumista, joka ei vielä johda rakenteen sortumiseen. Jollain toisella kuormitusyhdistelmällä voi syntyä niinikään paikallista plastisoitumista rakenteen johonkin muuhun osaan. Toistuvassa kuormituksessa plastisoituminen voi edetä vuoronperään rakenteen eri osissa, ja lopulta voi syntyä tilanne, joka muistuttaa jotakin suhteellisen, monotoonisesti kasvavan kuormituksen sortumismekanismeja.

Kuvan 10.1 jäykästi tuetun ja kahdella pistekuormalla kolmannespisteistä kuormitetun palkin plastinen rajakuorma on $F_p = 9M_p/L$. Jos kuorma F vaikuttaa aluksi vain pisteessä C , niin tuelle A syntyy plastinen nivel kuorman arvolla $F = 6.75M_p/L$. Vastaavasti tuelle B syntyy nivel, kun pisteessä D on kuorma $F = 6.75M_p/L$.

Jos pisteiden C ja D pistekuormat vaikuttavat vuoronperään toistuvasti, niin palkki mukautuu kuormitukseen, kun $F < 8.10M_p/L$. Sensijaan, jos $F \in [8.10M_p/L, 9M_p/L]$, niin palkkiin syntyy vähittäismurtomekanismi ja palkki sortuu kasvavan plastisen deformaation takia.

Jos staattisesti määräämätöntä palkkia tai kehää kuormitetaan myötökuormaa suuremmalla kuormalla, niin siihen jää yleensä jäännösmomenttijakauma kuorman poistamisen jälkeen. Momentti jakautuu eri tavalla kuormitusvaiheessa ja kuorman poistovaiheessa kuormitusvaiheessa syntyneiden plastisten muodonmuutosten ansiosta. Aluksi momentin muutos noudattaa kimmoista lakia $\Delta M = EI\Delta\kappa$. Kimmoisen ideaaliplastisen momentin ja käyristymän välisen riippuvaisuuden tapauksessa palautumisvaiheen kimmainen momentin



Kuva 10.1 Jäykästi tuetun palkin plastisoituminen.

muutos voi olla enintään $\Delta M = 2M_m = 2M_p$, missä M_m on myötömomentin arvo ja tässä tapauksessa plastinen momentti on yhtä suuri kuin myötömomentti eli $M_p = M_m$.

Kuvaan 10.2 on piirretty kimmoinen ideaaliplastinen momentin ja käyristymän välinen yhteys ja poikkileikkauksen plastisoitumista tarkemmin seuraava momentin ja käyristymän välinen riippuvaisuus. Esimerkiksi suorakaidepoikkileikkauksella $M_p/M_m = 1.5$, ja momentin ja käyristymän välinen riippuvaisuus on johdettu tälle tapaukselle aikaisemmin. Yleisemmän (M, κ) -riippuvaisuuden $OABCD$ tapauksessa plastisoituminen toiseen suuntaan kuormitettaessa alkaa käyrän pisteessä C , kun momentin muutos tarkastelupoikkileikkauksessa on $\Delta M = 2M_m$.

Esimerkki 10.1 Tutkitaan kuvan 10.3 nelilaippaisen poikkileikkauksen jäännösjännityksiä.

Tarkastellaan nelilaippaista kerrospalkkia, jonka poikkileikkaukseen vaikuttaa vain momentti M . Palkin akselin suuntainen venymä muuttuu korkeuden suunnassa lineaarisesti. Otaksutaan, että kerrospalkin laipat toimivat samalla tavalla vedossa ja puristuksessa. Tällöin

$$\sigma_4 = -\sigma_1, \quad \sigma_3 = -\sigma_2, \quad (10.1)$$

ja taivutusmomentti on

$$M = -3\sigma_1 Ah - \sigma_2 Ah, \quad (10.2)$$

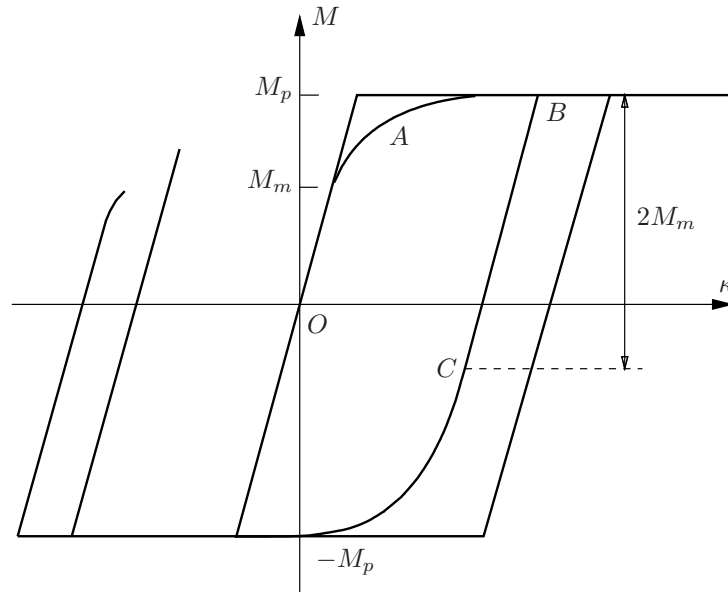
missä A on laipan pinta-ala ja h on laippojen välimatka. Taivutusteorian mukaan lineaarisesti korkeuden suhteen jakautuneen venymän arvot laippojen kohdalla toteuttavat ehdot

$$\varepsilon_1 = 3\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3 = -\varepsilon_2, \quad \varepsilon_4 = -\varepsilon_1. \quad (10.3)$$

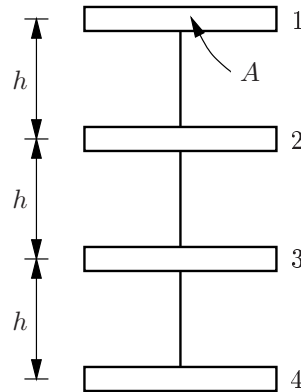
Kun laipat ovat kimmoisia, jännitykset jakautuvat myös lineaarisesti, ja $\sigma_1 = 3\sigma_2$, $M = -10\sigma_2 Ah = -\frac{10}{3}\sigma_1 Ah$. Tällöin kimmoisessa tilanteessa

$$\sigma_1 = -\frac{3M}{10Ah} \equiv \sigma_1^e, \quad \sigma_2 = -\frac{M}{10Ah} \equiv \sigma_2^e. \quad (10.4)$$

Vektori $\boldsymbol{\sigma}^e = [\sigma_1^e, \sigma_2^e]^T$ sisältää kimmoisen poikkileikkauksen jännitykset.



Kuva 10.2 Momentin ja käyristymän välinen riippuvaisuus.



Kuva 10.3 Nelilaippainen poikkileikkaus.

Uloin laippa myötää, kun

$$|M| = M_m = \frac{10}{3}\sigma_m Ah. \quad (10.5)$$

Täysplastisessa tilanteessa $|M| = M_p$ kaikki laipat myötäävät ja

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_m, \quad (10.6)$$

jolloin

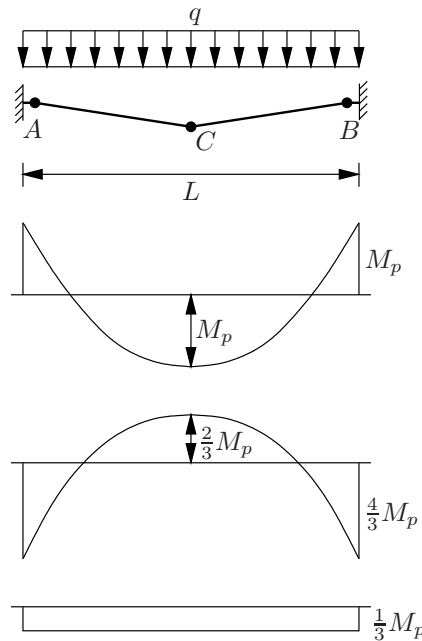
$$|M| = M_p = 4\sigma_m Ah. \quad (10.7)$$

Jos esimerkiksi poikkileikkaus kuormitetaan siten, että

$$M = \frac{11}{3}\sigma_m Ah \equiv M^* < M_p, \quad (10.8)$$

niin jännitykset laipoissa ovat

$$\sigma_1 = -\sigma_m, \quad \sigma_2 = -\frac{2}{3}\sigma_m. \quad (10.9)$$



Kuva 10.4 Jäykästi tuetun palkin momentit ja jäännösmomentit tasaisesta kuormasta.

Kimmoiseksi otaksutun poikkileikkauksen jännitykset samalla momentin arvolla ovat

$$\sigma_1^e = -\frac{11}{10}\sigma_m, \quad \sigma_2^e = -\frac{11}{30}\sigma_m. \quad (10.10)$$

Jos kuormitus poistetaan siten, että momentti menee nolaksi, niin laipat palautuvat kimmoisesti ja momentin arvolla nolla laippoihin jäävät jäännösjännitykset

$$\sigma_1^r = \sigma_1 - \sigma_1^e = \frac{1}{10}\sigma_m, \quad \sigma_2^r = \sigma_2 - \sigma_2^e = -\frac{3}{10}\sigma_m. \quad (10.11)$$

Jäännösjännityksiä vastaava momentti on nolla. Jos tämän jälkeen poikkileikkausta kuormitetaan uudelleen samanmerkkisellä momentilla kuin edellä, niin poikkileikkaus toimii kimmoisesti, kun $M < M^*$.

Kuormitettaessa esimerkiksi kuvan 10.4 jäykästi tuettua palkkia tasaisella kuormalla plastiseen murtoon, joka tapahtuu kuorman intensiteetin arvolla $q_p = 16M_p/L^2$, momentti jakautuu parabolisesti väleillä AC ja CB , ja momentti on $|M| = M_p = q_p L^2/16$ keskellä ja tuilla. Seuraavissa kuvissa on momentin muutos, kun kuorma palautetaan nolkaan, ja (tässä tapauksessa tasainen) jäännösmomenttijakauma $M^r = \frac{1}{3}M_p$. Kuormitettaessa takaisin kuorman arvoon $q = 16M_p/L^2$ momentin muutos tapahtuu kuvan 10.4 palkissa kimmoisesti.

Esimerkin tapauksessa, jos kuorma muuttuu välillä $[0, 16M_p/L^2]$, kuorman muutokset ensimmäisen kuormitusvaiheen jälkeen aiheuttavat vain kimmoisia muodonmuutoksia. Yleensä tällaisen tilan saavuttamista ei ole helppo todentaa.

Jos rakenne päättyy tilaan, jossa muuttuvassa toistuvassa kuormituksessa ei enää synny uusia plastisia muodonmuutoksia, niin taivutusmomentti on

$$M = m + M^e, \quad (10.12)$$

missä $m \equiv M^r$ on kuorman arvoa nolla vastaava jäännösmomentti ja M^e on vallitsevaa kuorman arvoa vastaava kimmoisesti laskettu momentti.

Jos rakenne on saavuttanut sellaisen tilan, että tietyissä rajoissa tapahtuvat kuormanmuutokset ovat kimmoisia, niin jäännösmomenttijakauma ei enää muutu ja rakenne on mukautunut kuormitukseen.

Palkin tai kehän käyttäytymistä muuttuvassa toistuvassa kuormituksessa voidaan seurata vaihe vaiheelta laskemalla kimmoisella plastisella mallilla, kuten tehtiin edellä ristikoiesimerkin yhteydessä. Tämä on kuitenkin käsinlaskuna hankalaa, eikä kuormien muutoshistoriaa kuitenkaan tunneta riittävän tarkasti. Tämän vuoksi on kehitetty yksinkertaisempia menetelmiä, joilla voi tutkia rakenteen mukautumismahdollisuuksia toistuvaan muuttuvaan kuormitukseen.

Eräs ehto rakenteen mukautumiselle toistuvaan kuormitukseen on, ettei annetulla kuormien muuttumisvälillä mihinkään kohtaan synny vastakkaisiin suuntiin tapahtuvia plastisia muodonmuutoksia kuten väsytytkuormituksessa. Mukautumisen välttämätön ehto on, että

$$M^{e,\max} - M^{e,\min} \leq 2M_m, \quad (10.13)$$

missä $M^{e,\max}$ ja $M^{e,\min}$ ovat tarkastelupoikkileikkauksen suurin ja pienin kimmainen momentti kaikki kuormitusyhdistelmät huomioon ottaen.

10.1 Mukautumislause

Kehä tai palkki mukautuu muuttuvaan toistuvaan kuormitukseen, jos on olemassa sellainen jäännösmomenttijakauma $\bar{m}$, että kaikissa poikkileikkauksissa toteutuvat ehdot

$$\bar{m} + M^{e,\max} \leq M_p, \quad (10.14)$$

$$\bar{m} + M^{e,\min} \geq -M_p,$$

$$M^{e,\max} - M^{e,\min} \leq 2M_m, \quad (10.15)$$

missä $M^{e,\max}$ ja $M^{e,\min}$ ovat tarkastelupoikkileikkauksen suurin ja pienin kimmoiselle rakenteelle laskettu momentti kaikki kuormitusyhdistelmät huomioonottaen. Mukautumisteoreema on helpoin todistaa kimmoiselle ideaaliplastiselle (M, κ) -riippuvaisuudelle, jolloin $M_m = M_p$.

Lause 10.1 *Palkki- tai keharakenne mukautuu muuttuvaan toistuvaan kuormitukseen, jos löytyy sellainen jäännösmomenttijakauma $\bar{m}$, että ehdot (10.14) toteutuvat.*

Todistus. Merkittään, että todellinen jäännösmomenttijakauma palkissa tai kehässä on $m(s)$, missä s on palkin tai kehän osiin määritelty sauvan akselin suuntainen koordinaatti. Jäännösmomentti

$$m = M - M^e \quad (10.16)$$

toteuttaa tasapainoehdot ulkoisen kuorman arvolla nolla. Tarkastellaan positiivista suuretta

$$U = \int_s \frac{(m - \bar{m})^2}{2EI} ds, \quad (10.17)$$

missä EI on sauvan taivutusjäykkyys. Momentin muutosta δm vastaa muutos

$$\delta U = \int_s \frac{(m - \bar{m})\delta m}{EI} ds. \quad (10.18)$$

Osoitetaan, että

$$\delta U \leq 0. \quad (10.19)$$

Jäännösmomenttijakaumaan $m(s)$ syntyy muutos, jos jossain kohtaa rakenteen plastiset nivelkiertymät kasvavat, kun momentin arvo saavuttaa näissä leikkauksissa kyseisessä kuormitustilanteessa plastisen momentin suuruisen arvon. Nämä plastisten nivelten lisäkiertymät $\delta\theta_j$ tapahtuvat nivelpaikoissa h_j , ja ne ovat yhteensopivia käyrityksen muutosten $\delta M/EI$ kanssa. Koska kimmoiselle rakenteelle lasketut käyrityksen muutokset $\delta M^e/EI$ vastaavat määritelmän mukaan nollan suuruisia plastisia nivelkiertymiä, ovat käyritykset $\delta(M - M^e)/EI = \delta m/EI$ myös yhteensopivia plastisten nivelten kiertymien muutosten $\delta\theta_j$ kanssa.

Momentit $(m - \bar{m})$ ovat tasapainossa nollakuorman kanssa, ja tällöin voidaan kirjoittaa virtuaalisen työn yhtälö

$$\int_s \frac{(m - \bar{m})\delta m}{EI} ds + \sum_j (m_j - \bar{m}_j)\delta\theta_j = 0, \quad (10.20)$$

missä m_j ja $\bar{m}_j$ ovat momenttien $m(s)$ ja $\bar{m}(s)$ arvot nivelpisteissä h_j . Ottamalla huomioon muutoksen δU kaava virtuaalisen työn yhtälössä saadaan

$$\delta U = - \sum_j (m_j - \bar{m}_j)\delta\theta_j. \quad (10.21)$$

Jos jossakin leikkauksessa

$$m_j < \bar{m}_j, \quad (10.22)$$

niin ensimmäisen ehdon (10.14) mukaan

$$m_j + M_j^{e,\max} < M_{pj}. \quad (10.23)$$

Suurin mahdollinen momentti tarkastelupoikkileikkauksessa on

$$M_j^{\max} = m_j + M_j^{e,\max}, \quad (10.24)$$

joten päätellään, että

$$M_j^{\max} < M_{pj}. \quad (10.25)$$

Koska suurin mahdollinen momentti tarkasteltavassa poikkileikkauksessa on nyt pienempi kuin M_p , voi plastisen nivelkiertymän muutos tapahtua vain minimimomentin arvolla $-M_p$, ja plastisen nivelkiertymän muutoksen $\delta\theta_j$ pisteessä h_j on oltava negatiivinen. Koska alunperin otaksuttiin, että $m_j < \bar{m}_j$, saadaan

$$(m_j - \bar{m}_j)\delta\theta_j > 0. \quad (10.26)$$

Otaksumalla puolestaan, että

$$m_j > \bar{m}_j, \quad (10.27)$$

osoitetaan vastaavalla tavalla, että plastisen nivelkiertymän muutos kohdassa h_j on positiivinen, eli $\delta\theta_j > 0$, ja tässäkin tapauksessa

$$(m_j - \bar{m}_j)\delta\theta_j > 0. \quad (10.28)$$

Jos $m_j = \bar{m}_j$, niin pätee

$$(m_j - \bar{m}_j)\delta\theta_j = 0. \quad (10.29)$$

Koska δU :n kaavan oikean puolen summalausekkeen kaikki termit on nyt osoitettu ei-negatiivisiksi, päätellään, että

$$\delta U \leq 0. \quad (10.30)$$

Jos rakenne käyttäytyy kimmoisesti, niin kaikki plastisten nivelkiertymien muutokset $\delta\theta_j$ ovat nollia, suureen U muutos $\delta U = 0$ ja suure U pysyy vakiona. Plastisen deformaation tapauhtuessa U pienenee, mutta rakenteen toimiessa kimmoisena U pysyy vakiona. Kaavan (10.17) mukaan U on aina positiivinen ja äärellinen, joten suureen U täytyy kuormitusprosessin aikana lähestyä positiivista äärellistä arvoa tai nollaa. Jos U menee kohti nollaa, niin todelliset jäännösmomentit ovat rakenteen jokaisessa kohdassa samat kuin otaksutut jäännösmomentit. Koska suure U ei kasva ja pysyy kaikissa tapauksissa äärellisenä, rakenne mukautuu muuttuvaan toistuvaan kuormitukseen, kun kaavojen (10.14) ehdot on täytetty.

Yleisemmän (M, κ) -riippuvaisuuden tapauksessa momentin kimmoisen muutoksen väli on pienempi kuin $2M_p$, ja rakenne ei mukaudu toistuvaan muuttuvaan kuormitukseen, jos jossakin kohdassa momentin muutos ylittää kimmoisen vaihteluväin, eli rikkoo ehtoa (10.15). Jos ehdot (10.14) määrittävät rakenteen murtokuorman vaihtuvassa toistuvassa kuormituksessa, niin kyseessä on **vähittäismurto**. Jos rakenteen rajakuorman määrittää ehto (10.15), niin kyseessä on **vaihtoplastisoituminen**, koska tällöin jossakin kohdassa syntyy kuormitusjaksojen vuorotellessa plastisoitumista vastakkaisiin suuntiin.

10.2 Vähittäismurtokuorman ala- ja yläraja

Otakсутaan, että vaihtuvan toistuvan kuormituksen intensiteetti voidaan esittää kuormakertoimella λ . Tällöin kimmoiseksi otaksutulle rakenteelle määritetyt maksimi- ja minimimomentit ovat $\lambda M^{e,\max}$ ja $\lambda M^{e,\min}$.

Alaraja

Jos löydetään jäännösmomenttijakauma $\bar{m}$, joka toteuttaa ehdot

$$\bar{m} + \lambda M^{e,\max} \leq M_p, \quad (10.31)$$

$$\bar{m} + \lambda M^{e,\min} \geq -M_p,$$

$$\lambda(M^{e,\max} - M^{e,\min}) \leq 2M_m, \quad (10.32)$$

niin kuormakerroin on korkeintaan muuttuvan toistuvan kuormituksen rajakuormakertoimen ¹ λ_s suuruinen. Esimerkiksi, jos asetetaan $\bar{m} = 0$, niin kuormakertoimen täytyy olla sellainen, ettei momentin muutos missään kohdassa (leikkauksessa) ole suurempi kuin $2M_m$ eikä kimmoisen rakenteen perusteella laskettu maksimimomentti ylitä arvoa M_p .

Yläraja

Rajakuorman ylärajan määrittää joko vaihtoplastisoituminen tai vähittäismurto. Muuttuvan toistuvan kuormituksen kuormakertoimen yläraja määritetään vaihtoplastisoitumisen perusteella yhtälöstä

$$\lambda(M_j^{e,\max} - M_j^{e,\min}) = 2M_{mj} \quad (10.33)$$

missä tahansa poikkileikkauksessa j .

Vaihtoplastisoitumisen rajakuormakerroin määritetään otaksumalla jokin mekanismi, kuten edellä tehtiin suhteellisen monotoonisen kuormituksen plastista rajakuormakerrointa λ_p laskettaessa. Tutkitaan mekanismeja, jossa plastisten nivelien kiertymät θ_j ovat kehän pisteissä h_j ja vastaavien leikkausten plastiset momentit ovat M_{pj} . Plastisten nivelkiertymien merkit otaksutaan samoiksi kuin kimmoisena laskettujen momenttien $\lambda M_j^{e,\max}$ ja $\lambda M_j^{e,\min}$ merkit. Jos leikkauksissa h_j ovat syntyneet kuormitusprosessin aikana jäännösmomentit m_j , niin nivelpisteissä j

$$\begin{aligned} m_j + \lambda M_j^{e,\max} &= M_{pj}, \quad \text{jos } \theta_j > 0, \\ m_j + \lambda M_j^{e,\min} &= -M_{pj}, \quad \text{jos } \theta_j < 0, \end{aligned} \quad (10.34)$$

ja rakenteeseen tulee vähittäismurto otaksutulla mekanismilla, ellei sellainen ole tullut jo jollakin muulla mekanismilla. Siten λ on vähittäismurtokuorman yläraja.

Ehdoista (10.34) seuraa

$$\lambda \left\{ \begin{array}{c} M_j^{e,\max} \\ M_j^{e,\min} \end{array} \right\} \theta_j + m_j \theta_j = M_{pj} |\theta_j|, \quad (10.35)$$

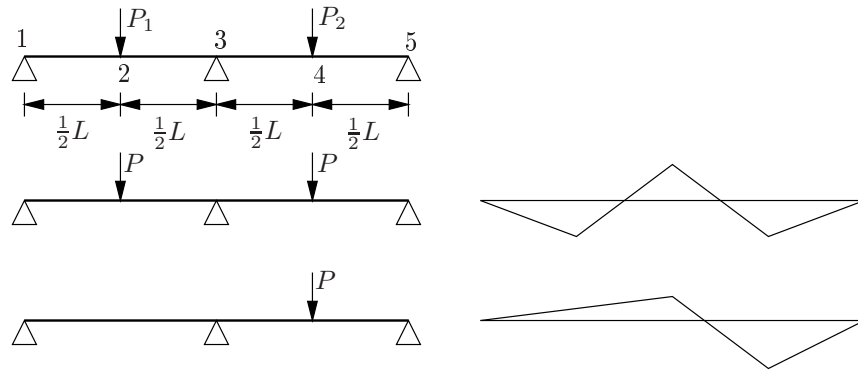
missä valitaan $M_j^{e,\max}$, jos θ_j on positiivinen, ja $M_j^{e,\min}$, jos θ_j on negatiivinen, ja oikean puolen termi on aina positiivinen. Summaamalla yli kaikkien mekanismin plastisten nivelten saadaan yhtälö

$$\lambda \sum_j \left\{ \begin{array}{c} M_j^{e,\max} \\ M_j^{e,\min} \end{array} \right\} \theta_j + \sum_j m_j \theta_j = \sum_j M_{pj} |\theta_j|. \quad (10.36)$$

Tuntemattomat jäännösmomentit m_j voidaan eliminoida virtuaalisen työn yhtälön avulla, koska ne toteuttavat homogeenisen tasapainoyhtälön

$$\sum_j m_j \theta_j = 0, \quad (10.37)$$

¹Kuormakertoimen alaindeksi s tulee sanoista *shake down*, joiden suomenkielinen vastine on tässä yhteydessä mukautua (kuormitukseen).



Kuva 10.5 Muuttuva toistuva kuormitus kaksiaukkoisella palkilla.

Taulukko 10.1 Kaksiaukkoisen palkin kimmoiset momentit ja nivelkiertymät.

	2	3	4
$P_1 = P_2 = P$	$\frac{5}{32}PL$	$-\frac{3}{16}PL$	$\frac{5}{32}PL$
$P_1 = 0, P_2 = P$	$-\frac{3}{64}PL$	$-\frac{3}{32}PL$	$\frac{13}{64}PL$
	0	$-\theta$	2θ

ja tällöin saadaan

$$\lambda \sum_j \left\{ \begin{array}{c} M_j^{e,\max} \\ M_j^{e,\min} \end{array} \right\} \theta_j = \sum_j M_{pj} |\theta_j|. \quad (10.38)$$

Kaavassa (10.38) valitaan momentti $M_j^{e,\max}$, jos nivelkiertymä θ_j on positiivinen, ja momentti $M_j^{e,\min}$, jos nivelkiertymä θ_j on negatiivinen.

Esimerkki 10.2 Määritetään kuvan 10.5 pääistään vapaasti tuetun kaksiaukkoisen palkin vähittäismurtokuorma.

Kaksiaukkoisen palkin kuormat P_1 ja P_2 muuttuvat tilojen $P_1 = P_2 = P$ ja $P_1 = 0, P_2 = P$ välillä. Taulukkoon 10.1 on laskettu kimmoiset momentit M_j^e pisteissä 2, 3, 4. Momenttijakauma on esitetty myös kuvassa 10.5.

Virtuaalisen työn yhtälö (10.38) on esimerkin tapauksessa

$$\left(-\frac{3}{16}PL\right)(-\theta) + \left(\frac{13}{64}PL\right)(2\theta) = 3M_p\theta, \quad (10.39)$$

josta ratkaistaan vähittäismurtokuorma

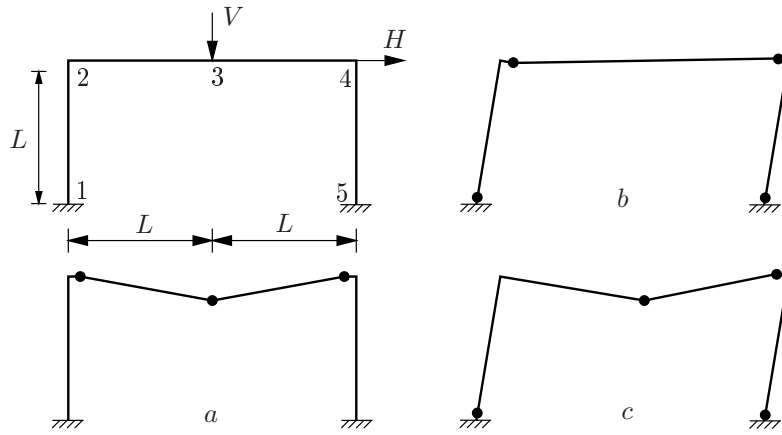
$$P_v = \frac{96}{19} \frac{M_p}{L} \approx 5.05 \frac{M_p}{L}. \quad (10.40)$$

Kimmoisena laskettujen momenttien suurin erotus syntyy leikkaukseen 2, ja vaihtoplastisoitumiskuorman laskemiseksi saadaan yhtälö

$$\left(\frac{3}{64} + \frac{5}{32}\right) PL = 2M_m, \quad (10.41)$$

ja vaihtoplastisoitumiskuorma

$$P_a = \frac{128}{13} \frac{M_m}{L}. \quad (10.42)$$



Kuva 10.6 Jätäkäntäinen kehä.

Jos muotosuhteelle otaksutaan

$$\Phi \equiv \frac{M_p}{M_m} = 1.15, \quad (10.43)$$

niin

$$P_a \approx 8.56 \frac{M_p}{L}, \quad (10.44)$$

ja tässä tapauksessa rakenteen kestävyuden toistuvassa muuttuvassa kuormituksessa määrittää vähittäismurtokuorma

$$P_s \approx 5.05 \frac{M_m}{L}. \quad (10.45)$$

Esimerkki 10.3 Määritetään kuvan 10.6 kehän rajakuormakerroin muuttuvassa toistuvassa kuormituksessa, kun vaakakuorma muuttuu välillä $(0, H)$, ja pystykuorma muuttuu välillä $(0, V)$. Kehän M_p ja EI ovat vakiot, ja $M_p = \Phi M_m = 1.15 M_m$.

Lasketaan kimmoiset momentit leikkauksissa j taulukkoon 10.2. Ratkaistaan tehtävä kulmanmuutosmenetelmällä. Sauvanpäämomenttien kaavat ovat

$$M_{ij} = a_{ij} \varphi_{ij} + b_{ij} \varphi_{ji} - c_{ij} \psi_{ij} + M K_{ij}, \quad (10.46)$$

$$M_{ji} = a_{ji} \varphi_{ji} + b_{ji} \varphi_{ij} - c_{ji} \psi_{ji} + M K_{ji},$$

missä φ_{ij} , φ_{ji} ovat sauvanpäiden kiertymät, $M K_{ij}$, $M K_{ji}$ ovat kiinnitysmomentit ja a_{ij} , a_{ji} , b_{ij} , b_{ji} , c_{ij} , c_{ji} ovat jäykkyyskertoimet. Ratkaistaan momentit erikseen vaakakuormalle H ja pystykuormalle V . Numeroidaan sauvat kriittisten leikkausten mukaisesti: 12, 24, 45. (Sauva 24 voitaisiin kimmoisessa ratkaisussa jakaa kahteen osaan, jolloin tulisi enemmän tuntemattomia mutta ei tarvittaisi kiinnitysmomentin kaavaa).

Tarkastellaan ensin vaakakuorman H tapausta. Symmetrian nojalla päätellään, että

$$\varphi_2 = \varphi_4, \quad (10.47)$$

ja reunaehtojen perusteella

$$\varphi_1 = \varphi_5 = 0. \quad (10.48)$$

Merkitään, että pystysauvojen jäykänkappaleen kiertymät ovat

$$\psi_{12} = \psi_{21} = \psi_{45} = \psi_{54} \equiv \psi. \quad (10.49)$$

Tasapainoehdoissa tarvittavat sauvanpäämomenttien kaavat ovat

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= b_{12}\varphi_2 - c_{12}\psi, \\
 M_{21} &= a_{21}\varphi_2 - c_{21}\psi, \\
 M_{24} &= a_{24}\varphi_2 + b_{24}\varphi_4, \\
 M_{45} &= a_{45}\varphi_4 - c_{45}\psi, \\
 M_{54} &= b_{54}\varphi_4 - c_{54}\psi.
 \end{aligned} \tag{10.50}$$

Sauvavakiot ovat esimerkin kehällä

$$\begin{aligned}
 b_{12} = b_{45} &= \frac{2EI}{L}, \quad a_{21} = a_{54} = \frac{4EI}{L}, \quad a_{24} = a_{42} = \frac{4EI}{2L}, \\
 b_{24} = b_{42} &= \frac{2EI}{2L}, \quad c_{12} = c_{21} = c_{45} = c_{54} = \frac{6EI}{L}.
 \end{aligned} \tag{10.51}$$

Vaakakuorman tapauksessa kirjoitetaan tasapainoehdot

$$Q_{21} + Q_{45} = H \tag{10.52}$$

eli

$$M_{12} + M_{21} + M_{45} + M_{54} = -HL \tag{10.53}$$

ja

$$M_{21} + M_{24} = 0. \tag{10.54}$$

Sijoittamalla sauvanpäämomenttien kaavat tasapainoehtoihin tulee

$$(b_{12} + a_{21} + a_{45} + b_{54})\varphi_2 - (c_{12} + c_{21} + c_{45} + c_{54})\psi = -HL, \tag{10.55}$$

ja

$$(a_{21} + a_{24})\varphi_2 + b_{24}\varphi_4 - c_{21}\psi = 0. \tag{10.56}$$

Jälkimmäisestä tasapainoehdosta saadaan sauvavakioiden sijoittamisen jälkeen

$$\psi = \frac{7}{6}\varphi_2, \tag{10.57}$$

ja tulos huomioonottaen ratkaistaan edellisen tasapainoyhtälön avulla

$$\varphi_2 = \frac{1}{6} \frac{HL^2}{EI}, \quad \psi = \frac{7}{96} \frac{HL^2}{EI}. \tag{10.58}$$

Leikkauksien 1, 5, 2 ja 4 momentit vaakakuormasta H ovat

$$M_1 = M_{12} = -\frac{5}{16}HL = -M_5, \quad M_2 = M_{24} = \frac{3}{16}HL = -M_4. \tag{10.59}$$

Pystykuorman V tapauksessa

$$\varphi_1 = \varphi_5 = 0, \quad \varphi_2 = -\varphi_4. \tag{10.60}$$

Tasapainoehdosta

$$M_{21} + M_{24} = 0 \tag{10.61}$$

Taulukko 10.2 Yksiaukkoisen kehän kimmoiset momentit ja nivelkiertymät.

	1	2	3	4	5
$M^{e,V}$	$\frac{8}{80}VL$	$-\frac{16}{80}VL$	$\frac{24}{80}VL$	$-\frac{16}{80}VL$	$\frac{8}{80}VL$
$M^{e,H}$	$-\frac{25}{80}HL$	$\frac{15}{80}HL$	0	$-\frac{15}{80}HL$	$\frac{25}{80}HL$
$M^{e,\min}$	$-\frac{25}{80}HL$	$-\frac{16}{80}VL$	0	$-\frac{16}{80}VL - \frac{15}{80}HL$	0
$M^{e,\max}$	$\frac{8}{80}VL$	$\frac{15}{80}HL$	$\frac{24}{80}VL$	0	$\frac{8}{80}VL + \frac{25}{80}HL$
a		$-\theta$	2θ	$-\theta$	
b	$-\theta$	θ		$-\theta$	θ
c	$-\theta$		2θ	-2θ	θ
$M^{e,\max} - M^{e,\min}$	$\frac{25}{80}HL + \frac{8}{80}VL$	$\frac{15}{80}HL + \frac{16}{80}VL$	$\frac{24}{80}VL$	$\frac{15}{80}HL + \frac{16}{80}VL$	$\frac{25}{80}HL + \frac{8}{80}VL$

seuraa sauvanpäämomenttien kaavojen

$$M_{21} = a_{21}\varphi_2, \quad (10.62)$$

$$M_{24} = a_{24}\varphi_2 + b_{24}\varphi_4 + MK_{24}$$

ja kiinnitysmomentin kaavan

$$MK_{24} = -\frac{V(2L)}{8} \quad (10.63)$$

avulla yhtälö

$$(a_{21} + a_{24})\varphi_2 + b_{24}\varphi_4 + MK_{24} = (a_{21} + a_{24} - b_{24})\varphi_2 - \frac{VL}{4} = 0, \quad (10.64)$$

jonka ratkaisu on

$$\varphi_2 = \frac{1}{20} \frac{VL^2}{EI}. \quad (10.65)$$

Leikkauksien 1, 5, 2, 4 ja 3 momentit pystykuormasta V ovat

$$M_1 = M_{12} = \frac{1}{10}VL = M_5, \quad M_2 = M_{24} = -\frac{2}{10}VL = M_4, \quad M_3 = \frac{3}{10}VL. \quad (10.66)$$

Taulukkoon 10.2 on merkitty myös palkkimekanismin (a), sivusiirtymämekanismin (b) ja yhdistetyn mekanismin (c) nivelkiertymät.

Palkkimekanismin (a) tapauksessa virtuaalisen työn yhtälöstä

$$\lambda \sum_j \left\{ \frac{M_j^{e,\max}}{M_j^{e,\min}} \right\} \theta_j = \sum_j M_{pj} |\theta_j| \quad (10.67)$$

seuraa

$$\left(-\frac{16}{80}VL\right)(-\theta) + \left(\frac{24}{80}VL\right)(2\theta) + \left(-\frac{16}{80}VL - \frac{15}{80}HL\right)(-\theta) = 4M_p\theta. \quad (10.68)$$

Sivusiirtymämekanismin (mekanismi b) työyhtälö on

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{25}{80}HL\right)(-\theta) + \left(\frac{15}{80}HL\right)\theta \\ & + \left(-\frac{16}{80}VL - \frac{15}{80}HL\right)(-\theta) + \left(\frac{8}{80}VL + \frac{25}{80}HL\right)\theta = 4M_p\theta. \end{aligned} \quad (10.69)$$

Yhdistetyn mekanismin (mekanismi c) työyhtälö on

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{25}{80}HL\right)(-\theta) + \left(\frac{24}{80}VL\right)(2\theta) \\ & + \left(-\frac{16}{80}VL - \frac{15}{80}HL\right)(-2\theta) + \left(\frac{8}{80}VL + \frac{25}{80}HL\right)\theta = 6M_p\theta. \end{aligned} \quad (10.70)$$

Palkkimekanismin, sivusiirtymämekanismin ja yhdistetyn mekanismin virtuaalisen työn yhtälöistä seuraavat suorien yhtälöt

$$\frac{3}{64} \frac{HL}{M_p} + \frac{1}{4} \frac{VL}{M_p} = 1, \quad (10.71)$$

$$\frac{1}{4} \frac{HL}{M_p} + \frac{3}{40} \frac{VL}{M_p} = 1, \quad (10.72)$$

$$\frac{1}{6} \frac{HL}{M_p} + \frac{11}{60} \frac{VL}{M_p} = 1, \quad (10.73)$$

$\left(\frac{HL}{M_p}, \frac{VL}{M_p}\right)$ -tasossa, eli

$$\frac{3}{64}h + \frac{1}{4}v = 1, \quad (10.74)$$

$$\frac{1}{4}h + \frac{3}{40}v = 1, \quad (10.75)$$

$$\frac{1}{6}h + \frac{11}{60}v = 1 \quad (10.76)$$

(h, v) -tasossa, missä on merkitty

$$h \equiv \frac{HL}{M_p}, \quad v \equiv \frac{VL}{M_p}. \quad (10.77)$$

Piirtämällä suorien yhtälöt (h, v) -tasoon, kuvassa 10.7, saadaan selville kuormien sallittu alue, jossa ne voivat muuttua vapaasti siten, ettei vähittäismurtoa synny.

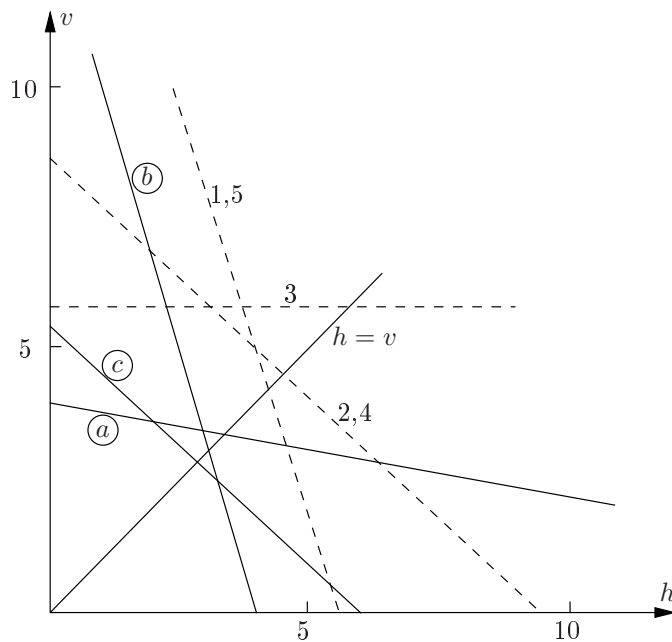
Vaihtoplastisoitumista ei synny, jos jokaisessa kriittisessä leikkauksessa toteutuu ehto

$$M^{e,\max} - M^{e,\min} \leq 2M_m. \quad (10.78)$$

Otaksutaan, että poikkileikkauksen muotokerroin on $\Phi = 1.15$ ja tällöin $M_m = M_p/1.15$.

Taulukon 10.2 kimmoisena laskettujen momenttien avulla saadaan ehdot

$$\begin{aligned} \frac{25}{80}HL + \frac{8}{80}VL &\leq 2\frac{M_p}{1.15}, \\ \frac{15}{80}HL + \frac{16}{80}VL &\leq 2\frac{M_p}{1.15}, \\ \frac{24}{80}VL &\leq 2\frac{M_p}{1.15}, \\ \frac{15}{80}HL + \frac{16}{80}VL &\leq 2\frac{M_p}{1.15}, \\ \frac{25}{80}HL + \frac{8}{80}VL &\leq 2\frac{M_p}{1.15}, \end{aligned} \quad (10.79)$$



Kuva 10.7 Kuormien sallittu alue vähittäismurron ja vaihtoplastisoitumisen suhteen.

eli

$$\begin{aligned}
 0.1797h + 0.575v &\leq 1, \\
 0.1078h + 0.115v &\leq 1, \\
 0.1725v &\leq 1, \\
 0.1078h + 0.115v &\leq 1, \\
 0.1797h + 0.575v &\leq 1,
 \end{aligned} \tag{10.80}$$

jotka on yhtäläisyysmerkin tapauksessa myös piirretty kuvaan 10.7. Kun vaakakuorma muuttuu välillä $(0, H)$ ja pystykuorma välillä $(0, V)$, niin vaihtoplastisoituminen ei määrää rajakuorman arvoa muuttuvassa toistuvassa kuormituksessa.

Tutkitaan seuraavaksi samaa kehää, kun vaakakuorma muuttuu välillä $(-H, H)$ ja pystykuorma välillä $(0, V)$. Taulukkoon 10.3 on jälleen koottu kimmoisena lasketut kriittisten leikkausten momentit ja mekanismien nivelkiertymät. Tässä tapauksessa kyseen voi tulla kaksi lisämekanismia, koska vaakakuorma voi saada myös negatiivisia arvoja.

Palkkimekanismin (a) virtuaalisen työn on nyt

$$\left(-\frac{16}{80}VL - \frac{15}{80}HL\right)(-\theta) + \left(\frac{24}{80}VL\right)(2\theta) + \left(-\frac{16}{80}VL - \frac{15}{80}HL\right)(-\theta) = 4M_p\theta. \tag{10.81}$$

Sivusiirtymämekanismin (b) ja yhdistetyn mekanismin (c) työyhtälöt ovat samat kuin edellisessä kuormitustapauksessa.

Taulukko 10.3 Yksiaukkoisen kehän kimmoiset momentit ja nivelkiertymät, kun vaakuorma voi saada myös negatiivisia arvoja.

	1	2	3	4	5
$M^{e,V}$	$\frac{8}{80}VL$	$-\frac{16}{80}VL$	$\frac{24}{80}VL$	$-\frac{16}{80}VL$	$\frac{8}{80}VL$
$M^{e,H}$	$-\frac{25}{80}HL$	$\frac{15}{80}HL$	0	$-\frac{15}{80}HL$	$\frac{25}{80}HL$
$M^{e,(-H)}$	$\frac{25}{80}HL$	$-\frac{15}{80}HL$	0	$\frac{15}{80}HL$	$-\frac{25}{80}HL$
$M^{e,\min}$	$-\frac{25}{80}HL$	$-\frac{16}{80}VL - \frac{15}{80}HL$	0	$-\frac{16}{80}VL - \frac{15}{80}HL$	$-\frac{25}{80}HL$
$M^{e,\max}$	$\frac{8}{80}VL + \frac{25}{80}HL$	$\frac{15}{80}HL$	$\frac{24}{80}VL$	$\frac{15}{80}HL$	$\frac{8}{80}VL + \frac{25}{80}HL$
a		$-\theta$	2θ	$-\theta$	
b	$-\theta$	θ		$-\theta$	θ
c	$-\theta$		2θ	-2θ	θ
d	θ	$-\theta$		θ	$-\theta$
e	θ	-2θ	2θ		$-\theta$
$M^{e,\max} - M^{e,\min}$	$\frac{50}{80}HL + \frac{8}{80}VL$	$\frac{30}{80}HL + \frac{16}{80}VL$	$\frac{24}{80}VL$	$\frac{30}{80}HL + \frac{16}{80}VL$	$\frac{50}{80}HL + \frac{8}{80}VL$

Sivusiirtymämekanismin (d) työyhtälö on

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{8}{80}VL - \frac{25}{80}HL\right)(-\theta) + \left(\frac{16}{80}VL + \frac{15}{80}HL\right)\theta \\ & + \left(-\frac{15}{80}HL\right)(-\theta) + \left(\frac{25}{80}HL\right)\theta = 4M_p\theta. \end{aligned} \quad (10.82)$$

Yhdistetyn mekanismin (e) työyhtälö on

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{8}{80}VL - \frac{25}{80}HL\right)(-\theta) + \left(\frac{16}{80}VL + \frac{15}{80}HL\right)(2\theta) \\ & + \left(-\frac{24}{80}VL\right)(-2\theta) + \left(\frac{25}{80}HL\right)\theta = 6M_p\theta. \end{aligned} \quad (10.83)$$

Mekanismien (b) ja (d) työyhtälöt ovat samat samoin mekanismien (c) ja (e), joten niitä edustavat suorat (h, v)-tasossa ovat samat.

Palkkimekanismin, sivusiirtymämekanismien ja yhdistettyjen mekanismien virtuaalisen työn yhtälöistä seuraavat suorien yhtälöt ovat

$$\frac{3}{32}h + \frac{1}{4}v = 1, \quad (a) \quad (10.84)$$

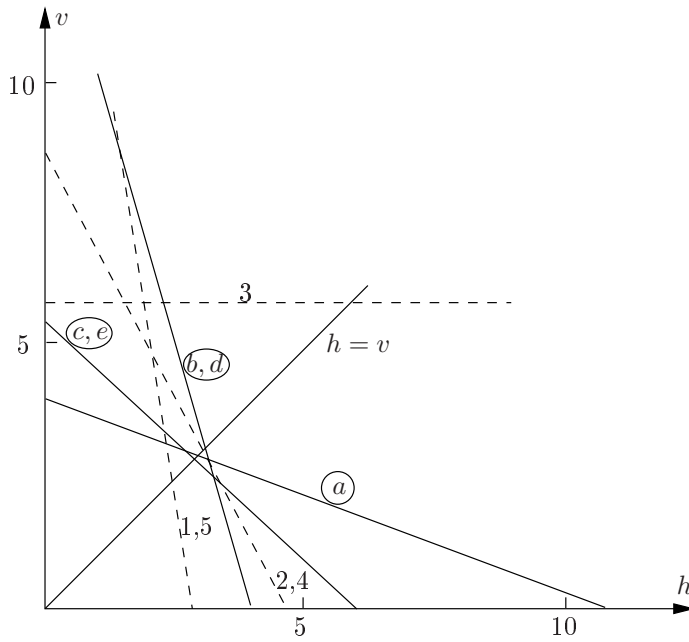
$$\frac{1}{4}h + \frac{3}{40}v = 1, \quad (b, d) \quad (10.85)$$

$$\frac{1}{6}h + \frac{11}{60}v = 1 \quad (c, e) \quad (10.86)$$

(h, v)-tasossa.

Vaihtoplastisoitumisehdosta

$$M^{e,\max} - M^{e,\min} \leq 2M_m \quad (10.87)$$



Kuva 10.8 Kuormien sallittu alue vähittäismurron ja vaihtoplastisoitumisen suhteen, kun vaakavoima voi muuttua välillä $(-H, H)$.

kriittisissä leikkauksissa saadaan nyt yhtäläisyysmerkillä yhtälöt

$$\begin{aligned}
 0.3594h + 0.575v &= 1, \\
 0.2156h + 0.115v &= 1, \\
 0.1725v &= 1, \\
 0.2156h + 0.115v &= 1, \\
 0.3594h + 0.575v &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{10.88}$$

Suorien yhtälöt on piirretty kuvaan 10.8. Tässä tapauksessa palkkimekanismi (a) tai leikkauksien 1 ja 5 vaihtoplastisoituminen määrää kehän rajakuorman muuttuvassa toistuvassa kuormituksessa.

Esimerkki 10.4 Tutkitaan kuvan 10.6 kehän murtokuormaa muuttuvassa toistuvassa kuormituksessa, kun vaakakuorma H voi muuttua välillä $(0, F)$ ja pystykuorma V voi samoin muuttua välillä $(0, F)$.

Taulukkoon 10.4 on jälleen merkitty palkkimekanismin (a), sivusiirtymämekanismin (b) ja yhdistetyn mekanismin (c) nivelkiertymät.

Palkkimekanismin (a) tapauksessa virtuaalisen työn yhtälöstä

$$\lambda \sum_j \left\{ \frac{M_j^{e,\max}}{M_j^{e,\min}} \right\} \theta_j = \sum_j M_{pj} |\theta_j|
 \tag{10.89}$$

saadaan nyt yhtälö

$$\left(-\frac{16}{80} FL \right) (-\theta) + \left(\frac{24}{80} FL \right) (2\theta) + \left(-\frac{31}{80} FL \right) (-\theta) = 4M_p \theta,
 \tag{10.90}$$

Taulukko 10.4 Yksiaukkoisen kehän kimmoiset momentit ja nivelkiertymät, kun vaakuorma H ja pystykuorma V muuttuvat välillä $(0, F)$.

	1	2	3	4	5
$M^{e,V}$	$\frac{8}{80}FL$	$-\frac{16}{80}FL$	$\frac{24}{80}FL$	$-\frac{16}{80}FL$	$\frac{8}{80}FL$
$M^{e,H}$	$-\frac{25}{80}FL$	$\frac{15}{80}FL$	0	$-\frac{15}{80}FL$	$\frac{25}{80}FL$
$M^{e,\min}$	$-\frac{25}{80}FL$	$-\frac{16}{80}FL$	0	$-\frac{31}{80}FL$	0
$M^{e,\max}$	$\frac{8}{80}FL$	$\frac{15}{80}FL$	$\frac{24}{80}FL$	0	$\frac{33}{80}FL$
a		$-\theta$	2θ	$-\theta$	
b	$-\theta$	θ		$-\theta$	θ
c	$-\theta$		2θ	-2θ	θ
$M^{e,\max} - M^{e,\min}$	$\frac{33}{80}FL$	$\frac{31}{80}FL$	$\frac{24}{80}FL$	$\frac{31}{80}FL$	$\frac{33}{80}FL$

josta seuraa

$$(F_s)_a = \frac{64}{9} \frac{M_p}{L} \approx 7.111 \frac{M_p}{L}. \quad (10.91)$$

Sivusiirtymämekanismin (b) työyhtälöstä

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{25}{80}FL\right)(-\theta) + \left(\frac{15}{80}FL\right)\theta \\ & + \left(-\frac{31}{80}FL\right)(-\theta) + \left(\frac{33}{80}FL\right)\theta = 4M_p\theta. \end{aligned} \quad (10.92)$$

ratkaistaan

$$(F_s)_b = \frac{40}{13} \frac{M_p}{L} \approx 3.077 \frac{M_p}{L}. \quad (10.93)$$

Yhdistetyn mekanismin (c) työyhtälöstä

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{25}{80}FL\right)(-\theta) + \left(\frac{24}{80}FL\right)(2\theta) \\ & + \left(-\frac{31}{80}FL\right)(-2\theta) + \left(\frac{33}{80}FL\right)\theta = 6M_p\theta. \end{aligned} \quad (10.94)$$

tulee

$$(F_s)_c = \frac{60}{21} \frac{M_p}{L} \approx 2.857 \frac{M_p}{L}. \quad (10.95)$$

Pienimmän vähittäismurtokuorman antaa mekanismi (c). Määritetään seuraavaksi kriittisten leikkausten jäännösmomentit mekanismin (c) antaman ratkaisun perusteella. Kaavoilla

$$\begin{aligned} m_j + \lambda M_j^{e,\max} &= M_{pj}, \quad \text{jos } \theta_j > 0, \\ m_j + \lambda M_j^{e,\min} &= -M_{pj}, \quad \text{jos } \theta_j < 0, \end{aligned} \quad (10.96)$$

saadaan niissä leikkauksissa, joissa on rajamekanismissa nivel,

$$\begin{aligned}
 m_1 - \frac{60}{21} \cdot \frac{25}{80} M_p &= -M_p \quad \Rightarrow \quad m_1 \approx -0.108 M_p, \\
 m_3 + \frac{60}{21} \cdot \frac{24}{80} M_p &= M_p \quad \Rightarrow \quad m_3 \approx 0.143 M_p, \\
 m_4 - \frac{60}{21} \cdot \frac{31}{80} M_p &= -M_p \quad \Rightarrow \quad m_4 \approx 0.107 M_p, \\
 m_5 + \frac{60}{21} \cdot \frac{33}{80} M_p &= M_p \quad \Rightarrow \quad m_5 \approx -0.179 M_p.
 \end{aligned} \tag{10.97}$$

Leikkauksen 2 jäännösmomentti ratkaistaan esimerkiksi palkkimekanismista saatavan homogeenisen tasapainoehdon avulla:

$$m_2(-\theta) + m_3(2\theta) + m_4(-\theta) = 0, \tag{10.98}$$

josta seuraa

$$m_2 \approx 0.179 M_p. \tag{10.99}$$

Vaihtoplastisoitumisen kannalta kriittiset leikkaukset ovat 1 ja 5. Ehdosta

$$M^{e,\max} - M^{e,\min} \leq 2M_m = 2 \frac{M_p}{\Phi} \tag{10.100}$$

eli

$$\frac{33}{80} FL \leq 2 \frac{M_p}{1.15} \tag{10.101}$$

seuraa leikkauksissa 1 ja 5 vaihtoplastisoitumisen rajakuorma

$$F_a = \frac{160}{33 \cdot 1.15} \frac{M_p}{L} \approx 4.216 \frac{M_p}{L}, \tag{10.102}$$

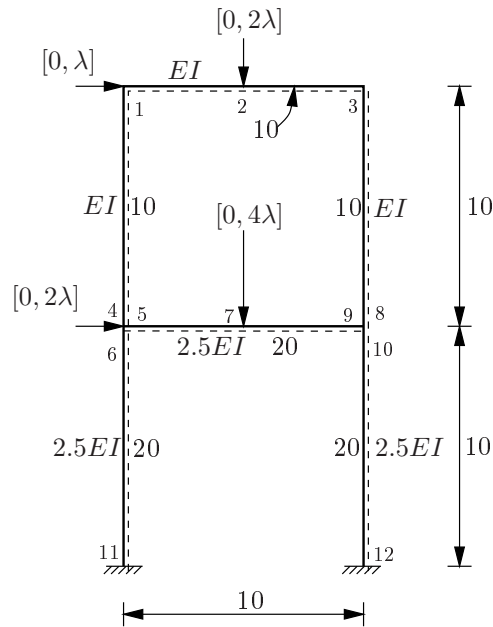
joka on kuitenkin suurempi kuin vähittäismurtokuorma.

Esimerkki 10.5 Tutkitaan kuvan 10.9 kerroskehän murtokuormaa muuttuvassa toistuvassa kuormituksessa, kun kehän pistekuormat voivat muuttua kuvassa 10.9 esitetyllä tavalla.

Kaksikerroskehän yläkerran palkin ja pilarien $M_p = 10$ ja taivutusjäykkyys on EI , ja vastaavasti alakerran palkin ja pilarien $M_p = 20$ ja taivutusjäykkyys on $2.5EI$. Kehän kuormat voivat vaihdella toisistaan riippumatta kuvan 10.9 esittämällä tavalla. Kehällä on ns. kriittisiä leikkauksia 12 kappaletta. Perusmekanismien lukumäärä on $m = 12 - n_s = 12 - 6 = 6$. Kaikki mekanismit voivat toimia myös toiseen suuntaan, mutta vain kehän nurkan 8–9–10 osalta on varauduttu tähän mahdollisuuteen ottamalla vastaavassa nurkkamekanismissa huomioon molemmat mahdollisuudet (suunnat). Taulukkoon 10.5 on koottu kuormakertoimen arvoa $\lambda = 1$ vastaavat suurimmat ja pienimmät kimmoisena lasketut momentit kriittisissä leikkauksissa ja perusmekanismien nivelkiertymät. Taulukon ensimmäisellä rivillä ovat otaksutut plastiset momentit leikkauksissa 1, ..., 12.

Virtuaalisen työn yhtälöstä

$$\lambda \sum_j \left\{ \frac{M^{e,\max}}{M^{e,\min}} \right\} \theta_j = \sum_j M_{pj} |\theta_j| \tag{10.103}$$



Kuva 10.9 Kaksikerroskehä ja pistekuormien vaihteluväli.

seuraa perusmekanismien avulla

$$\begin{aligned}
 (a) \quad 13.10\lambda\theta &= 40\theta \quad \Rightarrow \quad \lambda_{sa} = 3.06, \\
 (b) \quad 30.73\lambda\theta &= 80\theta \quad \Rightarrow \quad \lambda_{sb} = 2.60, \\
 (c) \quad 12.95\lambda\theta &= 40\theta \quad \Rightarrow \quad \lambda_{sc} = 3.09, \\
 (d) \quad 44.44\lambda\theta &= 80\theta \quad \Rightarrow \quad \lambda_{sd} = 1.80, \\
 (e) \quad 14.86\lambda\theta &= 50\theta \quad \Rightarrow \quad \lambda_{se} = 3.37, \\
 (f) \quad 14.86\lambda\theta &= 50\theta \quad \Rightarrow \quad \lambda_{sf} = 3.37, \\
 (g) \quad 14.86\lambda\theta &= 50\theta \quad \Rightarrow \quad \lambda_{sg} = 3.37.
 \end{aligned} \tag{10.104}$$

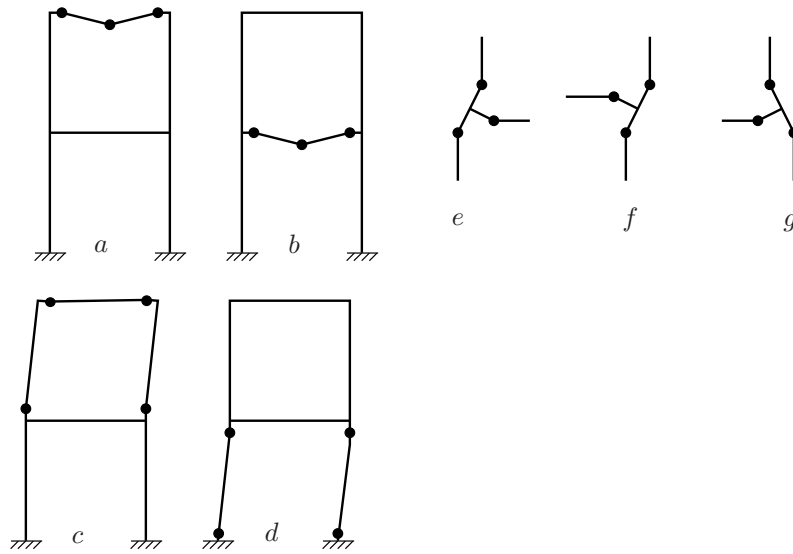
Perusmekanismeista pienimmän vähittäismurtokuorman antaa alakerroksen sivusiirtymämekanismi (d). Yhdistetään tähän alakerran palkkimekanismi (b) ja nurkan 4–5–6 nurkkakiertymämekanismi, jolloin saadaan mekanismi (b + d + e) ja sen avulla

$$\begin{aligned}
 &1.60\lambda\theta + 6.35\lambda(2\theta) + (-14.27)\lambda(-\theta) + 10.99\lambda\theta + (-11.86)\lambda(-\theta) \\
 &+ (-13.12)\lambda(-\theta) = 10\theta + 20(2\theta) + 20\theta + 20\theta + 20\theta + 20\theta
 \end{aligned} \tag{10.105}$$

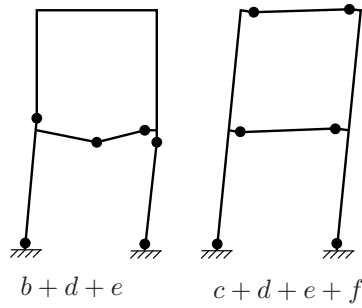
eli

$$64.54\lambda\theta = 130\theta \quad \Rightarrow \quad \lambda_s = 2.015. \tag{10.106}$$

Yhdistetyllä mekanismilla saatiin suurempi kuormakertoimen arvo kuin alakerran sivusiirtymämekanismilla yksinään. Jatketaan mekanismien kombinoitua samalla tavalla kuin plastisen rajakuorman määrittämisessä tehtiin aikanaan. Kombinaatiolla



Kuva 10.10 Kaksikerroskehän perusmekanismit.



Kuva 10.11 Kaksikerroskehän kaksi yhdistettyä mekanismia.

$(c + d + e + f)$ saadaan työyhtälö

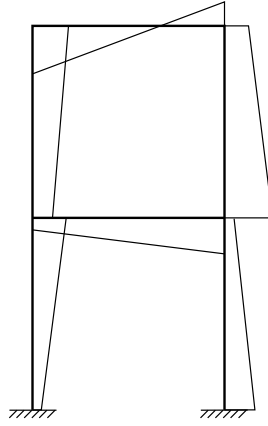
$$\begin{aligned}
 &2.74\lambda\theta + (-3.74)\lambda(-\theta) + 10.51\lambda\theta + (-14.27)\lambda(-\theta) + (-11.86)\lambda(-\theta) \\
 &+ (-13.12)\lambda(-\theta) = 10\theta + 10\theta + 20\theta + 20\theta + 20\theta + 20\theta
 \end{aligned}
 \tag{10.107}$$

eli

$$56.24\lambda\theta = 130\theta \quad \Rightarrow \quad \lambda_s = 1.78. \tag{10.108}$$

Määritetään seuraavaksi jäännösmomentit olettaen mekanismin $(c + d + e + f)$ olevan oikea vähittäismurtomekanismi. Kaavoilla

$$\begin{aligned}
 m_j + \lambda M_j^{e,\max} &= M_{pj}, \quad \text{jos } \theta_j > 0, \\
 m_j + \lambda M_j^{e,\min} &= -M_{pj}, \quad \text{jos } \theta_j < 0,
 \end{aligned}
 \tag{10.109}$$



Kuva 10.12 Kaksikerroskehän jäännösmomenttijakauma.

saadaan jälleen niissä leikkauksissa, joissa on rajamekanismissa nivel,

$$\begin{aligned}
 m_{11} + 1.778(-11.86) &= -20 \quad \Rightarrow \quad m_{11} = 1.09, \\
 m_{12} + 1.778(-13.12) &= -20 \quad \Rightarrow \quad m_{12} = 3.33, \\
 m_5 + 1.778(10.51) &= 20 \quad \Rightarrow \quad m_5 = 1.31, \\
 m_9 + 1.778(-14.27) &= -20 \quad \Rightarrow \quad m_9 = 5.37, \\
 m_1 + 1.778(2.74) &= 10 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 5.13, \\
 m_3 + 1.778(-3.74) &= -10 \quad \Rightarrow \quad m_3 = -3.35.
 \end{aligned} \tag{10.110}$$

Mekanismi $(c + d + e + f)$ on alitäydellinen, joten kaikkia jäännösmomentteja ei saada selville perusmekanismien avulla. Määritetään leikkauksen 10 jäännösmomentti otaksuen, että siinä olisi positiivinen nivel. Tällöin saadaan

$$m_{10} + 1.778(10.99) = 20 \quad \Rightarrow \quad m_{10} = 0.46. \tag{10.111}$$

Tämän arvauksen jälkeen päästään eteenpäin jäännösmomenttien määrittämisessä esimerkiksi alakerroksen sivusiirtymämekanismiin (d) työyhtälön avulla. Koska jäännösmomentit toteuttavat homogeenisen tasapainoyhtälön

$$m_{11}(-\theta) + m_6\theta + m_{10}\theta + m_{12}(-\theta) = 0, \tag{10.112}$$

saadaan

$$m_6 = 3.96. \tag{10.113}$$

Palkkimekanismin (a) avulla saadaan

$$m_1(-\theta) + m_2(2\theta) + m_3(-\theta) = 0, \tag{10.114}$$

josta ratkaistaan

$$m_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_3) = 0.89. \tag{10.115}$$

Palkkimekanismin (b) avulla saadaan puolestaan

$$m_5(-\theta) + m_7(2\theta) + m_9(-\theta) = 0, \quad (10.116)$$

josta seuraa

$$m_7 = \frac{1}{2}(m_5 + m_9) = 3.34. \quad (10.117)$$

Jäännösmomenttijakauma on piirretty kuvaan 10.12.

Tutkimusten perusteella vähittäismurto ei ole todennäköinen muuttuvan toistuvan pystykuormituksen tapauksessa, jos $\lambda_s > \lambda_p$ (tai $\lambda_s > 0.75\lambda_p$ kaikkein pessimistisimmillä otaksumilla), jos kehä on suunniteltu staattisen plastisen rajakuormakertoimen λ_p perusteella. Vastaavasti vaihtuvan toistuvan ja suunnaltaan muuttuvan tuulikuorman tapauksessa vähittäismurto ei ole kovin todennäköinen, jos $\lambda_s > 0.6\lambda_p$.

Rakenteen turvallisuuden kannalta vaihtuvat toistuvat kuormat eivät todennäköisesti ole merkittäviä, ellei synny samanlaisia kuormitusolosuhteita, kuin väsytyismurrossa. Kuitenkin, esim. liitokset on suunniteltava niin, etteivät ne aiheuta suuria jännityshuippuja, jos esim. vaihtuvat tuulikuormat ovat mitoituksen kannalta merkittävässä asemassa.

Taulukko 10.5 Kaksikerroskehän kimmoiset momentit ja nivelkiertymät.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	λ
M_p	10	10	10	10	20	20	20	10	20	20	20	20	
$M^{e,\max}$	2.74	4.18	0	1.60	10.51	8.47	6.35	0.35	0	10.99	1.37	0.11	1.00
$M^{e,\min}$	-1.00	-0.18	-3.74	-2.61	-3.76	-2.75	-0.11	-3.86	-14.27	-0.23	-11.86	-13.12	1.00
a	$-\theta$	2θ	$-\theta$										3.06
b					$-\theta$		2θ		$-\theta$				2.60
c	θ		$-\theta$	$-\theta$				$-\theta$					3.09
d						θ				θ	$-\theta$	$-\theta$	1.80
e				θ	θ	$-\theta$							3.37
f								θ	$-\theta$	$-\theta$			3.37
g								$-\theta$	θ	θ			3.37
$b + d + e$				θ			2θ		$-\theta$	θ	$-\theta$	$-\theta$	2.015
$c + d + e + f$	θ		$-\theta$		θ				$-\theta$		$-\theta$	$-\theta$	1.78

Luku 11

Plastinen vääntö

11.1 Siirtymämenetelmä

Tarkastellaan sauvaa, jonka poikkileikkaus on (x, y) -tasossa. Sauvan akseli ja vääntökeskiö on z -akseli. Sauvassa vaikuttaa vääntömomentti M_z . Otaksutaan de Saint-Venantin (de Saint-Venant 1856) mukaan, että poikkileikkaus kiertyy muotonsa säilyttäen vääntökeskiön ympäri ja mahdollisesti vääristyy, jolloin deformatumattomassa tilassa aluksi samassa tasossa sijainneet pisteet eivät ole välttämättä deformatuneessa tilassa enää samassa tasossa. Otaksumien perusteella voidaan kirjoittaa siirtymille lausekkeet

$$u = -y\varphi, \quad v = x\varphi \quad (11.1)$$

ja

$$w = \theta\Psi(x, y), \quad (11.2)$$

missä φ on vääntökulma, θ on vääntymä ja Ψ on poikkipinnan käyritysmäfunktio. Vääntymä on vääntökulman derivaatta

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (11.3)$$

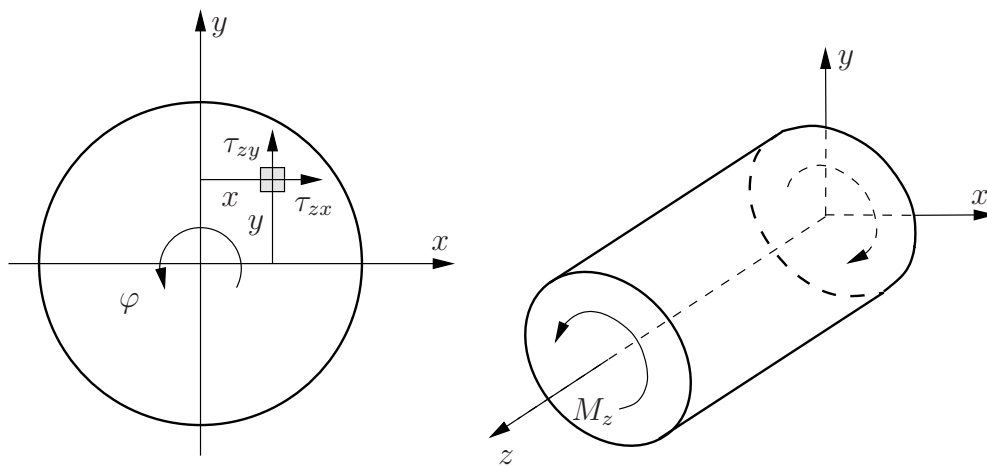
Vapaassa väännössä poikkipinnan käyrityminen saa tapahtua vapaasti, ja sauvaan syntyy vain leikkausjännityksiä. Vääntymä on nyt Saint-Venantin otaksumien mukaisesti vakio, ja vääntökulma on koordinaatin z lineaarinen funktio $\phi = \theta z$, kun $\varphi(0) = 0$. Saint-Venantin otaksumien perusteella vapaassa väännössä

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0, \quad (11.4)$$

ja

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0. \quad (11.5)$$

Sauvan tuennan on oltava sopusoinnussa vapaan väännön otaksumien kanssa. Esimerkiksi ulokesauvan kiinnitetyssä päässä poikkipinnan käyrityminen (deplanaatio) on estetty, ja vapaa vääntö ei ole mahdollinen. Kiinnityksestä aiheutuu Saint-Venantin periaatteen mukaan kuitenkin vain paikallinen häiriö, joka vaimenee nopeasti tuelta etäännyttäessä, ja vapaan väännön teoriaa voidaan soveltaa tuennasta riippumatta. Tuennan aiheuttamat tukireaktiot ja paikalliset häiriöt voidaan tarvittaessa laskea erikseen.



Kuva 11.1 Poikkileikkauksen jännitykset ja vääntökulma φ .

Kuvan 11.2 perusteella johdetaan massiiviselle sauvalle väännön tasapainoyhtälö

$$(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx - \tau_{xz}) dx dz + (\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy - \tau_{yz}) dx dz = 0, \quad (11.6)$$

mistä seuraa

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (11.7)$$

Leikkausjännitykset τ_{xz} ja τ_{yz} toteuttavat ehdot

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (11.8)$$

Kimmoisen sauvan tapauksessa, lausumalla leikkausjännitykset liukumien avulla ja nämä puolestaan siirtymien u , v ja w avulla, eli

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = G\theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right), \quad (11.9)$$

$$\tau_{zy} = G\gamma_{zy} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G\theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right), \quad (11.10)$$

saadaan tasapainoyhtälö muotoon

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \quad (11.11)$$

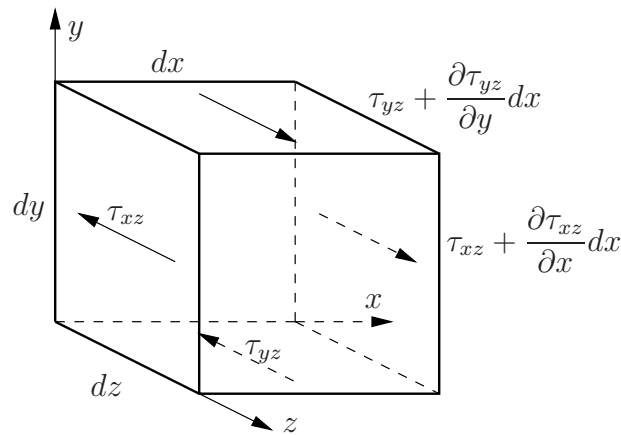
tai lyhyemmin kirjoitettuna

$$\Delta \Psi = 0, \quad (11.12)$$

missä Δ on Laplacen operaattori.

Kentän tasapainoehtoon (11.7) liitetään reunan tasapainoehto eli reunaehto

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0, \quad (11.13)$$



Kuva 11.2 Vääntösauvan mielivaltaisen tilavuusalkion tasapainoehto.

missä n_x ja n_y ovat reunan yksikkönormaalivektorin komponentit ja s on reunaa pitkin (vastapäivään) kiertävä koordinaatti, kuva 11.3. Lausumalla jännityskomponentit siirtymäsuureiden avulla ja ottamalla huomioon reunan geometriset ehdot

$$n_x = \cos \alpha = \frac{dx}{dn} = \frac{dy}{ds}, \quad (11.14)$$

$$n_y = \sin \alpha = \frac{dy}{dn} = -\frac{dx}{ds} \quad (11.15)$$

saadaan reunaehto muotoon

$$\frac{d\Psi}{dn} - \frac{1}{2} \frac{d}{ds}(x^2 + y^2) = 0. \quad (11.16)$$

11.2 Voimamenetelmä

Voimamenetelmän ratkaisussa määritellään ensin Prandtin (L. Prandtl 1903) mukaan jännitysfunktio Φ siten, että

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (11.17)$$

jolloin tasapainoehto (11.7) toteutuu identtisesti:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = 0. \quad (11.18)$$

Jatkuvan aineen yhteensopivuusehtojen perusteella saadaan

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = C = \text{vakio}. \quad (11.19)$$

Ottamalla huomioon liukumien ja siirtymien väliset yhteydet

$$\gamma_{zx} = \theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right), \quad \gamma_{zy} = \theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) \quad (11.20)$$

tulee

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} = -2\theta. \quad (11.21)$$

Lausumalla kimmoisen aineen tapauksessa liukumat leikkausjännitysten avulla kaavoilla

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}, \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G} \tau_{zy}, \quad (11.22)$$

ja ottamalla huomioon jännitysfunktion määrittelyssä käytetyt kaavat (11.17) päädytään voimamenetelmän differentiaaliyhtälöön

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta, \quad (11.23)$$

joka on luonteeltaan yhteensopivuusehto.

Poikkileikkauksen reunalla täytyy toteutua tasapainoehto

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0. \quad (11.24)$$

Jännitysfunktion avulla reunaehto saadaan muotoon

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \beta = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = 0 \quad (11.25)$$

eli

$$\frac{d\Phi}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = C = \text{vakio} \quad \text{reunalla } \Gamma. \quad (11.26)$$

Edellä $\cos \alpha = n_x$ ja $\cos \beta = n_y$, (kuva 11.3). Yhdesti yhtenäisen alueen reunalla asetetaan $\Phi = 0$.

Kimmooplastisen aineen tapauksessa liukumien ja leikkausjännitysten väliset yhteydet ovat

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} + \gamma_{zx}^p, \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G} \tau_{zy} + \gamma_{zy}^p, \quad (11.27)$$

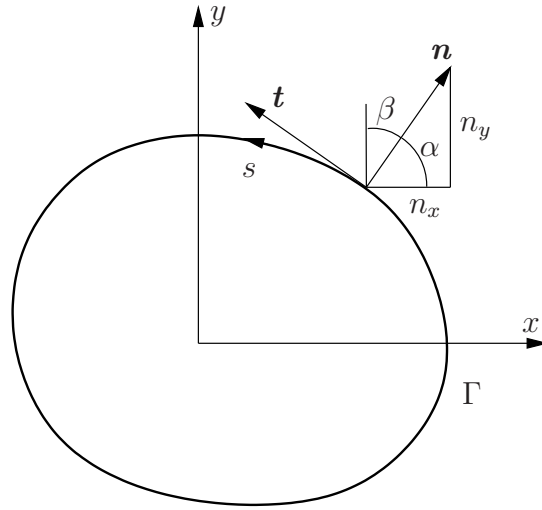
missä γ_{zx}^p ja γ_{zy}^p ovat plastiset (pysyvät) liukumat. Yhteensopivuusehdosta (11.21) seuraa kimmoplastisen aineen tapauksessa differentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + g(x, y) = -2G\theta, \quad (11.28)$$

missä on merkitty

$$g(x, y) = G \left(\frac{\partial \gamma_{zx}^p}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{zy}^p}{\partial x} \right). \quad (11.29)$$

Differentiaaliyhtälön (11.29) ratkaisu on hankala, koska siihen on tullut materiaalimallin epälineaarisuuden vuoksi koordinaateista (x, y) riippuva termi $g(x, y)$. Ratkaisu voidaan konstruoida numeerisesti esimerkiksi diskretoimalla differenssimenetelmällä jännitysfunktion Φ derivaatat. Tällöinkin päädytään epälineaariseen yhtälösystemiin, joka on ratkaistava numeerisesti. Vääntösauvan täysplastisen vääntömomentin määrittäminen on sensijaan useissa tapauksissa huomattavasti helpompaa, joten keskitytään seuraavassa siihen.



Kuva 11.3 Poikkileikkauksen reuna.

11.3 Vääntömomentti

Vapaassa väännössä poikkileikkaus saa deplanoitua vapaasti, ja leikkausvoimat Q_x ja Q_y ovat nollia. Vääntömomentti on tällöin riippumaton koordinaattiakseleiden (x, y) valinnasta. Vääntömomentti määritellään kaavalla

$$M_z = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA. \quad (11.30)$$

Sijoittamalla vääntömomentin kaavaan leikkausjännitykset jännitysfunktion avulla lausuttuina tulee voimamenetelmän mukaisessa tarkastelussa

$$\begin{aligned} M_z &= - \int_A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y \right) dA \\ &= - \int_A \left[\frac{\partial (x\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial (y\Phi)}{\partial y} \right] dA + \int_A 2\Phi dA \\ &= - \oint_{\Gamma} (\Phi x n_x + \Phi y n_y) ds + \int_A 2\Phi dA. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Edellä on sovellettu Gaussin-Greenin integraalikaavaa

$$\int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dA = \oint_{\Gamma} (f n_x + g n_y) ds. \quad (11.32)$$

Koska yhdesti yhtenäisen alueen reunalla jännitysfunktio voidaan asettaa nolaksi (ei vaikuta leikkausjännityskomponentteihin), vääntömomentille saadaan kaava

$$M_z = \int_A 2\Phi dA. \quad (11.33)$$

Vääntömomentti on jännitysfunktiokukkulan tilavuus kaksinkertaisena.

Leikkausjännitys (jännitysfunktion derivaatta) on verrannollinen jännitysfunktiokukkulan kaltevuuteen. Leikkausmyötöraja puolestaan määrää suurimman mahdollisen kaltevuuskulman.

11.3.1 Myötöehto

Myötöehdon mukaan resaltoivan leikkausjännityksen on oltava pienempi kuin leikkausmyötöraja eli

$$\sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \leq \tau_m. \quad (11.34)$$

Jännitysfunktion avulla lausuttuna myötöehto kuuluu

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2} \leq \tau_m \quad (11.35)$$

tai lyhyemmin kirjoitettuna

$$|\nabla \Phi| \leq \tau_m, \quad (11.36)$$

missä on merkitty

$$\nabla(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial y} \mathbf{j}, \quad (11.37)$$

$$|\nabla(\bullet)| = \sqrt{\nabla(\bullet) \cdot \nabla(\bullet)}, \quad (11.38)$$

$\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ ovat x - ja y -akselien suuntaiset yksikkövektorit.

11.3.2 Täysplastinen vääntömomentti

Täysplastisessa tilanteessa vapaassa väännössä jännitysfunktiokukkulan tilavuus on mahdollisimman suuri. Myötöehdon mukaan kukkulan suurinta kaltevuutta rajoittaa leikkausmyötöraja, joten täysplastisen momentin määrittämistä varten asetetaan seuraava sidottu maksimointitehtävä: Etsitään sellainen jännitysfunktio Φ , että

$$2 \int_A \Phi dA = \max \quad (11.39)$$

ehdolla

$$|\nabla \Phi| \leq \tau_m. \quad (11.40)$$

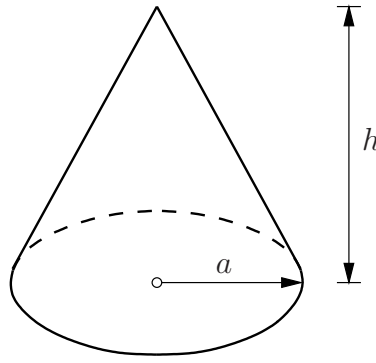
Esimerkki 11.1 Määritetään ympyräpoikkileikkauksen täysplastinen vääntömomentti.

Ympyräpoikkileikkauksen suurin mahdollinen jännitysfunktiokukkula on kartio, jonka kaltevuus vastaa leikkausmyötörajan arvoa τ_m . Kartion tilavuus on tunnetusti

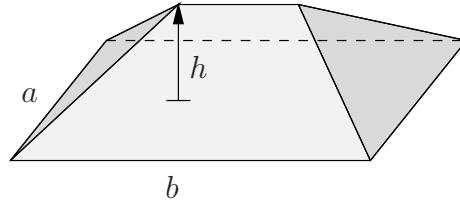
$$V = \frac{1}{3} \pi a^2 h, \quad (11.41)$$

missä h on kartion korkeus ja a on pohjaympyrän säde, ja nyt on voimassa vastaavuus

$$\tau_m = \frac{h}{a}. \quad (11.42)$$



Kuva 11.4 Ympyräpoikkileikkaus.



Kuva 11.5 Suorakaidepoikkileikkaus.

Plastinen vääntömomentti on siten

$$M_{zp} = \frac{2}{3} \pi a^3 \tau_m. \quad (11.43)$$

Esimerkki 11.2 Määritetään suorakaidepoikkileikkauksen täysplastinen vääntömomentti.

Suorakaidepoikkileikkaukselle saadaan kuvan 11.5 perusteella täysplastinen vääntömomentti

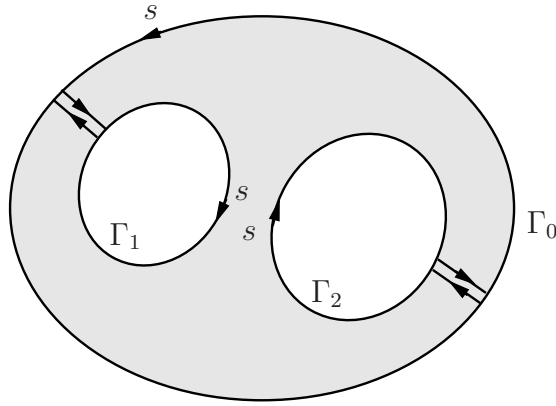
$$M_{zp} = \frac{1}{6} a^2 (3b - a) \tau_m. \quad (11.44)$$

11.3.3 Ontelopoikkileikkaus

Jos poikkileikkaus ei ole yhdesti yhtenäinen, vaan sisältää onteloita, niin reunaehdon mukaan

$$\Phi = \Phi_i = C_i = \text{vakio} \quad \text{reunalla } \Gamma_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad (11.45)$$

missä n on onteloiden lukumäärä, $\Gamma \equiv \Gamma_0$ on poikkileikkauksen ulkoreuna, ja onteloiden reunat ovat Γ_i , $1, \dots, n$. Poikkileikkauksen ulkoreunalla voidaan asettaa jälleen $\Phi_0 = 0$. Onteloiden reunoilla $\Phi_i = \text{vakio}$, mutta yleensä $\Phi_i \neq 0$.



Kuva 11.6 Ontelopoikkileikkaus.

Ontelopoikkileikkauksen vääntömomentti on

$$\begin{aligned}
 M_v &= \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA \\
 &= \int_A \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial x}x - \frac{\partial \Phi}{\partial y}y \right\} dA \\
 &= - \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x\Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(y\Phi) \right\} dA + \int_A 2\Phi dA \\
 &= - \sum_{i=0}^n \oint_{\Gamma_i} \Phi_i (x n_x + y n_y) ds + \int_A 2\Phi dA.
 \end{aligned} \tag{11.46}$$

Koska onteloiden reunat kierretään vastapäivään, saadaan Gaussin lauseen perusteella

$$\oint_{\Gamma_i} \Phi_i (x n_x + y n_y) ds = - \int_{A_i} 2\Phi dA = -2A_i\Phi_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{11.47}$$

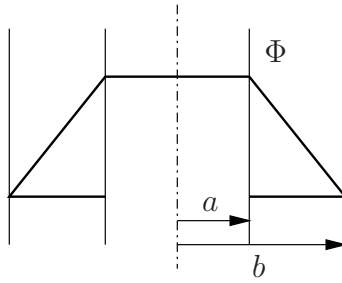
missä A_i on ontelon i sisään jäävä pinta-ala, ja vääntömomentin kaavaksi tulee

$$M_z = \int_A 2\Phi dA + \sum_{i=1}^n 2A_i\Phi_i. \tag{11.48}$$

Vääntömomentti on siten myös ontelopoikkileikkauksen tapauksessa jännitysfunktiokukkulan tilavuus kaksinkertaisena. Summalauseke esittää onteloiden kohdalla olevien ylätasankojen alle jäävää tilavuutta kaksinkertaisena, ja pintaintegraalitermi edustaa vastaavasti materiaalsen poikkipinnan kohdalla olevaa Φ -kukkulan tilavuutta kaksinkertaisena.

Poikkileikkauksen plastiselle väännölle saadaan ontelopoikkileikkauksen tapauksessa maksimointitehtävä

$$M_z = 2 \int_A \Phi dA + 2 \sum_{i=1}^n \Phi_i A_i = \max \tag{11.49}$$



Kuva 11.7 Paksuseinäinen ympyräputki.

reunaehdoilla

$$\Phi = 0 \quad \text{reunalla } \Gamma_0, \quad \Phi = \Phi_i \quad \text{reunalla } \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (11.50)$$

ja rajoitusehdolla (myötöehto)

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2} \leq \tau_m. \quad (11.51)$$

Esimerkki 11.3 Määritetään paksuseinäisen ympyräputken täysplastinen vääntömomentti.

Kuvan 11.7 perusteella saadaan paksuseinäisen ympyräputken plastiselle vääntömomentille kaava

$$M_z = \frac{2}{3}\pi(b^3 - a^3)\tau_m. \quad (11.52)$$

Katkaistun kartion tilavuus on laskettu vähentämällä ison kartion tilavuudesta pikkukartion tilavuus.

Esimerkki 11.4 Määritetään paksuseinäisen suorakaideputken täysplastinen vääntömomentti.

Kuvan 11.8 paksuseinäisen suorakaideputken seinämän paksuus on $a/3$, missä a on lyhyemmän sivun pituus. Jännitysfunktiokukkulan ylätasangon korkeus on

$$h = \frac{a}{3}\tau_m. \quad (11.53)$$

Kukkulan tilavuus on

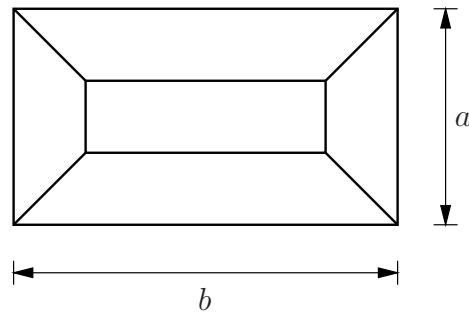
$$V = \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}a \right)^2 + \left(b - \frac{2}{3}a \right) \frac{2}{3}a + \frac{a}{3} \frac{a}{3} \right] h, \quad (11.54)$$

joten plastinen vääntömomentti on

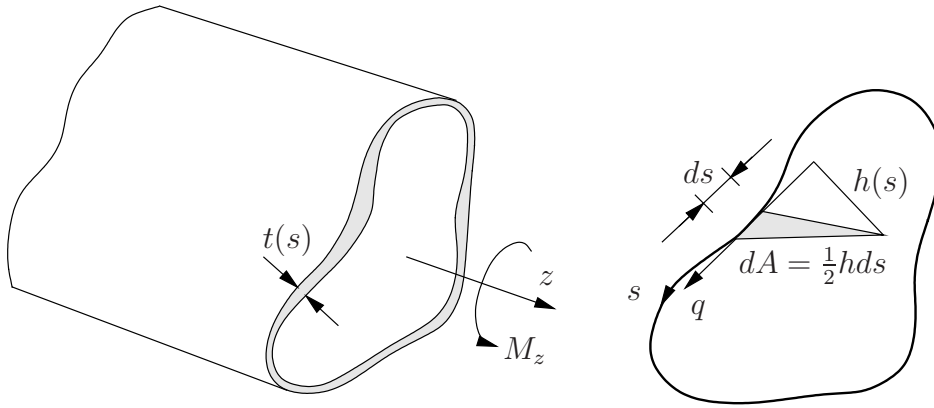
$$M_{zp} = \frac{2}{81}a^2(18b - 5a)\tau_m. \quad (11.55)$$

11.4 Ohutseinäisen putken vääntö

Tutkitaan seuraavaksi ohutseinäisen putken vapaata vääntöä. Putkea kuormittaa vääntömomentti M_z . Vääntösauvan (putken) akseli on z -akseli. Käyräviivainen koordinaatti s



Kuva 11.8 Paksuseinäinen suorakaideputki



Kuva 11.9 Ohutseinäinen putki

kiertää putken seinämän keskiviivaa pitkin vastapäivään, ja n on tangenttitasoa (s, z) vastaan kohtisuora koordinaatti. Putken seinämän vahvuus $t(s)$ voi vaihdella koordinaatin s mukana.

Jännityskomponentti $\sigma_z = 0$, koska akselin z suunnassa ei ole kuormitusta, $\sigma_s = 0$, koska putken ulko- ja sisäseinien välinen paine-ero on nolla, ja $\sigma_n = \tau_{nz} = \tau_{ns} = 0$, koska putken ulko- ja sisäpinnoilla ei ole kuormitusta. Ainoa nollasta eriävä jännityskomponentti on leikkausjännitys $\tau_{zs} = \tau_{sz}$.

Putken seinämästä irtileikatuksi ajatellun alkion $ds \times dz \times t(s)$ tasapainoehdosta

$$\frac{\partial(\sigma_z t)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{sz} t)}{\partial s} = 0 \quad (11.56)$$

seuraa

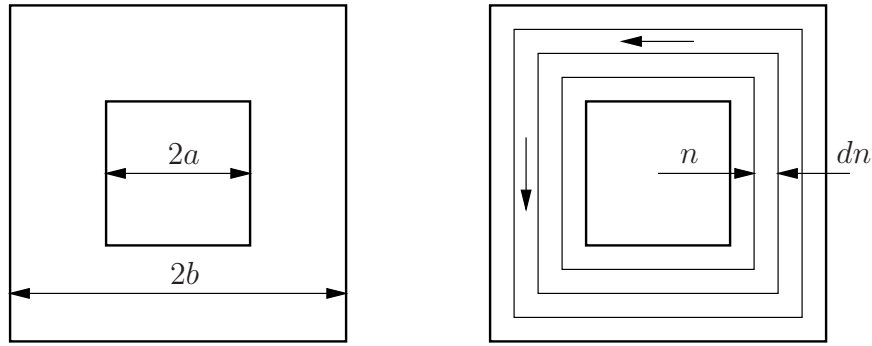
$$\tau_{sz} t = \text{vakio}. \quad (11.57)$$

Merkitään, että $\tau_{sz} \equiv \tau$. Leikkausvuo q putken seinässä on

$$q = \tau_{sz} t \equiv \tau t. \quad (11.58)$$

Vapaan väännön tapauksessa vääntömomentti voidaan laskea minkä tahansa z :n suuntaisen akselin suhteen. Putken seinämästä leikattuun materiaaliselle pinta-alkioon ¹ $dF = t(s)ds$

¹Putken seinämän materiaaliselle pinta-alkiolle otetaan käyttöön merkintä dF , jotta sitä ei sekoitettaisi putken seinämän sisään jäävään pinta-alkioon dA ja pinta-alaan A .



Kuva 11.10 Paksuseinäinen neliöputki

vaikuttaa voima $\tau dF = \tau t(s)ds$, ja tällä voimalla on vääntömomentti (origon suhteen laskettuna) $dM_z = h(s)q ds$, missä $h(s)$ on kohtisuora etäisyys origosta tarkasteltavan putken seinän materiaali-alkion kautta kulkevalle seinämän keskiviivan tangentille. Integroimalla (summaamalla yli kaikkien alkioden ds) saadaan vääntömomentti

$$M_z = \oint_s h(s)q ds = 2Aq, \quad (11.59)$$

missä A on putken seinämän keskiviivan sisään jäävä pinta-ala. Vääntömomentin kaava seuraa siitä, että leikkausvuo q on vakio, ja pinta-alkio $dA = \frac{1}{2}h(s)ds$ kolmion pinta-alan kaavan perusteella.

Leikkausjännitys on putken seinämässä

$$\tau = \frac{M_z}{2At}. \quad (11.60)$$

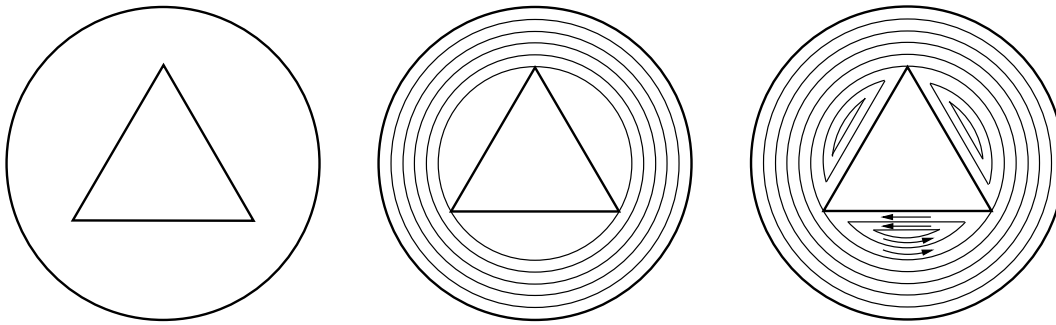
Suurin leikkausjännitys syntyy kohtaan, jossa $t = t_{\min}$. Asettamalla suurin leikkausjännitys myötörajan τ_m suuruiseksi saadaan poikkileikkauksen kestävä vääntömomentti

$$M_{zp} = 2At_{\min}\tau_m. \quad (11.61)$$

Kaavan mukaan vääntömomenttikestävyys annetulla materiaalimenekillä on sitä suurempi mitä suurempi on putken seinämän keskiviivan sisään jäävän pinta-alan suhde ympärysmittaan. Paras mahdollinen poikkileikkaus vääntömomenttikestävyys suhteen on siten ympyräputki. Tietyn plastisen vääntömomentin saavuttamiseen tarvittava materiaalimenekki pienenee, kun kasvatetaan putken sädettä ja pienennetään seinämän paksuutta. Tällä tiellä tulee kuitenkin raja vastaan, kun putken seinämä menettää tietyllä säteen ja seinämän paksuuden suhteen arvolla stabiiliutensa lommahtamalla.

11.5 Paksuseinäisen putken vääntömomentin ala-raja

Palataan ontelo-poikkileikkauksen plastisen vääntömomentin laskuun, ja käytetään hyväksi edellä esitettyä ohutseinäisen putken ratkaisua. Alarajaratkaisussa pyritään löytämään tasapainoehdot ja myötöehdon toteuttava jännitys jakauma.



Kuva 11.11 Ontelopoikkileikkaus

Tutkitaan erikoistapauksena paksuseinäistä neliöputkea, kuva 11.10. Tehdään putki staattisesti määrättyksi leikkauksilla; tässä tapauksessa ajatteleamalla paksuseinäinen putki leikatuksi sisäkkäin oleviksi ohutseinäiksi (infinitesimaalisen ohuiksi) putkiksi, joiden paksuus dn on vakio ja sisään jäävä pinta-ala on mahdollisimman suuri. Tällöin vääntömomentti on mahdollisimman suuri, kun leikkausjännitys on myötörajan suuruinen. Ohuiden putkien väliset kosketusvoimat otaksutaan nolliksi, mikä antaa laskelmalle lisävarmuutta.

Yhden infinitesimaalisen ohuen putken osuus vääntömomenttiin on ohutseinäiselle putkelle johdetun kaavan perusteella

$$dM_{zp} = 2A\tau_m dn = 8n^2\tau_m dn, \quad (11.62)$$

missä dn on infinitesimaalisen ohuen putken vakiopaksuus.

Integroimalla (summaamalla yli kaikkien ohuiden putkien) saadaan

$$M_{zp} = 8\tau_m \int_a^b n^2 dn = \frac{8}{3}\tau_m(b^3 - a^3), \quad (11.63)$$

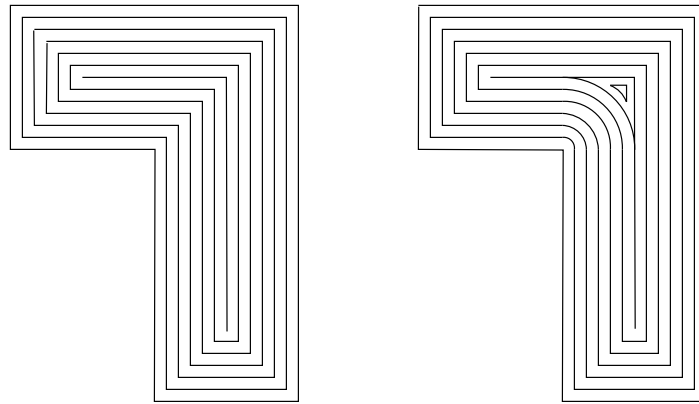
missä a, b ovat putken sisä- ja ulkohalkaisija. Tulos on sama kuin edellä lasketun suorakaideputken ratkaisu neliöputken erikoistapauksessa.

Esimerkki 11.5 Määritetään ympyräpoikkileikkaukselle, jonka sisällä on tasasivuisen kolmion muotoinen symmetrisesti sijoitettu ontelo, täysplastinen vääntömomentti.

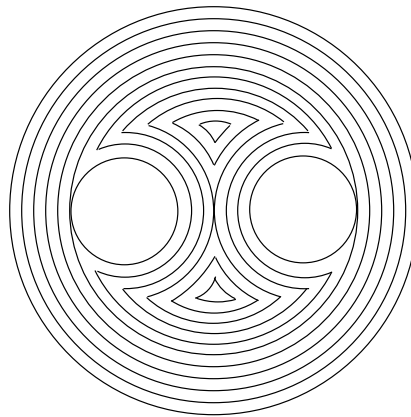
Pyöreän ontelopoikkileikkauksen säde on b . Leikataan reunalta alkaen infinitesimaalisen ohuita ympyräputkia, kunnes kohdataan symmetrisesti sijoitettu tasasivuisen kolmion muotoinen ontelo. Pienimmän ympyrän, joka voidaan piirtää kolmion ympäri, säde on a . Alarajaratkaisussa voidaan otaksua viimeisen ympyräputken ja kolmion muotoisen ontelon väli jännityksettömäksi. Tällöin vääntömomentiksi saadaan

$$M_{zp} = \frac{2\pi}{3}\tau_m(b^3 - a^3). \quad (11.64)$$

Saatua vääntömomentin alaraja-arviota voidaan parantaa jatkamalla kolmion ja pienimmän ympärikulkevan ympyrän välisessä alueessa poikkileikkauksen jakoa ohutseinäisiin putkiin. Koska uudet putket eivät ole enää ympyrän muotoisia, niiden käsitteily on hankalampaa. Niiden sisään jäävät pinta-alat ovat myös pienempiä, joten tässä vaiheessa laskua kohdataan vähenevien tuottojen laki: joudutaan ponnistelemaan yhä



Kuva 11.12 L:n muotoinen poikkileikkaus



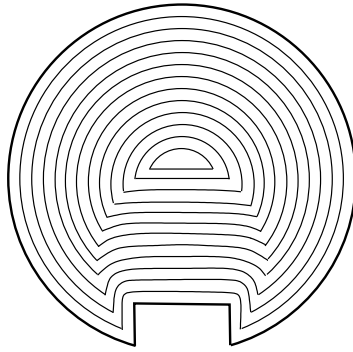
Kuva 11.13 Ontelopoikkileikkauksen jännitysfunktiokukkulan korkeuskäyrät

enemmän, mutta tulos paranee entistä hitaammin. Otaksumalla, kuten edellä tehtiin, pienten putkien alue jännityksettömäksi saadaan varmalla puolella oleva kohtuullinen arvio vääntömomentille.

Esimerkki 11.6 Määritetään L:n muotoisen poikkileikkauksen plastinen vääntömomentti.

Kuvan 11.12 L:n muotoisen poikkileikkauksen tapauksessa voidaan ohutseinäiset putket ajatella leikatuiksi vasemmanpuoleisen kuvan mukaisesti, jolloin vääntömomentin lasku tulee helpommaksi. Oikeaoppinen tapa leikata poikkileikkaus ohutseinäisiin putkiin on esitetty oikeanpuoleisessa kuvassa. Tällöin, kun putkien paksuus on vakio, syntyy L:n sisäkulmaan neljännesympyrän muotoisia putken poikkileikkauksen osia, ja poikkileikkauksen keskelle jää lopulta pieni vaikeasti osiin jaettava alue.

Ohuiden putkien ääriviivat voidaan ajatella korkeuskäyriksi. Koska vääntömomentti on jännitysfunktiokukkulan tilavuus kaksinkertaisena, saadaan plastinen vääntömomentti määritettyä laskemalla kuvan 11.12 harjakatoksi ajatellun kappaleen tilavuus kaksinkertaisena.



Kuva 11.14 Lovellinen poikkileikkaus

11.6 Hiekkakasa-analogia

Kuvassa 11.13 on kaksi ympyränmuotoista onteloa sisältävä ympyräpoikkileikkaus leikattu ohutseinäisiksi putkiksi. Putkien väliset leikkausviivat voidaan ajatella myös korkeuskäyriksi. Ontelon kohdalle syntyy tällöin ylätasanko. Jos infinitesimaalisen ohuiden putkien paksuus on dn , niin kahden korkeuskäyrän välinen korkeusero on $dh = \tau_m dn$, missä leikkausmyötöraja τ_m vastaa jännitysfunktiokukkulan vakiokaltevuutta. Vääntömomentiksi tulee

$$M_{zp} = \int dM_{zp} = 2 \int A \tau_m dn. \quad (11.65)$$

Kuvan 11.13 korkeuskäyrästä voidaan ajatella syntyneen latomalla päällekkäin levyjä. Tällöin onteloiden kohdalle jäävät edellä mainitut tasangot.

Jännitysfunktiokukkula saadaan kokeellisesti aikaiseksi leikkaamalla poikkileikkauksen muotoinen levy ja kaatamalla sen päälle hiekkaa, jonka kitkakulma ja tiheys ovat tiedossa. Punnitsemalla poikkileikkauksen päällä pysyvän hiekan paino saadaan selville hiekkakasan eli jännitysfunktiokukkulan tilavuus. Menetelmä soveltuu hyvin yhdesti yhtenäiselle poikkileikkaukselle. Sensijaan onteloita sisältävän poikkileikkauksen tapauksessa täytyy estää hiekan valuminen poikkileikkauksen reikiin, jotta ylätasangot voivat syntyä.

Esimerkiksi L:n muotoisen poikkileikkauksen tapauksessa hiekkakasaan syntyy L:n sisäkulmaan kartiopinta, kun ylimääräinen hiekka valuu pois ja kasan kaltevuus on vakio.

Kuvassa 11.14 on lovellisen poikkileikkauksen jännitysfunktio.

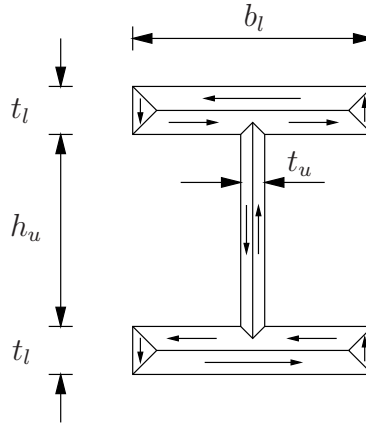
Esimerkki 11.7 Määritetään I-poikkileikkauksen täysplastinen vääntömomentti.

Tutkitaan I-poikkileikkausta, jonka uuman korkeus on h_u , uuman paksuus on t_u , laipan leveys on b_l ja laipan paksuus on t_l . Plastinen vääntömomentti on jännitysfunktiokukkulan kaksinkertainen tilavuus

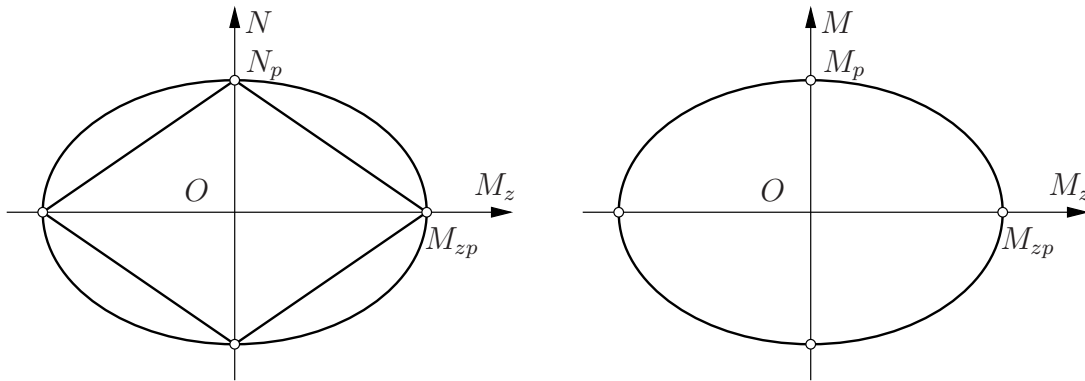
$$M_{zp} = 2(V_l + V_u), \quad (11.66)$$

missä V_l on yhden laipan osuus ja V_u on uuman osuus tilavuuteen. Laipan osuus V_l on

$$\begin{aligned} V_l &= \frac{1}{2} b_l t_l \frac{1}{2} t_l \tau_m - 2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} t_l \frac{1}{2} t_l \tau_m \frac{1}{2} t_l \\ &= \frac{1}{4} \left(b_l t_l^2 - \frac{1}{3} t_l^3 \right) \tau_m, \end{aligned} \quad (11.67)$$



Kuva 11.15 I-poikkileikkaus.



Kuva 11.16 (M_z, N) - ja (M_z, M) -vuorovaikutuskäyrät.

ja uuman osuus on

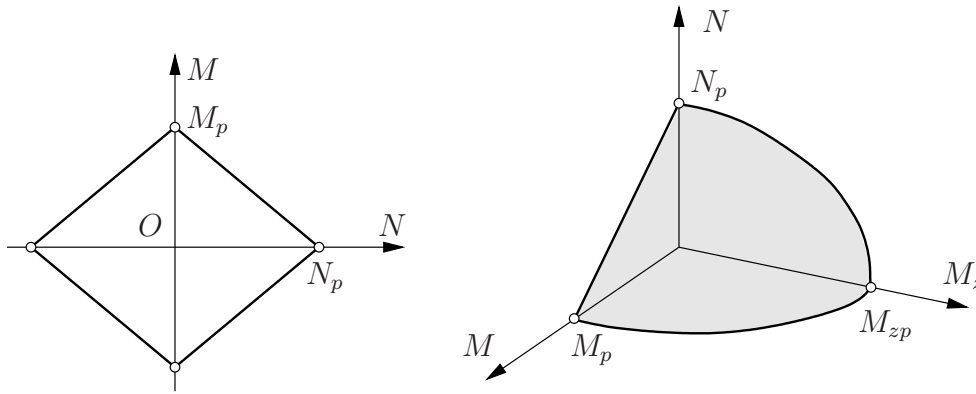
$$\begin{aligned} V_u &= \frac{1}{2} h_u t_u \frac{1}{2} t_u \tau_m + 2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} t_u \frac{1}{2} t_u \tau_m \frac{1}{2} t_u \\ &= \frac{1}{4} \left(h_u t_u^2 + \frac{1}{3} t_u^3 \right) \tau_m. \end{aligned} \quad (11.68)$$

Laskemalla kaavan (11.66) mukaisesti laippojen ja uuman osuudet yhteen tulee

$$M_{zp} = \left[b_l t_l^2 \left(1 - \frac{t_l}{3b_l} \right) + \frac{h_u t_u^2}{2} + \frac{t_u^3}{6} \right] \tau_m. \quad (11.69)$$

11.7 Yhdistettyjä kuormitustapauksia

Jos poikkileikkaukseen vaikuttaa samanaikaisesti vääntömomentti ja normaalivoima, niin turvallinen eli 'varmalla puolella oleva' vuorovaikutuskäyrä (myötökuvio) saadaan yhdistämällä (M_z, N) -tasossa suurimmat sallitut arvot M_{zp} ja N_p suorilla viivoilla, koska plastisuusteorian yleisten periaatteiden mukaan myötöpinta tai kaksiulotteisessa tapauksessa vuorovaikutuskäyrä on konveksi eli kupera. Saatua arviota voidaan parantaa otaksumalla materiaaliapisteelle jokin myötöehto. Metalleille kohtuullisen hyvin sopivat von Misesin



Kuva 11.17 Mielivaltaisen poikkileikkauksen myötöpinta (vuorovaikutuskäyrä) (N, M) -tasossa normaalivoiman N ja taivutusmomentin M vaikuttaessa ja myötöpinta (N, M, M_z) -avaruudessa (positiivisessa neljänneksessä) normaalivoiman N , taivutusmomentin M ja vääntömomentin M_z vaikuttaessa.

ja Trescan myötöehdot voidaan kirjoittaa tarkasteltavassa kaksiulotteisessa jännitystilassa muotoon

$$\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_m}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_m}\right)^2 = 1, \quad (11.70)$$

missä Trescan myötöehdon tapauksessa leikkausmyötöraja on $\tau_m = \sigma_m/2$ ja vastaavasti von Misesin myötöehdon tapauksessa $\tau_m = \sigma_m/\sqrt{3}$, kun σ_m on veto/puristusmyötöraja.

Jännityskombinaatio $\tau = \alpha\tau_m$, $\sigma_z = \beta\sigma_m$ toteuttaa ehdon

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad (11.71)$$

ja resultantit toteuttavat tällöin vuorovaikutusyhtälön

$$\left(\frac{N}{N_p}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^2 = 1. \quad (11.72)$$

Samalla tavalla johdetaan vääntömomentin M_z ja taivutusmomentin M vuorovaikutuskäyrä

$$\left(\frac{M}{M_p}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^2 = 1, \quad (11.73)$$

missä M_p on täysplastinen momentti tasotaivutuksessa. Vuorovaikutuskäyrä on esitetty kuvassa 11.16.

Taivutusmomentin M , normaalivoiman N ja vääntömomentin M_z rasittaman poikkileikkauksen myötöehto voidaan edellä esiteltujen periaatteiden mukaan kirjoittaa muodossa

$$\left(\frac{N}{N_p} \pm \frac{M}{M_p}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^2 = 1 \quad (11.74)$$

mille tahansa poikkileikkaukselle, kuva 11.17. Taivutusmomentin ja normaalivoiman välinen vuorovaikutuskäyrä voidaan mille tahansa poikkileikkaukselle esittää suoralla viivalla

yhdessä neljänneksessä myötöpinnan konveksisuusvaatimuksen nojalla. Tätä arviota voidaan parantaa, kun tunnetaan poikkileikkauksen muoto. Esimerkiksi suorakaidepoikkileikkaukselle on aiemmin johdettu parabolinen vuorovaikutuskäyrä.

Luku 12

Plastisuusteoriaa 2- ja 3-ulotteisissa jännitystiloissa

12.1 Jatkuvan aineen mekaniikan perusyhtälöt

12.1.1 Siirtymät, muodonmuutokset ja kinemaattiset yhtälöt

Tutkitaan kappaletta B kolmiulotteisessa avaruudessa, (3D), suorakulmaisessa koordinaatistossa $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$. Kappaleen referenssitilaksi otetaan alkutila ja referenssi-koordinaatistoksi alkutilan koordinaatisto, jossa mielivaltaisen tarkasteltavan pisteen koordinaatit ovat (X_1, X_2, X_3) eli X_i . Tietyllä ajanhetkellä t materiaalipiste X_i on paikassa $x_i(t)$ eli

$$x_i(t) = x_i(X_i, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (12.1)$$

Staattisessa tai kvasistaattisessa kuormituksessa hitausvoimat otaksutaan nolliksi, ja aika on kuormaparametrin luonteinen suure.

Siirtymävektorin $\mathbf{u}(x_i)$ komponentit ovat

$$u_i = x_i - X_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12.2)$$

Mielivaltaisen viiva-alkion PQ pituuden neliö on alkutilassa ¹

$$dS^2 = dX_i dX_i, \quad (12.3)$$

ja vastaavasti deformatuneessa tilassa

$$ds^2 = dx_i dx_i. \quad (12.4)$$

Koska $x_i = X_i + u_i$, saadaan

$$dx_i = dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) dX_j, \quad (12.5)$$

¹Seuraavassa noudatetaan summaussopimusta $a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^3 a_i b_i$ ja $a_{ij} b_j \equiv \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_j$, eli summeerataan toistuvan indeksin suhteen.

missä

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{jos } i \neq j, \end{cases} \quad (12.6)$$

on Kroneckerin delta. Deformaatiota mittaava siirtymägradientti määritellään kaavalla

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij}. \quad (12.7)$$

Merkitään seuraavassa osittaisderivaattaa pilkulla eli

$$u_{i,j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial X_j}. \quad (12.8)$$

Viiva-alkioiden neliöiden erotus on

$$ds^2 - dS^2 = dx_k dx_k - dX_k dX_k = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) dX_i dX_j \quad (12.9)$$

tai

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{ij} dX_i dX_j, \quad (12.10)$$

missä on merkitty

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}). \quad (12.11)$$

E_{ij} on Greenin-Lagrangen muodonmuutostensori.

Jos kuormitushistorian aikana $-\infty < \tau < t$

$$\sup_{\tau} |u_{i,j}(\tau)| \ll 1, \quad (12.12)$$

niin deformaatio on infinitesimaalinen ja tällöin voidaan käyttää lineaarista pienten siirtymien teorian muodonmuutosta

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (12.13)$$

Siirtymägradientti

$$L_{ij} \equiv u_{i,j} \quad (12.14)$$

voidaan jakaa symmetriseen ja antisymmetriseen osaan

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}), \quad (12.15)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \quad (12.16)$$

Kolmiulotteisessa (x, y, z) -avaruudessa

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (12.17)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (12.18)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.19)$$

Derivoimalla siirtymävektori $\mathbf{u}$ ajan tai kuormaparametrin suhteen (staattisessa kuormitustapauksessa) saadaan nopeusvektori $\mathbf{v}$. Nopeusvektorin $\mathbf{v}$ komponentit (v_1, v_2, v_3) ovat

$$v_i \equiv \dot{u}_i = \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{X_j = \text{vakio}}. \quad (12.20)$$

Muodonmuutosnopeustensori on

$$\dot{\varepsilon}_{ij} \equiv d_{ij}. \quad (12.21)$$

12.1.2 Jännitystensori ja tasapainoyhtälöt

Merkitään, että jännitystensorin komponentit ovat σ_{ij} . Pinnalla, jonka normaalivektori on $\mathbf{n}$, vaikuttaa jännitysvektori ²

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}(\mathbf{n})}{\Delta S}, \quad (12.22)$$

missä $\Delta \mathbf{R}$ on alkioon ΔS vaikuttava voima. Vektori (pseudovektori) $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ voidaan jakaa komponentteihin

$$t_i = \sigma_{ji} n_j. \quad (12.23)$$

Liikemäärän ja kulmaliiikemäärän säilymisen periaatteiden nojalla johdetaan liikeyhtälöt, tai tasapainoyhtälöt staattisessa kuormitustapauksessa,

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (12.24)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (12.25)$$

missä f_i ja $\rho \ddot{u}_i$ ovat tilavuusvoimavektorin ja hitausvoimavektorin komponentit ja ρ on aineen tiheys. Staattisessa kuormitustapauksessa $\rho \ddot{u}_i = 0$.

Koska kulmaliiikemäärän säilymisen periaatteen nojalla jännitystensori on symmetrinen eli $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, jännitysvektori on

$$t_i = \sigma_{ji} n_j = \sigma_{ij} n_j. \quad (12.26)$$

²Vektori $\mathbf{t}$ ja sen komponentit riippuvat materiaaliapisteen läpi kulkemaan valitusta pinnasta S eli vektorista $\mathbf{n}$.

Staattisessa kuormitustapauksessa kappaleen B mielivaltaisen osatilavuuden V tilavuusvoimien f_i ja osan V reunalla $\partial V = S$ vaikuttavien reunavoimien t_i tasapainoehto on

$$\int_S t_i dS + \int_V f_i dV = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12.27)$$

Yhtälön $t_i = \sigma_{ij}n_j$ perusteella tasapainoehto saadaan muotoon

$$\int_S \sigma_{ij}n_j dS + \int_V f_i dV = 0. \quad (12.28)$$

Divergenssiteoreeman

$$\int_S g_i n_i dS = \int_V g_{i,i} dV \quad (12.29)$$

nojalla tulee

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) dV = 0. \quad (12.30)$$

Koska osatilavuus V voidaan valita mielivaltaisesti, täytyy olla voimassa tasapainoyhtälöt

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12.31)$$

Kolmiulotteisessa koordinaatistossa (x, y, z) tasapainoehdot ovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Jos jännitysvektori $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ on tason yksikkönormaalivektorin $\mathbf{n}$ suuntainen, niin $\mathbf{n}$ määrittelee pääsuunnan ja sitä vastaava taso on päätaso. Tällöin $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \sigma \mathbf{n}$ eli $t_i = \sigma n_i$, ja kaavasta (12.23) saadaan yhtälöryhmä

$$\sigma_{ji}n_j = \sigma_{ij}n_j = \sigma n_i, \quad (12.33)$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij})n_j, \quad (12.34)$$

missä

$$\delta_{ij} = 1, \text{ jos } i = j \text{ ja } \delta_{ij} = 0, \text{ jos } i \neq j, \quad (12.35)$$

on Kroneckerin delta.

Homogeenisella yhtälöryhmällä (12.34) on ei-triviaali ratkaisu, jos sen kerroinmatriisin determinantti on nolla eli

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0. \quad (12.36)$$

Matriisimuodossa sama yhtälö on

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (12.37)$$

Kehittämällä determinanttiyhtälö tulee kolmannen asteen yhtälö

$$\sigma^3 - I_1\sigma + I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (12.38)$$

jonka kertoimet ovat

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad (12.39)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \quad (12.40)$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (12.41)$$

Kertoimet I_1 , I_2 ja I_3 ovat jännitystensorin σ invariantit.

Pääjännitysavaruudessa invariantit I_i ovat

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \quad (12.42)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Yhtälön (12.38) juuret ovat pääjännitykset σ_i , $i = 1, 2, 3$.

Hydrostaattisessa jännitystilassa

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} \quad (12.43)$$

jännitys on sama kaikissa suunnissa, ja sitä nimitetään myös pallojännitystilaksi. Keskimääräinen jännitys on

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}I_1. \quad (12.44)$$

Yleisessä tapauksessa jännitysdeviaattori määritellään kaavalla

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}. \quad (12.45)$$

Jännitysdeviaattori saadaan siis vähentämällä jännitystensorista sen pallo-osa $p\delta_{ij}$. Matriisimuodossa

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix}, \quad (12.46)$$

tai hieman eri merkinnöin

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - p \end{bmatrix}. \quad (12.47)$$

Pääjännitysavaruuudessa jännitystensorin deviaattorin nollasta poikkeavat komponentit ovat

$$S_i = \sigma_i - p, \quad i = 1, \dots, 3, \quad (12.48)$$

ja matriisimuodossa

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - p \end{bmatrix}. \quad (12.49)$$

Jännitysdeviaattorin invariantit ovat ehdosta

$$\det(S_{ij} - s\delta_{ij}) = 0 \quad (12.50)$$

seuraavan kolmannen asteen yhtälön

$$s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0 \quad (12.51)$$

kertoimet ³

$$J_1 = S_{ii} = 0, \quad J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \quad J_3 = \det \mathbf{S}. \quad (12.53)$$

Invariantti J_2 voidaan kirjoittaa jännityskomponenttien avulla muodossa

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2. \quad (12.54)$$

Pääjännitysavaruuudessa ehdosta

$$\det(\mathbf{S} - s\mathbf{I}) = 0 \quad (12.55)$$

seuraa

$$(S_1 - s)(S_2 - s)(S_3 - s) = -s^3 + J_1 s^2 + J_2 s + J_3 = 0, \quad (12.56)$$

missä kolmannen asteen polynomiyhtälön kertoimet ovat

$$J_1 = S_1 + S_2 + S_3 = 0, \quad (12.57)$$

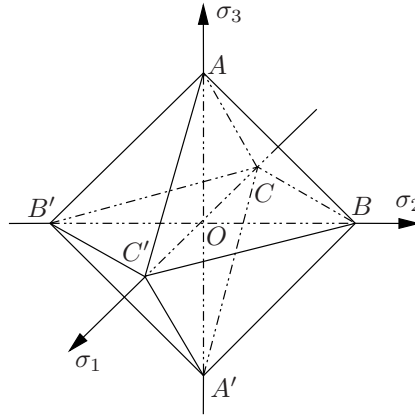
$$J_2 = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) = -(S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1), \quad (12.58)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}(S_1^3 + S_2^3 + S_3^3) = S_1 S_2 S_3. \quad (12.59)$$

³Tässä on jälleen merkitty

$$S_{ij} S_{ij} \equiv \sum_{ij} S_{ij} S_{ij}, \quad (12.52)$$

eli kaavassa summataan toistuvan indeksin suhteen, (Einsteinin nimiin pantu merkintäsopimus).



Kuva 12.1 Kahdeksan oktaedritasoa pääjännitysavaruudessa.

Pääjännitysten avulla lausuttu invariantti J_2 on

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (12.60)$$

Jännitysdeviaattorin invariantit J_i voidaan lausua jännitystensorin invarianttien I_i avulla kaavoilla

$$J_1 = 0,$$

$$J_2 = \frac{1}{3}(I_1^2 - 3I_2), \quad (12.61)$$

$$J_3 = \frac{1}{27}(2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3).$$

Oktaedritason jännityskomponentit

Tasoa, jonka normaali on

$$\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}_{\text{okt}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (12.62)$$

nimitetään oktaedritasoksi, kuva 12.1. Pääjännitysavaruudessa oktaedritaso leikkaa akselit σ_1 , σ_2 ja σ_3 yhtä kaukana origosta. Oktaedritasoja on kahdeksan kappaletta.

Jännitystensori on pääjännitysavaruudessa

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (12.63)$$

Tason $\mathbf{n}$ normaalijännityskomponentti on jännitysvektorin (pseudovektorin) $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ projektio normaalin $\mathbf{n}$ suunnalle, eli

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = t_i n_i = \sigma_{ij} n_i n_j. \quad (12.64)$$

Pääjännitysavaruudessa

$$\begin{aligned}\sigma_n &= (\sigma_{ij} \delta_{ij}) n_i n_j \\ &= \sigma_1 n_1 n_1 + \sigma_2 n_2 n_2 + \sigma_3 n_3 n_3.\end{aligned}\tag{12.65}$$

Oktaedritasoon liittyvä normaali-jännityskomponentti on

$$\sigma_{\text{okt}} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_1.\tag{12.66}$$

Merkitään, että oktaedritason jännitysvektori on

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}_{\text{okt}}) \equiv \mathbf{t}_{\text{okt}}.\tag{12.67}$$

Tällöin oktaedritason leikkausjännitys on

$$\tau_{\text{okt}} = \sqrt{\mathbf{t}_{\text{okt}} \cdot \mathbf{t}_{\text{okt}} - \sigma_{\text{okt}}^2}.\tag{12.68}$$

Koska

$$t_{\text{okt}}^2 \equiv \mathbf{t}_{\text{okt}} \cdot \mathbf{t}_{\text{okt}} = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2),\tag{12.69}$$

saadaan

$$\tau_{\text{okt}}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{3^2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2\tag{12.70}$$

eli

$$\tau_{\text{okt}}^2 = \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].\tag{12.71}$$

Kaavan (12.60) perusteella saadaan yhteys

$$\tau_{\text{okt}}^2 = \frac{2}{3}J_2\tag{12.72}$$

tai

$$\tau_{\text{okt}} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.\tag{12.73}$$

Deviatoorinen taso

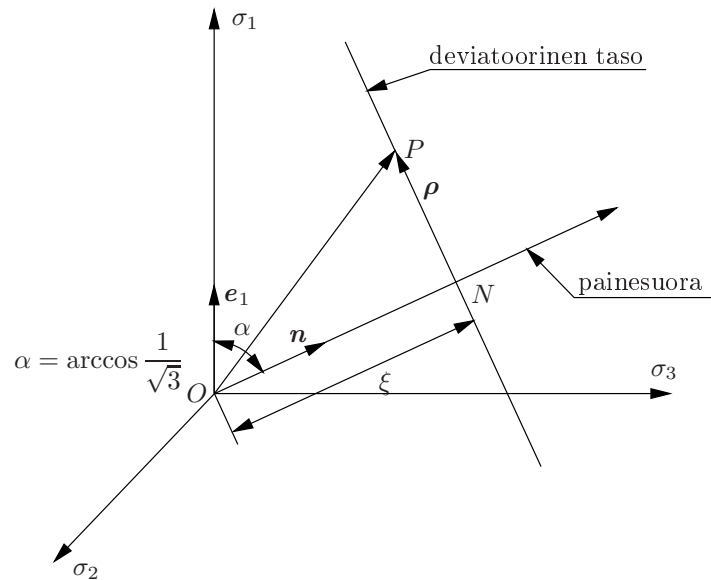
Pääjännitysavaruuden suoraa $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ nimitetään hydrostaattiseksi suoraksi, koska tällä suoralla sijaitsevat pisteet edustavat hydrostaattista jännitystilaa $\sigma_{ij} = p\delta_{ij}$. Jännitysdeviaattori $S_i = \sigma_i - p$ häviää hydrostaattisella suoralla. Hydrostaattista suoraa vastaan kohtisuora taso on deviatoorinen taso, jonka yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sqrt{3}\xi,\tag{12.74}$$

missä ξ on tason etäisyys origosta.

Deviatoorinen taso on siis samansuuntainen kuin edellä esitelty oktaedritaso. Origin kautta kulkeva deviatoorinen taso on nimeltään Π -taso, ja sen yhtälö on

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0.\tag{12.75}$$



Kuva 12.2 Haigh-Westergaardin jännitysavaruus.

Deviatoorisen tason yksikkönormaalivektori on

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (12.76)$$

Pääjännitysavaruuden piste P edustaa mielivaltaista jännitystilaa $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Origosta O pisteeseen P piirretyn vektorin $\mathbf{OP}$ ja normaalivektorin $\mathbf{n}$ skalaaritulo on

$$\mathbf{OP} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sqrt{3}p = \frac{1}{\sqrt{3}}I_1 = \xi. \quad (12.77)$$

Deviatoorisessa tasossa olevan vektorin $\mathbf{NP}$ komponentit ovat

$$\mathbf{NP} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - p \\ \sigma_2 - p \\ \sigma_3 - p \end{bmatrix} \quad (12.78)$$

eli

$$\mathbf{NP} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}. \quad (12.79)$$

Merkitään, että vektorin $\mathbf{NP}$ pituus on

$$\rho \equiv |\mathbf{NP}|. \quad (12.80)$$

Pituudelle ρ saadaan mm. seuraavat esitystavat

$$|\mathbf{NP}| = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = \sqrt{2J_2} = \sqrt{3}\tau_{\text{okt}}. \quad (12.81)$$

eli

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2J_2^{\frac{3}{2}}}(S_1^3 - S_1J_2). \quad (12.88)$$

Ottamalla huomioon invariantin J_2 kaava $J_2 = -(S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1)$ tulee

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2J_2^{\frac{3}{2}}}[S_1^3 + S_1^2(S_2 + S_3) + S_1S_2S_3]. \quad (12.89)$$

Sijoittamalla lopuksi $S_2 + S_3 = -S_1$ ja $J_3 = S_1S_2S_3$ saadaan

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{\frac{3}{2}}}. \quad (12.90)$$

Nähdään, että suure $\cos 3\theta$ on invarianteista J_2 ja J_3 riippuva invariantti. Jännitystila $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ voidaan lausua pääjännitysavaruuksessa parametrien (ξ, ρ, θ) avulla. Itseasiassa koordinaatit (ξ, ρ, θ) määrittelevät kolmiulotteisen avaruuden, jossa voidaan lausua materiaalin myötöehto.

Koordinaattien $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ja (ξ, ρ, θ) välille voidaan johtaa yhteydet. Suureen $\cos \theta$ kaavasta ratkaistaan

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \theta. \quad (12.91)$$

Samalla tavalla saadaan

$$S_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \left(\frac{2\pi}{3} - \cos \theta \right), \quad (12.92)$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \left(\frac{2\pi}{3} + \cos \theta \right). \quad (12.93)$$

Kaavat ovat voimassa, kun

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad \text{eli} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}. \quad (12.94)$$

Edellä esitettyjen kaavojen nojalla pääjännitykset ovat

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \end{bmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (12.95)$$

tai

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rho \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}. \quad (12.96)$$

12.1.3 Virtuaalisen työn periaate

Virtuaalisen työn yhtälö on hyödyllinen väline monien jatkuvan aineen mekaniikan yleisten periaatteiden todistamisessa ja esimerkiksi numeeristen ratkaisumenetelmien kehittämises-

sä. Virtuaalisen työn periaatteen mukaan tasapainossa olevan kappaleen virtuaalisten töiden summa on nolla virtuaalisten siirtymien δu_i tapahtuessa. Virtuaalisen työn yhtälö on

$$\int_B \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_B f_i \delta u_i dV - \int_{\partial B_t} \hat{t}_i \delta u_i dS = 0, \quad (12.97)$$

missä $\hat{t}_i$ ovat kappaleen reunan osalla ∂B_t tunnetut reunakuormat. Reunan osalla ∂B_u siirtymät toteuttavat reunaehdot $u_i = \hat{u}_i$, ja virtuaaliset siirtymät toteuttavat homogeeniset reunaehdot $\delta u_i = 0$. Virtuaaliset muodonmuutokset $\delta \varepsilon_{ij}$ ovat yhteensopivat virtuaalisten siirtymien δu_i kanssa. Jännitykset toteuttavat tasapainoehdot $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ kappaleessa B ja reunan tasapainoehdot $\hat{t}_i = \sigma_{ij} n_j$ kappaleen reunan osalla ∂B_t , n_i on reunapinnan yksikkönormaalivektori. Jännitykset ja siirtymät voivat olla todellisia tai kuviteltuja, eikä jännitysten ja siirtymien tarvitse liittyä toisiinsa millään tavalla.

Otaksumalla tasapainoehtojen toteutuvan voidaan kirjoittaa yhtälö

$$- \int_B (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i dV - \int_{\partial B_t} (\hat{t}_i - \sigma_{ij} n_j) \delta u_i dS = 0, \quad (12.98)$$

joka voidaan Gaussin lauseen

$$\int_V g_{i,i} dV = \int_S g_i n_i dS \quad (12.99)$$

avulla muuntaa muotoon

$$\int_B \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV - \int_{\partial B} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS - \int_B f_i \delta u_i dV - \int_{\partial B_t} (\hat{t}_i - \sigma_{ij} n_j) \delta u_i dS = 0, \quad (12.100)$$

eli

$$\int_B \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_B f_i \delta u_i dV - \int_{\partial B_t} \hat{t}_i \delta u_i dS = 0, \quad (12.101)$$

koska $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ ja $\delta u_i = 0$ reunapinnan osalla ∂B_u .

Virtuaalisen työn yhtälöstä voidaan johtaa tasapainoehdot suorittamalla yllä tehdyt toimenpiteet käänteisessä järjestyksessä. Joskus virtuaalisen työn yhtälöä sanotaan tasapainoehtojen heikoksi muodoksi sen takia, että virtuaalisen työn yhtälössä integroidaan kappaleen ja sen reunan yli, mutta tasapainoehdot vaaditaan toteutuviksi pisteittäin. Tasapainoehtojen ja virtuaalisen työn yhtälön toteutuminen ovat edellä esitetyn perusteella kuitenkin samanarvoiset asiat.

Virtuaalisen työn yhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$W_s = W_u, \quad (12.102)$$

missä sisäinen virtuaalinen työ W_s on

$$W_s = \int_B \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (12.103)$$

ja ulkoinen virtuaalinen työ W_u on

$$W_u = \int_B f_i \delta u_i dV + \int_{\partial B_t} \hat{t}_i \delta u_i dS. \quad (12.104)$$

Virtuaalisen työn yhtälö voidaan kirjoittaa nopeuksien avulla seuraavissa muodoissa (staattisessa kuormitustapauksessa aika on kuormaparametrin luonteinen suure, ja derivointi ajan eli kuormaparametrin suhteen merkitsee samaa kuin inkrementointi)

$$\int_B \dot{\sigma}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_B \dot{f}_i \delta u_i dV - \int_{\partial B_t} \dot{\hat{t}}_i \delta u_i dS = 0, \quad (12.105)$$

$$\int_B \sigma_{ij} \delta d_{ij} dV - \int_B f_i \delta v_i dV - \int_{\partial B_t} \hat{t}_i \delta v_i dS = 0, \quad (12.106)$$

$$\int_B \dot{\sigma}_{ij} \delta d_{ij} dV - \int_B \dot{f}_i \delta v_i dV - \int_{\partial B_t} \dot{\hat{t}}_i \delta v_i dS = 0, \quad (12.107)$$

missä $d_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ on muodonmuutosnopeus ja $v_i = \dot{u}_i$.

12.2 Myötöehto

Myötöehto määrittää jännitystilän σ_{ij} , jolla plastisia muodonmuutoksia alkaa tapahtua. Myötöehto voidaan antaa yleisessä muodossa

$$f(\sigma_{ij}, k_l) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (12.108)$$

Parametrit $k_1, k_2, k_3, \dots$ ovat kokeellisesti määritettäviä materiaalivektoreita tai -funktioita, kuten esimerkiksi myötöjännitys σ_m tai leikkausmyötöraja τ_m . Jos myötöehto voidaan antaa vain yhden parametrin $k \equiv k_1$ avulla, niin saadaan yhtälö

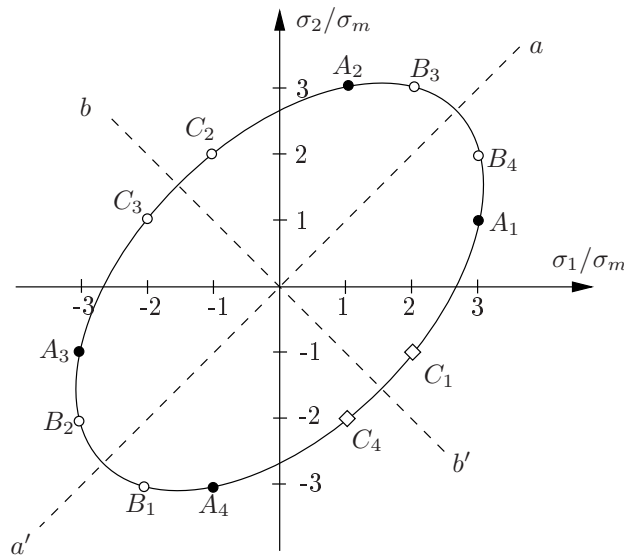
$$F(\sigma_{ij}) = k, \quad (12.109)$$

missä k on tunnettu skalaarifunktio tai vakio. Funktio k voi riippua plastisesta muodonmuutoksesta tai plastisesta työstä ja ottaa huomioon myötölujittumisen. Materiaali on tällöin **myötölujittuva**. Jos parametri k on vakio, niin materiaali on **ideaaliplastinen**.

Yhtälö (12.109) esittää hyperpintaa, myötöpintaa, jännitysvaruudessa. Esim. vetoko-keessa myötörajaa vastaava piste (vedetään x :n suuntaan) myötöpinnalla on

$$\sigma_x = \sigma_m, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (12.110)$$

missä σ_m on vetomyötöraja.



Kuva 12.4 Suhteellinen kuormitus materiaalikokeessa kaksiulotteisessa jännitystilassa.

Isotrooppisen aineen tapauksessa myötöehto voidaan lausua pääjännitysten avulla muodossa

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = k. \quad (12.111)$$

Koska pääjännitykset voidaan lausua jännitystensorin σ_{ij} ensimmäisen invariantin I_1 ja jännitysdeviaattorin S_{ij} invarianttien J_2 ja J_3 avulla, isotrooppisen plastisen aineen myötöehto voidaan muuntaa muotoon

$$F(I_1, J_2, J_3) = k, \quad (12.112)$$

tai muotoon

$$F(\xi, \rho, \theta) = k \quad (12.113)$$

Haighin-Westergaardin parametrien avulla.

Jos hydrostaattinen paine ei vaikuta myötöön, niin myötöehto pääjännitysavaruuudessa voidaan kirjoittaa muodossa

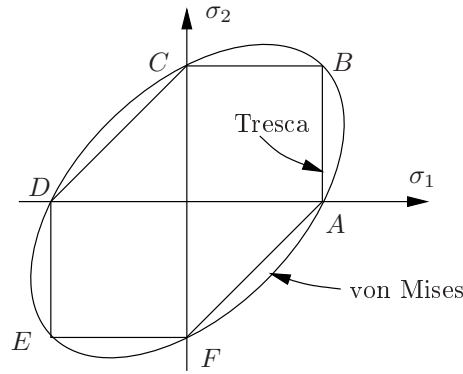
$$F(S_1, S_2, S_3) = k, \quad (12.114)$$

missä S_1 , S_2 ja S_3 ovat deviaattoriset jännitykset.

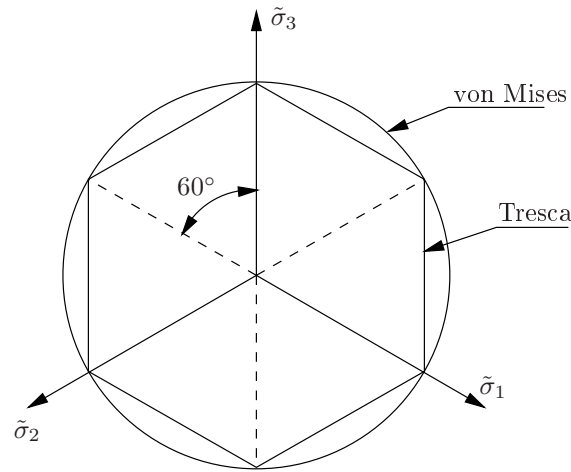
Koska $J_1 = 0$, isotrooppisen aineen paineesta p riippumaton myötöehto voidaan lausua muodossa

$$F(J_2, J_3) = k. \quad (12.115)$$

Yksiulotteisen vetokokeen perusteella ei saada tietoa materiaalin käyttäytymisestä useampiulotteisissa jännitystilassa. Sensijaan suorittamalla kokeita yhdistetyssä jännitystilassa voidaan saada jo yhden kokeen perusteella paljon informaatiota myötöpinnasta tietyin edellytyksin. Esimerkiksi kuormittamalla koekappaletta kaksiakselisessa vedossa siten, että pääjännitysten σ_1 ja σ_2 suhteet pysyvät samoina (suhteellinen kuormitus) saadaan yhden kokeen perusteella määritettyä 12 myötöpinnan (-käyrän) pistettä, jos materiaali on



Kuva 12.5 von Misesin ja Trescan myötöehdot pääjännitystasossa $\sigma_3 = 0$.



Kuva 12.6 von Misesin ja Trescan myötöehdot Π -tasossa $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

(i) isotrooppista, (ii) sen myötö ei riipu hydrostaattisesta jännityksestä ja (iii) sen veto- ja puristusmyötörajat ovat samat. Voidaan osoittaa, että määrittämällä kokeellisesti kuvan 12.4 piste A_1 saadaan samalla selville 11 muuta pistettä myötökäyrällä em. edellytyksin.

12.2.1 Hydrostaattisesta jännityksestä riippumattomat myötöehdot

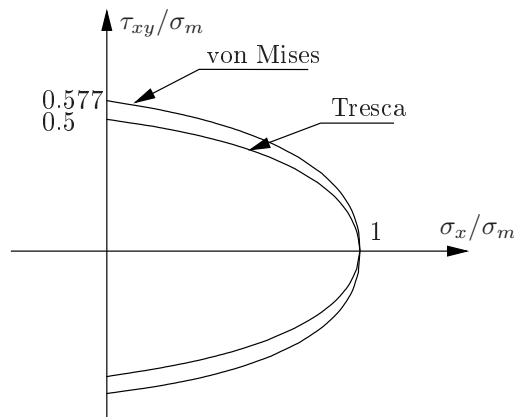
von Misesin myötöehto

Isotrooppisen, hydrostaattisesta jännityksestä riippumattoman aineen myötöehdon erikoistapauksena saadaan metalleille hyvin sopiva myötöehto

$$J_2 = \frac{1}{3}\sigma_m^2 = k^2, \quad (12.116)$$

missä $k = \tau_m$ on leikkausmyötöraja ja pääjännitysten avulla lausuttu jännitysdeviaattorin toinen invariantti on

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (12.117)$$



Kuva 12.7 von Misesin ja Trescan myötöehdot tasossa (σ_x, τ_{xy}) .

Oktaedrileikkausjännityksen avulla lausuttuna tulee von Misesin ehto muotoon

$$\tau_{\text{okt}}^2 = \frac{2}{3}J_2 = \frac{2}{3}k^2. \quad (12.118)$$

Aksiaalisessa jännitystilassa vetokoesauva myötää, kun $\sigma_1 = \sigma_m$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Myötöehdon perusteella on tällöin

$$k = \frac{\sigma_m}{\sqrt{3}}. \quad (12.119)$$

Tasojännitystilassa von Misesin ehto supistuu muotoon

$$\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} - \sigma_m = 0. \quad (12.120)$$

Pääjännitystasossa (σ_1, σ_2) aine myötää, kun

$$\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sigma_m. \quad (12.121)$$

Yleisessä jännitystilassa von Misesin myötöehdon leikkaus tason (σ_x, τ_{xy}) kanssa on myös ellipsi

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sigma_m. \quad (12.122)$$

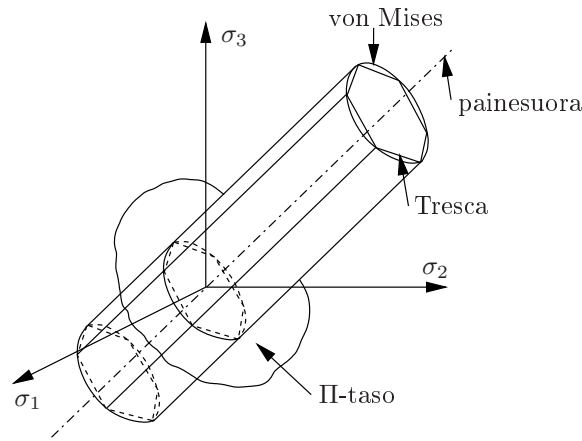
von Misesin myötöpinta on pääjännitysavaruuudessa sylinteri, jonka akseli on suora (painesuora) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Painesuoraa vastaan kohtisuora taso, joka kulkee origon kautta on Π -taso. von Misesin sylinterin ja Π -tason leikkauskäyrä on ympyrä.

Määrittelemällä ns. ekvivalentti jännitys

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}} = \sqrt{3J_2} \quad (12.123)$$

saadaan von Misesin myötöehto muotoon

$$\bar{\sigma} - \sigma_m = 0. \quad (12.124)$$



Kuva 12.8 von Misesin ja Trescan myötöehdot pääjännitysavaruuudessa.

Trescan myötöehto

Trescan myötöehdon mukaan myötö alkaa, kun suurin leikkausjännitys saa leikkausmyötö-
rajan suuruisen arvon eli kaavan muodossa, kun

$$\max \left\{ \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1| \right\} = k, \quad (12.125)$$

missä $k = \tau_m$, tai hieman toisin kirjoitettuna

$$\frac{1}{4}(|\sigma_1 - \sigma_2| + |\sigma_2 - \sigma_3| + |\sigma_3 - \sigma_1|) = \tau_m. \quad (12.126)$$

Parametri k voidaan määrittää vetokokeesta, jossa

$$k = \frac{\sigma_m}{2}. \quad (12.127)$$

Pääjännitystasossa (σ_1, σ_2) Trescan myötöehdosta tulee kuusi erilaista ehtoa. Ensimmäi-
sessä neljänneksessä kuvassa 12.5

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}, \quad AB, \quad (12.128)$$

tai

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_2}{2}, \quad BC. \quad (12.129)$$

Toisessa neljänneksessä

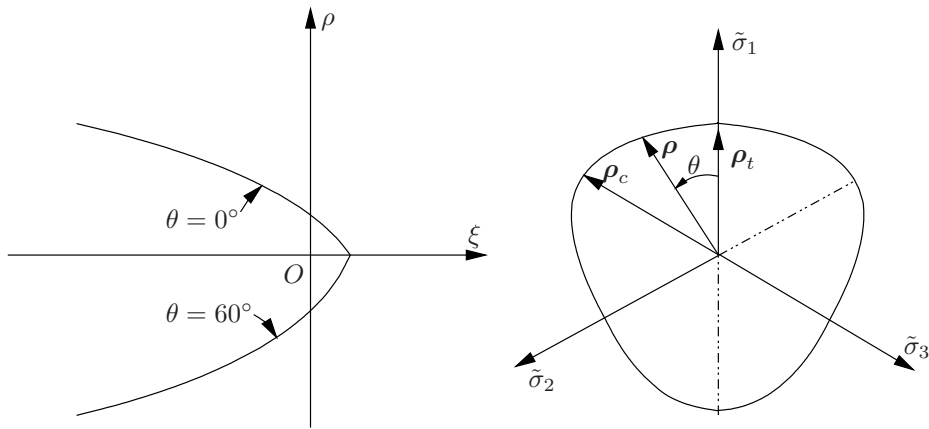
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, \quad CD. \quad (12.130)$$

Pääjännitysavaruuudessa pääjännitysten kaavojen (12.95) perusteella saadaan tapauk-
sessa $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ Trescan ehto muotoon

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2} \left[\cos \theta - \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = k = \frac{\sigma_m}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 60^\circ. \quad (12.131)$$

Jännitysinvarianttien avulla lausuttu myötöehto on

$$f(J_2, \theta, \sigma_m) = 2\sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - \sigma_m = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 60^\circ, \quad (12.132)$$



Kuva 12.9 Hydrostaattisesta paineesta riippuva myötöehto.

tai parametrien ρ, θ avulla

$$F(\rho, \theta, \sigma_m) = \sqrt{2}\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \sigma_m = 0. \quad (12.133)$$

Trescan myötöehto ei riipu hydrostaattisesta paineesta p (tai parametrasta ξ), joten myös Trescan myötöpinta on pääjännitysavaruuudessa sylinteri, jonka akseli on painesuora $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Trescan sylinterin ja II-tason leikkauskäyrä on säännöllinen kuusikulmio. Piste A kuvassa 12.6 edustaa tilaa $\theta = 0$, $\rho = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_m$, ja vastaavasti pisteessä B $\theta = 60^\circ$, $\rho = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_m$.

Trescan ehdon ja tason (σ_x, τ_{xy}) leikkauskäyrä on ellipsi, kuva 12.7,

$$\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_m^2. \quad (12.134)$$

Vaihtoehtoisesti Trescan myötöehto voidaan vielä kirjoittaa muodossa

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2][(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2][(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 4k^2] = 0, \quad (12.135)$$

joka voidaan lausua jännitysdeviaattorin invarianttien J_2 ja J_3 avulla kaavana

$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^2J_2^2 + 96k^4J_2 - 64k^6 = 0. \quad (12.136)$$

12.2.2 Hydrostaattisesta jännityksestä riippuvat myötöehdot

Hydrostaattinen jännitys kohtuullisilla jännitystasoilla ei käytännössä vaikuta metallien plastiseen myötöön. Matemaattisesti yksinkertaiset von Misesin ja Trescan myötöehdot ovat metallien tapauksessa kohtuullisia approksimaatiota todellisille myötöehdoille. Paineen arvosta riippumaton myötöpinta on pääjännitysavaruuudessa sylinteri, jonka leikkauskäyrä deviaattorisen tason kanssa on muodoltaan vakio paineakselia pitkin mentäessä.

Sensijaan monien rakennustekniikassa tärkeiden materiaalien, kuten maan, kallion ja betonin plastinen deformaatio riippuu keskimääräisen jännityksen (paineen) tasosta. Näiden materiaalien myötöehto (isotrooppisen aineen tapauksessa) on lausuttava muodossa

$$F(I_1, J_2, J_3) = k, \quad \text{tai} \quad F(\xi, \rho, \theta) = k, \quad (12.137)$$

missä invariantti I_1 tai parametri ξ ottaa huomioon riippuvaisuuden hydrostaattisesta paineesta. Myötöpinnan muoto voidaan antaa pinnan deviatorisen tason leikkauskäyrän ja myötöpinnan meridiaanien avulla.

Isotrooppisen materiaalin symmetrian takia riittää määrittää pääjännitysavaruuksessa kokeellisesti sektori $\theta \in (0, 60^\circ)$, jossa $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Välin päätepisteissä

$$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3, \quad \theta \equiv \theta_1 = 60^\circ, \quad (12.138)$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3, \quad \theta \equiv \theta_2 = 0^\circ, \quad (12.139)$$

koska kaavan (12.86) perusteella

$$\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{S_1}{\sqrt{J_2}} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_1 - \sigma_3}{2\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{6}(\sigma_1 - \sigma_3)^2}} = \frac{1}{2} \quad (12.140)$$

ja

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{S_1}{\sqrt{J_2}} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_3}{2\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{6}(\sigma_1 - \sigma_3)^2}} = 1. \quad (12.141)$$

Kulman θ arvoa 60° vastaavaa meridiaania nimitetään puristusmeridiaaniksi, koska se esittää jännitystilaa, joka saadaan lisäämällä hydrostaattiseen jännitystilaan puristusjännitys akselin $\tilde{\sigma}_3$ (negatiivisessa) suunnassa. Meridiaani $\theta = 0^\circ$ on vetomeridiaani. Se saadaan lisäämällä hydrostaattiseen jännitystilaan vetojännitys akselin $\tilde{\sigma}_1$ suunnassa.

Kulman arvoa $\theta = 30^\circ$ vastaavaa meridiaania voidaan nimittää leikkausmeridiaaniksi. Yhtälö (12.86) toteutuu tällä kulman θ arvolla, kun pääjännitykset ovat $\sigma_1, \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), \sigma_3$. Tällainen jännitystila saadaan, kun hydrostaattiseen jännitystilaan $p = \xi/\sqrt{3} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ (nyt) lisätään puhdas leikkausjännitytila $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3, 0, \sigma_3 - \sigma_1)$.

Coulombin ja Mohrin myötöehdot

Coulombin (1773) ja Mohrin (1900) myötöehdot sopivat maalajeille, kalliolle ja betonille. Coulombin ehdon mukaan aine myötää, kun

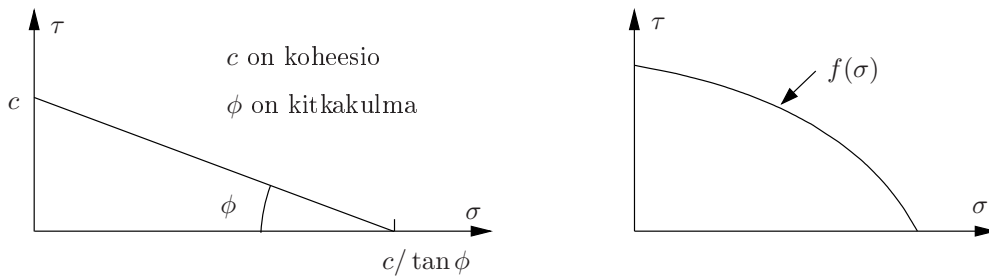
$$|\tau| = c - \sigma \tan \phi, \quad (12.142)$$

missä c on koheesio ja ϕ on kitkakulma. Parametrit c ja ϕ määritetään kokeellisesti. Koheesiomaalle (kitkattomalle materiaalille) $\tan \phi = 0$. Tällöin Coulombin myötöehto tulee samaksi kuin Trescan ehto, $\tau = c$, ja koheesio samaksi kuin leikkausmyötöraja, $c = k = \tau_m$.

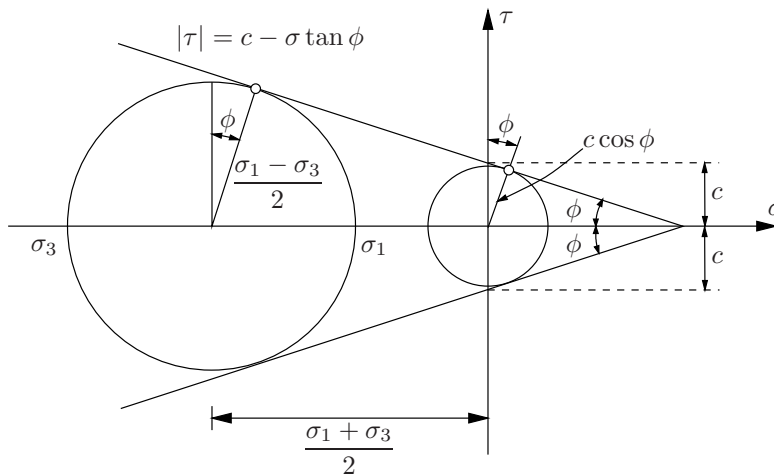
Mohrin ehto on Coulombin ehdon yleistys

$$|\tau| = f(\sigma), \quad (12.143)$$

missä $f(\sigma)$ on kokeellisesti määritettävä funktio. Mohrin ehdon mukaan materiaali myötää, kun suurin Mohrin ympyrä sivuaa tangentiaalisesti verhoikäyrää $f(\sigma)$. Mohrin ja Coulombin ehdoissa hydrostaattinen jännitystila vaikuttaa plastiseen myötöön.



Kuva 12.10 Coulombin ja Mohrin myötöehdot.



Kuva 12.11 Mohrin-Coulombin myötöehto.

Tapauksessa $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ Mohrin-Coulombin myötöehto (12.142) voidaan kuvan 12.11 Mohrin ympyrän perusteella esittää muodossa

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos \phi = c - \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \right] \tan \phi \quad (12.144)$$

eli

$$\sigma_1 \frac{1 + \sin \phi}{2c \cos \phi} - \sigma_3 \frac{1 - \sin \phi}{2c \cos \phi} = 1. \quad (12.145)$$

Määrittelemällä

$$f'_t = \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi}, \quad f'_c = \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (12.146)$$

Mohrin-Coulombin ehdoksi tulee

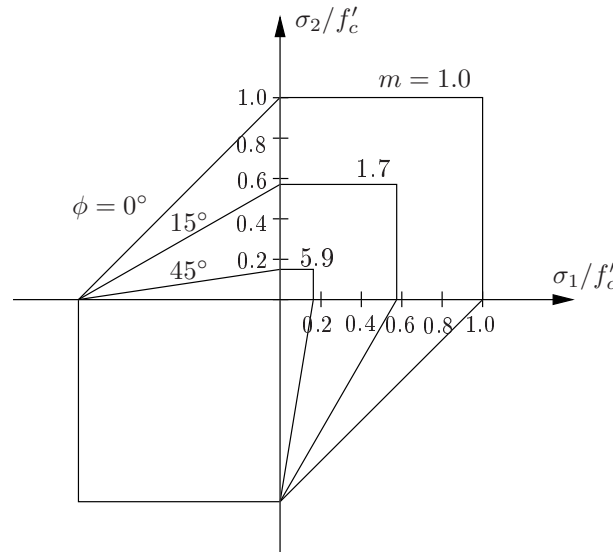
$$\frac{\sigma_1}{f'_t} - \frac{\sigma_3}{f'_c} = 1, \quad \text{kun } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \quad (12.147)$$

missä f'_t on vetolujuus ja f'_c on puristuslujuus. Määrittelemällä vielä parametri m osamääränä

$$m = \frac{f'_c}{f'_t} = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (12.148)$$

saadaan ehto (12.147) muotoon

$$m\sigma_1 - \sigma_3 = f'_c, \quad \text{kun } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (12.149)$$



Kuva 12.12 Mohrin-Coulombin myötöehto (σ_1, σ_2) -tasossa.

Kuvassa 12.12 Mohrin-Coulombin myötöehto on esitetty tapauksessa $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_m$ pametrin m eri arvoilla.

Pääjännitysten kaavojen (12.95) avulla Mohrin-Coulombin myötöehto saadaan muotoon

$$f(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3}I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (12.150)$$

tai parametrien ξ, ρ, θ avulla

$$f(\xi, \rho, \theta) = \sqrt{2}\xi \sin \phi + \sqrt{3}\rho \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + \rho \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi - \sqrt{6}c \cos \phi = 0, \quad \text{kun } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}. \quad (12.151)$$

Pääjännitysavaruudessa myötöehto (12.150) on kuusikulmainen pyramidi.

Druckerin-Pragerin myötöehto

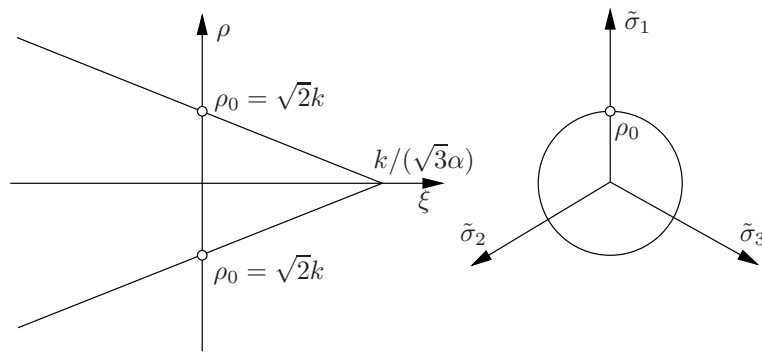
Mohrin-Coulombin myötöehto on Trescan ehdon yleistys paineesta riippuvaan tapaukseen. Samalla tavalla Druckerin-Pragerin myötöehto (1952) on von Misesin ehdon yleistys

$$\alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (12.152)$$

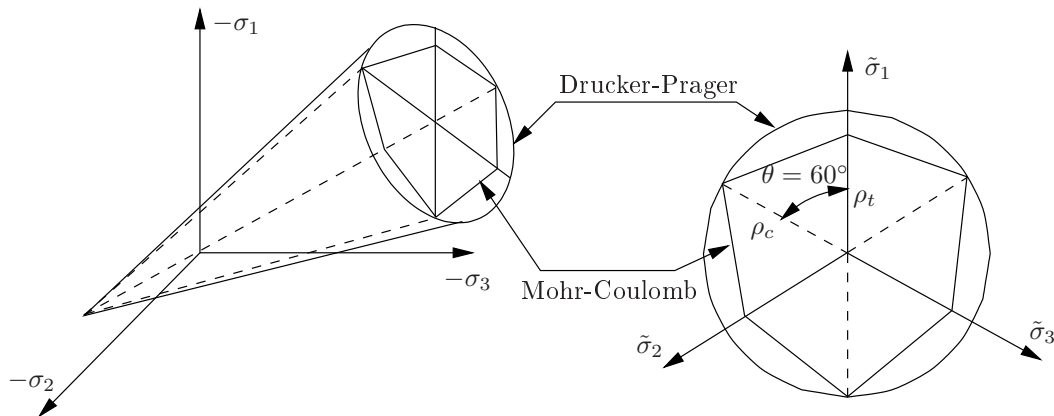
tai

$$\sqrt{6}\alpha\xi + \rho - \sqrt{2}k = 0 \quad (12.153)$$

parametrien ξ ja ρ avulla, α ja k ovat materiaaliparametreja. Kun $\alpha = 0$, Druckerin-Pragerin myötöehdosta seuraa von Misesin myötöehto.



Kuva 12.13 Druckerin-Pragerin myötöehto.



Kuva 12.14 Mohrin-Coulombin ja Druckerin-Pragerin myötöehdot, kun myötöpinnat sivuavat toisiaan puristusmeridiaania pitkin.

Kuvassa 12.13 on esitetty Druckerin-Pragerin myötöpinnan leikkaukset meridiaanitason ja deviatoorisen tason kanssa. Myötöpinta on kartio, jonka leikkauskäyrä Π -tason kanssa on ympyräviiva.

Kuvassa 12.14 on esitetty Mohrin-Coulombin ja Druckerin-Pragerin myötöehdot siinä tapauksessa, kun myötöpinnat on pantu sivuamaan toisiaan puristusmeridiaania pitkin.

12.3 Myötösääntö

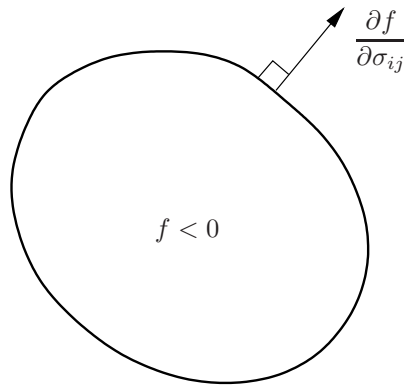
Myötösääntö ilmaisee sen kuinka plastiset muodonmuutokset tapahtuvat. Normaalisuussäännön mukaan plastiset muodonmuutokset ovat kohtisuorassa myötöpintaa vastaan eli ne ovat myötöpinnan gradientin suuntaisia, jolloin

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (12.154)$$

missä $d\lambda$ on verrannollisuuskertoimen.

Matriisimerkinnöin kirjoitettuna myötösääntö on

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (12.155)$$



Kuva 12.15 Myötösääntö.

missä $3D$ -tapauksessa

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^p \\ \varepsilon_y^p \\ \varepsilon_z^p \\ \gamma_{xy}^p \\ \gamma_{yz}^p \\ \gamma_{xz}^p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}. \quad (12.156)$$

Nopeuksien avulla lausuttu myötösääntö on

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (12.157)$$

Kerroin $\dot{\lambda}$ ja funktio f toteuttavat Kuhnin-Tuckerin (optimaalisuus)ehdot

$$\dot{\lambda} f = 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad f \leq 0. \quad (12.158)$$

Kaavan (12.154) myötösääntö on erikoistapaus. Se on myötöehtoon liittyvä eli **assosiatiiivinen myötösääntö**. Kaikille aineille assosiatiiivinen sääntö ei kuitenkaan ole riittävän tarkka, vaan myötösääntö on lausuttava erillisen (niinikään kokeellisesti määritettävän) plastisen potentiaalin $g(\sigma_{ij})$ suhteen. Myötösääntö on tällöin **ei-assosiatiiivinen**. Kaavojen muodossa saadaan

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (12.159)$$

ja matriisimerkinnöin

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (12.160)$$

Esimerkki 12.1 Tutkitaan von Misesin myötöehtoon liittyvää Prandtin-Reussin myötösääntöä.

Prandtl ja Reuss johtivat myötösäännön (normaalisuussäännön) von Misesin myötöehdon tapauksessa. Kirjoitetaan von Misesin myötöehto muotoon

$$F = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = k^2, \quad (12.161)$$

missä k otaksutaan vakioksi (ei myötölujittumista) ja jännitysdeviaattorin komponentit ovat

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}. \quad (12.162)$$

Myötösäännön mukaan

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{pq} &= d\lambda \frac{1}{2} \cdot 2S_{ij} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \sigma_{pq}} \\ &= d\lambda S_{ij} (\delta_{ip}\delta_{jq} - \frac{1}{3}\delta_{kp}\delta_{kq}\delta_{ij}) \\ &= d\lambda (S_{pq} - \frac{1}{3}S_{ii}\delta_{pq}) \\ &= d\lambda S_{pq}, \end{aligned} \quad (12.163)$$

koska $S_{ii} = 0$. Kertomalla myötösäännön

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda S_{ij} \quad (12.164)$$

molemmat puolet keskenään saadaan

$$d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda^2 S_{ij} S_{ij} = d\lambda^2 2J_2 \quad (12.165)$$

eli

$$\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda^2 \frac{4}{3} J_2. \quad (12.166)$$

Määrittelemällä ns. efektiivinen tai ekvivalentti plastinen muodonmuutosinkrementti

$$d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \quad (12.167)$$

saadaan ratkaistua kerroin

$$d\lambda = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sqrt{\frac{4}{3} J_2}} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}, \quad (12.168)$$

missä on otettu käyttöön ns. efektiivinen tai ekvivalentti jännitys

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2}. \quad (12.169)$$

Prandtlin-Reussin myötösääntö on nyt saatu muotoon

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda S_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} S_{ij}. \quad (12.170)$$

Kuusiulotteisessa jännitys-muodonmuutosavaruudessa plastiset muodonmuutokset ovat siten

$$d\varepsilon_x^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} [\sigma_x - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \quad (12.171)$$

eli

$$d\varepsilon_x^p = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} [\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)], \quad (12.172)$$

$$d\varepsilon_y^p = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} [\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)], \quad (12.173)$$

$$d\varepsilon_z^p = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]. \quad (12.174)$$

Plastinen leikkausmuodonmuutos (x, y) -tasossa on

$$d\varepsilon_{xy}^p = \frac{1}{2} d\gamma_{xy}^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \tau_{xy}, \quad (12.175)$$

ja kaksi muuta leikkausmuodonmuutoskomponenttia ovat

$$d\varepsilon_{yz}^p = \frac{1}{2} d\gamma_{yz}^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \tau_{yz}, \quad (12.176)$$

$$d\varepsilon_{xz}^p = \frac{1}{2} d\gamma_{xz}^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \tau_{xz}. \quad (12.177)$$

Esimerkki 12.2 Tarkastellaan useampiulotteisen myötöehdon sovellutuksena 2-akselista eli vinoa taivutusta.

Kuvan 12.16 perusteella saadaan taivutusmomenttien $M_x = \int y \sigma dA$, $M_y = - \int x \sigma dA$ kaavat

$$M_x = \frac{bh^2}{4} \sigma_m - 2 \left[\left(\frac{1}{2} \frac{b}{2} y \right) 2\sigma_m \right] \frac{y}{3} = \frac{bh^2}{4} \sigma_m - \frac{1}{3} by^2 \sigma_m \quad (12.178)$$

ja

$$M_y = 2 \left[\left(\frac{1}{2} \frac{b}{2} y \right) 2\sigma_m \right] \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{3} b^2 y \sigma_m. \quad (12.179)$$

Kaavat ovat voimassa, kun $y < \frac{h}{2}$. Merkitsemällä

$$M_{px} = \sigma_m \frac{bh^2}{4}, \quad M_{py} = \sigma_m \frac{b^2 h}{4} \quad (12.180)$$

ja eliminoimalla y saadaan johdetuksi momenteille vuorovaikutuskäyrä

$$\frac{M_x}{M_{px}} + \frac{3}{4} \left(\frac{M_y}{M_{py}} \right)^2 = 1, \quad (12.181)$$

joka on voimassa, kun

$$\frac{2}{3} \leq \frac{M_x}{M_{px}} \leq 1 \quad \text{ja} \quad 0 \leq \frac{M_y}{M_{py}} \leq \frac{2}{3}. \quad (12.182)$$

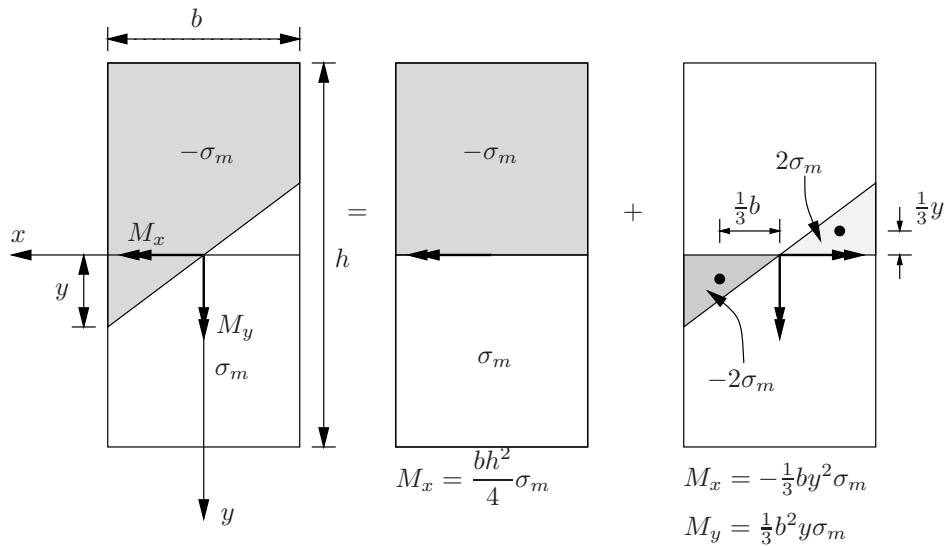
Jos neutraaliakseli leikkaa sivun, jonka pituus kuvassa 12.16 on b , niin saadaan vastaavasti vuorovaikutuskäyrä

$$\frac{3}{4} \left(\frac{M_x}{M_{px}} \right)^2 + \frac{M_y}{M_{py}} = 1, \quad (12.183)$$

jonka voimassaoloalue on komplementaarinen edellisen kaavan vastaavan alueen kanssa.

Normaalisuussäännön perusteella voidaan nyt määrittää palkin plastiset käyristymät

$$d\kappa_x^p = \frac{\partial f}{\partial M_x} \quad \text{ja} \quad d\kappa_y^p = \frac{\partial f}{\partial M_y}. \quad (12.184)$$



Kuva 12.16 Vino taivutus.

Esimerkki 12.3 Tarkastellaan esimerkkinä vielä ohutseinämäisen suorakaideputken vinoa taivutusta.

Ohutseinämäisen suorakaidepoikkileikkauksisen putken tapauksessa plastinen momentti x -akselin ympäri on

$$\begin{aligned} M_{px} &\approx bt\sigma_m h + 2\frac{th^2}{4}\sigma_m \\ &= \frac{1}{2}ht(2b + h)\sigma_m, \end{aligned} \quad (12.185)$$

kun $t \ll h$ eli seinämän vahvuus on paljon pienempi kuin sivun pituus. (Tarkka lauseke olisi $M_{px} = \frac{1}{4}[bh^2 - (b-2t)(h-2t)^2]\sigma_m$, josta kaava (12.185) seuraa linearisoimalla.) Vastaavasti momentti y -akselin ympäri on

$$M_{py} \approx \frac{1}{2}bt(2h + b)\sigma_m. \quad (12.186)$$

a) Neutraaliakseli leikkaa pystysivun

Kun neutraaliakseli leikkaa pystysivun, $0 < s < h/2$, momentti x :n ympäri on

$$M_x = bth\sigma_m + 2ts(h - s)\sigma_m \quad (12.187)$$

ja momentti y :n ympäri on

$$M_y = (h - 2s)tb\sigma_m. \quad (12.188)$$

Määritellään suhteelliset momenttien arvot

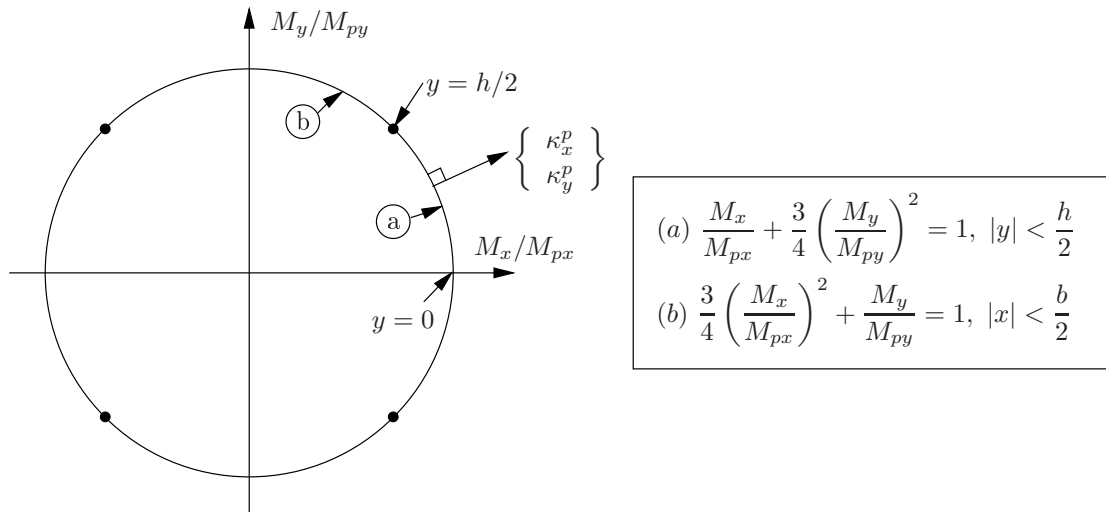
$$m_x = \frac{M_x}{M_{px}} = \frac{2b}{2b + h} + \frac{4s(h - s)}{h(2b + h)} \quad (12.189)$$

ja

$$m_y = \frac{M_y}{M_{py}} = \frac{2(h - 2s)}{2h + b}. \quad (12.190)$$

Ratkaisemalla jälkimmäisestä yhtälöstä

$$s = \frac{h}{2} - \frac{2h + b}{4}m_y \quad (12.191)$$



Kuva 12.17 Suorakaidepoikkileikkauksen myötöpinta $f(M_x, M_y) = \text{vakio}$ ja normaalisuussääntö.

ja sijoittamalla s edelliseen yhtälöön seuraa

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{2b}{2b+h} + \frac{4s}{2b+h} - \frac{4s^2}{h(2b+h)} \\ &= 1 - \frac{(2h+b)^2}{2b+h} \frac{m_y^2}{4h} \end{aligned} \quad (12.192)$$

eli

$$m_x + \frac{1}{4} \frac{(\alpha+2)^2}{(2\alpha+1)} m_y^2 = 1, \quad (12.193)$$

missä on merkitty $\alpha = \frac{b}{h}$. Kaava (12.193) on siis voimassa, kun $0 < s < h/2$ tai kun momentit ovat väleillä

$$\frac{2b}{2b+h} \leq m_x \leq 1 \quad (12.194)$$

ja

$$0 \leq m_y \leq \frac{2h}{2h+b}. \quad (12.195)$$

b) Neutraaliakseli leikkaa vaakasivun

Tässä tapauksessa johdetaan samalla tavalla kuin edellä, oikeanpuoleisen kuvan 12.18 avulla, vuorovaikutuskaava

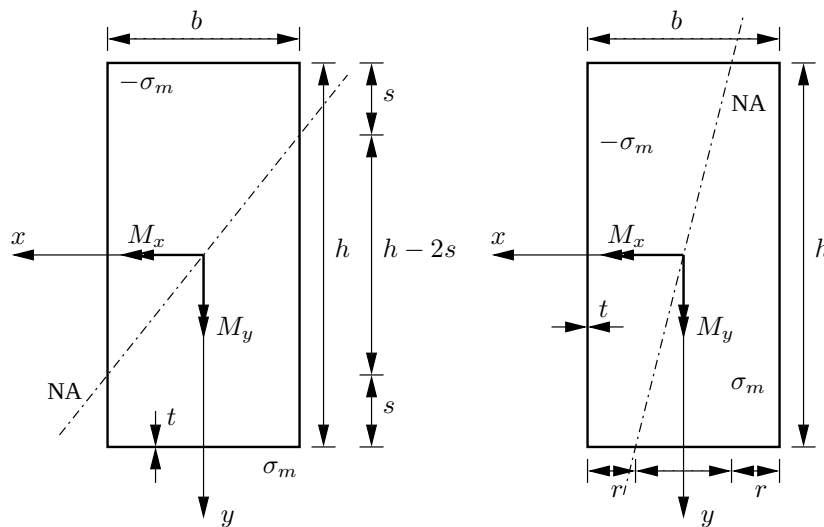
$$m_y + \frac{1}{4} \frac{(\beta+2)^2}{(2\beta+1)} m_x^2 = 1, \quad (12.196)$$

missä on merkitty $\beta = 1/\alpha = \frac{h}{b}$. Kaava (12.196) on voimassa, kun $0 < r < b/2$ tai kun momentit toteuttavat ehdot

$$\frac{2h}{2h+b} \leq m_y \leq 1 \quad (12.197)$$

ja

$$0 \leq m_x \leq \frac{2b}{2b+h}. \quad (12.198)$$



Kuva 12.18 Ohutseinämäisen suorakaideputken vino taivutus.

Momenttien vuorovaikutuskäyriä, myötöehtoja, on piirretty kuvaan 12.19 sivusuhteen α funktiona.

12.3.1 Plastisen tehon maksimin periaate

Plastisen tehon maksimin periaatteen mukaan plastiset muodonmuutokset tapahtuvat siten, että plastisen työn inkrementillä on maksimiarvo, eli aine vastustaa plastista muodonmuutosta parhaansa mukaan. Periaatteen mukaan plastisen työn inkrementillä

$$dW_p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (12.199)$$

on maksimiarvo, eli (ks. myös kuva 12.20)

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \geq \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^p, \quad (12.200)$$

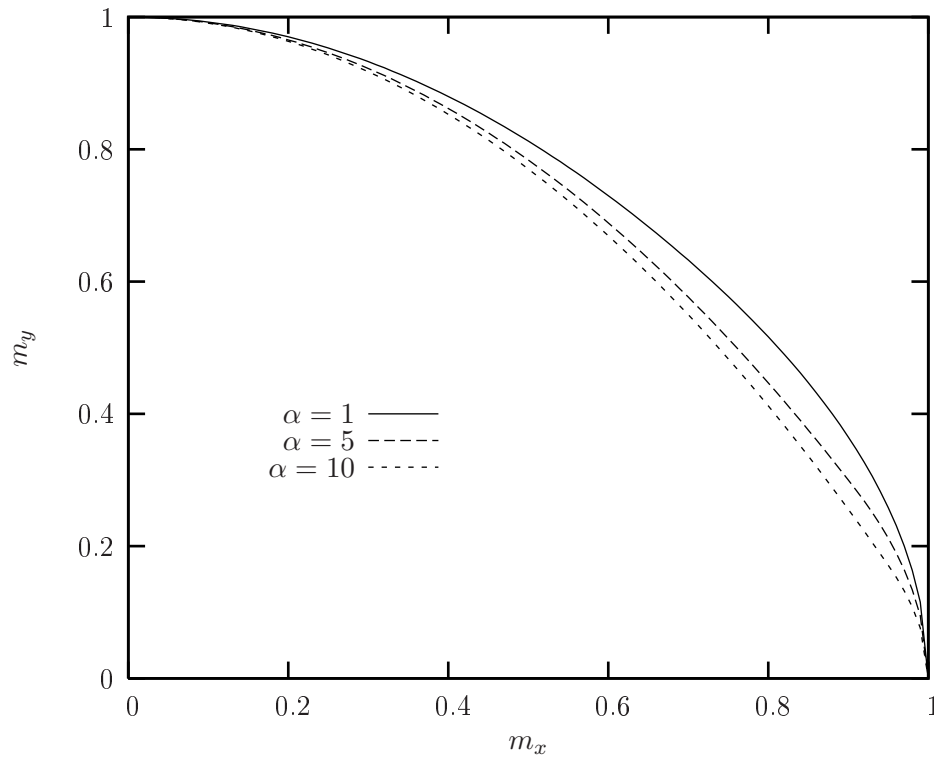
missä

$$f(\sigma_{ij}) - \sigma_m = 0 \quad \text{ja} \quad f(\sigma_{ij}^*) - \sigma_m < 0. \quad (12.201)$$

Kokoamalla jännitys- ja muodonmuutoskomponentit vektoreiksi voidaan kaava (12.200) kirjoittaa vektorimuodossa

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p \geq 0. \quad (12.202)$$

Tästä seuraa myötöpinnan konveksisuus eli kupuruus. Koska tähdellä merkitty jännitystila voidaan valita mielivaltaisesti myötöpinnan sisältä ja kaavan (12.202) täytyy olla voimassa, on plastisen muodonmuutosinkrementin $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ oltava kohtisuorassa myötöpintaa vastaan. Kohtisuoruussääntö on siis seurausta plastisen tehon maksimin periaatteesta.



Kuva 12.19 Ohutseinämäisen suorakaideputken momenttien vuorovaikutuskäyrät sivusuhteen $\alpha = b/h$ funktiona.

12.4 Jännitysten ja muodonmuutosten väliset yhtälöt

12.4.1 Kimmoiset konstitutiiviset yhtälöt

Kimmoisen aineen konstitutiiviset yhtälöt tai yleistetty Hooken laki ovat yleisessä tapauksessa inkrementaalisessa muodossa

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}d\varepsilon_{kl}. \quad (12.203)$$

D_{ijkl} on materiaalin (tangenti)jäykkyystensori. Jännitys- ja muodonmuutostensorien symmetrian takia

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{ijlk} = D_{jilk}. \quad (12.204)$$

Hyperelastisen aineen jännitys määritetään muodonmuutosenergian tiheyden $W(\varepsilon)$ lausekkeesta derivoimalla muodonmuutoskomponenttien suhteen kaavalla

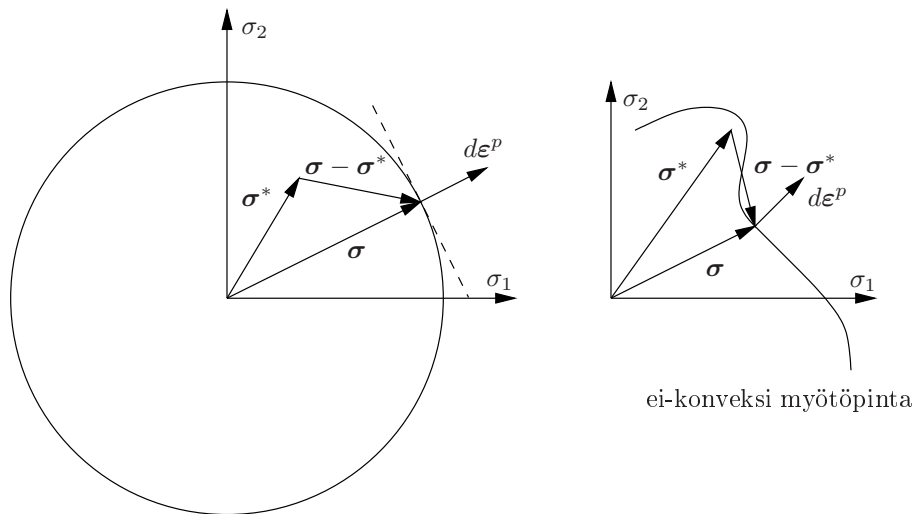
$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (12.205)$$

Differentioimalla tulee

$$d\sigma_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} d\varepsilon_{kl} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl}. \quad (12.206)$$

Koska

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}}, \quad (12.207)$$



Kuva 12.20 Myötöpinta ja kohtisuoruussääntö.

saadaan vielä yksi symmetriaehto materiaalin jäykkyystensorille

$$D_{ijkl} = D_{klij}. \quad (12.208)$$

Isotrooppisen aineen tapauksessa materiaaliominaisuudet ovat samat kaikissa suunnissa, ja materiaalin jäykkyystensori on neljännen kertaluvun isotrooppinen tensori

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (12.209)$$

missä λ , μ ja β ovat materiaalivakioita. Materiaalin jäykkyystensorilta vaadittavien symmetriaehtojen (12.204) takia $\beta = 0$, ja kimmoiset isotrooppiset konstitutiiviset yhtälöt ovat

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \varepsilon_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \varepsilon_{kl} \quad (12.210)$$

eli

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (12.211)$$

Isotrooppisen aineen kimmovakioita on kaksi: Lamén vakiot λ ja μ tai kimmovakiot ν ja E .

Ratkaisemalla yhtälöstä

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{kk} \quad (12.212)$$

dilataatio

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \quad (12.213)$$

saadaan konstitutiiviset yhtälöt (12.211) ratkaistua muodonmuutosten suhteen

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}. \quad (12.214)$$

Yksiulotteisessa jännitystilassa $(\sigma_x, 0, 0)$ (x, y, z) -avaruudessa

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}. \quad (12.215)$$

Samanlaiset yhteydet saadaan jännitystiloiissa $(0, \sigma_y, 0)$, $(0, \sigma_y, 0)$. Superponoimalla tulee

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)].\end{aligned}\tag{12.216}$$

Liukumien ja leikkausmuodonmuutosten väliset yhtälöt ovat

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G},\tag{12.217}$$

missä

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}\tag{12.218}$$

on liukumoduuli.

Indeksimerkintätavalla kirjoitetaan lyhyemmin

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}.\tag{12.219}$$

Ratkaisemalla isotrooppisen kimmoisen aineen konstitutiiviset yhtälöt jännitysten suhteen tulee

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}.\tag{12.220}$$

Kimmoisten materiaalivakioiden välille saadaan yhteydet

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)},\tag{12.221}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}\tag{12.222}$$

tai

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu},\tag{12.223}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.\tag{12.224}$$

Materiaalin kimmainen isotrooppinen jäykkyystensori lausuttuna Poissonin luvun ν ja kimmokertoimen E avulla on

$$\begin{aligned}D_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[\frac{2\nu}{(1 - 2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right].\end{aligned}\tag{12.225}$$

Hydrostaattisen paineen $p = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$ ja dilataation $e = \varepsilon_{kk}$ väliseksi yhtälöksi johdetaan

$$p = K e,\tag{12.226}$$

missä

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (12.227)$$

on tilavuudenmuutoskerroin.

Deviaattorien $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$ avulla voidaan konstitutiiviset yhtälöt jakaa osiin

$$p = K\varepsilon_{kk}, \quad (12.228)$$

$$S_{ij} = \frac{E}{1+\nu}e_{ij} = 2Ge_{ij}. \quad (12.229)$$

Muodonmuutos voidaan vastaavasti kombinoida dilataatio-osasta ja deviaattorisesta osasta

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + e_{ij} = \frac{1}{3K}p\delta_{ij} + \frac{1}{2G}S_{ij} \quad (12.230)$$

tai

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{9K}I_1\delta_{ij} + \frac{1}{2G}S_{ij}, \quad (12.231)$$

missä $I_1 = \sigma_{kk} = 3p$.

Vastaavalla tavalla jaetaan jännitys osiin

$$\sigma_{ij} = K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2Ge_{ij}. \quad (12.232)$$

Otetaan käyttöön matriisimerkinnät kolmiulotteisessa (x, y, z) -avaruudessa, ja kootaan muodonmuutos- ja jännityskomponentit vektoreihin

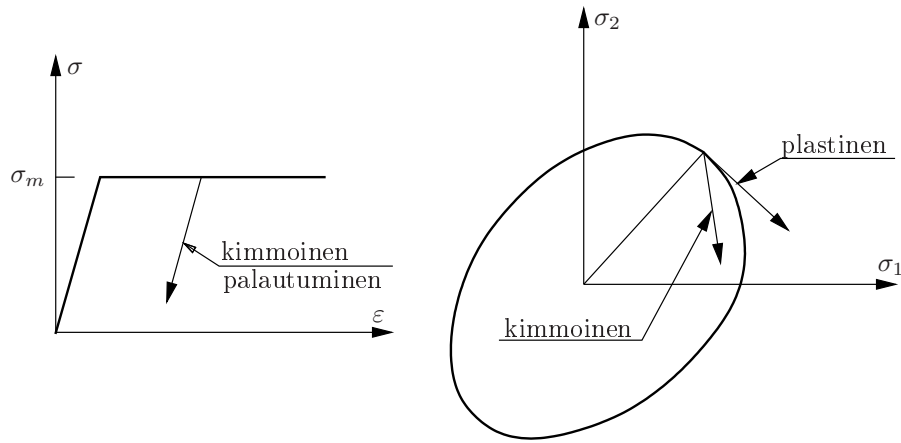
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}. \quad (12.233)$$

Jännitysten ja muodonmuutosten väliset konstitutiiviset yhtälöt ovat matriisimerkinnöin

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (12.234)$$

missä materiaalin jäykkyysmatriisi on

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad (12.235)$$



Kuva 12.21 Ideaaliplastinen materiaali.

tai liuku- ja tilavuudenmuutosmoduulien avulla

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (12.236)$$

Tasojännitystilassa

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (12.237)$$

ja tasomuodonmuutostilassa

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (12.238)$$

12.4.2 Kimmoplastiset jännityksen ja muodonmuutoksen väliset yhtälöt ideaaliplastiselle aineelle

Kimmoisen ideaaliplastisen aineen myötöehto on

$$f(\sigma_{ij}, k) = F(\sigma_{ij}) - k = 0, \quad (12.239)$$

missä k on vakio ja myötöpinta pysyy vakiomuotoisena muodonmuutoksesta riippumatta. Kuvassa 12.21a on esitetty kimmoisen ideaaliplastisen aineen yksiulotteinen käyttäytyminen. Myötörajan σ_m saavuttamisen jälkeen jännitys ei voi enää kasvaa. Palautuminen tapahtuu kimmoisesti, eli jännityksen ja venymän välisen käyrän kulmakerroin on kimmokerroin E . Useampiulotteisessa tapauksessa, kuva 12.21b, jännitystilasta ei pääse myötöpinnan

ulkopuolelle. Plastisia muodonmuutoksia voi syntyä, kun jännitystila σ_{ij} on myötöpinnalla. Jännitystilan muutos $d\sigma_{ij}$ on plastisen myötön aikana myötöpinnan tangenttitason suuntainen.

Otaksutaan, että jännitystila σ_{ij} on myötöpinnalla eli

$$f(\sigma_{ij}, k) = F(\sigma_{ij}) - k = 0. \quad (12.240)$$

Jos

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad (12.241)$$

niin plastinen myötö on mahdollinen. Jos

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \quad (12.242)$$

niin tapahtuu kimmainen palautuminen.

Yksiulotteisen tapauksen muodonmuutosten dekompositiokaavan

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (12.243)$$

yleistyksenä useampiulotteisessa tapauksessa jaetaan muodonmuutosinkrementti kimmoiseen ja plastiseen osaan kaavalla

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (12.244)$$

Muodonmuutosinkrementin plastinen osa on myötösäännön perusteella

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (12.245)$$

missä verrannollisuuskerroin $d\lambda$ toteuttaa ehdot

$$d\lambda \begin{cases} = 0, & \text{jos } F < k \text{ tai } F = k, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \\ > 0, & \text{jos } F = k \text{ ja } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0. \end{cases} \quad (12.246)$$

Kimmainen muodonmuutosinkrementti on

$$d\varepsilon_{ij}^e = D_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl}, \quad (12.247)$$

missä D_{ijkl} on materiaalin kimmainen jäykkyystensori. Esimerkiksi kimmoisen isotrooppisen aineen tapauksessa

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{dI_1}{9K} \delta_{ij} + \frac{dS_{ij}}{2G}. \quad (12.248)$$

Yhteensä

$$d\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (12.249)$$

tai esimerkin tapauksessa

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{dI_1}{9K} \delta_{ij} + \frac{dS_{ij}}{2G} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (12.250)$$

Kertomalla muodonmuutosten ja jännitysten väliset yhtälöt tensorilla D_{ijkl} saadaan jännitystilän inkrementti

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}d\varepsilon_{kl}^e = D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p), \quad (12.251)$$

joka on edelleen myötösäännön perusteella

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}d\varepsilon_{kl} - d\lambda D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}. \quad (12.252)$$

Verrannollisuuskertoim $d\lambda$ voidaan ratkaista konsistenssiehdosta

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad (12.253)$$

jonka mukaan plastisen myödyn aikana ideaaliplastisen aineen jännitystila ei voi mennä vakiona pysyvän myötöpinnan ulkopuolelle.

Sijoittamalla yhtälöt (12.252) konsistenssiehtoon (12.253) saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} = 0, \quad (12.254)$$

josta ratkaistaan

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}. \quad (12.255)$$

Sijoittamalla ratkaistu kerroin $d\lambda$ takaisin jännitysten ja muodonmuutosten väliseen yhtälöryhmään saadaan

$$d\sigma_{ij} = \left[D_{ijkl} - \frac{D_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D_{pqkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \right] d\varepsilon_{kl}. \quad (12.256)$$

Materiaalin kimmoplastinen (tangenti)jäykkyystensori on

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl} - \frac{D_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D_{pqkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}. \quad (12.257)$$

Johdetaan jännitys- ja muodonmuutosinkrementtien väliset yhtälöt vielä matriisimuodossa. Kolmiulotteisessa tapauksessa kootaan muodonmuutos- ja jännityskomponentit vektoreihin

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}. \quad (12.258)$$

Materiaalin kimmoista neljännen kertaluvun jäykkyystensoria vastaa nyt 6×6 matriisi $\mathbf{D}$, ja saadaan yhtälöt

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p). \quad (12.259)$$

Myötösäännön perusteella

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (12.260)$$

Sijoittamalla yhtälöt (12.260) konsistenssiehtoon

$$df = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (12.261)$$

eli komponenttimuodossa ehtoon

$$df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ \vdots \\ d\sigma_{13} \end{bmatrix} = 0 \quad (12.262)$$

tulee

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0, \quad (12.263)$$

josta voidaan ratkaista kerroin $d\lambda$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}. \quad (12.264)$$

Sijoittamalla ratkaistu kerroin $d\lambda$ takaisin jännitysten ja muodonmuutosten väliseen yhtälöryhmään tulee

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left[\mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{D}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right] d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (12.265)$$

missä $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$. Materiaalin kimmoplastinen tangenttijäykkyysmatriisi on

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{D}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}. \quad (12.266)$$

Ottamalla käyttöön merkintä

$$\mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (12.267)$$

voidaan $\mathbf{D}^{ep}$ kirjoittaa hieman lyhyemmin

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{D}}{\mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a}}. \quad (12.268)$$

Tensorimerkinnöin saadaan vastaavasti neljännen kertaluvun tensori $\mathbf{D}^{ep}$ muotoon

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D} - \frac{(\mathbf{D} : \mathbf{a}) \otimes (\mathbf{D} : \mathbf{a})}{\mathbf{a} : \mathbf{D} : \mathbf{a}}, \quad (12.269)$$

missä on merkitty

$$(\mathbf{D} : \mathbf{a})_{ij} = D_{ijkl}a_{kl}, \quad (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c})_{ijkl} = b_{ij}c_{kl}. \quad (12.270)$$

Viimeisin ns. dyaditulo tarkoittaa samaa kuin tulo

$$\mathbf{b}\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (12.271)$$

matriisimerkinnällä.

Esimerkki 12.4 Määritetään ideaaliplastisen von Misesin myötöehtoa ja Prandtlin-Reussin myötösääntöä noudattavan aineen jännitysten ja muodonmuutosten väliset yhteydet.

von Misesin myötöehdon mukaan aine myötää, kun

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_m) = 3J_2 - \sigma_m^2 = 0, \quad (12.272)$$

missä σ_m myötöjännitys (vakio).

Myötöpinnan gradientti on nyt

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 3S_{ij}, \quad (12.273)$$

koska $J_2 = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}$.

Kimmoisen isotrooppisen aineen jäykkyystensori on

$$D_{ijkl} = G \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} \right), \quad (12.274)$$

missä

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (12.275)$$

Kimmooplastisen jäykkyystensorin D_{ijkl}^{ep} muodostamiseen tarvitaan termit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} &= 9G \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} S_{ij} \delta_{kl} S_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} S_{ij} S_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk} S_{ij} S_{kl} \right) \\ &= 9G(S_{ij}S_{ij} + S_{ij}S_{ji}) \\ &= 36GJ_2, \end{aligned} \quad (12.276)$$

$$\begin{aligned} D_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D_{pqkl} &= 9G^2 \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{mn} S_{mn} + \delta_{im} \delta_{jn} S_{mn} + \delta_{in} \delta_{jm} S_{mn} \right) \\ &\quad \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{pq} \delta_{kl} S_{pq} + \delta_{pk} \delta_{ql} S_{pq} + \delta_{pl} \delta_{qk} S_{pq} \right) \\ &= 9G^2(S_{ij} + S_{ji})(S_{kl} + S_{lk}) \\ &= 36G^2 S_{ij} S_{kl}. \end{aligned} \quad (12.277)$$

Ideaaliplastisen von Misesin aineen jäykkyytensoriksi saadaan

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl} - \frac{D_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D_{pqkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (12.278)$$

$$= G \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) - \frac{G}{J_2} S_{ij} S_{kl}.$$

Matriisimuodossa

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D} - \mathbf{D}^p. \quad (12.279)$$

Jälkimmäinen osa $\mathbf{D}^p$ on

$$\mathbf{D}^p = -\frac{G}{J_2} \mathbf{S} \mathbf{S}^T, \quad (12.280)$$

missä vektori $\mathbf{S}$ sisältää jännitysdeviaattorin komponentit.

Yleinen isotrooppinen kimmoinen ideaaliplastinen aine

Yleisen kimmoisen ideaaliplastisen aineen myötöehto lausutaan invarianttien I_1 , J_2 ja J_3 avulla muodossa

$$f(I_1, J_2, J_3, k) = F(I_1, J_2, J_3) - k = 0, \quad (12.281)$$

missä k on vakio.

Ketjusaännön perusteella myötöpinnan gradientti on

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (12.282)$$

Gradientti $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = B_0 \delta_{ij} + B_1 S_{ij} + B_2 t_{ij}, \quad (12.283)$$

missä

$$B_0 = \frac{\partial f}{\partial I_1}, \quad B_1 = \frac{\partial f}{\partial J_2}, \quad B_2 = \frac{\partial f}{\partial J_3}, \quad (12.284)$$

δ_{ij} on Kroneckerin delta, S_{ij} on jännitysdeviaaattori ja

$$t_{ij} = \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ik} S_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij}. \quad (12.285)$$

von Misesin, Trescan, Mohrin-Coulombin ja Druckerin-Pragerin myötöehdot ovat yleisen isotrooppisen myötöehdon erikoistapauksia. von Misesin myötöehdon tapauksessa

$$B_0 = 0, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 0, \quad (12.286)$$

ja Druckerin-Pragerin ehdon tapauksessa

$$B_0 = \alpha, \quad B_1 = \frac{1}{2\sqrt{J_2}}, \quad B_2 = 0. \quad (12.287)$$

Invarianttien avulla lausuttu Mohrin-Coulombin myötöehto on

$$\begin{aligned} f(I_1, J_2, \theta) = & \frac{1}{3} I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \\ & + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi - c \cos \phi = 0. \end{aligned} \quad (12.288)$$

Kaavan

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{\frac{3}{2}}}. \quad (12.289)$$

perusteella saadaan derivoimalla

$$\frac{\partial \theta}{\partial J_2} = \frac{3\sqrt{3}}{4 \sin 3\theta} \frac{J_3}{J_2^{\frac{5}{2}}} \frac{\cot 3\theta}{2J_2}, \quad (12.290)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial J_3} = -\frac{\sqrt{3}}{2 \sin 3\theta} \frac{1}{J_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cot 3\theta}{3J_3}. \quad (12.291)$$

Mohrin-Coulombin myötöehdon derivaatat invarianttien suhteen ovat

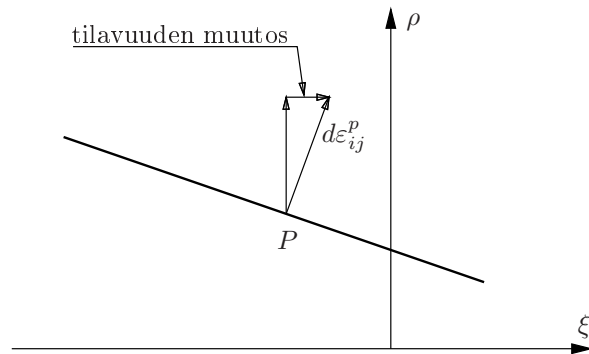
$$\begin{aligned} B_0 = \frac{\partial f}{\partial I_1} &= \frac{\sin \phi}{3}, \\ B_1 = \frac{\partial \theta}{\partial J_2} &= \frac{\sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)}{2\sqrt{J_2}} \left\{ \left[1 + \cot \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \cot 3\theta \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \left[\cot \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - \cot 3\theta \right] \right\}, \\ B_2 = \frac{\partial f}{\partial J_3} &= \frac{\sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi - \sqrt{3} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)}{2J_2 \sin 3\theta}. \end{aligned} \quad (12.292)$$

Jännitysinvarianttien avulla lausuttu Trescan myötöehto on

$$f(J_2, \theta, \sigma_m) = 2\sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - \sigma_m = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 60^\circ. \quad (12.293)$$

Trescan ehdon tapauksessa kertoimet B_0 , B_1 ja B_2 ovat

$$\begin{aligned} B_0 = \frac{\partial f}{\partial I_1} &= 0, \\ B_1 = \frac{\partial f}{\partial J_2} &= \frac{\sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)}{\sqrt{J_2}} \left[1 + \cot \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \cot 3\theta \right], \\ B_2 = \frac{\partial f}{\partial J_3} &= \frac{-\sqrt{3} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)}{J_2 \sin 3\theta}. \end{aligned} \quad (12.294)$$



Kuva 12.22 Druckerin-Pragerin myötöpinnan ja meridiaanitason leikkaus.

Esimerkki 12.5 Määritetään jännitysten ja muodonmuutosten välinen yhteys Druckerin-Pragerin myötöehdon tapauksessa kimmoiselle ideaaliplastiselle aineelle.

Invarianttien avulla lausuttu Druckerin-Pragerin myötöehto on

$$f = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k = 0. \quad (12.295)$$

Muodonmuutosinkrementti on kimmoisen aineen yleistetyn Hooken lain ja myötösäännön nojalla

$$d\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (12.296)$$

Kimmoisen isotrooppisen aineen ja Druckerin-Pragerin myötöehdon tapauksessa

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{dS_{ij}}{2G} + \frac{dI_1}{9K} \delta_{ij} + d\lambda \left(\frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_2}} + \alpha \delta_{ij} \right). \quad (12.297)$$

Verrannollisuuskertoimen $d\lambda$ on

$$\begin{aligned} d\lambda &= \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \\ &= \frac{\frac{G}{\sqrt{J_2}} S_{mn} d\varepsilon_{mn} + 3K\alpha d\varepsilon_{kk}}{G + 9K\alpha^2}, \end{aligned} \quad (12.298)$$

missä $d\varepsilon_{ij}$ on muodonmuutosdeviaattorin

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (12.299)$$

inkrementti.

Plastinen dilataatio on nyt

$$d\varepsilon_{kk}^p = 3\alpha d\lambda, \quad (12.300)$$

joka on positiivinen, kun $\alpha \neq 0$. Kuvassa 12.22 on esitetty Mohrin-Coulombin kartiomyötöpinnan leikkaus pitkin meridiaanitasoa $\theta = \text{vakio}$. Plastinen muodonmuutos on kohtisuorassa myötöpintaa vastaan, ja sillä on komponentti paineakselin suuntaan,

jos $\alpha \neq 0$. Kokonaisdilataatio on kimmoisen ja plastisen osan summa. Ottamalla huomioon kertoimen $d\lambda$ ja jännitysdeviaattorin S_{ij} kaavat saadaan

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{kk} &= d\varepsilon_{kk}^e + d\varepsilon_{kk}^p \\ &= \frac{dI_1}{3K} + 3\alpha \frac{\frac{G}{\sqrt{J_2}}[\sigma_{mn}d\varepsilon_{mn} - I_1\frac{1}{3}d\varepsilon_{kk}] + 3K\alpha d\varepsilon_{kk}}{G + 9K\alpha^2}, \end{aligned} \quad (12.301)$$

josta seuraa

$$d\varepsilon_{kk} = \frac{\sqrt{J_2}dI_1}{3KGk}(G + 9K\alpha^2) + \frac{3\alpha}{k}\sigma_{mn}d\varepsilon_{mn}. \quad (12.302)$$

Isotrooppisen aineen tapauksessa yhteys $d\sigma_{ij} = D_{ijkl}d\varepsilon_{kl}^e = D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p)$ on

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= D_{ijkl}d\varepsilon_{kl} - d\lambda D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \\ &= \frac{E}{1+\nu}d\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}d\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \\ &\quad - d\lambda \left[\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \delta_{mn}\delta_{ij} \right] \\ &= 2Gde_{ij} + Kd\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - d\lambda \left[\left(K - \frac{2}{3}G \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \delta_{mn}\delta_{ij} + 2G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right], \end{aligned} \quad (12.303)$$

missä on käytetty tilavuudenmuutuskertoimen K , liukumoduulin G ja kimmovakioiden ν ja E välisiä yhteyksiä

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (12.304)$$

Jos myötöehto on muotoa

$$f(\sigma_{ij}, k) = F(I_1, \sqrt{J_2}) - k = 0, \quad (12.305)$$

kuten Druckerin-Pragerin myötöehdon tapauksessa on asianlaita, saadaan jännitysten ja muodonmuutosten välinen kaava edelleen muotoon

$$d\sigma_{ij} = 2Gde_{ij} + Kd\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - d\lambda \left(3K \frac{\partial f}{\partial I_1} \delta_{ij} + \frac{G}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} S_{ij} \right) \quad (12.306)$$

eli

$$d\sigma_{ij} = 2Gde_{ij} + Kd\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - d\lambda \left(3K\alpha\delta_{ij} + \frac{G}{\sqrt{J_2}} S_{ij} \right). \quad (12.307)$$

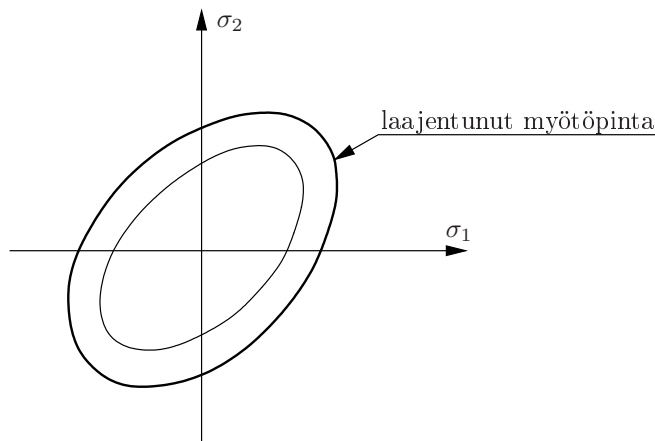
Ottamalla huomioon kertoimen $d\lambda$ kaava saadaan yhteys

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl}, \quad (12.308)$$

missä materiaalin kimmoplastinen jäykkyystensori on

$$D_{ijkl}^{ep} = 2G\delta_{ik}\delta_{jl} + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{\frac{G}{\sqrt{J_2}}S_{ij} + 3K\alpha\delta_{ij}}{G + 9K\alpha^2} \left(\frac{G}{\sqrt{J_2}}S_{kl} + K\alpha\delta_{kl} \right). \quad (12.309)$$

Kun $\alpha = 0$, niin saadaan von Misesin myötöehtoon liittyvä aiemmin johdettu jäykkyystensori D_{ijkl}^{ep} .



Kuva 12.23 Isotrooppinen myötölujittuminen.

12.4.3 Myötölujittumissäännöt

Myötölujittuvan materiaalin myötöehto voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k(\kappa)) = 0, \quad (12.310)$$

missä κ on myötölujenemisparametri. Myötölujittumissäännöt kertovat miten myötöfunktion argumentit ε_{ij}^p ja κ vaikuttavat myötöpinnan muotoon aineen deformatuessa plastisesti.

Myötölujenemisparametriksi κ voidaan ottaa esimerkiksi plastinen työ

$$W_p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (12.311)$$

tai ekvivalentti plastinen venymä $\bar{\varepsilon}^p$

$$\bar{\varepsilon}^p = \int d\bar{\varepsilon}^p, \quad (12.312)$$

missä esim. von Misesin myötöehdon tapauksessa

$$d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}. \quad (12.313)$$

Isotrooppinen myötölujeneminen

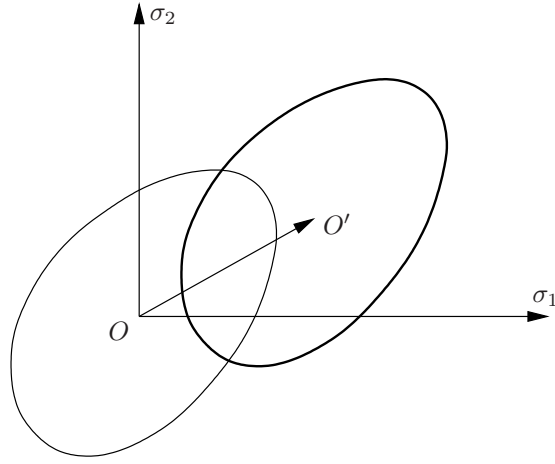
Isotrooppisen myötölujenemisen tapauksessa myötöpinta laajenee jännitysavaruudessa tasanaisesti tai isotrooppisesti, ja myötölujittumisen määrittää parametri κ . Parametriksi κ voidaan ottaa plastinen työ $W_p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ tai ekvivalentti plastinen venymä $\bar{\varepsilon}^p$.

Myötöehto voidaan kirjoittaa muotoon

$$F(\sigma_{ij}) = k^2(\kappa). \quad (12.314)$$

Esimerkiksi von Misesin ehdon tapauksessa $F(\sigma_{ij}) = J_2$, ja saadaan ehto

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = k^2(\kappa). \quad (12.315)$$



Kuva 12.24 Kinemaattinen myötölujuuttuminen.

von Misesin ehtoon liittyvä ekvivalentti plastinen venymä on

$$\bar{\varepsilon}^p = \int \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}. \quad (12.316)$$

Isotrooppinen myötölujuuttumismalli on yksinkertainen, mutta se ei sovellu jaksolliseen kuormitukseen. Sillä ei voi kuvata monia tärkeitä käytännön ilmiöitä kuten esim. Bauschingerin ilmiötä.

Kinemaattinen myötölujeneminen

Kinemaattisen myötölujuuttumissäännön mukaan myötöpinta siirtyy jännitysavaruudessa. Myötöpinnan yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - k^2 = 0, \quad (12.317)$$

missä k on vakio ja α_{ij} määrittelee myötöpinnan keskipisteen. Pragerin mukaan

$$d\alpha_{ij} = c d\varepsilon_{ij}^p \quad \text{tai} \quad \alpha_{ij} = c \varepsilon_{ij}^p, \quad (12.318)$$

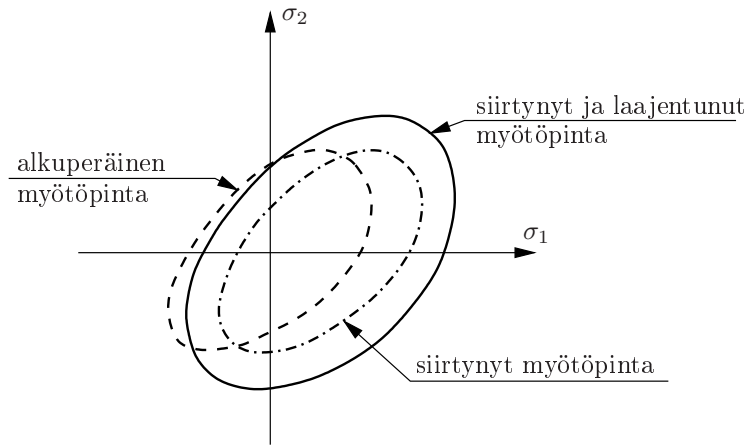
missä c on myötölujenemisparametri.

Esimerkiksi von Misesin myötöehdon tapauksessa kinemaattisen myötölujenemisen huomioonottava myötöehto on

$$\frac{1}{2}(S_{ij} - \alpha_{ij})(S_{ij} - \alpha_{ij}) - k^2 = 0, \quad (12.319)$$

ja myötölujuuttumisparametrin kehitysyhtälö on

$$d\alpha_{ij} = c \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 3c(S_{ij} - \alpha_{ij}). \quad (12.320)$$



Kuva 12.25 Yhdistetty myötölujittumissääntö.

Yhdistetty myötölujittumissääntö

Kombinoimalla edellä esitellyt myötölujittumissäännöt saadaan yhdistetty myötölujittumissääntö. Myötöpinta voidaan nyt kirjoittaa yleisesti muodossa

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa) = F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - k^2(\kappa) = 0, \quad (12.321)$$

missä parametriksi κ voidaan ottaa plastinen työ tai ekvivalentti plastinen venymä kuten isotrooppisen myötölujittumisen tapauksessa.

von Misesin myötöehdon tapauksessa saadaan sekä kinemaattisen että isotrooppisen lujittumisen huomioonottava ehto muotoon

$$\frac{1}{2}(S_{ij} - \alpha_{ij})(S_{ij} - \alpha_{ij}) - k^2(\varepsilon^p) = 0, \quad (12.322)$$

kun on valittu $\kappa = \bar{\varepsilon}^p$. Sijoittamalla tähän Pragerin myötölujittumissääntö tulee

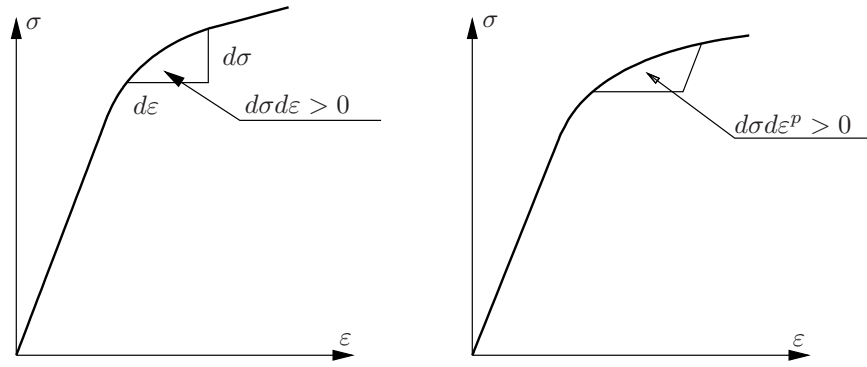
$$\frac{1}{2}(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p)(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p) - k^2(\bar{\varepsilon}^p) = 0, \quad (12.323)$$

missä c on vakio.

12.4.4 Stabiili kimmoplastinen aine ja Druckerin postulaatti

Druckerin postulaatti määrittelee stabiilin aineen. Yksiulotteisessa tapauksessa jännitys- ja muodonmuutosinkrementin tulo $d\sigma d\varepsilon$ on työ kaksinkertaisena yksikkötilavuudessa. Kimmoplastiselle yksiulotteiselle jännitys-venymä-riippuvaisuudelle

$$d\sigma d\varepsilon^p \begin{cases} \geq 0, & \text{myötölujittuvalle aineelle,} \\ = 0, & \text{ideaaliplastiselle aineelle,} \\ \leq 0, & \text{myötöheikkenevälle aineelle.} \end{cases} \quad (12.324)$$



Kuva 12.26 Myötölujittuvan aineen kuormanlisäys ja kuormitus sykli.

Tarkastellaan materiaalia, jonka jännitys on σ ja plastinen muodonmuutos on ε^p . Annetaan koekappaleelle aikaisemmasta kuormitushistoriasta riippumaton hitaasti tapahtuva kuormituksen lisäys, joka aiheuttaa jännityksen lisäyksen $d\sigma$ ja vastaavan muodonmuutoksen lisäyksen $d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$. Lopuksi kuormitus palautetaan ennalleen (eli lisäkuorma poistetaan). Kuormanlisäysvaiheessa työ (kaksinkertaisena) on $d\sigma d\varepsilon = d\sigma(d\varepsilon^e + d\varepsilon^p)$, ja kuormitus syklin aikana työ on vastaavasti $d\sigma d\varepsilon^p$.

Myötölujittuvalle aineelle $d\sigma d\varepsilon > 0$, koska $d\sigma d\varepsilon^e > 0$ ja $d\sigma d\varepsilon^p \geq 0$.

Druckerin mukaan myötölujittuvan tai stabiilin aineen työ kuormanlisäyksen aikana on positiivinen eli

$$d\sigma d\varepsilon > 0, \quad (12.325)$$

ja kuormitus syklin aikana työ on ei-negatiivinen eli

$$d\sigma d\varepsilon^p \geq 0. \quad (12.326)$$

Yhtäläisyysmerkki on voimassa, jos kuormitus syklin aikana ei ole syntynyt plastista muodonmuutosta.

Moniulotteisessa tapauksessa vastaavat kaavat kuormanlisäysvaiheelle ja kuormitus syklille ovat

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} > 0, \quad d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \geq 0. \quad (12.327)$$

Ideaaliplastisen aineen tapauksessa

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0, \quad d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = 0, \quad (12.328)$$

joten sekä myötölujittuvalle aineelle että ideaaliplastiselle aineelle on voimassa Druckerin epäyhtälö

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \geq 0. \quad (12.329)$$

Druckerin ehtoihin päädytään myös tarkastelemalla kappaletta, jonka tilavuus on V ja jonka reunapinta on S . Kappaleen tilavuusvoimat ovat f_i , ja reunakuormat ovat t_i . Kuormanlisäysten df_i ja dt_i tekemä työ on

$$dW = \int_V df_i du_i dV + \int_S dt_i du_i dS. \quad (12.330)$$

Druckerin stabiiliuspostulaatin mukaan kuormanlisäysvaiheessa myötölujittuvalle aineelle

$$\int_V df_i du_i dV + \int_S dt_i du_i dS > 0, \quad (12.331)$$

ja kuormitusyklin aikana

$$\oint_V df_i du_i dV + \oint_S dt_i du_i dS > 0, \quad (12.332)$$

missä $\oint$ tarkoittaa integrointia kappaleen tilavuuden ja reunapinnan yli kuormitusyklin aikana.

Koska V on mielivaltainen tilavuus, saadaan virtuaalisen työn periaatteesta

$$\int_V d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV = \int_V df_i du_i dV + \int_S dt_i du_i dS, \quad (12.333)$$

missä du_i ovat virtuaaliset siirtymät, kuormanlisäysvaiheessa ja kuormitusyklin aikana

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} > 0 \quad \text{ja} \quad d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p > 0, \quad (12.334)$$

jos $d\varepsilon_{ij}^p \neq 0$. Yleisessä tapauksessa ovat vastaavasti voimassa ehdot

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0 \quad \text{ja} \quad d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \geq 0. \quad (12.335)$$

Yhtäläisyysmerkki on voimassa, jos sylkin aikana $d\varepsilon_{ij}^p = 0$.

Epäyhtälölle (12.328) saadaan geometrinen tulkinta kokoamalla jännitys- ja muodonmuutosinkrementit vektoreiksi $d\boldsymbol{\sigma}$ ja $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$. Tällöin edellä johdettu ehto voidaan kirjoittaa muotoon

$$d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p \geq 0, \quad (12.336)$$

jonka mukaan plastinen muodonmuutosinkrementti ei voi olla jännitysinkrementin negatiiviseen suuntaan.

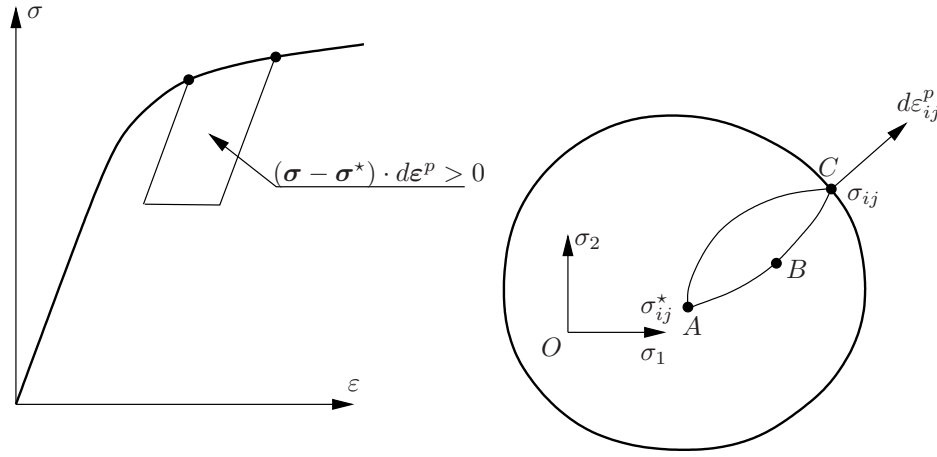
Druckerin postulaatti pätee myös kuormanlisäyksen aiheuttamalle äärelliselle jännitysinkrementille. Kuvan 12.27 alkujännitystila σ_{ij}^* on on myötöpinnan sisällä. Kuormitusvaiheessa tullaan ensin hetkelliselle myötöpinnalle pisteeseen B , ja kuormitusta lisättäessä myötöpinta laajenee tai siirtyy siten, että jännitystilaa edustaa piste C . Tämän jälkeen jännitys palautetaan kimmoisesti takaisin tilaan σ_{ij}^* .

Kimmainen muodonmuutosenergia palautuu täysin. Kuormitusyklin aikana työ on $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p$, kun plastisen vaiheen $d\sigma_{ij}$ jätetään huomioonottamatta.

Druckerin postulaatin mukaan

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad \text{tai} \quad (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p \geq 0. \quad (12.337)$$

Esittämällä plastiset muodonmuutos- ja jännityskomponentit samassa avaruudessa ehto (12.337) voidaan tulkita geometrisesti siten, että plastisen muodonmuutosinkrementin $d\varepsilon_{ij}^p$ ja jännitysinkrementin $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)$ sisätulo on positiivinen ja vastaavien vektoreiden



Kuva 12.27 Myötölujittuvan aineen äärellinen kuormitus sykli.

välinen kulma on terävä. Tästä seuraa myötöpinnan konveksisuus ja plastisen muodonmuutosinkrementin kohtisuoruus myötöpintaa vastaan, kuten edellä on plastisen työn maksimin periaatteen nojalla osoitettu.

Määritellään plastinen dissipaatio D_p

$$D_p(\dot{\epsilon}^p) = \max_{\sigma^*} \sigma^* \cdot \dot{\epsilon}^p = \max_{\sigma_{ij}^*} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^p, \quad (12.338)$$

missä maksimi otetaan kaikkien myötöehdon $f(\sigma_{ij}^*) \leq \sigma_m$ toteuttavien jännitystilojen yli. Kaavan (12.202) (tai kaavan (12.337)) mukaan

$$D_p(\dot{\epsilon}^p) = \sigma \cdot \dot{\epsilon}^p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p. \quad (12.339)$$

Esimerkki 12.6 Määritetään plastisen työn lausekkeet von Misesin, Trescan, Mohrin-Coulombin ja Druckerin-Pragerin myötöehtojen tapauksissa.

Esimerkissä 12.1 johdetun von Misesin myötöehtoon liittyvän Prandtlin-Reussin myötösäännön mukaan

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda S_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}} S_{ij}. \quad (12.340)$$

Plastisen työn inkrementti on

$$dW_p = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p = d\lambda S_{ij} S_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}} S_{ij} S_{ij} \quad (12.341)$$

eli

$$dW_p = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^p = \sigma_m d\bar{\epsilon}^p, \quad (12.342)$$

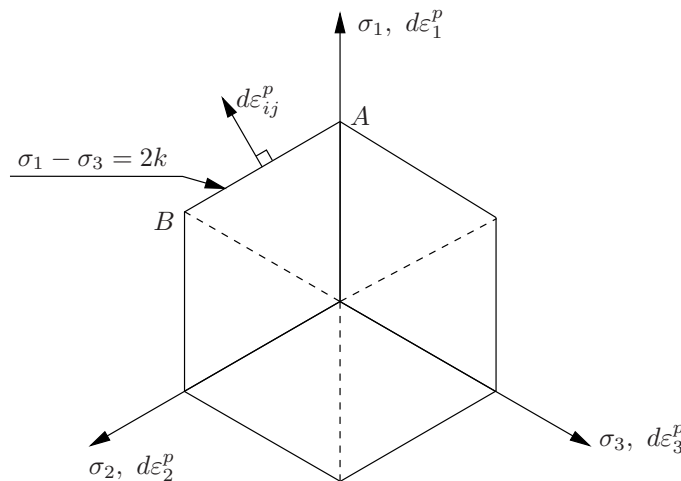
koska

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}, \quad d\bar{\epsilon}^2 = \frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p \quad (12.343)$$

ja $\bar{\sigma} = \sigma_m$ myötöehdon mukaan.

Trescan myötöehdon mukaan kuvan 12.28 janalla AB $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$, missä k on leikkausmyötöraja. Plastiset venymäinkrementit toteuttavat normaalisuussäännön perusteella ehdot

$$d\epsilon_2^p = 0, \quad d\epsilon_3^p = -d\epsilon_1^p, \quad (12.344)$$



Kuva 12.28 Trescan myötöehto Π -tasossa $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

ja plastisen työn inkrementti on

$$\begin{aligned} dW_p &= \sigma_1 d\varepsilon_1^p + \sigma_2 d\varepsilon_2^p + \sigma_3 d\varepsilon_3^p \\ &= (\sigma_1 - \sigma_3) d\varepsilon_1^p = 2k \max |d\varepsilon^p|, \end{aligned} \quad (12.345)$$

koska janalla AB $\sigma_1 = \sigma_3 + 2k$ ja $\max |d\varepsilon^p| = d\varepsilon_1^p$.

Kärkipisteessä A

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2k, \quad \sigma_2 = \sigma_3, \quad (12.346)$$

ja plastisen työn inkrementti on

$$dW_p = (\sigma_3 + 2k) d\varepsilon_1^p + \sigma_3 d\varepsilon_2^p + \sigma_3 d\varepsilon_3^p. \quad (12.347)$$

Kokoonpuristumattomuusehdon mukaan

$$d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = 0, \quad (12.348)$$

ja

$$dW_p = 2k d\varepsilon_1^p = 2k \max |d\varepsilon^p|, \quad (12.349)$$

koska $d\varepsilon_1^p$ on nyt itseisarvoltaan suurin plastinen päävenymä. Samalla tavalla todetaan, että myös Trescan myötöpinnan muissa osissa plastisen työn inkrementti on (12.345).

Mohrin-Coulombin myötöpinnan (pyramidin) kärjessä

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \cot \phi, \quad (12.350)$$

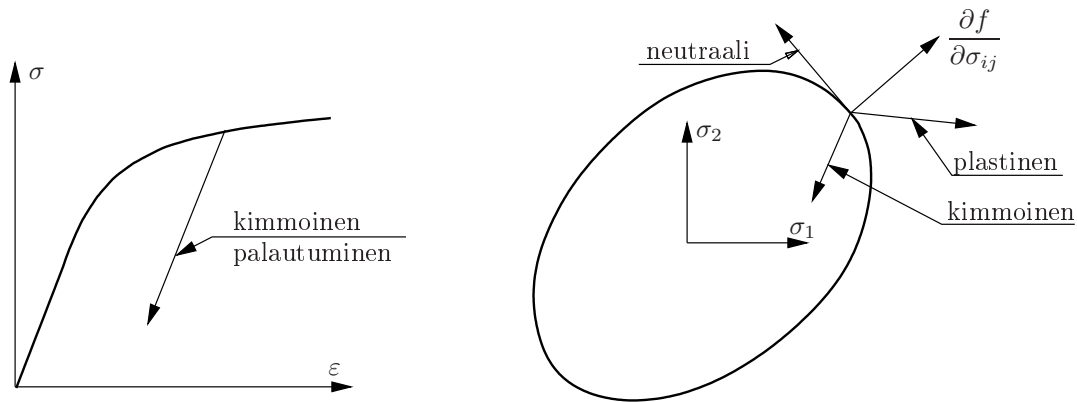
ja plastisen työn inkrementiksi

$$dW_p = \sigma_1 d\varepsilon_1^p + \sigma_2 d\varepsilon_2^p + \sigma_3 d\varepsilon_3^p \quad (12.351)$$

tulee

$$dW_p = c \cot \phi (d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p). \quad (12.352)$$

Sama kaava todetaan päteväksi myös myötöpinnan muissa osissa vähän monimutkaisemmilla laskutoimituksilla.



Kuva 12.29 Mötölujittuva materiaali.

Druckerin-Pragerin myötöehdon tapauksessa

$$dW_p = \frac{\sigma_m \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}}{\sqrt{1 + \alpha^2}}. \quad (12.353)$$

Kun $\alpha = 0$, niin saadaan von Misesin myötöehtoon liittyvä plastisen työn inkrementti.

12.4.5 Myötölujittuvan aineen kimmoplastiset jännityksen ja muodonmuutoksen väliset yhtälöt

Kimmoisen myötölujittuvan plastisen aineen myötöehto voidaan antaa muodossa

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k(\kappa)) = 0, \quad (12.354)$$

missä k riippuu nyt myötölujittumisparametrasta κ . Myötöpinnan muoto muuttuu myös yleisesti plastisen muodonmuutoksen mukana, kuten esim. edellä esiteltyt myötölujittumissäännöt määräävät.

Kuvassa 12.29a on esitetty kimmoisen myötölujenevan plastisen aineen yksiulotteinen käyttäytyminen. Alkuperäisen myötörajan σ_{m0} saavuttamisen jälkeen jännitys voi vielä kasvaa. Palautuminen tapahtuu samalla tavalla kimmoisesti kuin ideaaliplastisella mallilla, eli jännityksen ja venymän välisen käyrän kulmakerroin on kimmokerroin E palautumisvaiheessa.

Useampiulotteisessa tapauksessa, kuva 12.29b, jännitystila voi päästä alkuperäisen myötöpinnan ulkopuolelle, mutta sen täytyy pysyä myötölujittumissäännön määräämällä, deformaation mukana muuttuvalla myötöpinnalla plastisen myödon aikana. Plastisia muodonmuutoksia voi syntyä, kun jännitystila σ_{ij} on hetkellisen kuormitustason määräämällä myötöpinnalla.

Kuormittumis- ja palautumisehdot voidaan lausua seuraavalla tavalla. Otaksutaan, että jännitystila σ_{ij} on hetkellisellä (nykyisellä) myötöpinnalla eli

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^k, \kappa) = 0. \quad (12.355)$$

Jos

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0, \quad (12.356)$$

niin plastinen myötö on mahdollinen eli $d\varepsilon_{ij}^p \neq 0$.

Jos

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \quad (12.357)$$

niin tapahtuu kimmainen palautuminen ja $d\varepsilon_{ij}^p = 0$.

Myös siinä tapauksessa, että $f = 0$ ja

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad (12.358)$$

plastinen muodonmuutos $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ (neutraali kuormitusvaihe).

Jaetaan muodonmuutos kimmoiseen ja plastiseen osaan

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (12.359)$$

Kimmainen muodonmuutosinkrementti on

$$d\varepsilon_{ij}^e = D_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} = C_{ijkl} d\sigma_{kl}, \quad (12.360)$$

missä $C_{ijkl} = D_{ijkl}^{-1}$ on materiaalin kimmainen joustotensori. Myötösäännön perusteella

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (12.361)$$

Yhteensä

$$d\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} d\sigma_{kl} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (12.362)$$

Konsistenssiehdon

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (12.363)$$

mukaan plastisen myötön aikana jännitystila σ_{ij} pysyy (mahdollisen myötölujittumisen takia muotoaan muuttavalla) myötöpinnalla. Merkitään

$$d_\sigma f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}. \quad (12.364)$$

Kuormitusvaiheessa $d_\sigma f > 0$, ja $d\varepsilon_{ij}^p \neq 0$. Kimmoisen palautumisen aikana $d_\sigma f < 0$, ja $d\varepsilon_{ij}^p = 0$.

Sijoittamalla konsistenssiehtoon (12.363) myötösääntö saadaan

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 0, \quad (12.365)$$

josta voidaan ratkaista verrannollisuuskertoim $d\lambda$

$$d\lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}. \quad (12.366)$$

Merkitsemällä

$$h = - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (12.367)$$

myötösääntö tulee muotoon

$$d\varepsilon_{ij}^p = h \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (12.368)$$

Muodonmuutosten ja jännitysten väliset yhtälöt ovat

$$d\varepsilon_{ij} = \left(C_{ijkl} - h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right) d\sigma_{kl}. \quad (12.369)$$

Myötölujuittuvan aineen rajatapauksena saadaan ideaaliplastinen aine, kun termit $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p$ ja $\frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa$ menevät kohti nollaa. Tällöin suure h lähestyy ääretöntä, eikä yhtälöitä (12.369) voida käyttää.

Jännitysten ja muodonmuutosten välisten yhtälöiden, eli edellisille materiaaliyhtälöille käänteisten yhtälöiden, muodostamiseksi lausutaan ensin jännitysinkrementti muodossa

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^e = D_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p). \quad (12.370)$$

Myötösäännön perusteella

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - d\lambda D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}. \quad (12.371)$$

Verrannollisuuskerroin $d\lambda$ voidaan ratkaista konsistenssiehdosta

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa = 0. \quad (12.372)$$

Sijoittamalla yhtälöt (12.371) konsistenssiehtoon (12.372) tulee

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 0, \quad (12.373)$$

josta ratkaistaan

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}. \quad (12.374)$$

Sijoittamalla ratkaistu kerroin $d\lambda$ takaisin jännitysten ja muodonmuutosten väliseen yhtälöryhmään saadaan

$$d\sigma_{ij} = \left[D_{ijkl} - \frac{D_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D_{pqkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \right] d\varepsilon_{kl}. \quad (12.375)$$

Materiaalin kimmoplastinen jäykkyystensori on

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl} - \frac{D_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D_{pqkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}. \quad (12.376)$$

Yhtälöt (12.375) pätevät myös ideaaliplastisessa tapauksessa, jolloin

$$\frac{1}{h} = -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 0. \quad (12.377)$$

Esimerkki 12.7 Määritetään isotrooppisesti myötölujittuvan von Misesin myötöehtoa noudattavan aineen jännitysten ja muodonmuutosten väliset yhteydet.

Esimerkissä 12.4 on johdettu ideaaliplastiselle von Misesin myötöehtoa noudattavalle aineelle materiaalin jäykkyystensori D_{ijkl}^{ep} . Isotrooppisesti myötölujittuvan aineen von Misesin myötöehto voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_m(\kappa)) = 3J_2 - \sigma_m^2(\kappa) = 0, \quad (12.378)$$

missä $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$, myötöjännitys $\sigma_m(\kappa) = \sqrt{3}k(\kappa)$ riippuu myötölujittumisparametristä κ , joka voi olla esim. W_p tai $\bar{\varepsilon}^p$.

Efektiivisen tai tehokkaan jännityksen $\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2}$ avulla von Misesin ehto voidaan kirjoittaa muodossa

$$\bar{\sigma}^2 - \sigma_m^2 = 0. \quad (12.379)$$

Myötöpinnan gradientti on

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 3S_{ij}. \quad (12.380)$$

Kimmoisen isotrooppisen aineen jäykkyystensori on

$$D_{ijkl} = G \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right), \quad (12.381)$$

missä

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (12.382)$$

Kuten ideaaliplastisessa tapauksessa

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} = 36GJ_2, \quad (12.383)$$

$$D_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D_{pqkl} = 36G^2 S_{ij} S_{kl}. \quad (12.384)$$

Otetaan myötölujittumisparametriksi $\kappa = \bar{\varepsilon}^p$ ekvivalentti plastinen venymä, jolloin $\sigma_m = \sigma_m(\bar{\varepsilon}^p)$.

Isotrooppisesti myötölujittuvalle aineelle

$$\frac{1}{h} = -\frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (12.385)$$

Sijoittamalla

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa} = -2\sigma_m \frac{d\sigma_m}{d\bar{\varepsilon}^p}, \quad (12.386)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{ij}^p} = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{d\varepsilon_{ij}^p} = \frac{2}{3} \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{d\bar{\varepsilon}^p}, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 3S_{ij} \quad (12.387)$$

tulee

$$\frac{1}{h} = 2\sigma_m \frac{d\sigma_m}{d\bar{\varepsilon}^p} \frac{2}{3} \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{d\bar{\varepsilon}^p} 3S_{ij} = 12J_2 E_p, \quad (12.388)$$

missä

$$E_p = \frac{d\sigma_m}{d\bar{\varepsilon}^p} = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p} \quad (12.389)$$

on jännityksen ja plastisen venymän välisen käyrän tangentin kulmakerroin. Vetoko-keesta saatavan jännityksen ja venymän välisen käyrän tangentin kulmakertoimen E_t avulla saadaan määritettyä

$$E_p = \frac{E_t E}{E - E_t}. \quad (12.390)$$

Isotrooppisesti myötölujittuvan von Misesin aineen jäykkyystensoriksi saadaan

$$\begin{aligned} D_{ijkl}^{ep} &= D_{ijkl} - \frac{D_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D_{pqkl}}{\frac{1}{h} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \\ &= G \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) - \frac{3G}{J_2 \left(3 + \frac{E_p}{G} \right)} S_{ij} S_{kl}. \end{aligned} \quad (12.391)$$

Esimerkki 12.8 Määritetään kinemaattisesti myötölujittuvan von Misesin myötöeh-toa noudattavan aineen jännitysten ja muodonmuutosten väliset yhteydet.

Kinemaattisesti myötölujittuvalle von Misesin aineelle saadaan

$$D_{ijkl}^{ep} = G \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) - \frac{3G}{\tilde{J}_2 \left(3 + \frac{E_p}{G} \right)} \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{kl}, \quad (12.392)$$

missä

$$\tilde{S}_{ij} = S_{ij} - \alpha_{ij}, \quad \tilde{J}_2 = \frac{1}{2} \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij}. \quad (12.393)$$

Puhtaan kinemaattisen myötölujittumisen tapauksessa

$$\sqrt{3\tilde{J}_2} = \sigma_{m0} \quad (12.394)$$

on vakio.

12.5 Rajakuormamenetelmän peruslauseet

Tarkastellaan ensin rakenteen sortumisen alkuvaihetta. Muodonmuutosten otaksutaan olevan kimmoisten muodonmuutosten suuruusluokkaa, ja geometrian muutokset voidaan jättää huomioonottamatta (geometrisesti lineaarinen teoria). Samoin kiihtyvyydet voidaan otaksua nolliksi, ja sortumisen alkuvaiheissa tarkastelu voidaan tehdä staattisena tai kvasistaattisena.

Jännitysten $\boldsymbol{\sigma}$, tilavuusvoimien $\mathbf{f}$ ja reunakuormien $\bar{\mathbf{t}}$ muutosnopeuksien $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, $\dot{\mathbf{f}}$ ja $\dot{\bar{\mathbf{t}}}$ otaksutaan toteuttavan (inkrementaaliset) tasapainoyhtälöt

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{f}_i = 0, \quad x_i \in B, \quad (12.395)$$

kappaleessa B ja

$$\dot{\sigma}_{ij}n_j = \dot{t}_i, \quad x_i \in \partial B_t \quad (12.396)$$

kappaleen B reunan osalla ∂B_t , jolla tunnetaan reunavoimat t_i . Valitaan virtuaaliseksi siirtymäksi $\delta \mathbf{u} = \mathbf{v} \delta t$, missä $\mathbf{v}$ on todellinen nopeus ja δt on aikainkrementti. Virtuaaliset muodonmuutokset ovat

$$\delta \varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} \delta t = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \delta t. \quad (12.397)$$

Rakenteen sortumisen alkuvaiheessa on voimassa yhtälö

$$\int_B \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_B \dot{\sigma}_{ij} (\dot{\varepsilon}_{ij}^p + D_{ijkl}^{-1} \dot{\sigma}_{kl}) dV = \int_B \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial B_t} \dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} dS. \quad (12.398)$$

Komplementaarisen energiainkrementin positiivisuuden, (materiaalin kimmoisen jäykkyys-tensori $\mathbf{D}$ on positiivisesti definiitti), nojalla

$$\dot{\sigma}_{ij} D_{ijkl}^{-1} \dot{\sigma}_{kl} dV \geq 0. \quad (12.399)$$

Epäyhtälön (12.399) ja Druckerin epäyhtälön (12.329)

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (12.400)$$

perusteella päätellään nyt, että plastisen myödon alkaessa (sortumisen alkuvaiheessa) jännitysnopeus $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ häviää, joten $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = 0$ ja $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$. Kimmoplastinen kappale käyttäytyy jäykkäplastisella tavalla sortumisen alkuvaiheessa. Tämän perusteella jäykkäplastiselle tapaukselle kehitettyjä rajalauseita voidaan soveltaa myös kimmoplastisille kappaleille ja rakenteille.

Alarajalause

Lause 12.1 Jos jännitystila $\boldsymbol{\sigma}^*$ ei riko myötöehtoa ja on tasapainossa kuormituksen $\lambda \mathbf{f}^*$, $\lambda \bar{\mathbf{t}}^*$ kanssa, niin $\lambda \leq 1$.

Todistus. Virtuaalisen työn yhtälön perusteella

$$\begin{aligned} \int_B \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij} dV &= \lambda \left[\int_B \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial B_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} dS \right] \\ &= \lambda \int_B \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \lambda \int_B D_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV, \end{aligned} \quad (12.401)$$

missä $\boldsymbol{\sigma}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\mathbf{v}$ ovat todellinen jännitys-, muodonmuutosnopeus- ja nopeuskenttä ja kuormat ovat $\mathbf{f}$, $\bar{\mathbf{t}}$. Plastisen dissipaation maksimin periaatteen nojalla

$$D_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \geq \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (12.402)$$

joten $\lambda \leq 1$. Kuormakerroin λ on siten enintään plastisen rajakuormakertoimen λ_p suurinen.

Ylärajalause

Lause 12.2 Jos nopeuskenttä $\mathbf{v}^*$ ja sitä vastaava muodonmuutoskenttä $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ toteuttavat yhtälön

$$\int_B D_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) dV = \int_B \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{v}^* dV + \int_{\partial B_t} \bar{\mathbf{t}}^* \cdot \mathbf{v}^* dS, \quad (12.403)$$

missä $\mathbf{f}^* = \lambda \mathbf{f}$, $\mathbf{t}^* = \lambda \mathbf{t}$, niin $\lambda \geq 1$.

Todistus. Virtuaalisen työn yhtälön perusteella

$$\lambda \int_B \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV = \int_B \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^* dV + \int_{\partial B_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}^* dS, \quad (12.404)$$

missä $\boldsymbol{\sigma}$ on todellinen jännitys rakenteen sortuessa, joten

$$\int_B D_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) dV = \lambda \int_B \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV. \quad (12.405)$$

Toisaalta plastisen dissipaation maksimin periaatteen mukaan

$$D_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) \geq \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (12.406)$$

joten $\lambda \geq 1$. Kuormakerroin λ on siten ainakin plastisen rajakuormakertoimen λ_p suuruinen.

Moniparametrinen kuormitus

Määritellään tilavuusvoimat ja pintavoimat kaavoilla

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N P_I \tilde{\mathbf{f}}^I(\mathbf{x}), \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N P_I \tilde{\mathbf{t}}^I(\mathbf{x}), \quad (12.407)$$

missä P_I ovat yleistetyt kuormat. Kinemaattisesti luvalliselle nopeuskentälle voidaan vastaavasti määritellä yleistetyt nopeudet

$$\dot{p}_I = \int_B \tilde{\mathbf{f}}^I \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial B_t} \tilde{\mathbf{t}}^I \cdot \mathbf{v} dS. \quad (12.408)$$

Tällöin voidaan kirjoittaa virtuaalisen työn yhtälö

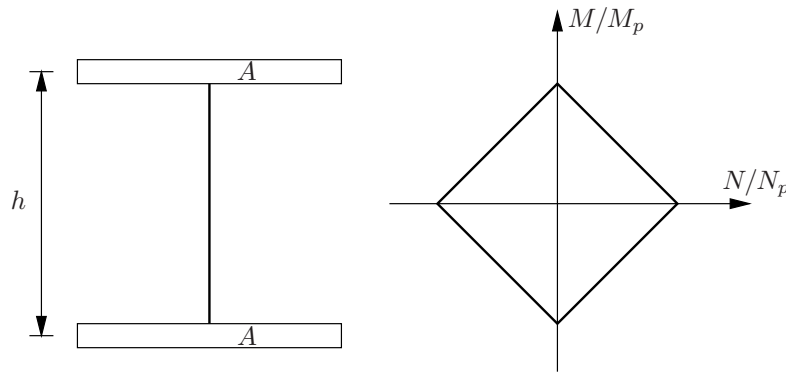
$$\int_B \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \sum_{I=1}^N P_I \dot{p}_I \equiv \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{p}}, \quad (12.409)$$

missä

$$\mathbf{P}^T = [P_1, P_2, \dots, P_N], \quad \mathbf{p}^T = [p_1, p_2, \dots, p_N]. \quad (12.410)$$

Rakenteen myötöehto voidaan nyt lausua yleistettyjen kuormien avulla muodossa

$$f(\mathbf{P}) = 0. \quad (12.411)$$



Kuva 12.30 *I-profilin myötöehto.*

Jos $\mathbf{P}$ on myötöpinnalla ja $\mathbf{P}^*$ on myötöpinnan sisällä, niin plastisen dissipaation maksimin periaatteen mukaan

$$(\mathbf{P} - \mathbf{P}^*) \cdot \dot{\mathbf{p}} \geq 0. \quad (12.412)$$

Epäyhtälöstä (12.412) seuraa, että yleistettyjen kuormien $\mathbf{P}$ avulla lausuttu myötöpinta on konvekksi ja että yleistetyt nopeudet ovat kohtisuorassa myötöpintaa vastaan, eli

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}_I}. \quad (12.413)$$

Esimerkki 12.9 *Määritetään ohutseinäisen I-profilin myötöehto.*

Merkitään, että laippojen pinta-alat ovat A ja uuman korkeus on h . Uuman pinta-ala otaksutaan nolaksi. Poikkileikkausta rasittavat normaalivoima N ja taivutusmomentti M . Jännitysresultantteja (yleistettyjä voimia) vastaavat yleistetyt nopeudet ovat keskimääräinen (painopisteen) pitenemisnopeus $\dot{\Delta}$ ja poikkileikkauksen kiertymisnopeus $\dot{\theta}$.

Laippojen jännitykset ovat

$$\sigma = \frac{N}{2A} \pm \frac{M}{Ah}. \quad (12.414)$$

Merkitsemällä $N_p = 2\sigma_m A$, $M_p = \sigma_m Ah$, missä σ_m on myötöjännitys, laippojen myötöehto voidaan kirjoittaa muodossa

$$\left| \frac{N}{N_p} \pm \frac{M}{M_p} \right| \leq 1. \quad (12.415)$$

Myötöehto

$$f(M, N) = \max \left(\left| \frac{N}{N_p} + \frac{M}{M_p} \right|, \left| \frac{N}{N_p} - \frac{M}{M_p} \right| \right) - 1 = 0 \quad (12.416)$$

on esitetty kuvassa 12.30. Myötöehto on määritetty puhtaasti tasapainoehtojen perusteella, joten se vastaa alarajaratkaisua. Määritetty I -poikkileikkauksen jännitysjakuma on yksikäsitteinen, joten kuvan 12.30 myötöehto on samalla todellinen myötöehto, ja samaan tulokseen pitää päätyä ylärajalauseen avulla.

Tarkastellaan nopeuskenttää, jossa toinen laippa pitenee nopeudella $2\dot{\Delta}$, ja toinen laippa ei deformeudu. Tällöin keskimääräinen pitenemisnopeus on $\dot{\Delta}$, ja poikkileikkauksen kiertymisnopeus on $\dot{\theta} = \frac{2\dot{\Delta}}{h}$. Otaksutaan $\dot{\Delta}$ ja $\dot{\theta}$ positiivisiksi.

Deformoituvan laipan venymisnopeus on $\frac{2\dot{\Delta}}{L}$, missä L on sauvan pituus, ja plastinen dissipaatio on

$$N_p \dot{\Delta} = \sigma \dot{\varepsilon}_p V = \sigma_m \frac{2\dot{\Delta}}{L} AL. \quad (12.417)$$

Otetaan N referenssikuormaksi, ja lausutaan sen avulla momentti $M = \alpha N \frac{h}{2}$. Tällöin

$$N \dot{\Delta} + M \dot{\theta} = N \left(\dot{\Delta} + \frac{\alpha h}{2} \frac{2\dot{\Delta}}{h} \right) = N(1 + \alpha) \dot{\Delta}. \quad (12.418)$$

Normaalivoiman N ja momentin M ylärajat ovat

$$N \leq \frac{N_p}{1 + \alpha}, \quad M \leq \frac{\alpha M_p}{1 + \alpha}, \quad (12.419)$$

missä $M_p = \frac{N_p h}{2}$. Normaalivoiman ja momentin yläraja-arviot toteuttavat ehdon

$$\frac{M}{M_p} + \frac{N}{N_p} = 1, \quad (12.420)$$

joka on sama kuin edellä alarajalauseen perusteella saatu tulos (positiivisessa neljänneksessä). Otaksumalla nopeuskenttä, jossa molemmat laipat deformatuvat, saadaan yleensä yläraja, joka on edellä johdetun myötöpinnan ulkopuolella, paitsi kun laippojen pitenemisnopeudet ovat samat tai yhtäsuuret ja vastakkaismerkkiset.

12.6 Mukautumislauseet useampiulotteisessa jännitystilassa

Kuorman arvoa nolla vastaavat jännitykset ovat jäännösjännityksiä, $\rho_{ij} \equiv \sigma_{ij}^r$, joita on voinut syntyä kuormitushistorian aikana plastisten muodonmuutosten takia.

Jäännösjännitykset ρ_{ij} toteuttavat homogeeniset tasapainoyhtälöt (kuorman arvolla nolla)

$$\rho_{ij,j} = 0, \quad x_i \in B, \quad (12.421)$$

kappaleessa B . Kappaleen B reunan osalla ∂B_t , jolla tunnetaan reunavoimat t_i , toteutuvat reunan tasapainoehdot

$$\rho_{ij} n_j = 0, \quad x_i \in \partial B_t. \quad (12.422)$$

Kimmoplastisessa kappaleessa kuormia f_i ja t_i vastaa jännitystila

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \rho_{ij}, \quad (12.423)$$

missä σ_{ij}^e on kuormitusta vastaava kimmoinen jännitystila (otaksumalla kappale kimmoiseksi).

Muodonmuutostila jaetaan kimmoiseen osaan ja plastiseen osaan kuten yksiulotteisissa tapauksissa

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (12.424)$$

Yksiulotteisen tapauksen kaavan

$$\sigma = E \varepsilon^e \quad (12.425)$$

yleistyksenä jännitys σ_{ij} voidaan lausua yleistetyin Hooken lain avulla muodossa

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{ij}^e, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (12.426)$$

missä D_{ijkl} sisältää kimmotensorin komponentit.

Esimerkiksi tasojännitystilassa vastaava yhteys on matriisimerkinnöin

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{bmatrix} \quad (12.427)$$

tai lyhyemmin merkittynä

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (12.428)$$

Kimmainen muodonmuutos on

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^e &= D_{ijkl}^{-1} \sigma_{ij} \\ &= D_{ijkl}^{-1} (\sigma_{ij}^e + \rho_{ij}), \end{aligned} \quad (12.429)$$

joten muodonmuutos ε_{ij} voidaan kirjoittaa muodossa

$$\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}^{-1} \sigma_{ij}^e + D_{ijkl}^{-1} \rho_{ij} + \varepsilon_{ij}^p. \quad (12.430)$$

Kaavan ensimmäinen termi $\tilde{\varepsilon}_{ij} \equiv D_{ijkl}^{-1} \sigma_{ij}^e$ esittää kimmoiseksi kuvitellun kappaleen muodonmuutoksia annetusta kuormituksesta. Kuvitteellisen muodonmuutoksen $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ kanssa yhteensopivaa siirtymätilaa merkitään symbolilla u_i^e , ja tällöin

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^e + u_{j,i}^e). \quad (12.431)$$

Koska muodonmuutos $\boldsymbol{\varepsilon}$ on yhteensopiva siirtymän $\mathbf{u}$ kanssa ja edellä määritelty kimmoisen kappaleen muodonmuutos $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ on yhteensopiva siirtymän $\mathbf{u}^e$ kanssa, täytyy erotuksen $\boldsymbol{\varepsilon} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ olla yhteensopiva siirtymätilan $\mathbf{u}^r$ (residuaalinen siirtymätila) kanssa siten, että

$$D_{ijkl}^{-1} \rho_{kl} + \varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2}(u_{i,j}^r + u_{j,i}^r), \quad (12.432)$$

$$u_i = u_i^e + u_i^r. \quad (12.433)$$

Plastinen muodonmuutos $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ määrittää jäännösjännitystilan $\boldsymbol{\rho}$ ja residuaalisen siirtymätilan $\mathbf{u}^r$ jäykän kappaleen liikettä vaille. Jos $\boldsymbol{\rho}$ ja $\boldsymbol{\rho} + \bar{\boldsymbol{\rho}}$ ovat kaksi jäännösjännityskenttää, niin virtualisen työn yhtälöstä seuraa

$$\begin{aligned} \int_B \rho_{ij} (D_{ijkl}^{-1} \rho_{kl} + \varepsilon_{ij}^p) dV &= \int_B (\rho_{ij} + \bar{\rho}_{ij}) (D_{ijkl}^{-1} \rho_{kl} + \varepsilon_{ij}^p) dV \\ &= \int_B (\rho_{ij} + \bar{\rho}_{ij}) [D_{ijkl}^{-1} (\rho_{kl} + \bar{\rho}_{kl}) + \varepsilon_{ij}^p] dV = 0, \end{aligned} \quad (12.434)$$

joten

$$\int_B \bar{\rho}_{ij} D_{ijkl}^{-1} \bar{\rho}_{kl} dV = 0. \quad (12.435)$$

Koska materiaalin kimmoinen joustomatriisi $\mathbf{D}^{-1}$ on positiivisesti definiitti, täytyy olla voimassa yhtälö $\bar{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}$ ja $\boldsymbol{\rho}$ on yksikäsitteisesti määrätty, kun $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ on tunnettu. Kaavan (12.432) perusteella residuaalinen siirtymä $\mathbf{u}^r$ on jäykän kappaleen siirtymää vaille määrätty.

Mukautumislause

Otaksutaan, että kimmoplastinen kappale on mukautunut muuttuvaan toistuvaan kuormitukseen, kun kuormat muuttuvat tietyissä rajoissa. Tällöin muodonmuutos $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ pysyy vakiona määrittäen vakiona pysyvän jäännösjännitystilan $\boldsymbol{\rho}$ siten, että kokonaisjännitys $\boldsymbol{\sigma}$ ei riko myötöehtoa

$$f(\boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{\rho}) \leq 0. \quad (12.436)$$

Tällaisen jäännösjännitystilan olemassaolo on välttämätön ehto mukautumiselle. Se on myös riittävä ehto (Melan, 1938).

Lause 12.3 *Rakenne mukautuu muuttuvaan toistuvaan kuormitukseen, jos löytyy sellainen ajasta riippumaton homogeeniset tasapainoehdot toteuttava jännitystila $\boldsymbol{\rho}^*$ (ei välttämättä sama kuin jäännösjännitystila $\boldsymbol{\rho}$), joka toteuttaa ehdon*

$$f(\boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{\rho}^*) < 0 \quad (12.437)$$

kaikille kimmoisena lasketuille jännitystiloina $\boldsymbol{\sigma}^e$, kun kuormat muuttuvat tietyissä rajoissa.

Todistus. Tarkastellaan positiivista suuretta

$$Y = \frac{1}{2} \int_B (\rho_{ij} + \rho_{ij}^*) D_{ijkl}^{-1} (\rho_{kl} + \rho_{kl}^*) dV. \quad (12.438)$$

Jos kappale ei ole vielä mukautunut toistuvaan muuttuvaan kuormitukseen, niin jäännösjännitykset $\boldsymbol{\rho}$ ja suure Y ovat ajasta riippuvia, ja

$$\dot{Y} = \int_B (\rho_{ij} + \rho_{ij}^*) D_{ijkl}^{-1} \dot{\rho}_{kl} dV. \quad (12.439)$$

Koska $\boldsymbol{\rho}$ ja $\boldsymbol{\rho}^*$ toteuttavat homogeeniset tasapainoyhtälöt ja koska $\varepsilon_{ij}^r \equiv D_{ijkl}^{-1} \rho_{kl} + \varepsilon_{ij}^p$ on residuaalisiirtymätilan $\mathbf{u}^r$ kanssa yhteensopiva, virtuaalisen työn yhtälöstä seuraa

$$\int_B (\rho_{ij} + \rho_{ij}^*) (D_{ijkl}^{-1} \dot{\rho}_{kl} + \dot{\varepsilon}_{ij}^p) dV = 0, \quad (12.440)$$

ja edelleen

$$\dot{Y} = - \int_B (\rho_{ij} + \rho_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV = - \int_B (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV, \quad (12.441)$$

missä $\boldsymbol{\rho}^* = \boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{\rho}^*$. Oletuksen mukaan jännitystila $\boldsymbol{\rho}^*$ ei riko myötöehtoa, joten plastisen työn maksimin periaatteen mukaisesti

$$-\dot{Y} = \int_B (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV \geq 0, \quad (12.442)$$

eli $\dot{Y} \leq 0$. Yhtäläisyysmerkki on voimassa, jos plastinen muodonmuutos on nolla. Koska $Y \geq 0$, saavutetaan ennenpitkää tilanne $\dot{Y} = 0$, jolloin rakenne mukautuu toistuvaan muuttuvaan kuormitukseen.

Kinemaattinen mukautumislause

Rakenteen mukautumiselle muuttuvaan toistuvaan kuormitukseen voidaan johtaa myös kinemaattinen kriteeri (Koiter, 1956). Tutkitaan kappaletta B , jonka reunan osalla ∂B_t tunnetaan reunakuormavektori $\bar{\mathbf{t}}$ (viiva suureen $\mathbf{t}$ päällä merkitsee annettua arvoa) ja jonka tilavuusvoimavektori on $\mathbf{f}$. Nopeuskenttää $\mathbf{v}^*$ vastaa muodonmuutosnopeuskenttää $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$, ja vastaava plastinen dissipaatio on $D_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*)$.

Lause 12.4 *Rakenne ei ole mukautunut muuttuvaan toistuvaan kuormituksen, jos löytyy kinemaattisesti luullinen nopeuskenttä, joka toteuttaa kappaleen (rakenteen) B reunan osalla ∂B_v kinemaattiset reunaehdot siten, että*

$$\int_B D_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) dV < \int_B \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^* dV + \int_{\partial B_v} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}^* dV. \quad (12.443)$$

Todistus. Epäyhtälöstä (12.443) ja virtuaalisen työn yhtälöstä

$$\int_B \sigma_{ij}^e \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV = \int_B \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^* dV + \int_{\partial B_v} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}^* dV \quad (12.444)$$

seuraa

$$\int_B \sigma_{ij}^e \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV > \int_B D_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) dV. \quad (12.445)$$

Otaksutaan, että rakenne on mukautunut vaihtuvaan toistuvaan kuormitukseen ja siinä on ajasta riippumaton jäännösjännitysjakama $\boldsymbol{\rho}$. Plastisen dissipaation maksimin periaatteen mukaan

$$D_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) dV \geq (\sigma_{ij}^e + \rho_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^* \quad (12.446)$$

ja

$$\int_B D_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) dV \geq \int_B \sigma_{ij}^e \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV + \int_B \rho_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV. \quad (12.447)$$

Koska jäännösjännitykset toteuttavat homogeeniset tasapainoyhtälöt ja nopeuskenttää $\mathbf{v}^*$ toteuttaa kinemaattiset reunaehdot $\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$ reunan osalla ∂B_v , kaavan (12.447) viimeinen termi häviää. Kaavan tulos on ristiriidassa epäyhtälön (12.445) kanssa, joten rakenne ei ole voinut mukautua muuttuvaan toistuvaan kuormituksen.

Luku 13

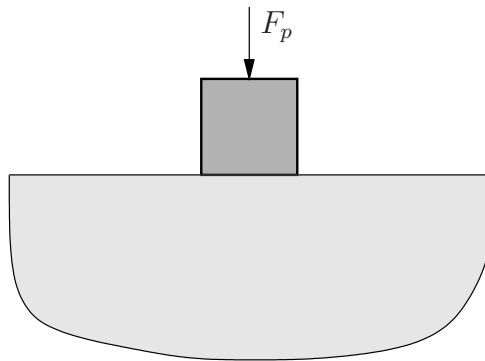
Tasomuodonmuutostilan ylä- ja alarajaratkaisut

Tutkitaan aluksi kuvan 13.1 esittämää leimapainetehtävää. Leimasin (painin) otaksutaan äärettömän jäykäksi ja lujaksi. Alustan materiaali otaksutaan ideaaliplastiseksi ja kokoonpuristumattomaksi, t.s. sen tilavuus ei muutu. Määritetään voima, jolla painin tunkeutuu alustaan. Tämäntapaisten tehtävien ratkaisuja voidaan soveltaa esim. perustusten suunnittelussa ja metallien muokkauksessa sekä erilaisissa kovuustesteissä. Tehtävän matematiikka yksinkertaistuu huomattavasti, jos tarkastellaan vain tasomuodonmuutostilaa.

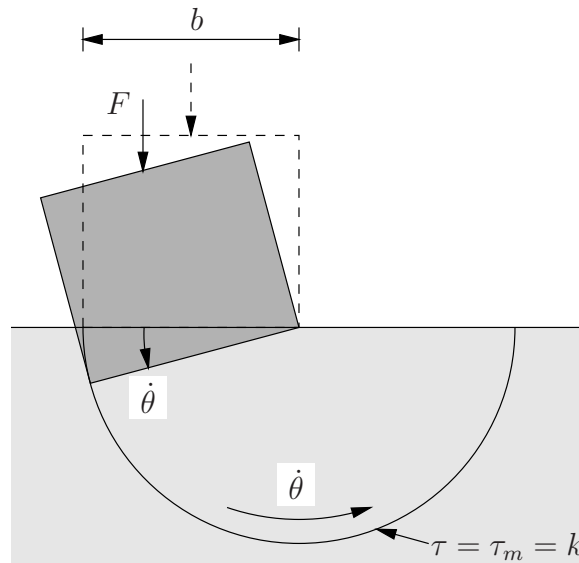
13.1 Ylärajaratkaisut

Ratkaisussa otaksutaan jokin geometrisesti hyväksyttävä alustan deformaatiotapa eli mekanismi, (kuten edellä tehtiin kehien analysoinnissa). Leimapaineen yläraja ratkaistaan virtuaalisen työn yhtälöstä. Käyttämällä virtuaalisten siirtymien tilalla nopeuksia saadaan virtuaalisen tehon yhtälö

$$\dot{W}_u = \dot{W}_s, \quad (13.1)$$



Kuva 13.1 Leimapaineprobleema (indentation problem).



Kuva 13.2 Alustan eräs mahdollinen deformaatiomuoto eli mekanismi.

missä $\dot{W}_u$ on ulkoinen virtuaalinen teho ja $\dot{W}_s$ on sisäinen virtuaalinen teho. Esimerkiksi, jos nopeus voiman F suuntaan on $\dot{u}$, niin ulkoinen teho on

$$\dot{W}_u = F\dot{u}. \quad (13.2)$$

Sisäinen virtuaalinen teho liukuviivalla on

$$\dot{W}_s = \int \tau \dot{\gamma} ds = \int k \dot{\gamma} ds, \quad (13.3)$$

koska liukuviivalla $\tau = \tau_m = k$, missä k on aineen myötöraja leikkauksessa.

Edellä aikaderivaattaa on merkitty suureen yläpuolelle asetetulla pisteellä. Esim. työn aikaderivaatta on teho. Leimapainetehtävässä aika on kuitenkin kuormaparametrin luonteinen suure, koska nyt staattisessa tarkastelussa hitausvoimia ei oteta huomioon.

Esimerkki 13.1 Määritetään leimapainetehtävän ratkaisun yläraja otaksumalla kuvan 13.2 mukainen liiketila.

Kuvan 13.2 mekanismin tapauksessa ulkoinen virtuaalinen teho on

$$\dot{W}_u = \frac{1}{2} F b \dot{\theta}, \quad (13.4)$$

ja sisäinen virtuaalinen teho ympyräliukuviivalla on

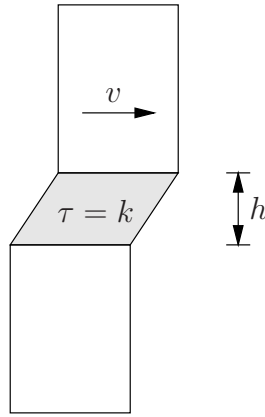
$$\dot{W}_s = \int \tau \dot{\gamma} ds = k b \dot{\theta} \pi b, \quad (13.5)$$

Virtuaalisen tehon kaavan (13.1) mukaan

$$\frac{1}{2} F b \dot{\theta} = k b^2 \dot{\theta} \pi, \quad (13.6)$$

mistä seuraa kuorman F yläraja F^u (u = upper bound)

$$F^u = 2\pi k b \approx 6.28 k b. \quad (13.7)$$



Kuva 13.3 Leikkausvyöhyke.

Kuvan 13.2 tapauksessa plastisen muodonmuutoksen otaksutaan tapahtuvan äärettömän kapeassa vyöhykkeessä, jota nimitetään liukuviivaksi. Otaksutaan aluksi, että vyöhykkeen paksuus h on äärellinen. Leikkausmuodonmuutosnopeus on tällöin (kuva 13.3)

$$\dot{\gamma} = \frac{v}{h}, \quad (13.8)$$

missä v on yläpuolisen osan nopeus alemman osan suhteen. Leikkausvyöhykkeessä leikkausjännitys on myötörajan suuruinen eli

$$\tau = \tau_m \equiv k. \quad (13.9)$$

Sisäinen virtuaalinen teho (pituusyksikköä kohti laskettuna) on

$$\tau \dot{\gamma} h = k \left[\frac{v}{h} \right] h = kv. \quad (13.10)$$

Kuvan 13.2 tapauksessa osien suhteellinen nopeus on $\dot{\theta}b$, ja liukuviivan pituus on πb .

Kaavaa (13.7) johdettaessa jätettiin materiaalin omapaino huomioonottamatta. Maamekaniikan tehtävissä maan oman painon merkitys kuitenkin voi olla huomattava.

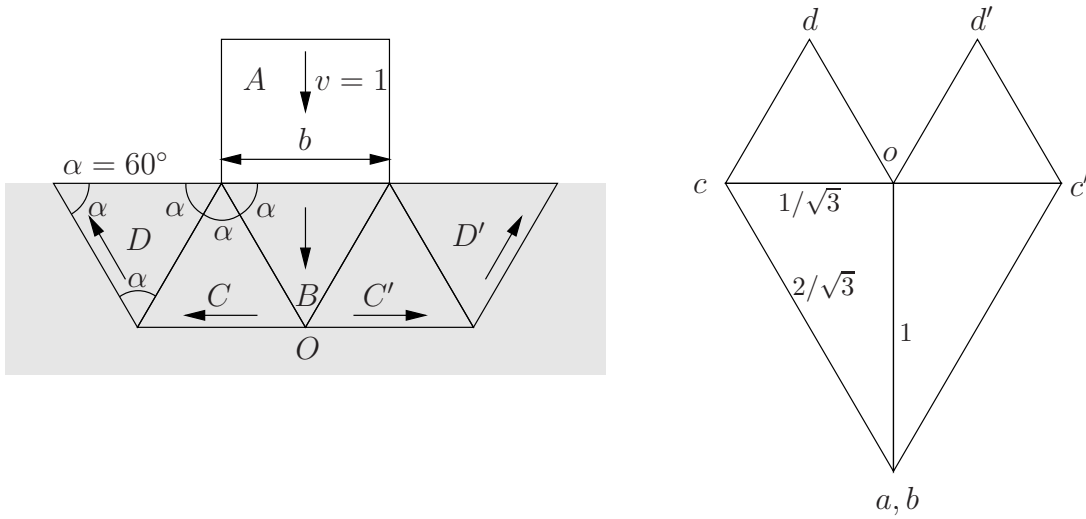
Esimerkki 13.2 Määritetään painimen rajakuorma vaihtoehtoisella mekanismilla.

Tarkastellaan seuraavaksi kuvan 13.4 mekanismia. Kuten edellä pääteltiin, sisäinen dissipaatio (virtuaalinen teho) tapahtuu jäykkien kappaleiden välissä olevilla liukuvioilla. Otaksutaan liukuviivakuvion kolmiot tasakylkiseksi.

Mekanismin nopeuskuvio on esitetty kuvassa 13.4b. Osien A , B jne. nopeuksia esittävät nopeuskuvion pisteet a , b jne. Kahta pistettä yhdistävä vektori esittää kyseisten osien nopeutta toistensa suhteen. Kappale (painin, intender) A liikkuu nopeudella v alaspäin (vektori oa). Osan B nopeus on sama kuin A :n nopeus eli $a = b$. Osan C nopeutta esittävä piste sijaitsee suorien oc ja bc leikkauspisteessä. Jana bc on samansuuntainen kuin osien B ja C välissä oleva liukuviiva. Samalla tavalla määritetään piste d pisteiden c ja o avulla.

Liukuviivan BC pituus olkoon l_{BC} jne. Mekanismin työyhtälö (tai tehoyhtälö) on nyt

$$F \cdot v = 2\{v_{BC}l_{BC} + v_{CO}l_{CO} + v_{CD}l_{CD} + v_{DO}l_{DO}\}k, \quad (13.11)$$



Kuva 13.4 Eräs mahdollinen mekanismi, a) liukuviivasto, b) nopeuskuvio.

missä on käytetty hyväksi symmetriaa (kerroin 2). Ottamalla huomioon, että

$$\frac{oc}{oa} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (13.12)$$

ja

$$l_{BC} = l_{CO} = \dots = b \quad (13.13)$$

seuraa tätä mekanismia vastaava rajakuorman yläraja-arvo

$$F^u = 2kb\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{10}{\sqrt{3}}kb \approx 5.77kb, \quad (13.14)$$

mikä on noin 8% pienempi F :n yläraja kuin aikaisemmin saatu $2\pi kb$.

Jälkimmäistä ratkaisua voitaisiin hieman parantaa ottamalla mekanismin liukuviivakuvion kolmioiden korkeus tuntemattomaksi x ja minimoimalla $F(x)$ x :n suhteen.

Deformoituvia alueita sisältävät mekanismit tasomuodonmuutostilassa

Mekanismi voi koostua paitsi liukuviivoista myös äärellisistä deformoituvista alueista. Jäyk-käplastisen materiaalin tapauksessa J_2 -teorian (von Misesin myötöehto, Prandtl-Reussin myötösääntö) mukaan

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda S_{ij}, \quad (13.15)$$

missä

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (13.16)$$

on jännitysdeviaattori ja p on hydrostaattinen paine

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{kk} \equiv \frac{1}{3}\sum_{k=1}^3 \sigma_{kk}. \quad (13.17)$$

Avaruudessa $\mathcal{R}^3$ eli (x, y, z) -avaruudessa

$$d\varepsilon_x = \frac{2}{3}d\lambda\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right], \quad (13.18)$$

$$d\varepsilon_y = \frac{2}{3}d\lambda[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)], \quad (13.19)$$

$$d\varepsilon_z = \frac{2}{3}d\lambda[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x)], \quad (13.20)$$

$$d\varepsilon_{xy} = d\lambda\tau_{xy}, \quad (13.21)$$

$$d\varepsilon_{yz} = d\lambda\tau_{yz}, \quad (13.22)$$

$$d\varepsilon_{xz} = d\lambda\tau_{xz}. \quad (13.23)$$

Tasomuodonmuutostilassa tasoa (x, y) vastaan kohtisuorassa suunnassa muodonmuutos on nolla eli

$$d\varepsilon_z = 0, \quad (13.24)$$

mistä seuraa kaavan (13.20) perusteella

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x). \quad (13.25)$$

Tässä tapauksessa myös hydrostaattinen paine p on

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) = \sigma_z. \quad (13.26)$$

Tasomuodonmuutostilassa jännitysdeviaattorin komponentit yksinkertaistuvat muotoon

$$S_x = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y), \quad S_y = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x), \quad S_{xy} = \tau_{xy}, \quad (13.27)$$

$$S_{yz} = 0, \quad S_{xz} = 0, \quad S_z = 0. \quad (13.28)$$

Tasojännitystilassa puolestaan olisi voimassa

$$d\varepsilon_z \neq 0, \quad \text{mutta} \quad \sigma_z = 0. \quad (13.29)$$

von Misesin myötöehto

$$\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} = k^2 \quad (13.30)$$

tulee tasomuodonmuutostilassa muotoon

$$\frac{1}{2}(S_xS_x + S_yS_y + S_{xy}S_{xy} + S_{yx}S_{yx}) = k^2 \quad (13.31)$$

eli

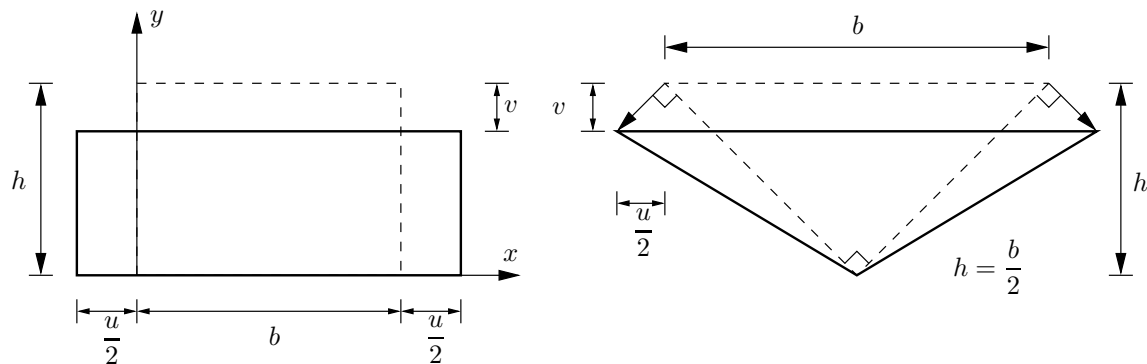
$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2, \quad (13.32)$$

missä k on leikkausmyötöraja. von Misesin myötöehdon tapauksessa on voimassa leikkaus- ja vetomyötörajan välillä yhteys

$$k = \sigma_m/\sqrt{3}. \quad (13.33)$$

Pääjännitykset ratkaistaan tasotapauksessa ehdosta

$$\det \left(\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (13.34)$$



Kuva 13.5 Vakiomuodonmuutosalueita.

mistä seuraa toisen asteen yhtälö, jolla on kaksi juurta

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} . \quad (13.35)$$

Tasomuodonmuutostilassa kolmas pääjännitys on (x, y) -tasoa vastaan kohtisuora jännitys

$$\sigma_3 = \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = p. \quad (13.36)$$

Pääjännitysten kaavan perusteella saadaan Trescan myötöehto tasotapauksessa

$$\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| = k \quad (13.37)$$

muotoon

$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2, \quad (13.38)$$

joka on sama kuin von Misesin ehto. Trescan ehdon tapauksessa on voimassa

$$k = \sigma_m/2. \quad (13.39)$$

Dissipaatio vakiomuodonmuutosalueessa

Tasomuodonmuutostilassa kokoonpuristumattomuusehto tulee muotoon

$$\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y = 0. \quad (13.40)$$

Kuvan 13.5a tapauksessa

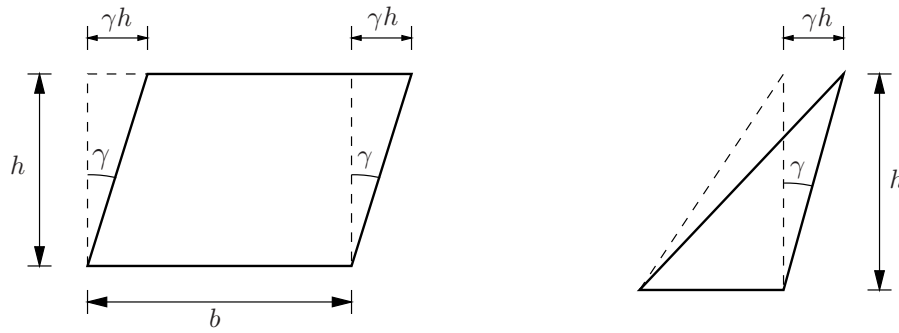
$$v = h|\varepsilon| \quad \text{ja} \quad u = b|\varepsilon|, \quad (13.41)$$

joten

$$\frac{v}{h} = \frac{u}{b}. \quad (13.42)$$

Muodonmuutoskomponentit ovat

$$\varepsilon_x = |\varepsilon|, \quad \varepsilon_y = -|\varepsilon|, \quad (13.43)$$



Kuva 13.6 Vakioleikkausmuodonmuutosalueita.

joten ominaisdissipaatio (dissipaatio/tilavuusyksikkö) on

$$\begin{aligned}
 d &= \sigma_x |\dot{\varepsilon}| - \sigma_y |\dot{\varepsilon}| \\
 &= |\dot{\varepsilon}| (\sigma_x - \sigma_y) \\
 &= 2k |\dot{\varepsilon}|.
 \end{aligned} \tag{13.44}$$

Kuvan 13.5b tapauksessa on

$$v = h|\varepsilon|, \quad u = b|\varepsilon|, \tag{13.45}$$

ja

$$\frac{u/2}{v} = \frac{b/2}{h} = 1. \tag{13.46}$$

Kuvien 13.6a ja 13.6b tapauksissa ominaisdissipaatio on

$$D = k\dot{\gamma}. \tag{13.47}$$

Esimerkki 13.3 Määritetään painimen rajakuorma deformatuvan alueen sisältävällä mekanismilla.

Tarkastellaan esimerkkinä kuvan 13.7 mekanismia. Alueessa B on tasainen muodonmuutos, ja osa C liikkuu vakionopeudella. Nopeusjakaumat osien B ja C reunoilla on esitetty kuvassa 13.7.

Osan B kokoonpuristumattomuuden nojalla

$$\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{v}}{h} + \frac{\dot{u}}{b/2} = 0, \tag{13.48}$$

joten

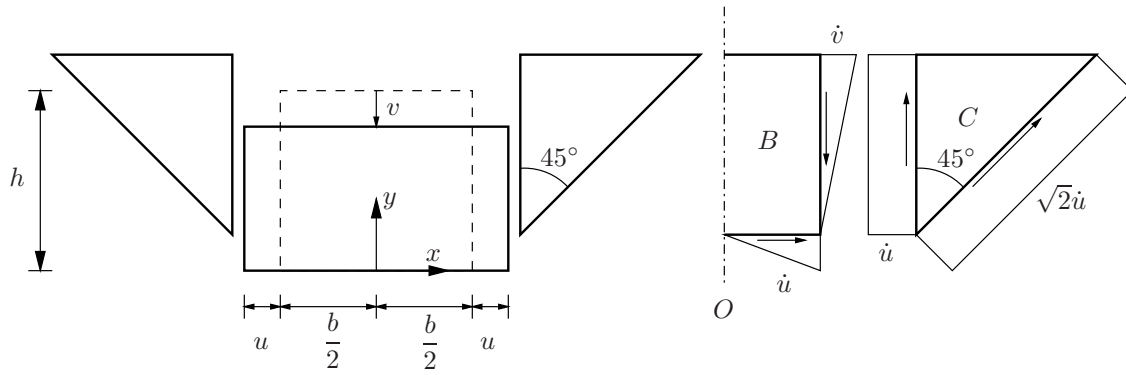
$$\dot{u} = -\frac{1}{2} \frac{b}{h} |\dot{v}|. \tag{13.49}$$

Merkitsemällä ominaisdissipaatiota symbolilla

$$d = 2k |\dot{\varepsilon}| \tag{13.50}$$

saadaan alueen B dissipaatioksi

$$D_B = 2k \frac{|\dot{v}|}{h} bh = 2kb |\dot{v}|. \tag{13.51}$$



Kuva 13.7 Deformoituvan alueen sisältävä mekanismi.

Dissipaatio saumassa BO on

$$D_{BO} = \frac{1}{2} \dot{u} k b = \frac{1}{4} \frac{b^2}{h} k |\dot{v}|, \quad (13.52)$$

saumassa BC

$$D_{BC} = \frac{1}{2} k h |\dot{v}| + k h \dot{u} = \frac{1}{2} k h |\dot{v}| + \frac{1}{2} k b |\dot{v}| \quad (13.53)$$

ja saumassa CO

$$D_{CO} = k \sqrt{2} h \cdot \sqrt{2} \dot{u} = k b |\dot{v}|. \quad (13.54)$$

Sisäinen dissipaatio on

$$\begin{aligned} \dot{W}_s \equiv D &= D_B + D_{BO} + 2D_{BC} + 2D_{CO} \\ &= k |\dot{v}| \left(2b + \frac{1}{4} \frac{b^2}{h} + h + b + 2b \right) \end{aligned} \quad (13.55)$$

eli

$$\dot{W}_s = k |\dot{v}| \left(5b + h + \frac{1}{4} \frac{b^2}{h} \right). \quad (13.56)$$

Ulkoinen virtuaalinen teho on kuten edellä

$$\dot{W}_u = F |\dot{v}|. \quad (13.57)$$

Virtuaalisen tehon periaatteen mukaan

$$\dot{W}_s = \dot{W}_u, \quad (13.58)$$

mistä ratkaistaan

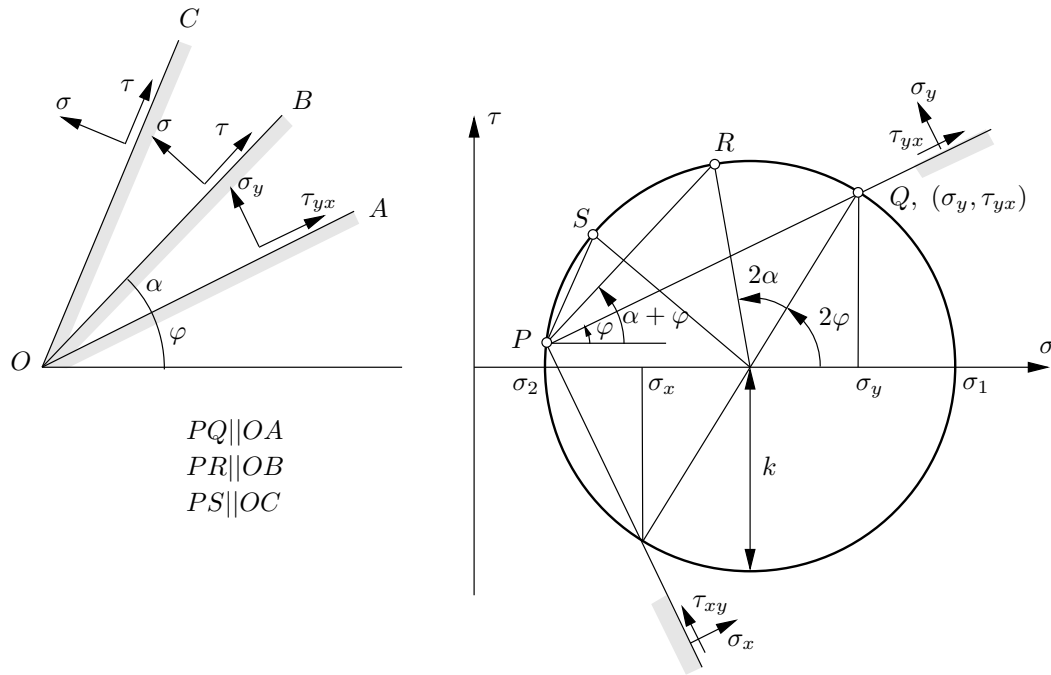
$$F = k \left(5b + h + \frac{1}{4} \frac{b^2}{h} \right). \quad (13.59)$$

Minimoimalla F :n lauseke h :n suhteen tulee

$$\frac{dF}{dh} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{4} \frac{b^2}{h^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{h} = 2 \quad \text{eli} \quad h = \frac{b}{2}, \quad (13.60)$$

joten

$$F^u = k \left(5b + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \right) = 6bk. \quad (13.61)$$



Kuva 13.8 Jännitystilä kaltevassa tasossa ja Mohrin ympyrä.

13.2 Alarajaratkaisut

Mohrin ympyrä

Normaalijännityksen ja leikkausjännityksen muuttumista leikkaustason kaltevuuskulman funktiona voidaan seurata Mohrin ympyrässä. Pääjännitysten

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (13.62)$$

avulla määritetään Mohrin ympyrän säde

$$r_M = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (13.63)$$

ja keskipiste

$$O_M := \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), 0 \right\}. \quad (13.64)$$

Trescan ehdon mukaan

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \leq k, \quad (13.65)$$

joten valitaan Mohrin ympyrän säteeksi

$$r_M = k. \quad (13.66)$$

Tasomuodonmuutostilassa von Misesin myötöehto johtaa samaan tulokseen.

Mohrin ympyrän perusteella saadaan kuvan 13.8 avulla kaavat

$$\sigma_x = p - k \cos 2\varphi, \quad (13.67)$$

$$\sigma_y = p + k \cos 2\varphi, \quad (13.68)$$

$$\tau_{xy} = k \sin 2\varphi, \quad (13.69)$$

missä edellä esitetyn perusteella

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1. \text{ invariantti}) \quad (13.70)$$

ja Mohrin ympyrän säde on maksimaalinen (leikkausmyötöraja plastisessa alueessa)

$$k = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \tau_{\max} = \tau_m. \quad (13.71)$$

Otaksutaan jännitystila tunnetuksi tasossa OA . Sitä esittää piste Q Mohrin ympyrän kehällä. Mohrin ympyrän napa (joskus konjugaattinapa) P määritetään tason OA suuntaisen suoran ja ympyrän leikkauspisteenä. Leikkauksessa OB vallitsevaa jännitystilaa esittää piste R Mohrin ympyrän kehällä. Piste R määritetään piirtämällä pisteen P kautta tason OB suuntainen suora.

Epäjatkuvat jännityskentät

Alarajaratkaisu voidaan muodostaa otaksumalla kuormitettuun alueeseen (tasomuodonmuutostilassa) tasapainoehdot ja myötöehdon toteuttava jännitystila.

Homogeeniset tasapainoehdot tasossa

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (13.72)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (13.73)$$

toteutuvat identtisesti valitsemalla jännityksille vakioarvot tietyissä osa-alueissa.

Osa-alueiden 1 ja 2 saumassa tulee normaalijännityksen ja leikkausjännityksen olla jatkuvia. Sen sijaan sauman suuntainen normaalijännitys σ_t voi olla epäjatkuva. Kuvan 13.9 Mohrin ympyröiden avulla saadaan ehto

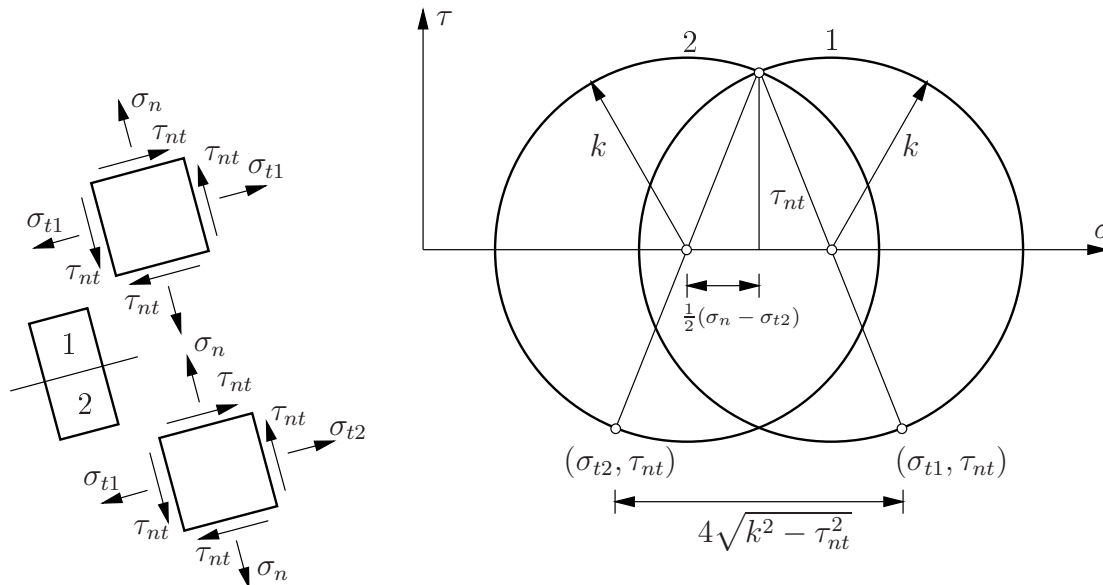
$$\left(\frac{\sigma_{t1} - \sigma_n}{2} \right)^2 + \tau_{nt}^2 = \left(\frac{\sigma_n - \sigma_{t2}}{2} \right)^2 + \tau_{nt}^2 = k^2. \quad (13.74)$$

Tangentiaalisen jännityksen epäjatkuvuus on

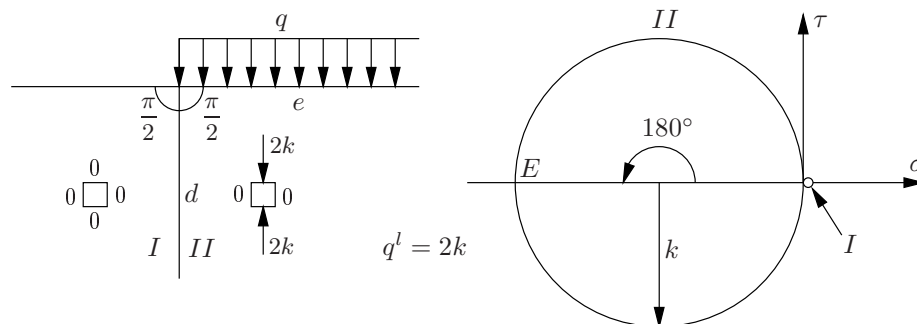
$$\sigma_{t1} - \sigma_{t2} = 4\sqrt{k^2 - \tau_{nt}^2}. \quad (13.75)$$

Esimerkki 13.4 Puolitasen reunalla on puoliääretön tasainen kuorma q . Määritetään rajakuorma, kun alusta on tasomuodonmuutostilassa ja noudattaa Trescan tai von Misesin myötöehtoa.

Tarkastellaan aiemmasta leimapaine-esimerkistä hieman muunnettua tehtävää, jossa tasomuodonmuutostilassa olevaa puolitasoa kuormittaa puoliääretön tasainen paine q .



Kuva 13.9 Epäjatkuvat jännityskentät.



Kuva 13.10 Puoliääretön tasainen paine puolitasen reunalla.

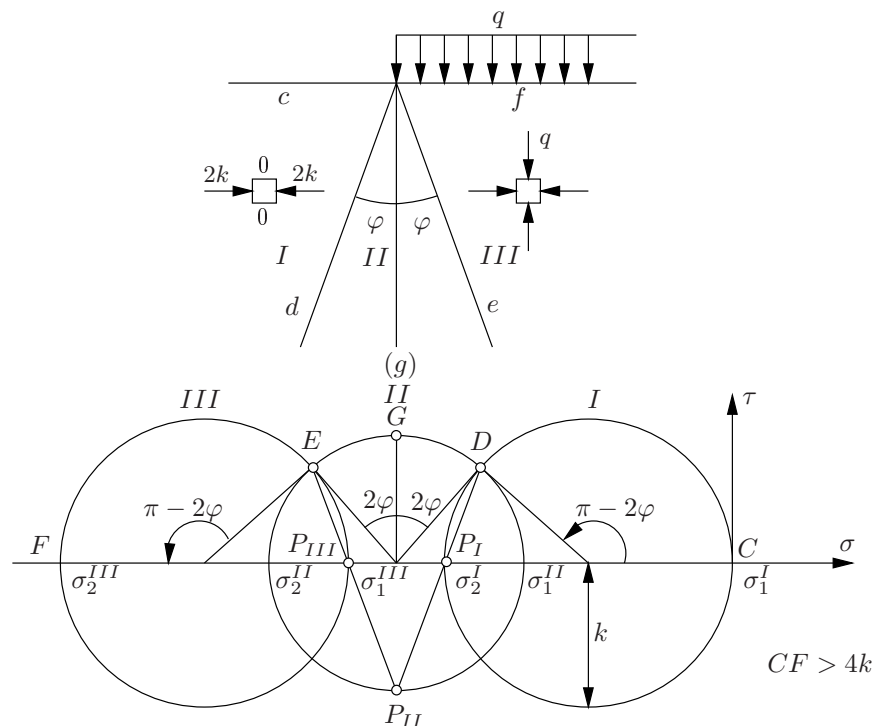
Jaetaan puolitaso alueisiin I ja II . Alue I on jännityksetön, ja Mohrin ympyrä I supistuu pisteeksi origossa. Mohrin ympyrä II sivuaa ympyrää I (pistettä) origossa. Mohrin ympyrän II piste E esittää jännitystilaa saumassa e , ja siten

$$q^l = 2k, \quad (13.76)$$

missä indeksi l tarkoittaa alarajaa (lower-bound). Parempi alaraja saadaan otaksuamalla myös alueen I jännitystila myötörajalle.

Tarkastellaan kuvaa 13.11. Reunalla c normaalijännitys ja leikkausjännitys ovat nollia, joten ympyrä I , jonka säde on k , kulkee origon kautta pisteessä C , ja sen keskipiste on etäisyydellä k . Pääjännitykset alueessa I ovat 0 ja $-2k$.

Ympyrän I napa P_I määritetään piirtämällä C :n kautta tason c suuntainen suora, joka leikkaa ympyrän pisteessä D eli ympyrän I napa P_I on piste D , joka samalla esittää jännitystilaa saumassa d . Nyt myös sauman d suuntainen suora kulkee D :n kautta, joten D on myös ympyrän II napa. Ympyrän II keskipiste on etäisyydellä $(-2k-4k)/2$ origosta ja ympyrä II sivuaa ympyrää I pisteessä D , koska normaalijännityksen ja leikkausjännityksen on oltava jatkuvia vakiojännitysalueesta toiseen siirryttäessä.



Kuva 13.12 Puoliäretön tasainen paine puolitasen reunalla, kolme Mohrin ympyrää.

Esimerkki 13.6 Määritetään lovellisen palkin momentin plastinen alaraja ja yläraja.

Tarkastellaan lovellista palkkia, jota rasittaa tasainen momenttikuorma. Tutkitaan sitkeää murtoa ja jätetään mahdollinen n.s. lovivaikutus huomioonottamatta. Jättämällä loven syvyinen osa palkista jännityksettömäksi ja jakamalla jäljellä oleva palkki kahteen osaan *I* ja *II* saadaan kuvan 13.16 perusteella alarajaratkaisu

$$M^l = \frac{a^2}{4} \sigma_m = \frac{a^2}{4} 2k = \frac{1}{2} k a^2. \quad (13.81)$$

Ylärajaratkaisu määritetään esim. kuvan 13.17 mekanismilla, jossa liukuminen tapahtuu kahta r -säteistä ympyräviivaa pitkin. Liukuviivan ADB pituus, nopeus, liukuviivan säde ja nopeus liukuviivalla ovat

$$l_{ADB} = 2\alpha r, \quad r = \frac{a/2}{\sin \alpha}, \quad v = r\omega. \quad (13.82)$$

Sisäinen dissipaatio on

$$\dot{W}_s = 2kvl_{ADB} = 2kr\omega 2\alpha r, \quad (13.83)$$

ja ulkoinen dissipaatio on

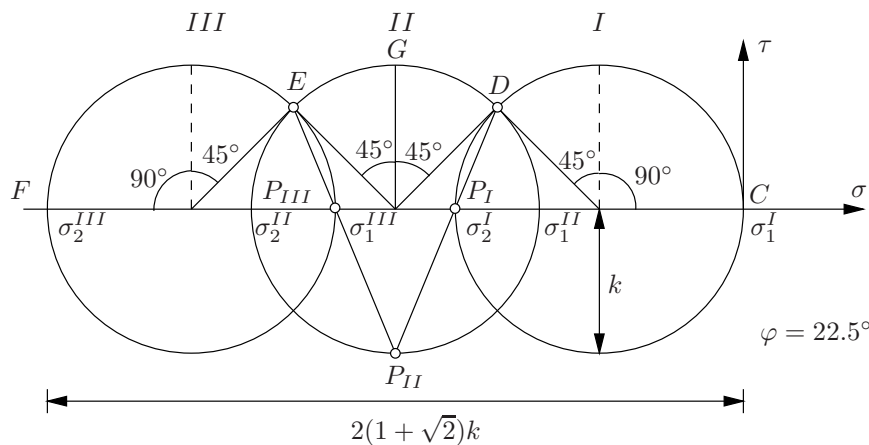
$$\dot{W}_u = 2M\omega. \quad (13.84)$$

Virtuaalisen tehon yhtälöstä

$$\dot{W}_s = \dot{W}_u \quad (13.85)$$

seuraa

$$M = 2k\alpha r^2 = k \frac{2a^2\alpha}{4\sin^2\alpha} = \frac{ka^2\alpha}{2\sin^2\alpha}. \quad (13.86)$$



Kuva 13.13 Puoliääretön tasainen paine puolitason reunalla, kolme Mohrin ympyrää, maksimaalinen keskimmäinen ympyrä.

Minimoidaan M parametrin α suhteen ja saadaan

$$\frac{dM}{d\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{\alpha \cdot 2 \cdot \cos \alpha}{\sin^3 \alpha} = 0, \quad (13.87)$$

mistä seuraa

$$2\alpha = \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 67^\circ. \quad (13.88)$$

Rajakuorman yläraja-arvo kuvan 13.17 mekanismilla on

$$M^u \approx 0.69ka^2. \quad (13.89)$$

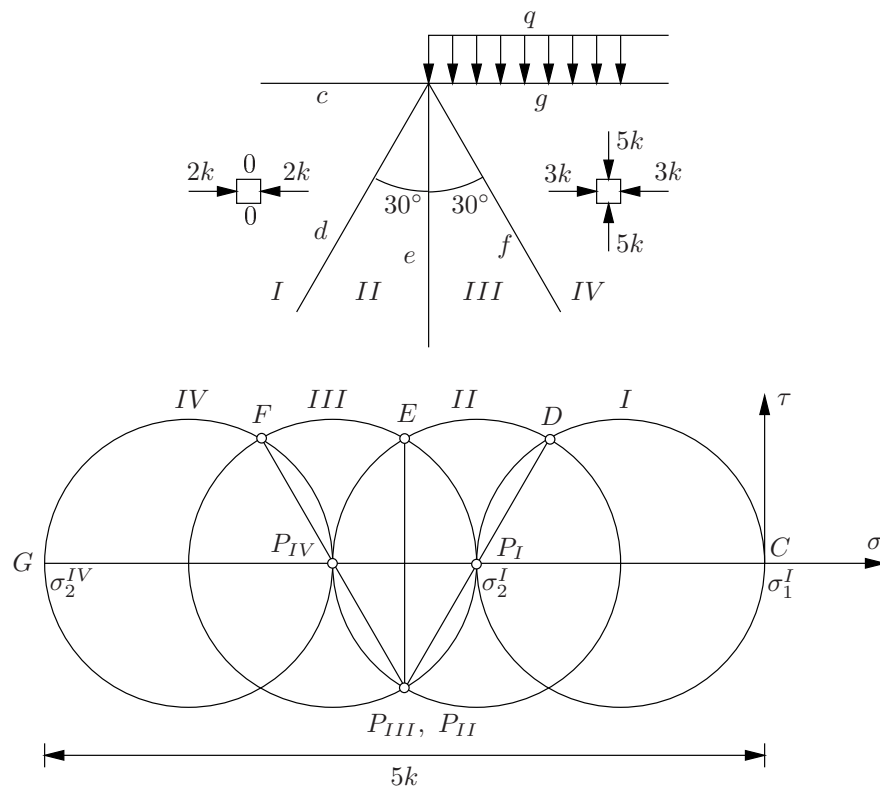
Esimerkki 13.7 Tasomuodonmuutostilassa olevaa kaistaa, jonka leveys on h kuormitetaan painimilla, joiden leveys on b . Määritetään painimen voiman alaraja, kun alusta noudattaa Trescan tai von Misesin myötöehtoa ja painin on äärettömän jäykkä.

Tasomuodonmuutostilassa olevan h :n levyisen kaistan alarajaratkaisu, kun kaistaa kuormitetaan b :n levyisillä painimilla, on esitetty kuvassa 13.18. Alarajaksi saadaan

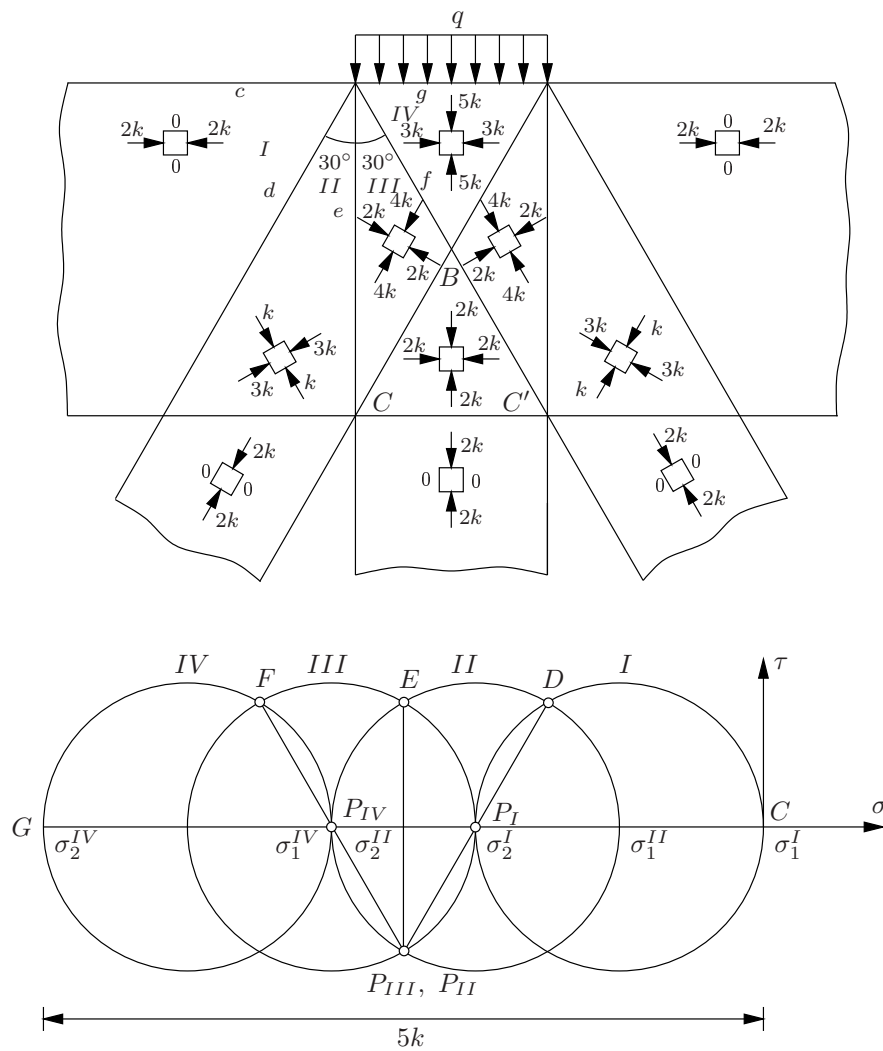
$$F^l = \frac{4kb}{1 + \left(\frac{2b}{h}\right)^2}. \quad (13.90)$$

Esimerkki 13.8 Määritetään paksuudeltaan muuttuvan korkean tasomuodonmuutostilassa oleva ulokekaistan päässä vaikuttavan kuorman q alarajaratkaisu vakiojännitysalueiden avulla. Kaista noudattaa Trescan tai von Misesin myötöehtoa.

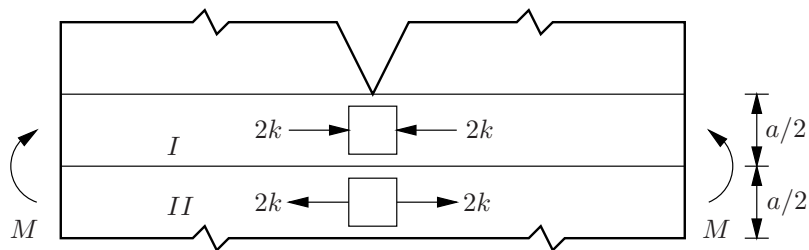
Korkeudeltaan muuttuvan ulokekaistan alarajaratkaisu on konstruoitu kuvassa 13.20.



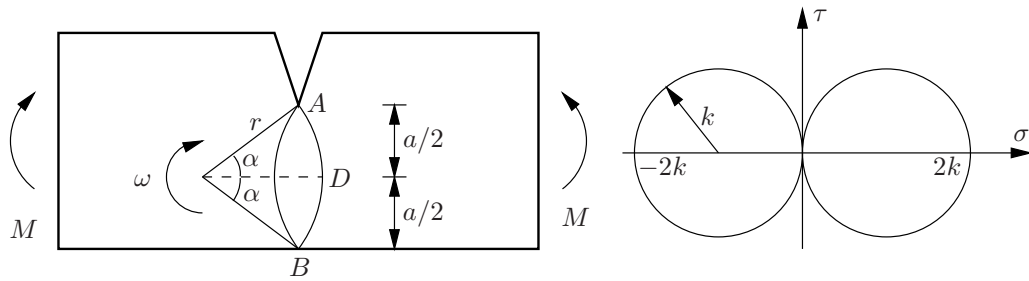
Kuva 13.14 Puoliääretön tasainen paine puolitasen reunalla, neljä Mohrin ympyrää.



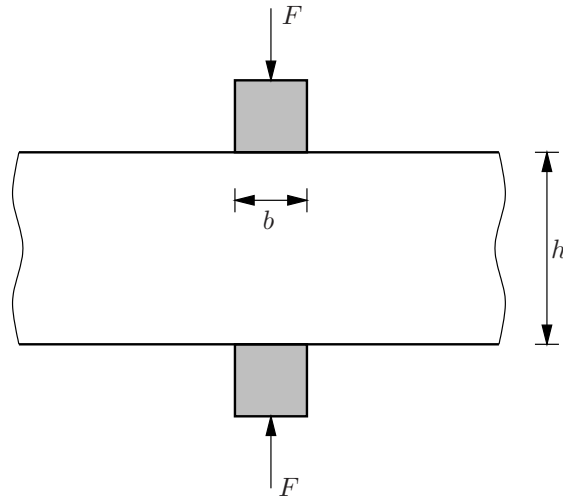
Kuva 13.15 Leimapainetehtävän alarajaratkaisu.



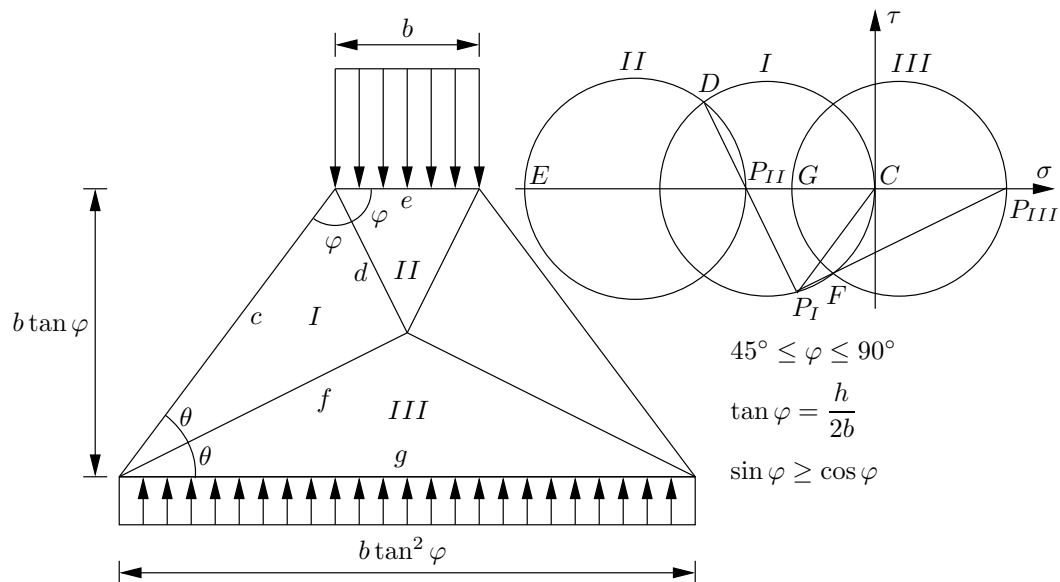
Kuva 13.16 Lovellisen palkin momentin alarajaratkaisu.



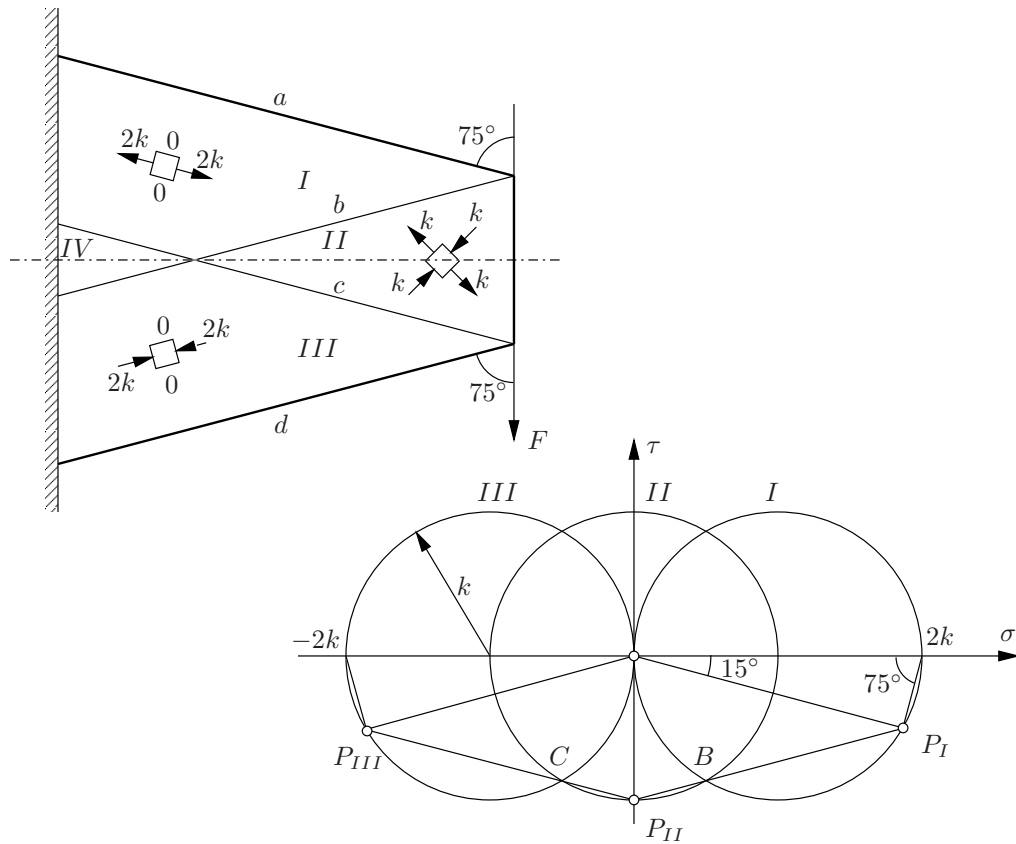
Kuva 13.17 Momentin kuormittaman lovellisen palkin eräs mahdollinen mekanismi ja alarajaratkaisuun liittyvät Mohrin ympyrät.



Kuva 13.18 Kaistan kuormitus painimilla.



Kuva 13.19 Kaistan leimapaineen alarajaratkaisu.



Kuva 13.20 Ulokekaistan päässä oleva pistevoiman alarajaratkaisu.

Luku 14

Liukuviivateoriaa

Tasomuodonmuutostilassa siirtymät ovat tietyn tason suuntaisia, ja muodonmuutokset sekä jännitykset ovat riippumattomia tasoa vastaan kohtisuorasta koordinaatista. Tarkastellaan tilannetta (x, y) -tasossa. Tällöin

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \text{ ja } \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (14.1)$$

Sensijaan yleensä

$$\sigma_z \neq 0. \quad (14.2)$$

Prandtlin - Reussin (tai Lévyin - Misesin) yhtälöiden perusteella ideaaliplastisen aineen tapauksessa (luku 12)

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda S_{ij} \quad (14.3)$$

eli

$$d\varepsilon_x = \frac{2}{3}d\lambda[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)], \quad (14.4)$$

$$d\varepsilon_y = \frac{2}{3}d\lambda[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)], \quad (14.5)$$

$$d\varepsilon_z = \frac{2}{3}d\lambda[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)], \quad (14.6)$$

$$d\gamma_{xy} = 2d\lambda\tau_{xy}. \quad (14.7)$$

Koska tasomuodonmuutostilassa $\varepsilon_z = 0$, seuraa kaavasta (14.6)

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (14.8)$$

Keskimääräinen jännitys on nyt myös

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma_z. \quad (14.9)$$

Tasomuodonmuutostilassa von Misesin ja Trescan myötöehdot tulevat samaan muotoon (luku 12)

$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2, \quad (14.10)$$

missä von Misesin ehdon tapauksessa leikkausmyötöraja on $k = \sigma_m/\sqrt{3}$ ja Trescan ehdon tapauksessa $k = \sigma_m/2$, σ_m on vetomyötöraja.

Tasapainoyhtälöt ovat tasotapauksessa

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (14.11)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (14.12)$$

kun tilavuusvoimat ovat nollia.

Myötöehdossa ja tasapainoehdoissa on kolme tuntematonta eli σ_x , σ_y ja τ_{xy} . Jos reunaehdot on annettu jännitysten avulla, niin tehtävä voidaan ratkaista pelkästään tasapainoehtojen ja myötöehdon avulla. Tällainen tehtävä on staattisesti määrätty. Jos sensijaan tarkasteltavan tasomuodonmuutostilassa olevan kappaleen reunalla on annettu siirtymille tai nopeuksille reunaehdot, on nämä lausuttava jännitysten avulla ja ratkaisusta tulee monimutkaisempi.

Tasomuodonmuutostilassa yksi pääjännitys on aina

$$\sigma_3 = \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \quad (14.13)$$

ja muut pääjännitykset ovat (luku 12)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (14.14)$$

Kaavojen (14.9) ja (14.10) perusteella saadaan

$$\sigma_1 = p + k, \quad \sigma_2 = p - k \quad \text{ja} \quad \sigma_3 = p. \quad (14.15)$$

Pääsuunta voidaan määrittää kaavoilla

$$\tan \theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y}. \quad (14.16)$$

Toinen pääsuunta on kohtisuorassa ensimmäistä pääsuuntaa vastaan. Suurimmat leikkausjännitykset vaikuttavat tasoissa, joiden suunnat puolittavat pääsuuntien väliset kulmat. Maksimileikkausjännitykset ovat

$$\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad (14.17)$$

ja niitä vastaavia suuntia merkitään α :lla ja β :lla, kuvassa 14.1. Merkitään, että x -akselin ja α -suunnan välinen kulma on ϕ .

Kuvan 14.1 perusteella on tällöin

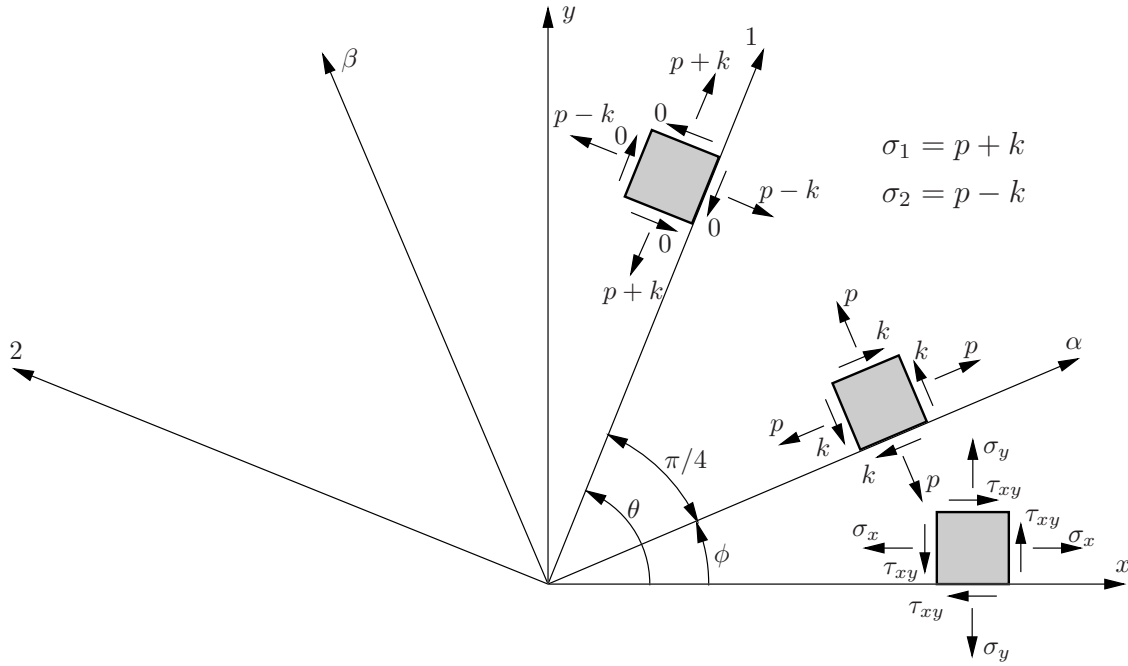
$$\phi = \theta - 45^\circ \quad (14.18)$$

ja

$$\tan 2\phi = -\frac{1}{\tan 2\theta}. \quad (14.19)$$

Kulma ϕ voidaan määrittää kaavalla

$$\tan 2\phi = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}, \quad (14.20)$$



Kuva 14.1 Jännityskomponenttien muuntuminen.

ja

$$\cos 2\phi = \frac{\tau_{xy}}{k}, \quad \sin 2\phi = \frac{(\sigma_y - \sigma_x)}{2k}. \quad (14.21)$$

Edellä esitetyt kaavat määrittävät kulman ϕ eli α -viivan ja x -akselin välisen kulman plastisen vyöhykkeen jokaisessa pisteessä. Maksimileikkausjännityksen suuntiin liittyviä α - ja β -viivoja nimitetään **liukuviivoiksi**. Koska suurimman ja pienimmän leikkausjännityksen suunnat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, muodostavat α - ja β -viivat ortogonaalisen verkon. α -viivalla β on vakio ja α muuttuu. Vastaavasti β -viivalla α on vakio. α ja β ovat (yleisessä tapauksessa) käyräviivaisen suorakulmaisen koordinaatiston parametrejä.

Kuvan 14.2a piste P voidaan ilmaista karteesisten koordinaattien (x, y) tai käyräviivaisen suorakulmaisten koordinaattien (α, β) avulla:

$$P := P(x_1, y_1) \text{ tai } P := P(\alpha_3, \beta_2). \quad (14.22)$$

Alkion $(d\alpha, d\beta)$ reunalla vaikuttavat jännitykset

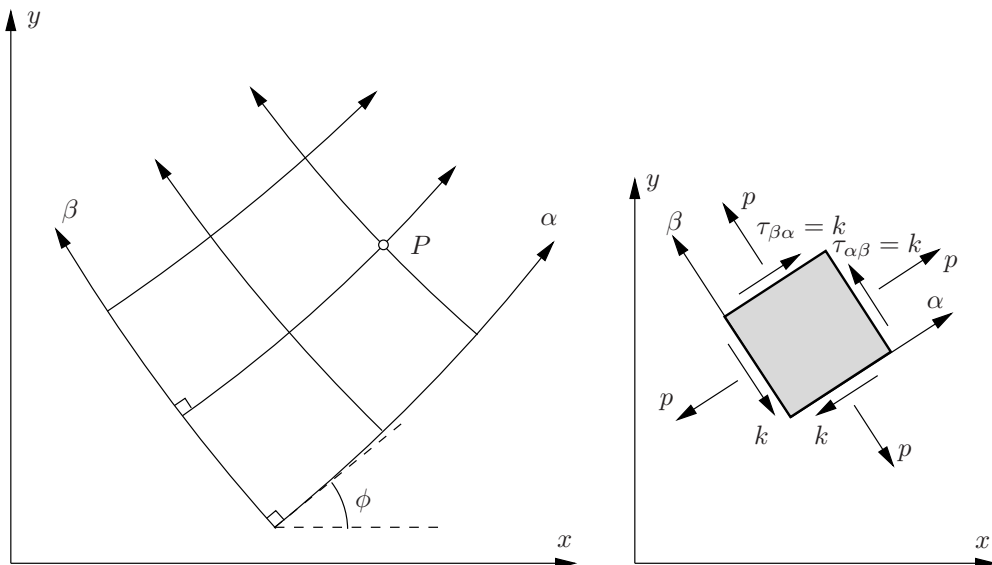
$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = k, \quad (14.23)$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = p, \quad (14.24)$$

missä p on hydrostaattinen paine. Jännityskomponenteille voidaan johtaa yhtälöt paineen p ja kulman ϕ funktioina tasapainotarkastelun perusteella tai Mohrin ympyrän avulla.

Plastisen vyöhykkeen Mohrin ympyrän säde on

$$r_M = k = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad (14.25)$$



Kuva 14.2 (α, β) -viivasto ja alkion $(d\alpha, d\beta)$ jännitykset.

missä

$$k = \tau_m \quad (14.26)$$

on leikkausmyötöraja. Kuvan 14.3 Mohrin ympyrästä luetaan jännityskomponenttien kaavat

$$\sigma_x = p - k \sin 2\phi, \quad (14.27)$$

$$\sigma_y = p + k \sin 2\phi, \quad (14.28)$$

$$\tau_{xy} = k \cos 2\phi. \quad (14.29)$$

Tehdään Mohrin ympyrän yhteydessä, mutta vain siinä, seuraava merkkisopimus leikkausjännitykselle (kuva 14.3): leikkausjännitys on positiivinen, jos se kiertää materiaaliäkiötä myötäpäivään.

14.1 Henckyn yhtälöt

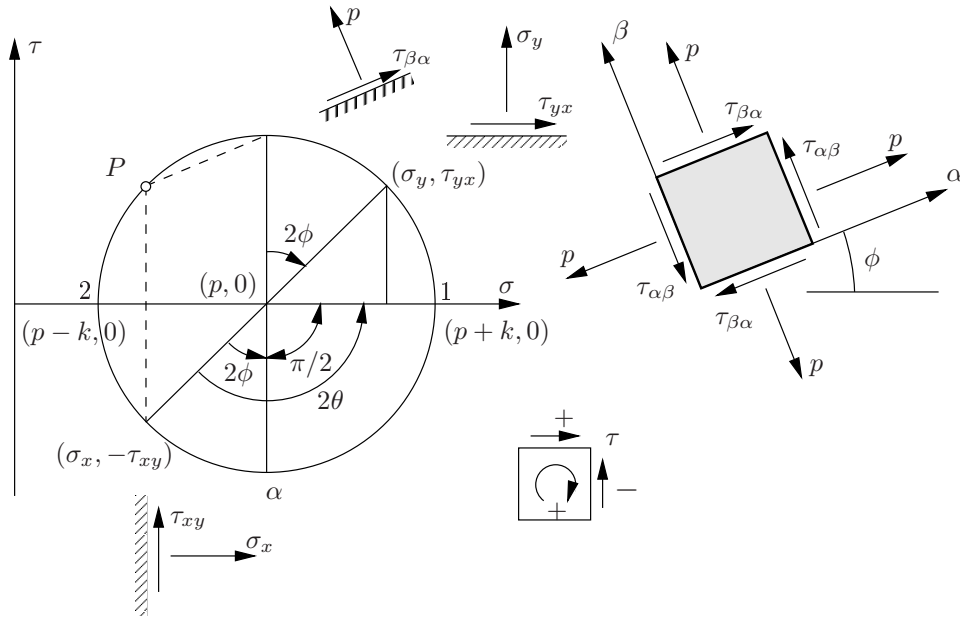
Sijoittamalla jännityskomponenttien muunnoskaavat tasapainoyhtälöihin (14.11) tulee

$$\frac{\partial p}{\partial x} - 2k(\cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}) = 0, \quad (14.30)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + 2k(\cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} - \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}) = 0. \quad (14.31)$$

Valitsemalla tarkastelupisteessä x - ja y -akselien suunnat samoiksi kuin α - ja β -viivojen suunnat, eli valitsemalla $\phi = 0$, saadaan

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad (14.32)$$



Kuva 14.3 Mohrin ympyrä plastisessa vyöhykkeessä.

ja kaavat (14.30) ja (14.31) yksinkertaistuvat, kun $\phi = 0$, muotoon

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} - 2k \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 0, \quad (14.33)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \beta} + 2k \frac{\partial \phi}{\partial \beta} = 0. \quad (14.34)$$

Havaitaan, että koordinaatiston valinnalla ($\phi = 0$) osittaisdifferentiaaliyhtälöt on saatu muunnettua tavallisiksi differentiaaliyhtälöiksi, jotka on helppo ratkaista (staattisesti määrättyssä tapauksessa).

Integroimalla seuraa

$$p - 2k\phi = C_1 = \text{vakio} \quad \alpha - \text{viivalla}, \quad (14.35)$$

$$p + 2k\phi = C_2 = \text{vakio} \quad \beta - \text{viivalla}. \quad (14.36)$$

Kaavat (14.35) ja (14.36) johti Hencky vuonna 1923. Jos p ja ϕ on annettu kappaleen reunalla, niin ne voidaan määrittää kappaleen sisällä integroimalla α - ja β -viivoja pitkin. Mikäli reunaehdot sisältävät siirtymiä tai nopeuksia, tarvitaan lisäksi yhtälöt, joista voidaan ratkaista nopeudet eli nopeusyhtälöt.

14.2 Nopeusyhtälöt

Prandtin - Reussin yhtälöiden mukaan tasojännitystilassa

$$d\varepsilon_x = d\lambda \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y), \quad (14.37)$$

$$d\varepsilon_y = d\lambda \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \quad (14.38)$$

ja

$$d\gamma_{xy} = d\lambda 2\tau_{xy}, \quad (14.39)$$

joiden perusteella saadaan kaava

$$\frac{d\varepsilon_x - d\varepsilon_y}{d\gamma_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}. \quad (14.40)$$

Muodonmuutosinkrementin sijasta otetaan käyttöön muodonmuutosnopeus

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}, \quad (14.41)$$

missä t on aika. Hitausvoimia ei kuitenkaan oteta huomioon, joten aika t on kuormaparametrin luonteinen suure. Tasotapauksessa

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (14.42)$$

$$\frac{d\varepsilon_y}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad (14.43)$$

missä v_x ja v_y ovat x :n ja y :n suuntaiset nopeudet

$$v_x = \frac{du}{dt} \text{ ja } v_y = \frac{dv}{dt}. \quad (14.44)$$

Kaavasta (14.40) seuraa

$$\frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}. \quad (14.45)$$

Kokoonpuristumattomuusehto (tasomuodonmuutostilassa)

$$d\varepsilon_x + d\varepsilon_y = 0 \quad (14.46)$$

tulee muotoon

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (14.47)$$

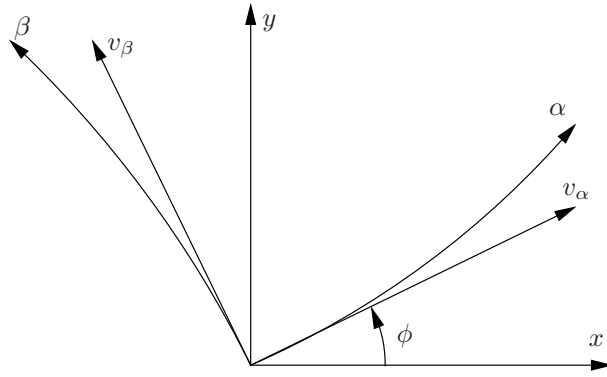
Tarkasteltavassa tapauksessa päävenymien ja pääjännitysten suunnat ovat samat, samoin myös maksimileikkausjännitysten ja maksimiliukumien suunnat. α - ja β -viivoja vastaan kohtisuorat venymänopeudet ovat (muodonmuutoskomponenttien muunnoskaavojen tai muodonmuutosten Mohrin ympyrän avulla)

$$\frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} = \frac{d\varepsilon_\beta}{dt} = \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2) = \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y), \quad (14.48)$$

missä piste suureen päällä tarkoittaa aikaderivaattaa. Kokoonpuristumattomuusehdon nojalla invariantti

$$\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = 0, \quad (14.49)$$

joten liukuviivojen suunnassa tapahtuu vain liukumaa.



Kuva 14.4 Nopeuskomponentit.

Tarkastellaan seuraavaksi nopeuksia liukuviivojen suunnissa. Kuvan 14.4 perusteella johdetaan nopeuksien muunnoskaavat

$$v_x = v_\alpha \cos \phi - v_\beta \sin \phi, \quad (14.50)$$

$$v_y = v_\alpha \sin \phi + v_\beta \cos \phi. \quad (14.51)$$

Jos valitaan $\phi = 0$, niin x -akselin ja α -viivan suunnat yhtyvät, ja kaavoista (14.48) sekä nopeuksien muunnoskaavoista (14.50), (14.51) seuraa

$$\dot{\varepsilon}_\alpha = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_{\phi=0} = 0, \quad (14.52)$$

$$\dot{\varepsilon}_\beta = \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_{\phi=0} = 0 \quad (14.53)$$

ja edelleen

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x} - v_\beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (14.54)$$

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + v_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (14.55)$$

Kun kulma ϕ lähenee nollaa eli $\phi \rightarrow 0$, niin

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad (14.56)$$

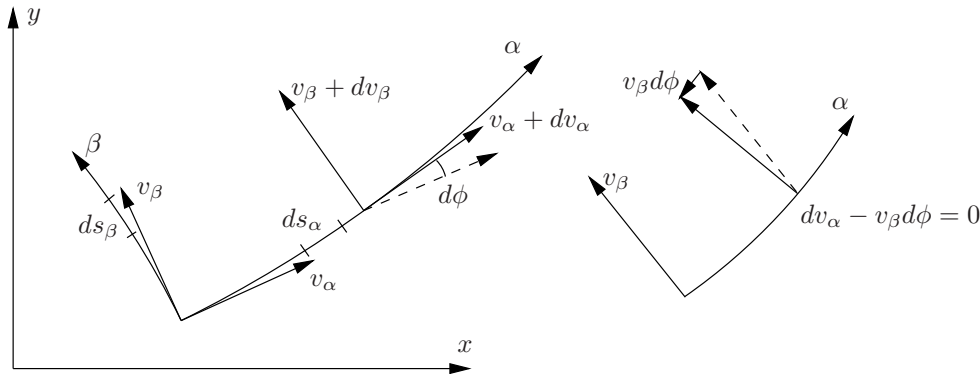
ja tällöin päädytään differentiaaliyhtälöihin

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} - v_\beta \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 0, \quad (14.57)$$

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} + v_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \beta} = 0. \quad (14.58)$$

Pitämällä β vakiona ensimmäisessä yhtälössä ja α toisessa yhtälössä tulee

$$dv_\alpha - v_\beta d\phi = 0 \quad \alpha - \text{viivalla}, \quad (14.59)$$



Kuva 14.5 Nopeuden muutos α - ja β -viivalla.

$$dv_\beta + v_\alpha d\phi = 0 \quad \beta - \text{viivalla.} \quad (14.60)$$

Kaavat (14.59) ja (14.60) ovat Geiringerin yhtälöt eli nopeusyhtälöt (1930).

Nopeusyhtälöihin päädytään myös seuraavanlaisella tarkastelulla. Liukuviivat eivät veny, joten

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} = 0. \quad (14.61)$$

Pituudenmuutosnopeus α :n suunnassa (kuva 14.5) on

$$(v_\alpha + dv_\alpha - v_\beta d\phi) - v_\alpha, \quad (14.62)$$

ja ehdosta

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} = 0 \quad (14.63)$$

seuraa

$$dv_\alpha - v_\beta d\phi = 0 \quad \alpha - \text{viivalla.} \quad (14.64)$$

Samalla tavalla johdetaan

$$dv_\beta + v_\alpha d\phi = 0 \quad \beta - \text{viivalla.} \quad (14.65)$$

Staattisesti määrätyn tehtävän ratkaisu saadaan Henckyn yhtälöistä. Nopeudet voidaan sitten määrittää Geiringerin yhtälöillä, koska $d\phi$ tunnetaan Henckyn yhtälöiden ratkaisusta. Staattisesti määräämättömän tehtävän tapauksessa ratkaistaan samanaikaisesti Henckyn ja Geiringerin yhtälöt. Ratkaisu on usein hyvin hankala.

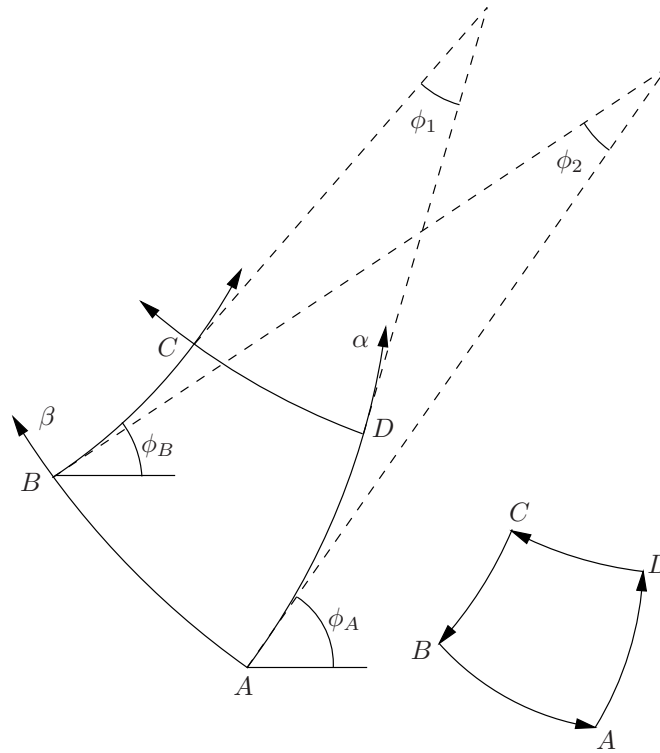
14.3 Henckyn teoreemat

Henckyn teoreemoissa tarkastellaan liukuviivojen geometriaa.

14.3.1 Henckyn ensimmäinen teoreema

Lause 14.1 Kahden α -viivan (β -viivan) välinen kulma säilyy vakiona α :n (β :n) suuntaan kuljettaessa (kuva 14.6) eli

$$\phi_1 = \phi_2. \quad (14.66)$$



Kuva 14.6 Henckyn 1. teoreema.

Todistus. α -viivalla AD

$$p_A - 2k\phi_A = p_D - 2k\phi_D, \quad (14.67)$$

β -viivalla CD

$$p_D + 2k\phi_D = p_C + 2k\phi_C \quad (14.68)$$

eli

$$p_C - p_A = 2k(2\phi_D - \phi_A - \phi_C). \quad (14.69)$$

β -viivalla AB

$$p_A + 2k\phi_A = p_B + 2k\phi_B, \quad (14.70)$$

α -viivalla BC

$$p_C - 2k\phi_C = p_B - 2k\phi_B \quad (14.71)$$

eli

$$p_C - p_A = 2k(\phi_C + \phi_A - 2\phi_B). \quad (14.72)$$

Kaavojen (14.69) ja (14.72) perusteella saadaan

$$\phi_A - \phi_B = \phi_D - \phi_C, \quad (14.73)$$

mikä todistaa oikeaksi Henckyn 1. teoreeman.

Henckyn 1. teoreeman avulla voidaan todistaa kaksi seurauslausetta.

Henckyn 1. teoreeman seurauslauseet 1 ja 2

Lause 14.2 *Kaikki α -viivat (β -viivat) kiertyvät saman kulman verran siirryttäessä β -viivalta (α -viivalta) toiselle.*

Todistus. Kaavan (14.73) perusteella

$$\phi_D - \phi_A = \phi_C - \phi_B. \quad (14.74)$$

Lause 14.3 *Jos yksi α -viiva (β -viiva) on suora kahden β -viivan (α -viivan) välissä, niin silloin kaikki α -viivat (β -viivat) ovat suoria näiden β -viivojen (α -viivojen) välissä. Lisäksi kyseisten suoran osien (janojen) pituudet ovat samat.*

Todistus. Jos esimerkiksi viiva AD on suora, niin silloin

$$\phi_D - \phi_A = 0, \quad (14.75)$$

ja

$$\phi_C - \phi_B = 0, \quad (14.76)$$

eli viiva BC on suora.

14.3.2 Henckyn 2. teoreema

Lause 14.4 *α -viivojen (β -viivojen) kaarevuussäteet pienenevät suhteessa β -viivaa (α -viivaa) pitkin kuljettuun matkaan, kun kuljetaan positiiviseen suuntaan β -viivaa (α -viivaa) pitkin.*

Todistus. Merkitään α - ja β -viivojen kaarevuussäteitä R_α :lla ja R_β :lla. Kaarevuussäteet R_α ja R_β määritellään kaavoilla

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\partial \phi}{\partial s_\alpha}, \quad \frac{1}{R_\beta} = -\frac{\partial \phi}{\partial s_\beta}. \quad (14.77)$$

Kaarevuussäde R_α (R_β) on positiivinen, jos kaarevuuskeskipiste on kasvavan s_β :n (s_α :n) suunnassa. Tarkastellaan kuvan 14.7 infinitesimaalisen lähekkäisiä liukuviivoja, jotka rajaavat liukuviivastosta infinitesimaalisen alkion Δs_α ja Δs_β . Kuvan 14.7 perusteella

$$R_\alpha \Delta \phi'' = \Delta s_\alpha, \quad (14.78)$$

$$-R_\beta \Delta \phi' = \Delta s_\beta. \quad (14.79)$$

Viiva-alkion Δs_α derivaatta β -viivalla on

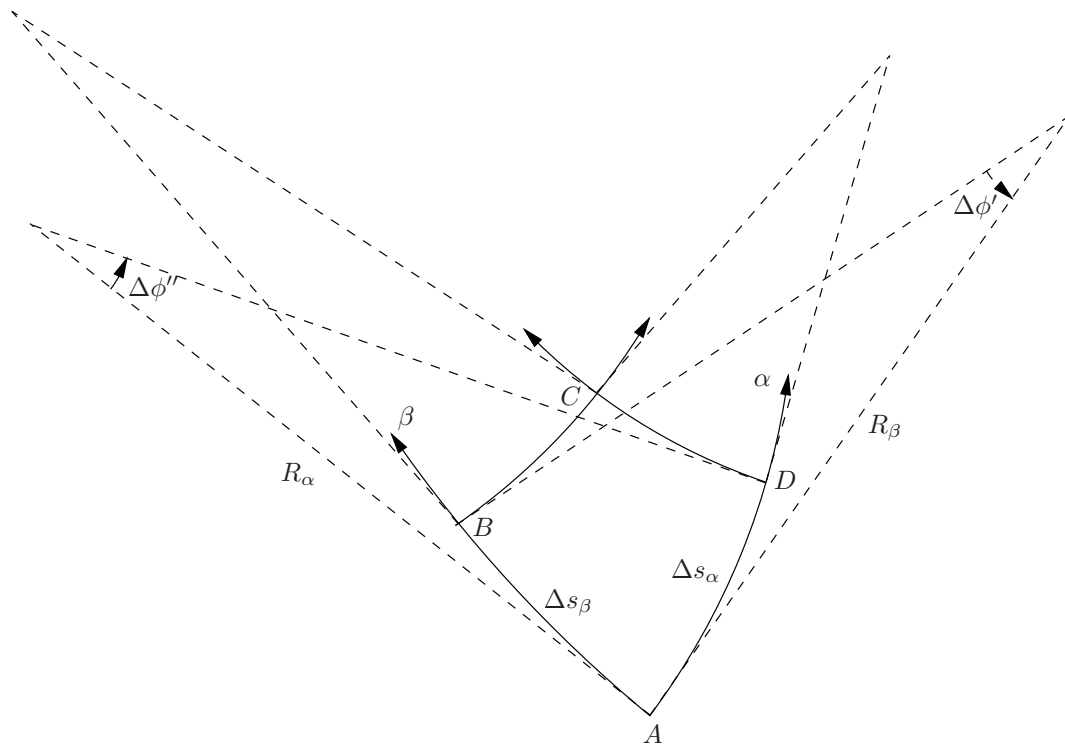
$$\frac{\partial}{\partial s_\beta}(R_\alpha \Delta \phi'') \approx \frac{(R_\alpha - \Delta s_\beta) \Delta \phi'' - R_\alpha \Delta \phi''}{\Delta s_\beta} = -\Delta \phi''. \quad (14.80)$$

Koska $\Delta \phi''$ kahden β -viivan välillä on vakio, saadaan

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial s_\beta} = -1, \quad (14.81)$$

ja samalla tavalla johdetaan

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial s_\alpha} = -1. \quad (14.82)$$



Kuva 14.7 Henckyn 2. teoreema.

14.4 Liukuviivaesimerkkejä

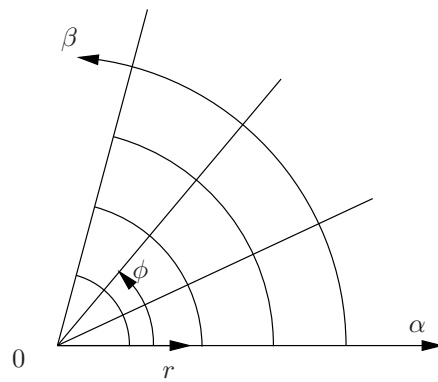
14.4.1 Liukuviivaviuhka

Henckyn 1. kaavan

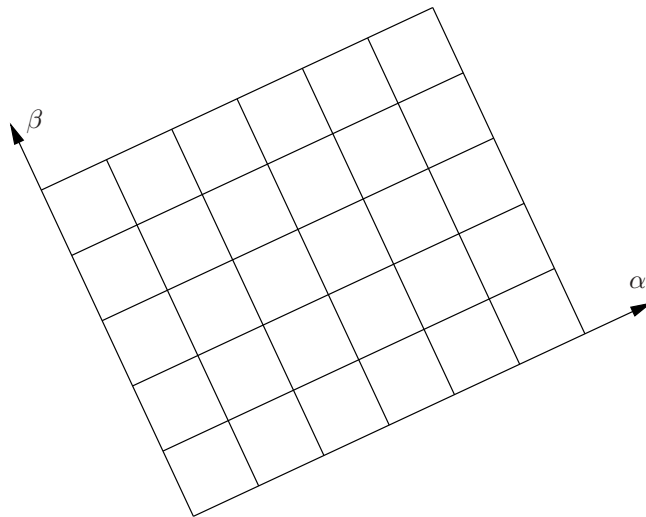
$$p - 2k\phi = C_1 \quad (\alpha - \text{viivalla}) \quad (14.83)$$

perusteella p on vakio α -viivalla, koska ϕ on vakio. Henckyn 2. kaavan

$$p + 2k\phi = C_2 \quad (\beta - \text{viivalla}) \quad (14.84)$$



Kuva 14.8 Liukuviivaviuhka.



Kuva 14.9 Tasainen jännitystila.

perusteella p muuttuu lineaarisesti β -viivaa pitkin, koska ϕ muuttuu lineaarisesti β -viivalla. Keskimääräinen jännitys p on vakio viuhkan säteen suunnassa ja muuttuu lineaarisesti kulman ϕ mukana. Jännitykset saadaan kaavoista

$$\sigma_1 = p + k, \quad \sigma_2 = p - k, \quad \sigma_3 = p. \quad (14.85)$$

Viuhkan keskipiste on singulaarinen piste.

Liukuviivaviuhkan tapauksessa kulma ϕ on vakio säteen suunnassa eli α -viivan suunnassa. Tällöin nopeus v_α on vakio α -viivan suunnassa eli $v_\alpha = v_\alpha(\phi)$. Geiringerin nopeusyhtälöistä

$$dv_\alpha - v_\beta d\phi = 0, \quad (14.86)$$

$$dv_\beta + v_\alpha d\phi = 0 \quad (14.87)$$

seuraa tässä tapauksessa

$$v_\alpha = v_r = -f'(\phi), \quad (14.88)$$

$$v_\beta = v_\phi = f(\phi) + g(r), \quad (14.89)$$

missä

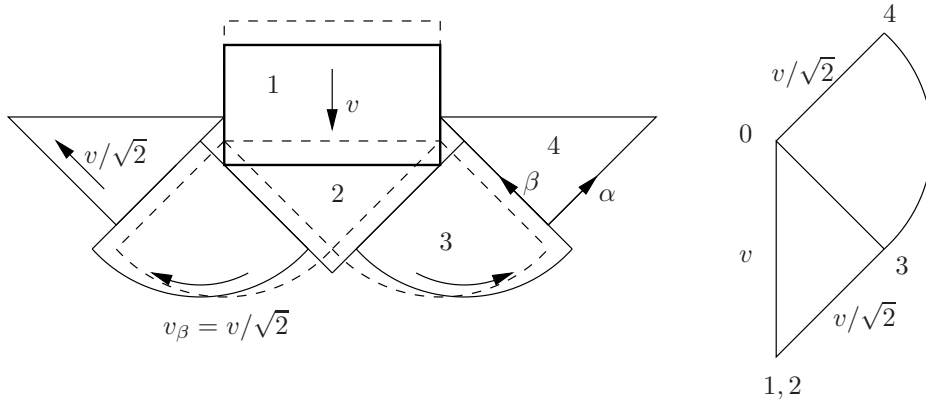
$$f'(\phi) = \frac{df}{d\phi} \quad (14.90)$$

ja $f(\phi)$ ja $g(r)$ ovat mielivaltaisia funktioita (integroimisvakioita), r on etäisyys origosta, ϕ on x :n ja α :n välinen kulma. Jos $f(\phi) = 0$, niin kaavat (14.88) ja (14.89) esittävät pyörähdysliikettä origon ympäri.

14.4.2 Tasainen jännitystila

Jos jännitystila on tasainen tarkasteltavassa alueessa, niin liukuviivat ovat suoria ja muodostavat suorakaideverkon. Tasaisen jännitystilan alueessa kulma ϕ on vakio kaikkialla ko. alueessa, ja Geiringerin yhtälöistä seuraa

$$v_\alpha = v_\alpha(\beta), \quad v_\beta = v_\beta(\alpha), \quad (14.91)$$



Kuva 14.11 Prandtlin ratkaisun nopeuskenttä.

Kolmiossa ABC paine p on tuntematon ja $\phi = -\pi/4$. Kolmion ABC α -viivoilla

$$p - 2k\phi = \text{vakio} = C_1 \text{ eli } p - 2k(-\frac{\pi}{4}) = C_1. \quad (14.97)$$

Koska α -viivalla

$$p - 2k\phi = \text{vakio} \Rightarrow C_1 = C_2, \quad (14.98)$$

saadaan

$$p + \frac{1}{2}\pi k = -k - \frac{1}{2}\pi k \Rightarrow p = -(1 + \pi)k. \quad (14.99)$$

Jännityskomponenttien muunnoskaavojen tai Mohrin ympyrän avulla saadaan lopuksi

$$\sigma_x = -k\pi, \quad \sigma_y = -k(2 + \pi) \quad (14.100)$$

kolmiossa ABC , joten rajakuorma on

$$F_p = 2bk(2 + \pi) \approx 5.14(2bk). \quad (14.101)$$

Nopeuskenttä ratkaistaan Geiringerin yhtälöiden avulla. Jos leimasin liikkuu nopeudella v alaspäin (y :n negatiiviseen suuntaan), niin alue ABC liikkuu samalla nopeudella v . Alueessa $ACFG$ nopeudet ovat

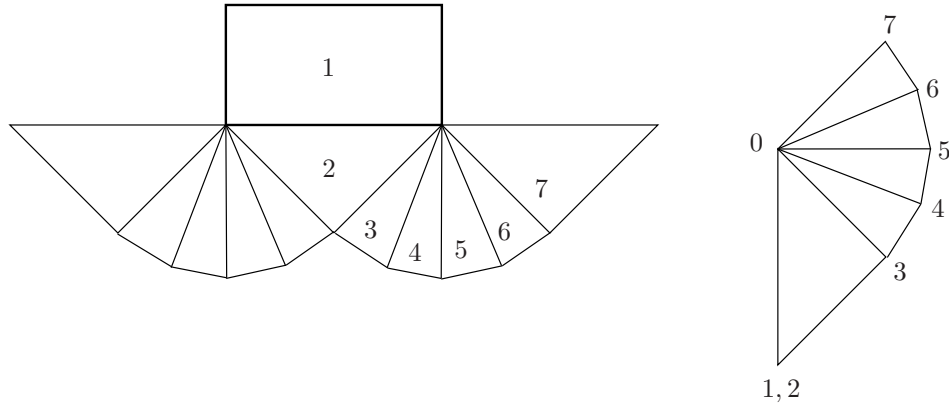
$$v_\alpha = 0, \quad v_\beta = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (14.102)$$

koska

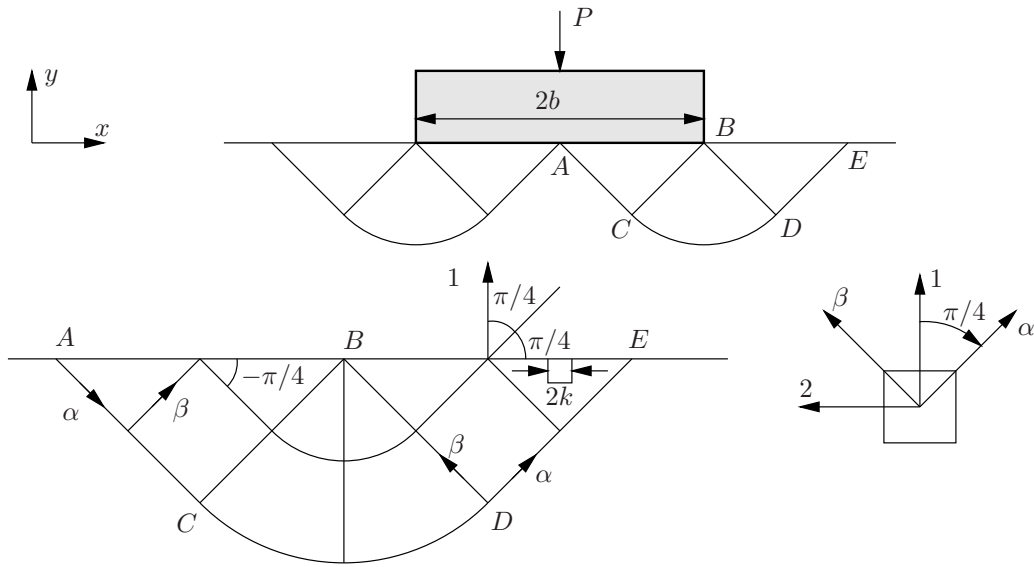
$$v_\alpha = -\frac{df}{d\phi}, \quad v_\beta = f(\phi) + g(r) \text{ ja } f(\phi) = 0. \quad (14.103)$$

Alue ACF liikkuu nopeudella $v/\sqrt{2}$ ulospäin, ja alue AGF liikkuu viivan FG suuntaan nopeudella $v/\sqrt{2}$. Saumassa AC tangentiaalisella nopeudella on siten epäjatkuvuus $v/\sqrt{2}$, mutta normaalin suuntainen nopeus on tietenkin jatkuva.

Kuvassa 14.12 on esitetty liukuviivaratkaisun liukuviivastoa jäljittelevän mekanismin liukuviivasto sekä siihen liittyvä nopeuskenttä. Nähdään, että viuhkan viivastoa tihentämällä päädytään liukuviivateorian ratkaisuun. Edellä saatu ratkaisu on tarkka, koska sekä Henckyn että Geiringerin yhtälöt toteutuvat.



Kuva 14.12 Prandtlin ratkaisua vastaava mekanismi.



Kuva 14.13 Hillin ratkaisu.

14.4.4 Hillin esittämä ratkaisu leimapainetehtävälle

Hillin esittämässä ratkaisussa leimapainetehtävälle liukuviivasto on kuvan 14.13 mukainen. Ratkaisu etenee samalla tavalla kuin Prandtlin ratkaisu edellä. Liukuviivakuvion kolmiossa ABC

$$\phi = -\frac{\pi}{4} \text{ ja } p - 2k(-\frac{\pi}{4}) = C \text{ } \alpha \text{ -viivalla.} \quad (14.104)$$

Kolmiossa BDE

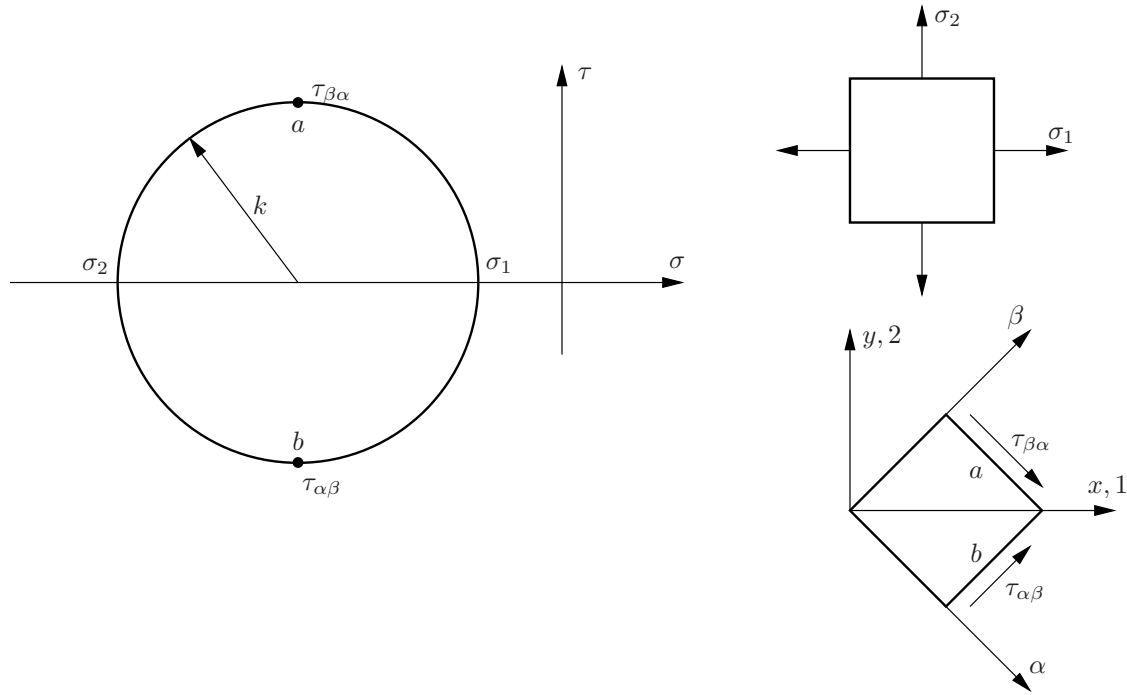
$$\phi = \frac{\pi}{4}, \quad \sigma_x = -2k, \quad \sigma_y = 0 \text{ ja } p = -k, \quad (14.105)$$

ja α -viivalla

$$p - 2k\phi = -k - 2k\frac{\pi}{4} = C = \text{vakio.} \quad (14.106)$$

Kolmioiden ABC ja BDE α -viivoilla C on sama, joten

$$p + \frac{\pi}{2}k = -k - \frac{\pi}{2}k \Rightarrow p = -k(1 + \pi). \quad (14.107)$$



Kuva 14.14 Hillin ratkaisun Mohrin ympyrä.

Jännityskomponenttien muunnoskaavoista kolmiossa ABC seuraa

$$\sigma_x = p - k \sin 2\phi \Rightarrow \sigma_x = -k(1 + \pi) - k(-1) = -k\pi, \quad (14.108)$$

$$\sigma_y = p + k \sin 2\phi \Rightarrow \sigma_y = -k(1 + \pi) + k(-1) = -k(2 + \pi), \quad (14.109)$$

joten rajakuorma on (sama kuin edellä Prandtlin ratkaisussa)

$$P_p = 2b|\sigma_y| = (2 + \pi)2bk \approx 5.14(2bk). \quad (14.110)$$

Mohrin ympyrän avulla päätellään myös:

$$p = -k - k\pi, \quad (14.111)$$

$$\sigma_1 = p + k = -k - k\pi + k = -k\pi, \quad (14.112)$$

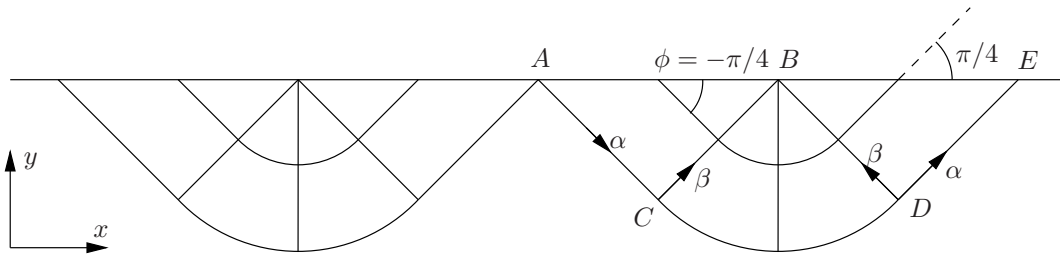
$$\sigma_2 = p - k = -k - k\pi - k = -k(2 + \pi). \quad (14.113)$$

Nopeusyhtälöt

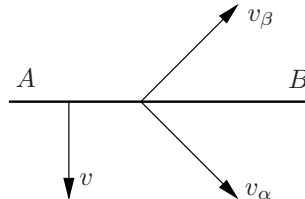
Viivalla AB kohtisuora nopeus on v ja saadaan yhteensopivuusyhtälö (kuva 14.16)

$$\frac{\sqrt{2}}{2}v_\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}v_\beta = v \Rightarrow v_\alpha - v_\beta = \sqrt{2}v. \quad (14.114)$$

Viivalla AC reunaehdon perusteella $v_\beta = 0$.



Kuva 14.15 Hillin ratkaisun liukuviivasto.



Kuva 14.16 Nopeuskomponentit viivalla AB .

Kolmiossa ABC $d\phi = 0$ ja tällöin Geiringerin yhtälöstä

$$dv_\beta + v_\alpha d\phi = 0 \quad \beta - \text{viivalla} \quad (14.115)$$

seuraa

$$dv_\beta = 0 \quad \beta - \text{viivalla} \quad \Rightarrow \quad v_\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\alpha = \sqrt{2}v, \quad (14.116)$$

missä viimeinen yhtälö on seuraus aiemmasta yhteensopivuusehdosta (14.114).

Sektorissa BCD nopeus v_α on jatkuva, joten

$$v_\alpha = \sqrt{2}v \quad \text{viivalla } BC. \quad (14.117)$$

Samoin nopeus v_β on jatkuva sektorissa BCD , joten

$$v_\beta = 0 \quad \text{viivalla } BC. \quad (14.118)$$

Reunaehdon perusteella viivalla CD nopeus $v_\beta = 0$, ja kahden edellisen ehdon perusteella nopeus v_β on nolla sektorissa BCD .

Edellä esitetyn perusteella

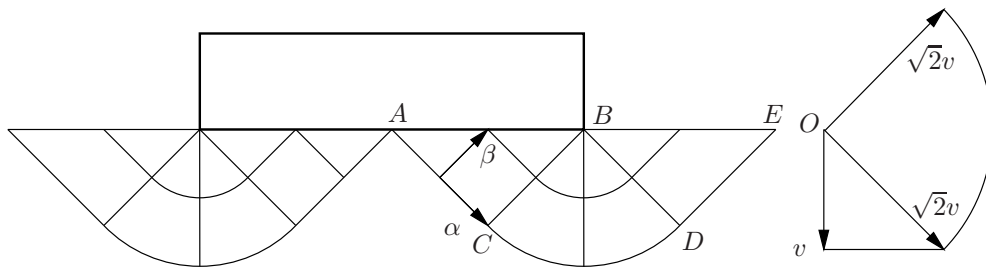
$$v_\alpha = \sqrt{2}v \quad (14.119)$$

viuhkassa BCD . Kolmiossa BDE nopeus v_α on jatkuva, joten siellä

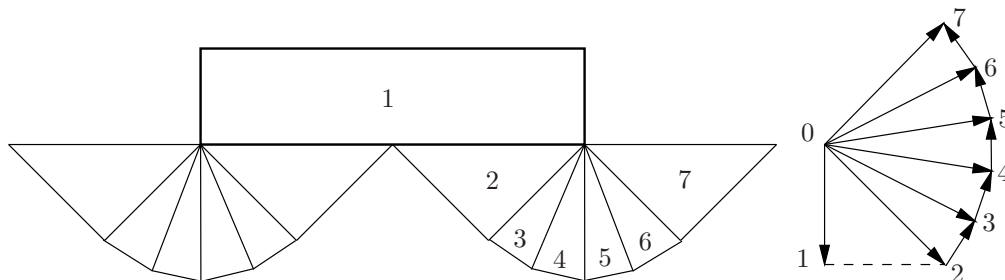
$$v_\alpha = \sqrt{2}v, \quad v_\beta = 0. \quad (14.120)$$

Hillin ratkaisussa nopeus viivalla BC on jatkuva. Nopeusjakauma on esitetty kuvassa 14.17

Kuvassa 14.18 on esitetty Hillin liukuviivakuviota jäljittelevä mekanismi ja siihen liittyvä nopeuskuvio.



Kuva 14.17 Hillin ratkaisun nopeusjakauma.



Kuva 14.18 Hillin ratkaisua jäljittelevä mekanismi ja siihen liittyvä nopeuskuvio.

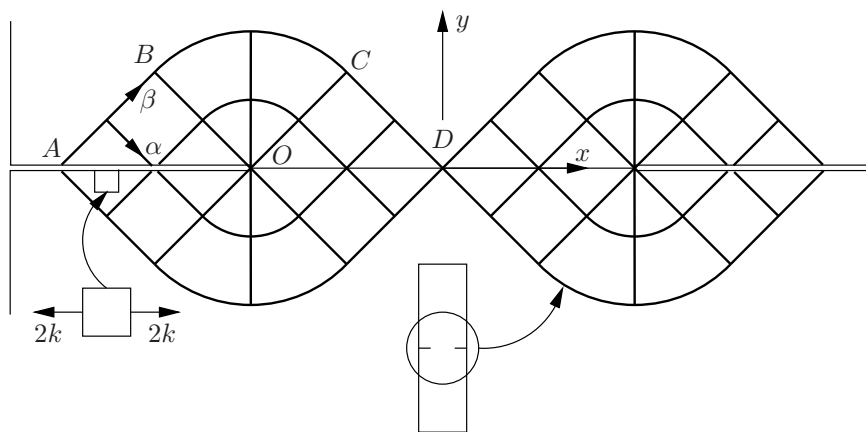
14.4.5 Säröllinen vetokappale

Tasomuodonmuutostilassa olevaan kappaleeseen on tehty symmetrisesti säröt. Säröjen pohjien välisen ehjän osan leveys on $2h$. Kappale otaksutaan niin leveäksi, että siihen mahtuu kuvan 14.19 liukuviivakuvio. Määritetään rajakuorma liukuviivateorialla otaksumalla murtuminen sitkeäksi. Ratkaisu muistuttaa läheisesti Hillin ratkaisua leimasintehtävälle.

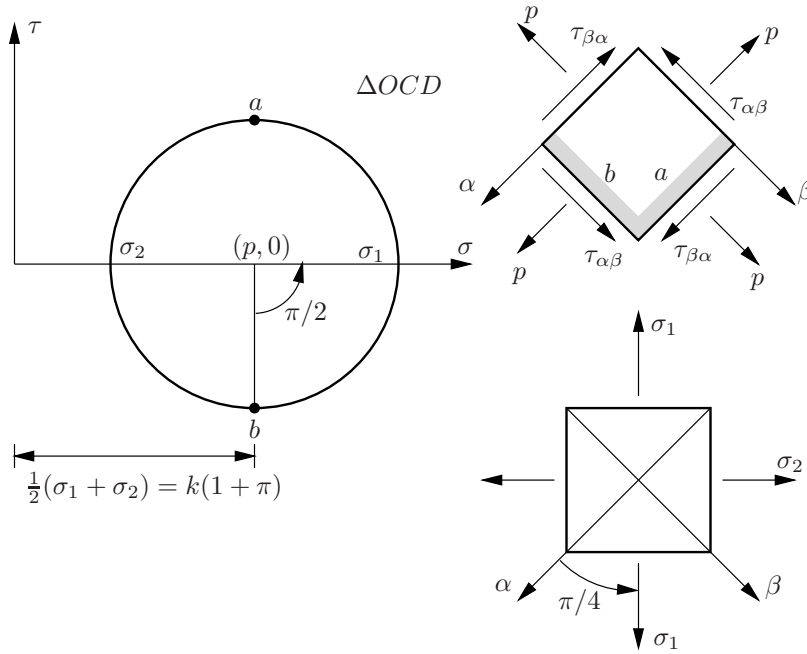
Liukuviivakuvion kolmiossa ABO

$$\sigma_x = 2k, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = k \quad \text{ja} \quad \phi = -\frac{\pi}{4}, \quad (14.121)$$

missä nyt on valittu plus-merkkinen jännitys $2k$ x :n suunnassa. Henckyn kaavan (14.36)



Kuva 14.19 Säröllinen vetokoekappale.



Kuva 14.20 Säröllisen vetokappaleen Mohrin ympyrä.

mukaan β -viivalla

$$p + 2k\phi = C \quad \Rightarrow \quad k + 2k\left(-\frac{\pi}{4}\right) = C. \quad (14.122)$$

Kolmiossa OCD paine p on tuntematon, mutta tiedetään, että

$$\phi = -\frac{3}{4}\pi \quad (14.123)$$

ja

$$p + 2k\phi = p - \frac{3}{2}k\pi = C \quad \beta - \text{viivalla}. \quad (14.124)$$

Kaavojen (14.122) ja (14.124) perusteella

$$p - \frac{3}{2}k\pi = k - \frac{\pi}{2}k \quad \Rightarrow \quad p = k + k\pi = k(1 + \pi). \quad (14.125)$$

Jännityskomponenttien muunnoskaavoilla tulee

$$\sigma_x = p - k \sin 2\phi = k(1 + \pi) - k \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = k\pi, \quad (14.126)$$

$$\sigma_y = p + k \sin 2\phi = k(1 + \pi) + k = k(2 + \pi). \quad (14.127)$$

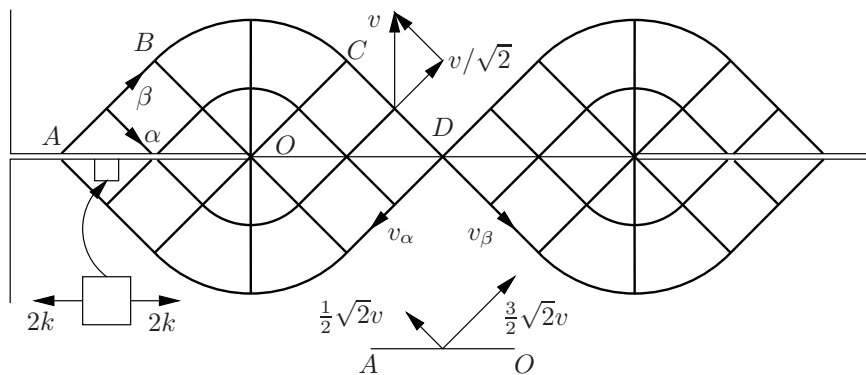
Mohrin ympyrän perusteella saadaan nyt

$$\sigma_1 = k + k\pi + k = k(2 + \pi), \quad (14.128)$$

$$\sigma_2 = k + k\pi - k = k\pi, \quad (14.129)$$

ja Mohrin ympyrän keskipiste on

$$O := \{k(1 + \pi), 0\}. \quad (14.130)$$



Kuva 14.21 Säröllisen vetokappaleen liukuviivasto ja nopeus viivalla AO .

Nopeusyhtälöt. Viivalla CD normaalinopeus v_n on jatkuva, mutta tangentialinen nopeus v_t on epäjatkuva, ja epäjatkuvuus on $v/\sqrt{2}$.

Kolmiossa ODC on vakiojännitystila ja

$$v_\alpha = v_\alpha(\beta), \quad v_\beta = v_\beta(\alpha), \quad (14.131)$$

$$v_\alpha = -\frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (14.132)$$

kun vetonopeus on v .

Symmetrian nojalla OD :n normaalin suuntainen nopeus on nolla eli

$$\frac{\sqrt{2}}{2}v_\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}v_\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\beta = -v_\alpha = \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (14.133)$$

Kun rajakuorma saavutetaan, niin kolmio ODC alkaa liikkua nopeudella v OD :n suuntaan.

Viuhkassa OBC nopeus v_α on vakio jokaisella α -viivalla. Nopeuden v_α kaavaksi päätellään

$$v_\alpha = v \sin \phi, \quad (14.134)$$

koska se toteuttaa ehdon

$$v_\alpha = -v, \quad \text{kun} \quad \phi = -\frac{\pi}{2}. \quad (14.135)$$

Integroimalla β -viivaa pitkin

$$dv_\beta + v_\alpha d\phi = dv_\beta + v \sin \phi d\phi = 0 \quad (14.136)$$

saadaan

$$v_\beta - v \cos \phi = C = \text{vakio}. \quad (14.137)$$

Viivalla OC

$$\phi = -\frac{3}{4}\pi, \quad (14.138)$$

ja kolmiossa OCD

$$v_\beta = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (14.139)$$

joten kaavasta (14.137) seuraa

$$\frac{v}{\sqrt{2}} - v \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = C = \text{vakio}, \quad (14.140)$$

ja voidaan päätellä, että

$$\text{vakio} = C = \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)v = \sqrt{2}v, \quad (14.141)$$

ja ratkaista nopeuskomponentti

$$v_\beta = v(\cos \phi + \sqrt{2}). \quad (14.142)$$

Viivalla OB

$$\phi = -\frac{\pi}{4} \text{ ja } v_\beta = v \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}v, \quad (14.143)$$

$$v_\alpha = v \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}v. \quad (14.144)$$

Kolmiossa ABO

$$v_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}v_\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}v_\beta = \frac{1}{2}v + \frac{3}{2}v = 2v, \quad (14.145)$$

$$v_x = \frac{\sqrt{2}}{2}v_\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}v_\beta = -\frac{1}{2}v + \frac{3}{2}v = v, \quad (14.146)$$

eli kolmio ABO liikkuu nopeudella v x :n suuntaan ja nopeudella $2v$ y :n suuntaan. Käyrän $ABCD$ tangentin suuntainen nopeus on epäjatkuva.

Tehtävälle saadaan helposti alarajaratkaisu otaksumalla $2h$:n levyiseen vyöhykkeeseen jännitystila

$$\sigma_y = 2k, \quad \sigma_x = \tau_{xy} = 0. \quad (14.147)$$

Tällöin rajakuorman alarajaksi tulee

$$F_p^- = 4kh, \quad (14.148)$$

kun säröjen välisen ehjän osan leveys on $2h$.

14.4.6 Lovellinen vetokappale

Tasomuodonmuutostilassa olevaan kappaleeseen on tehty symmetriset lovet. Lovien välisen kannaksen leveys on h , ja kappaleen leveys H otaksutaan riittävän suureksi.

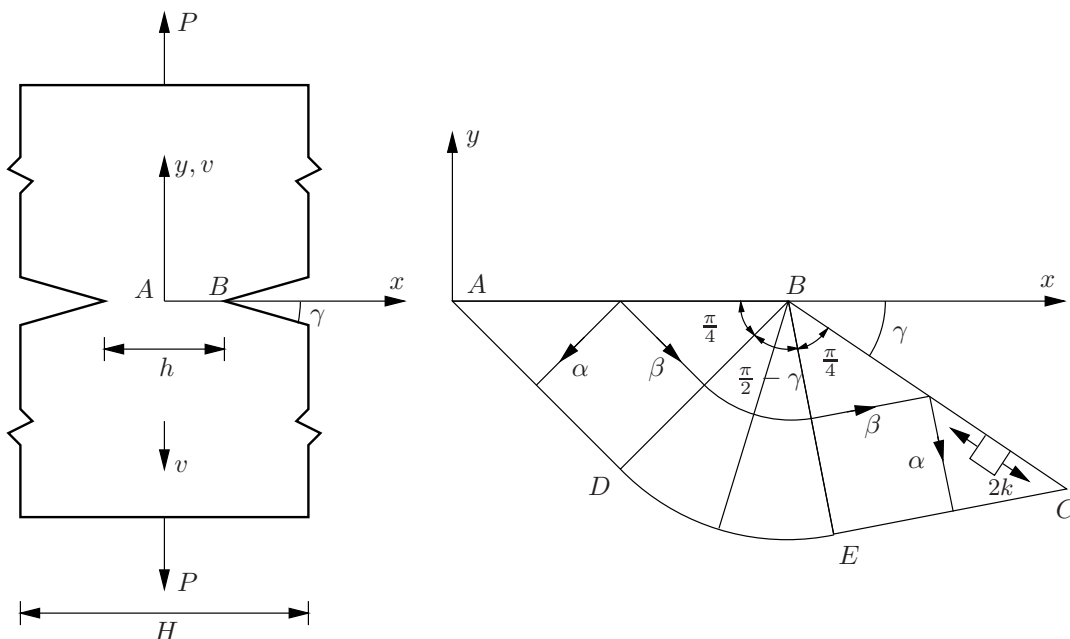
Tutkitaan liukuviivateorialla kappaleen vetovoiman plastista raja-arvoa otaksumalla murtuminen sitkeäksi. Kuvan 14.22 liukuviivakuvion kolmiossa BCE

$$\sigma_1 = 2k, \quad \sigma_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = k, \quad (14.149)$$

$$\phi = -(\gamma + \frac{\pi}{4}). \quad (14.150)$$

β -viivalla

$$p + 2k\phi = C = \text{vakio} \quad \Rightarrow \quad k + 2k(-\gamma - \frac{\pi}{4}) = C. \quad (14.151)$$



Kuva 14.22 Lovellinen vetokappale.

Kolmiossa ABD paine p on tuntematon ja

$$\phi = -\frac{3}{4}\pi, \quad (14.152)$$

$$p + 2k \left(-\frac{3}{4}\pi \right) = C \quad \beta - \text{viivalla}. \quad (14.153)$$

Kaavojen (14.151) ja (14.153) perusteella saadaan

$$p = \frac{3\pi}{2}k + k - 2k\gamma - \frac{\pi}{2}k = k(1 + \pi - 2\gamma). \quad (14.154)$$

Jännityskomponenttien muunnoskaavoilla tulee lopuksi

$$\sigma_x = p - k \sin 2\phi = k(1 + \pi - 2\gamma) - k \sin \left(-\frac{3\pi}{2} \right) = k(\pi - 2\gamma), \quad (14.155)$$

$$\sigma_y = p + k \sin 2\phi = k(1 + \pi - 2\gamma) + k \sin \left(-\frac{3\pi}{2} \right) = k(2 + \pi - 2\gamma), \quad (14.156)$$

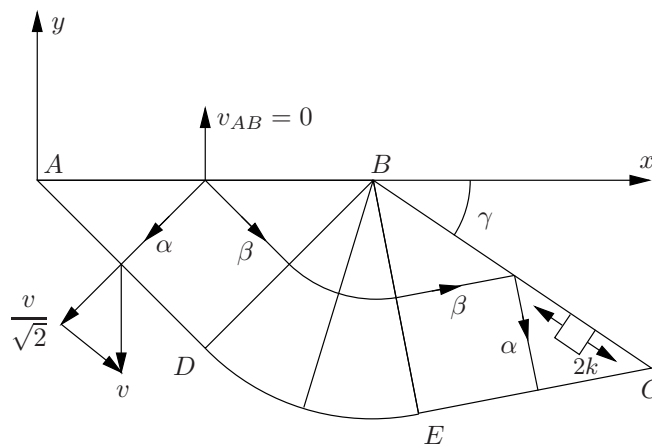
$$\tau_{xy} = 0. \quad (14.157)$$

Rajakuormaksi saadaan

$$F_p = h\sigma_y = kh(2 + \pi - 2\gamma). \quad (14.158)$$

Nopeusyhtälöt. Kuvan 14.23 kolmiossa ABD viivaa AB vastaan kohtisuora nopeus on nolla. Kohtisuoraa nopeutta koskevan ehdon perusteella päätellään, että

$$v_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{v_\beta}{\sqrt{2}} = 0, \quad (14.159)$$



Kuva 14.23 Lovellisen vetokappaleen liukuviivasto ja nopeus viivalla AD .

josta seuraa

$$v_\beta = -v_\alpha \text{ ja } v_\alpha = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad v_\beta = -\frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (14.160)$$

Viivalla AD tangentialisen nopeuden epäjatkuvuus on $v\sqrt{2}$. Nopeuskomponentti v_β on jatkuva viivan BD yli. Viivalla DE

$$v_\alpha = v \sin(-\phi). \quad (14.161)$$

Kun $\phi = -\frac{3}{4}\pi$, niin $v_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}v$.

Geiringerin yhtälöstä $dv_\beta + v_\alpha d\phi = dv_\beta + v \sin(-\phi) d\phi = 0$ viivalla β ottamalla huomioon, että viivalla DB $v_\beta = -v/\sqrt{2}$ ja $\phi = 5\pi/4$, saadaan nyt integroimalla

$$\begin{aligned} v_\beta &= -\frac{v}{\sqrt{2}} - v \int_{5\pi/4}^{\phi} \sin(-\theta) d\theta \\ &= -\frac{v}{\sqrt{2}} - v \int_{5\pi/4}^{\phi} \cos(-\theta) \\ &= -\frac{v}{\sqrt{2}} - v(\cos \phi + \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= -v(\sqrt{2} + \cos \phi). \end{aligned} \tag{14.162}$$

Samaan lopputulokseen päädytään myös integroimalla

$$\begin{aligned}
 v_\beta &= -\frac{v}{\sqrt{2}} - v \int_{-3\pi/4}^{-\phi} \sin(-\theta) d\theta \\
 &= -\frac{v}{\sqrt{2}} - v \int_{-3\pi/4}^{-\phi} \cos(\theta) d\theta \\
 &= -\frac{v}{\sqrt{2}} - v(\cos \phi + \frac{1}{\sqrt{2}}) \\
 &= -v(\sqrt{2} + \cos \phi).
 \end{aligned} \tag{14.163}$$

Nopeus v_β on jatkuva viivan BE yli, joten viivalla BE

$$v_\beta = -\frac{v}{\sqrt{2}}(2 + \cos \gamma - \sin \gamma). \tag{14.164}$$

β -viivalla Geiringerin yhtälöstä

$$dv_\beta + v_\alpha d\phi = 0 \tag{14.165}$$

seuraa nyt

$$dv_\beta + v(\sin(-\phi))d\phi = 0, \tag{14.166}$$

ja sen perusteella saadaan edelleen

$$v_\beta + v \cos(-\phi) = C \quad \text{eli} \quad v_\beta + v \cos \phi = C. \tag{14.167}$$

Kun $\phi = -3\pi/4$, niin

$$v_\beta = -\frac{v}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad -\frac{v}{\sqrt{2}} + v \cos(-\frac{3}{4}\pi) = C. \tag{14.168}$$

Vakion C arvoksi saadaan

$$C = -\frac{v}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}} = -v\sqrt{2}, \tag{14.169}$$

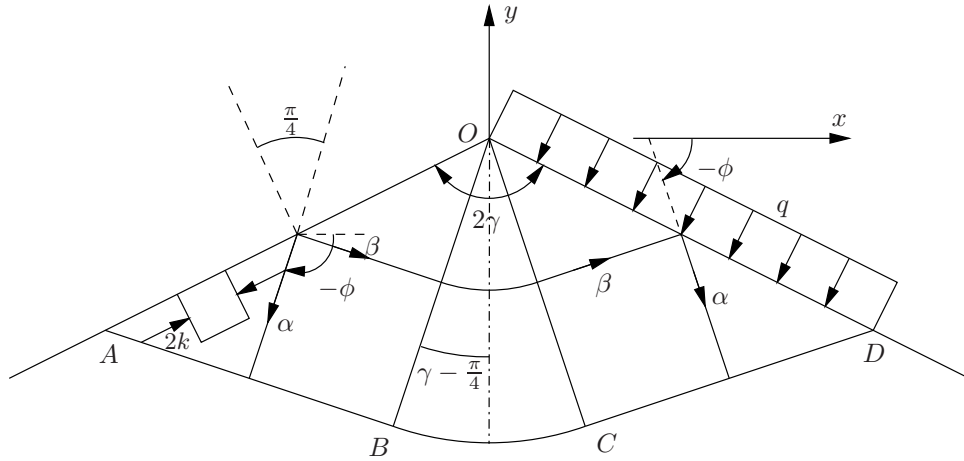
ja nopeuskomponentti v_β on

$$v_\beta = -v\sqrt{2} - v \cos \phi. \tag{14.170}$$

Viivalla BE :

$$\phi = -\gamma - \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad v_\beta = -v\sqrt{2} - v \cos(\gamma + \frac{\pi}{4}) \tag{14.171}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \quad v_\beta &= -v\sqrt{2} - v(\cos \gamma \cos \frac{\pi}{4} - \sin \gamma \sin \frac{\pi}{4}) \\
 &= -v\sqrt{2} - v\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \gamma - \sin \gamma) \\
 &= -\frac{v}{\sqrt{2}}(2 + \cos \gamma - \sin \gamma).
 \end{aligned} \tag{14.172}$$



Kuva 14.24 Penkere.

Viivalla BE :

$$\phi = -\gamma - \frac{\pi}{4} \quad (14.173)$$

ja

$$\begin{aligned} v_\alpha &= v \sin(-\phi) \quad \Rightarrow \quad v_\alpha = v \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= v \sin \gamma \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos \gamma \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{v}{\sqrt{2}}(\sin \gamma + \cos \gamma). \end{aligned} \quad (14.174)$$

Nopeus v_α on jatkuva viivan CE yli, joten CE :llä

$$v_\alpha = \frac{v}{\sqrt{2}}(\sin \gamma + \cos \gamma). \quad (14.175)$$

Nopeudet v_α ja v_β ovat vakioita kolmiossa BCE . Tangentiaalinen nopeus on epäjatkuva viivoilla DE ja EC . Nopeus pisteessä B on singulaarinen.

14.4.7 Penkereen rajakuorma

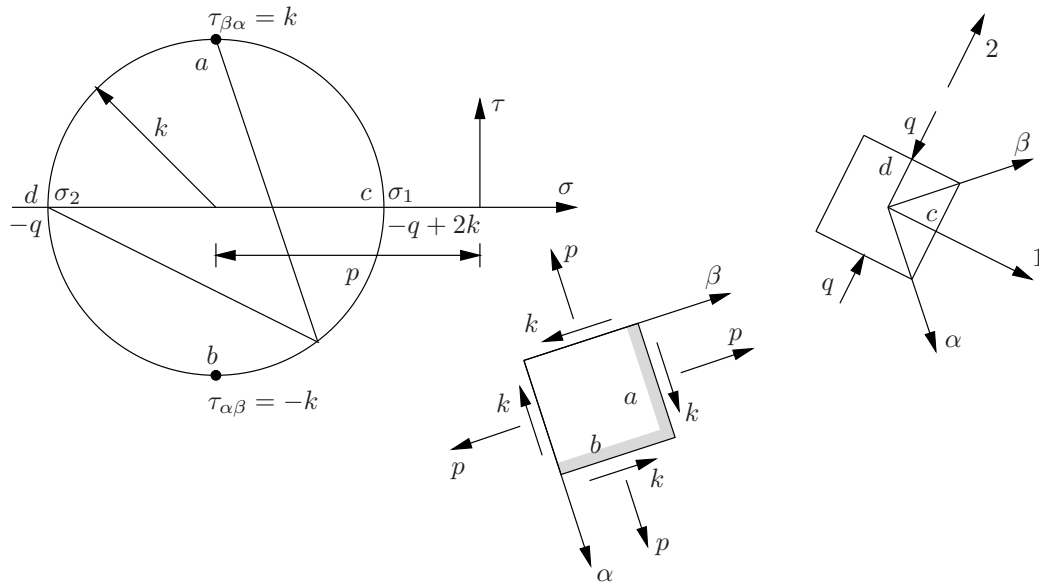
Ratkaistaan tasomuodonmuutostilassa olevan penkereen rajakuorma liukuviivateorialla kuvan 14.24 liukuviivakuviolla. Kolmiossa ABO :

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -2k \quad \Rightarrow \quad p \equiv \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = -k, \quad (14.176)$$

$$\phi = -\left(\frac{\pi}{2} + \gamma - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} - \gamma. \quad (14.177)$$

Kolmiossa OCD paine p on tuntematon, mutta

$$\phi = -\left(\frac{\pi}{2} - \left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{3\pi}{4} + \gamma. \quad (14.178)$$



Kuva 14.25 Penkeretehtävän Mohrin ympyrä.

Henckyn kaavan (14.36) mukaan β -viivalla

$$p + 2k\phi = \text{vakio}, \quad (14.179)$$

joten

$$-k + 2k \left(-\frac{\pi}{4} - \gamma \right) = p + 2k \left(\gamma - \frac{3\pi}{4} \right). \quad (14.180)$$

Paineen p arvoksi lasketaan

$$\begin{aligned} p &= -k + 2k \left(-\frac{\pi}{4} - \gamma - \gamma + \frac{3\pi}{4} \right) \\ &= -k + 2k \left(-2\gamma + \frac{1}{2}\pi \right) \\ &= -k + k\pi - 4k\gamma. \end{aligned} \quad (14.181)$$

Pääjännitykset ovat

$$\sigma_1 = p + k = k\pi - 4k\gamma, \quad (14.182)$$

$$\sigma_2 = p - k = -2k + k\pi - 4k\gamma = -2k \left(1 + 2\gamma - \frac{\pi}{2} \right), \quad (14.183)$$

ja rajakuorma on

$$q_p = -\sigma_2. \quad (14.184)$$

Kun kulma $\gamma = \pi/4$, niin alue OBC supistuu viivaksi. Kun $\gamma < \pi/4$, niin ratkaisu on toisen tyyppinen.

Luku 15

Plastisuusteorian soveltaminen laattoihin

Tarkastellaan ja kerrataan aluksi ohuen laatan teorian yhtälöitä. Ohuen laatan teoriassa eli Kirchhoffin laattateoriassa jätetään laatan poikittaiset leikkausmuodonmuutokset huomioonottamatta. Homogeenisen ohuen laatan tapauksessa ja myös ohuen teräsbetonilaatan tapauksessa tästä aiheutuva virhe on yleensä merkityksettömän pieni.

15.1 Laatan kinemaattiset yhtälöt

Ohuen laatan (Kirchhoffin) teorian johtamisessa otaksutaan, että:

1. Laatan taipuma w on pieni eli $w \ll h$ (h on laatan paksuus).
2. Laatan keskipinta ei veny.
3. Laatan keskitason normaalit säilyvät suorina ja keskitason normaaleina deformatiivisessa tilassa (Kirchhoffin otaksuma).

Kirchhoffin otaksuman perusteella ja kuvan 15.1 avulla johdetaan x -akselin suuntaiselle siirtymälle kaava

$$u = -zw_{,x} \equiv -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (15.1)$$

Vastaavasti y -akselin suunnassa

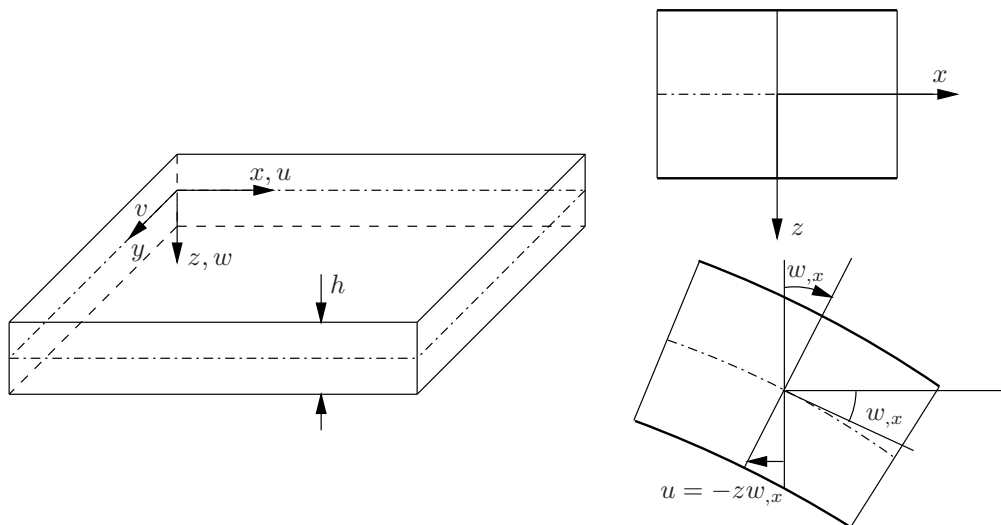
$$v = -zw_{,y} \equiv -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (15.2)$$

Kaavojen (15.1) ja (15.2) avulla johdetaan muodonmuutoskomponentit

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -zw_{,xx}, \quad (15.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -zw_{,yy}, \quad (15.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2zw_{,xy}. \quad (15.5)$$



Kuva 15.1 Laatan koordinaatisto ja siirtymä x :n suuntaan.

15.2 Tasapainoyhtälöt

Määritellään ensin resultantit, taivutusmomentit ja vääntömomentti

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_x dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_y dz, \quad m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{xy} dz, \quad (15.6)$$

ja sitten leikkausvoimat

$$q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \quad (15.7)$$

Kuvan 15.2 perusteella johdetaan tasapainoyhtälöt

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0, \quad (15.8)$$

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}, \quad (15.9)$$

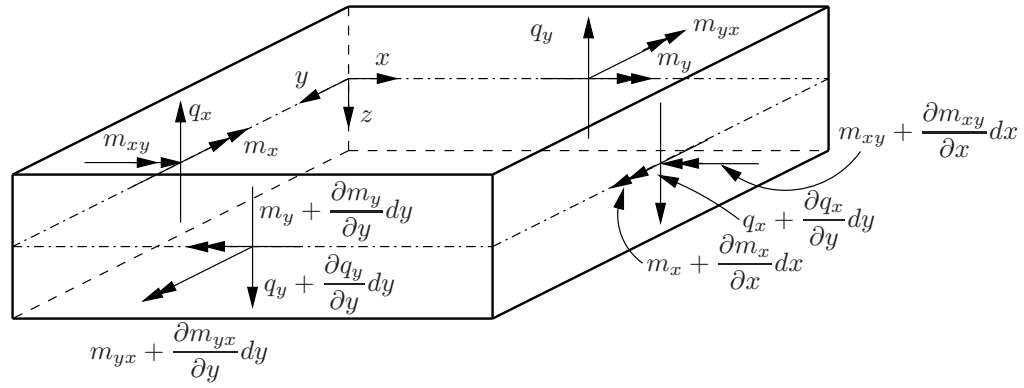
$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}. \quad (15.10)$$

Sijoittamalla kaavat (15.9) ja (15.10) laatan pystysuoraan tasapainoehtoon (15.8) tulee

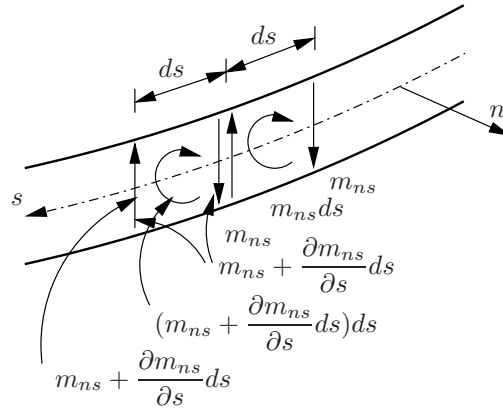
$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + p = 0. \quad (15.11)$$

Kirchhoffin laattateoriassa reunalla, jota pitkin kulkee koordinaatti s , määritellään korvikeleikkausvoima

$$v_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}. \quad (15.12)$$



Kuva 15.2 Laatan differentiaalisen alkion tasapaino.



Kuva 15.3 Korvikeleikkausvoimaan q_n tuleva osuus $\frac{\partial m_{ns}}{\partial s}$ vääntömomentista.

Leikkausvoima q_n yhdistetään kuvan 15.3 perusteella vääntömomenttiin

$$v_n ds = q_n ds + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} ds \quad (15.13)$$

eli

$$v_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial m_n}{\partial n} + 2 \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}. \quad (15.14)$$

Reunalla $x = \text{vakio}$ korvikeleikkausvoima on

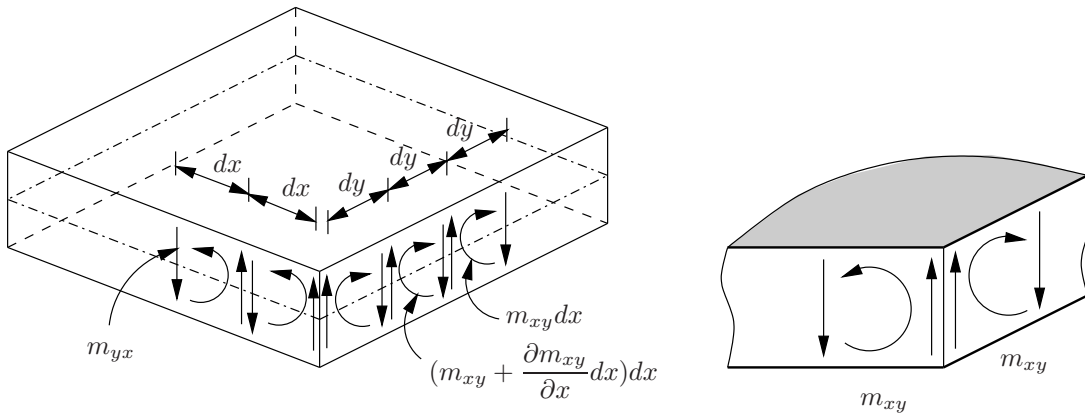
$$v_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}, \quad (15.15)$$

ja vastaavasti reunalla $y = \text{vakio}$

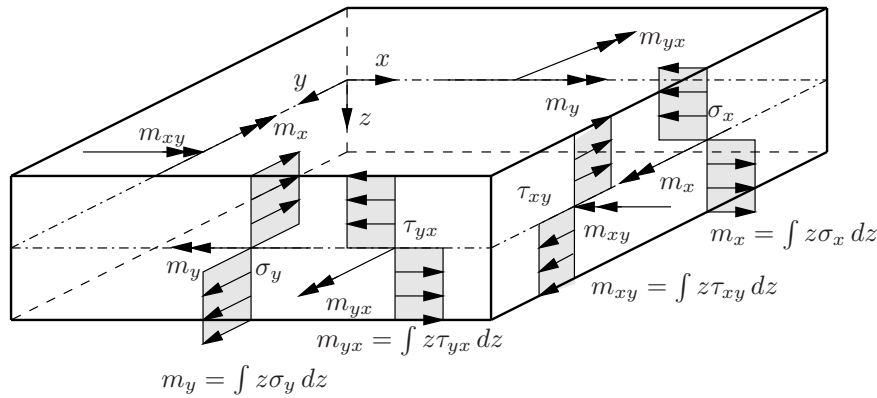
$$v_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}. \quad (15.16)$$

Vapaasti tuetun laatan suorakulmaiseen nurkkaan syntyy kuvan 15.4 mukaisesti voima

$$R = -2m_{xy}. \quad (15.17)$$



Kuva 15.4 Nurkkavoima.



Kuva 15.5 Täysplastinen jännitysjauma.

15.3 Myötöehto

15.3.1 Homogeeninen isotrooppinen laatta

Otaksutaan laattaan kuvan 15.5 mukainen jännitystila. Jännitysresultantit ovat kuvan 15.5 jännitysjaumalla

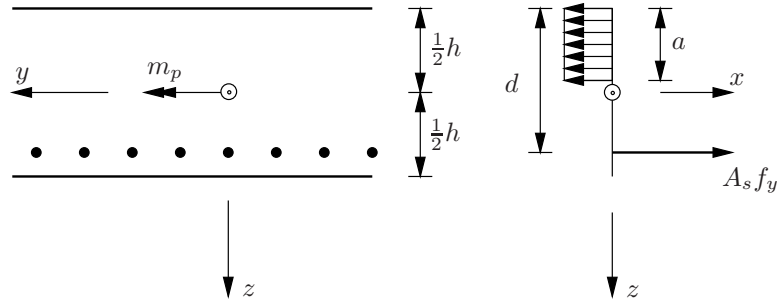
$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz = \sigma_x \frac{h^2}{4}, \quad (15.18)$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz = \sigma_y \frac{h^2}{4}, \quad (15.19)$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz = \tau_{xy} \frac{h^2}{4}. \quad (15.20)$$

Isotrooppisen plastisen aineen tapauksessa myötöjännitykset ovat

$$\sigma_{mx} = \sigma_{my} = \sigma_m. \quad (15.21)$$



Kuva 15.6 Laatan poikkileikkaus.

von Misesin myötöehto tasojännitystilassa on

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_m^2. \quad (15.22)$$

Kertomalla ehto (15.22) tekijällä $(h^2/4)^2$ tulee

$$m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2 = m_p^2, \quad (15.23)$$

missä

$$m_p = \sigma_m \frac{h^2}{4} \quad (15.24)$$

on myötömomentti. Trescan myötöehdosta

$$\max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|\} = \sigma_m \quad (15.25)$$

seuraa momenttien avulla lausuttu laatan myötöehto

$$\max\{|m_1|, |m_2|, |m_1 - m_2|\} = m_p. \quad (15.26)$$

15.3.2 Teräsbetonilaatan myötöehto

Plastisuusteoriaa voidaan soveltaa myös teräsbetonirakenteisiin, jos niillä on riittävä muodonmuutoskyky (esim. rotaatiot nivelissä). Teräsbetonilaatat ovat lähes aina aliraudoitettuja (raudoitusmäärä harvoin yli 1%), ja niillä on siten riittävä muodonmuutoskyky (rotaatiokapasiteetti myötöviivoilla taivutuksessa) plastisuusteorian menetelmien soveltamista varten.

Tarkastellaan yhteen suuntaan raudoitettua laattakaistaa. Raudoituksen poikkipinta-ala pituusyksikköä kohti on $A_{sx} = A_s$. Täysplastisen tilanteen jännitysjakautuma on kuvan 15.6 mukainen. Tasapainoehto x :n suunnassa on

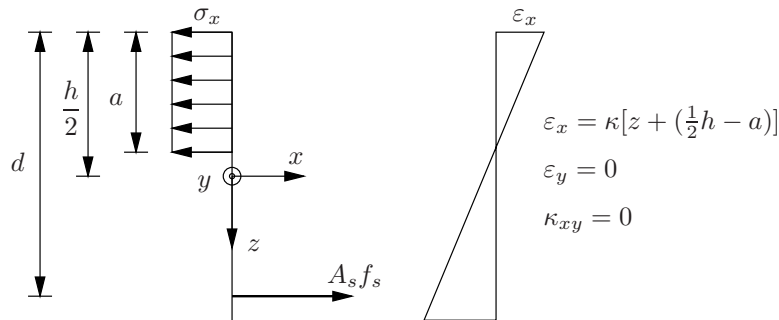
$$A_s f_y = a f_c, \quad (15.27)$$

missä f_y on teräksen myötöraja ja f_c on betonin puristuslujuus. Määritellään raudoitustaste

$$\Phi = \frac{A_s f_y}{d f_c}. \quad (15.28)$$

Tällöin on

$$\frac{a}{d} = \Phi. \quad (15.29)$$



Kuva 15.7 Jännitystila ja muodonmuutostila teräsbetonilaatan poikkileikkauksessa.

Poikkileikkauksen myötömomentti on

$$m_p = A_s f_y \left(d - \frac{1}{2}a\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\Phi\right) A_s f_y d = \left(1 - \frac{1}{2}\Phi\right) \Phi d^2 f_c, \quad (15.30)$$

missä kerroin $(1 - 0.5\Phi)$ on lähes vakio pienen rauditusmäärän tapauksessa. Myötömomentti on tällöin verrannollinen raudituspinta-alaan A_s .

Jännitystilaa vastaava muodonmuutostila leikkauksessa $x = \text{vakio}$ on

$$\varepsilon_x = \kappa \left[z + \left(\frac{1}{2}h - a\right)\right], \quad (15.31)$$

$$\varepsilon_y = 0 \quad \text{ja} \quad \gamma_{xy} = 0, \quad (15.32)$$

missä κ on laattakaistan käyritymä.

Yläpinnan puristusraudoitus lisää momenttikapasiteettia, mutta vain hieman pienen puristusraudoituksen tapauksessa. Momenttikapasiteetti teräsbetonilaattakaistan mielivaltaisessa leikkauksessa suunnassa α (kuva 15.8) saadaan ehdosta

$$L m_{p\alpha} = m_p \cos \alpha L \cos \alpha \quad (15.33)$$

eli

$$m_{p\alpha} = m_p \cos^2 \alpha. \quad (15.34)$$

Ortogonaalisen raudituksen tapauksessa

$$m_{p\alpha} = m_{px} \cos^2 \alpha + m_{py} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad (15.35)$$

$$= m_{px} \cos^2 \alpha + m_{py} \sin^2 \alpha,$$

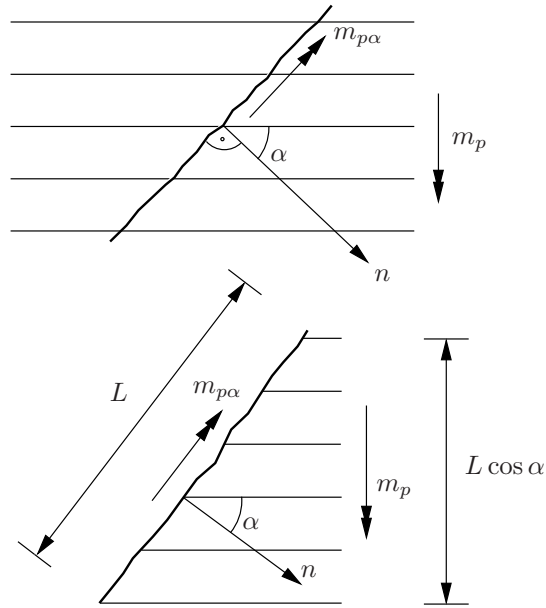
ja vääntömomentti $m_{v\alpha}$ on (kuva 15.9)

$$m_{v\alpha} = (m_{py} - m_{px}) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (15.36)$$

Isotrooppisen raudituksen tapauksessa

$$m_{px} = m_{py} = m_p, \quad (15.37)$$

$$m_{p\alpha} = m_p, \quad (15.38)$$



Kuva 15.8 Momentti mielivaltaisessa leikkauksessa.

$$m_{v\alpha} = 0. \quad (15.39)$$

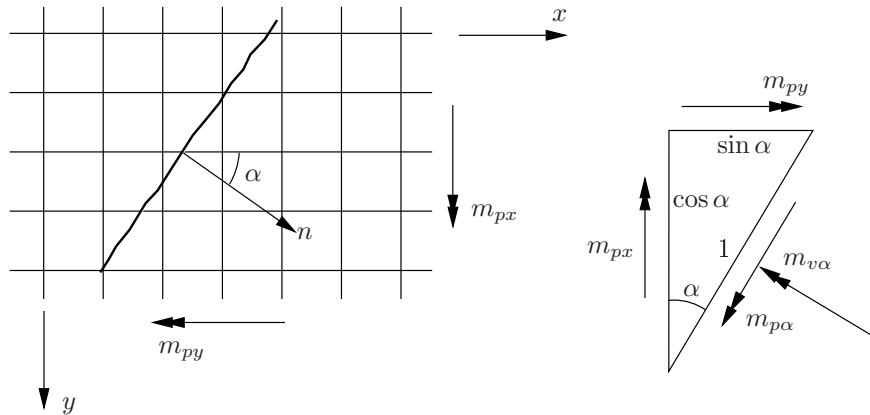
Jos raudoituksia on useita, niin

$$m_{p\alpha} = \sum_i m_{pi} \cos^2 \alpha_i, \quad (15.40)$$

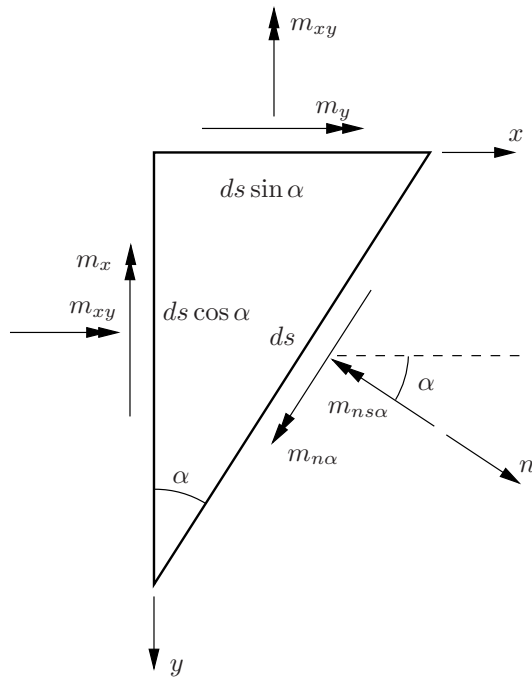
$$m_{v\alpha} = - \sum_i m_{pi} \sin \alpha_i \cos \alpha_i. \quad (15.41)$$

Kun $\alpha_1 = \alpha$ ja $\alpha_2 = \pi/2 - \alpha$, niin saadaan erikoistapauksena ortogonaalinen raudoitus.

Olko yläpinnan raudoitukseen liittyvä negatiivinen momenttikapasiteetti m'_p . Ortogonaalisen raudoituksen tapauksessa suuntiin x ja y liittyvät kapasiteetit olkoot m'_{px} ja



Kuva 15.9 Ortogonaalinen raudoitus.



Kuva 15.10 Momentti leikkauksessa α .

m'_{py} . Tällöin

$$m'_{p\alpha} = m'_{px} \cos^2 \alpha + m'_{py} \sin^2 \alpha. \quad (15.42)$$

Kuvan 15.10 perusteella johdetaan momentille leikkauksessa α lauseke

$$m_\alpha = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + 2m_{xy} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (15.43)$$

Asettamalla

$$m_\alpha = m_{p\alpha} \quad (15.44)$$

saadaan

$$m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + 2m_{xy} \sin \alpha \cos \alpha = m_{px} \cos^2 \alpha + m_{py} \sin^2 \alpha, \quad (15.45)$$

josta seuraa ehto

$$-(m_{px} - m_x) \cos^2 \alpha - (m_{py} - m_y) \sin^2 \alpha + 2m_{xy} \sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad (15.46)$$

mistä saadaan edelleen yhtälö

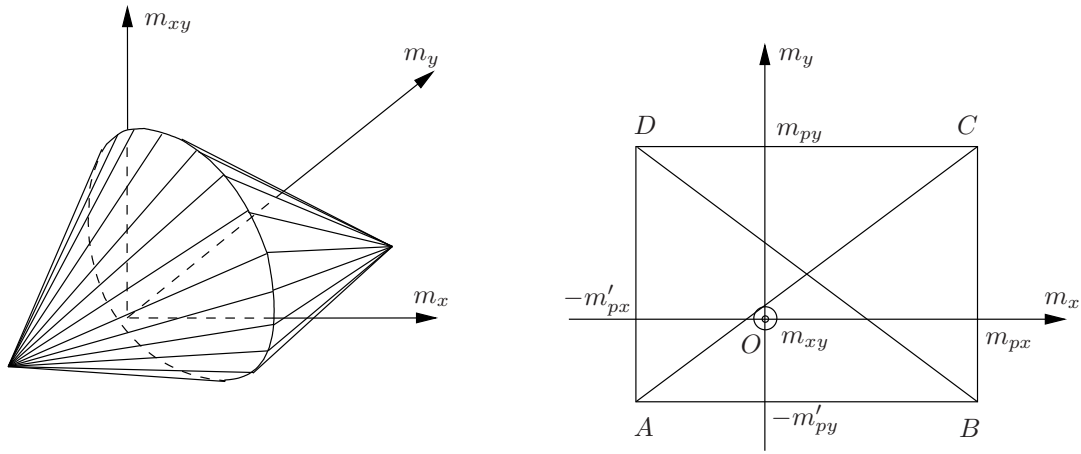
$$-(m_{px} - m_x) - (m_{py} - m_y) \tan^2 \alpha + 2m_{xy} \tan \alpha = 0. \quad (15.47)$$

Derivoimalla ehto

$$m_{p\alpha} = m_\alpha \quad (15.48)$$

saadaan ensin

$$-(m_{py} - m_y) 2 \tan \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2m_{xy} \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 0, \quad (15.49)$$



Kuva 15.11 Teräsbetoni-laatan myötöehto.

mistä ratkaistaan edelleen

$$\tan \alpha = \frac{m_{xy}}{m_{py} - m_y}. \quad (15.50)$$

Sijoittamalla kaava (15.50) yhtälöön (15.47) tulee

$$-(m_{px} - m_x) - \frac{m_{xy}^2}{m_{py} - m_y} + \frac{2m_{xy}^2}{m_{py} - m_y} = 0 \quad (15.51)$$

eli

$$-(m_{px} - m_x)(m_{py} - m_y) + m_{xy}^2 = 0. \quad (15.52)$$

Asettamalla vaatimus

$$m_\alpha = m'_{p\alpha} \quad (15.53)$$

saadaan samalla tavalla kuin edellä ehto

$$-(m'_{px} + m_x)(m'_{py} + m_y) + m_{xy}^2 = 0. \quad (15.54)$$

Kaavat (15.52) ja (15.54) esittävät kartioita, jotka leikkaavat toisensa pinnalla

$$(m_{px} - m_x)(m_{py} - m_y) - (m'_{px} + m_x)(m'_{py} + m_y) = 0. \quad (15.55)$$

Leikkaustason projektio (m_x, m_y) -tasossa on suora BD (kuva 15.11), jonka yhtälö on

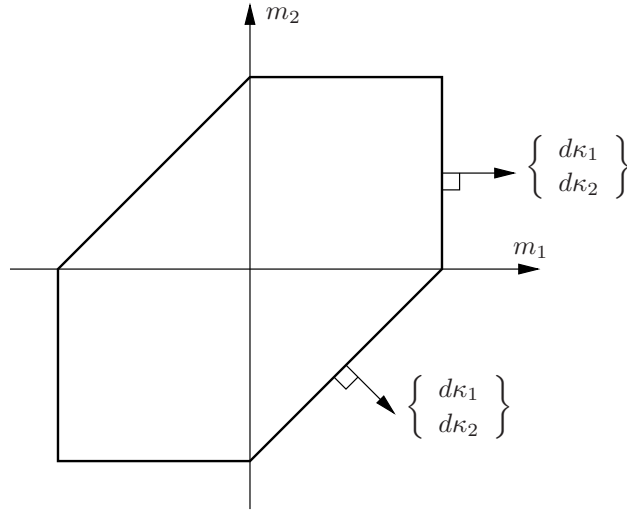
$$m_y = -\eta m_x + \eta m_{px} - m'_{py}, \quad (15.56)$$

missä

$$\eta = \frac{m_{py} + m'_{py}}{m_{px} + m'_{px}}. \quad (15.57)$$

Edellä on merkitty:

- m_{px} on positiivinen myötömomentti x -suunnassa,
- m'_{px} on negatiivinen myötömomentti x -suunnassa,



Kuva 15.12 Trescan myötöehto isotrooppiselle laatalle.

- m_{py} on positiivinen myötömomentti y -suunnassa,
- m'_{py} on negatiivinen myötömomentti y -suunnassa.

Kaavat (15.52) ja (15.54) esittävät kaksoiskartiomyötöehtoa (m_x, m_y, m_{xy}) -avaruudessa. Yleisessä tapauksessa myötöehto kirjoitetaan muotoon

$$f(m_x, m_y, m_{xy}) = K. \quad (15.58)$$

Myötösäännön mukaan plastinen muodonmuutosvektori on myötöpinnan normaalin suuntainen eli

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (15.59)$$

Laatan tapauksessa saadaan vastaavasti plastinen käyristymävektori

$$d\boldsymbol{\kappa}_p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{m}}, \quad (15.60)$$

missä

$$\boldsymbol{\kappa}_p = \begin{bmatrix} \kappa_{xp} \\ \kappa_{yp} \\ 2\kappa_{xyp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} \quad (15.61)$$

ovat plastinen käyristymävektori ja momenttivektori (momenttikomponentit on koottu alekkain vektoriin).

Kuvassa 15.12 on esitetty vertailun vuoksi aiemmin johdettu Trescan myötöehto päämomenttien tasossa.

Jättämällä jäykkäplastisessa teoriassa indeksi p pois saadaan laatan tapauksessa plastinen käyristymävektori myötösäännöstä

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial m_x} \\ \frac{\partial f}{\partial m_y} \\ \frac{\partial f}{\partial m_{xy}} \end{bmatrix}. \quad (15.62)$$

Kaksoiskartioehdon tapauksessa

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= \lambda(m_{py} - m_y) \\ \kappa_y &= \lambda(m_{px} - m_x) \\ 2\kappa_{xy} &= 2\lambda m_{xy} \end{aligned} \right\}, \quad \lambda > 0, \quad m_y \geq -\eta m_x + \eta m_{px} - m'_{py}, \quad (15.63)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= -\lambda(m'_{py} + m_y) \\ \kappa_y &= -\lambda(m'_{px} + m_x) \\ 2\kappa_{xy} &= 2\lambda m_{xy} \end{aligned} \right\}, \quad \lambda > 0, \quad m_y \leq -\eta m_x + \eta m_{px} - m'_{py}. \quad (15.64)$$

Kaavojen (15.63) ja (15.64) perusteella todetaan, että kartioiden kärkiä ja yhdysviivaa lukuunottamatta pätee

$$\kappa_x \kappa_y = \kappa_{xy}^2, \quad (15.65)$$

eli toinen pääkäyristymä on nolla (kuva 15.13), ja paikallinen plastinen myötö tapahtuu myötöviivalla dl , jonka suunta on sama kuin leikkauksen, jossa

$$m_{p\alpha} = m_\alpha \quad (\text{tai} \quad m'_{p\alpha} = m_\alpha). \quad (15.66)$$

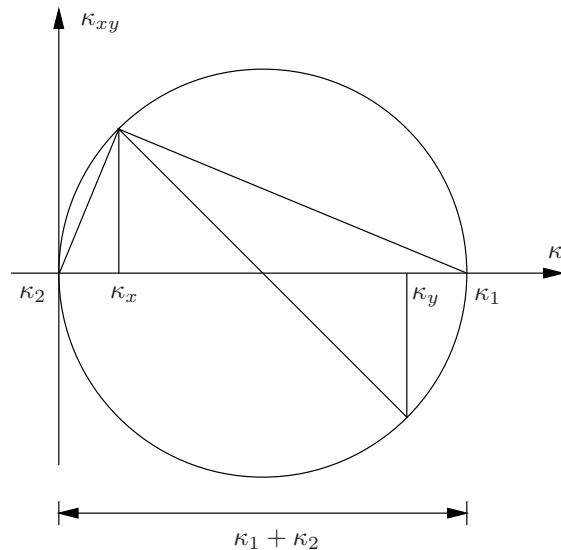
Havaintojen mukaan teräsbetonilaattaan syntyy murtotilanteessa myötöviivojen tai murtoviivojen rajaamia osia, jotka kiertyvät toistensa suhteen, kun laattaan on syntynyt mekanismi.

15.4 Myötöviivateoriaa

Plastisuusteoriaa ei aina voida helposti soveltaa betonirakenteille niiden pienen rotaatiokapasiteetin (sitkeyden) vuoksi. Teräsbetonilaatat ovat lähes aina aliraudoitettuja (teräsmäärä harvoin yli 1%) ja siten ne ovat riittävän sitkeitä.

Kuvassa 15.14 on tasaisella kuormalla kuormitettu vapaasti tuettu neliölaatta. Kuormituksen aikana laatan diagonaalille on tullut kuormitetun puolen vastakkaiselle sivulle suuria halkeamia, ja kuormitetulla puolella betoni on murskaantunut vastaavista kohdista, joita nimitetään myötöviivoiksi tai murtoviivoiksi. Kokeen aikana on mitattu taipumia pisteistä A , B ja C . Keskipisteen taipuman käyrässä nähdään laatan jäykkyyden pieneneminen, kun laatta alkaa halkeilla.

Pisteiden B ja C taipumat tulevat lähelle toisiaan suurilla kuorman arvoilla. Kuvan 15.16 laatan taipumaprofiili on lähes suora viivalla, joka kulkee tuelta pisteiden B ja A



Kuva 15.13 Käyritysmien Mohrin ympyrä.

kautta. Havaintojen perusteella päätellään laatan taipumapinnan koostuvan tasomaisista osista murtoviivojen välissä.

Myötöviivateoriassa plastisten muodonmuutosten otaksutaan keskittyvän hyvin kapeaan vyöhykkeeseen (teoriassa viivalle). Rajatilassa laattaan syntyy yhden vapausasteen mekanismi (kuten palkeissa ja kehissä). Laatta jakautuu myötöviivojen ja pyörähdysakselien rajaamiin osiin, jotka alkavat kiertyä rajakuorman arvolla.

Vapaasti tuetun neliölaatan myötöviivakuvio on esitetty kuvassa 15.17. Merkitään, että osan i kiertymä $\omega_i \equiv \omega_{i0}$. Jos laatan keskipisteen E taipuma on w , niin

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \frac{w}{L/2}. \quad (15.67)$$

Viivat EA , EB , EC ja ED ovat kiertymäakseleiden jatkuvuusviivoja tai myötöviivoja. Osien i ja j välinen kiertymäero on ω_{ij} , joka voidaan määrittää kiertymäkuvion perusteella, kuva 15.17. Esimerkiksi kolmioiden BCE ja ABE kiertymäero on ω_{21} , joka on BCE :n kiertymä ABE :n suhteen. Kuvan 15.17 perusteella

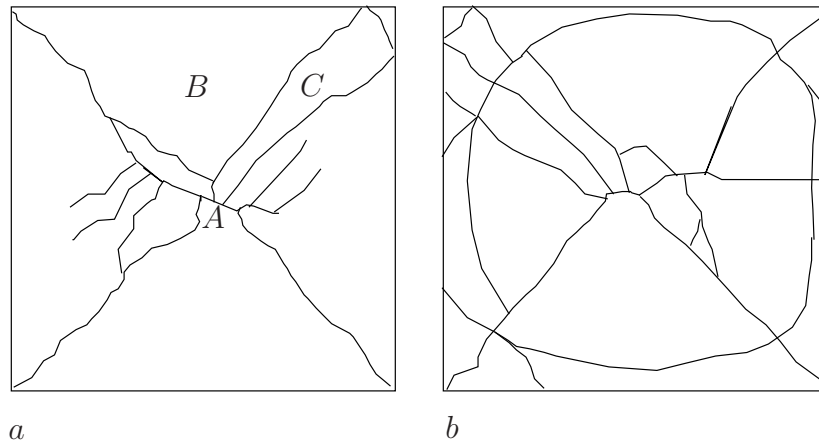
$$\omega_{21} = \omega_{32} = \omega_{43} = \omega_{14} = \sqrt{2}\omega_1 = 2\sqrt{2}\frac{w}{L}. \quad (15.68)$$

Energian dissipaatio myötöviivalla EB on

$$D_{21} = \omega_{21}l_{21}m_p, \quad (15.69)$$

missä l_{21} on viivan EB pituus ja m_p on isotrooppisen laatan myötömomentti missä tahansa leikkauksessa. Dissipaatio myötöviivoilla on

$$\begin{aligned} W_s &= \omega_{21}l_{21}m_p + \omega_{32}l_{32}m_p + \omega_{43}l_{43}m_p + \omega_{14}l_{14}m_p \\ &= 4 \cdot 2\sqrt{2}\frac{w}{L} \cdot L \frac{\sqrt{2}}{2}m_p \\ &= 8m_pw. \end{aligned} \quad (15.70)$$



Kuva 15.14 Nivelellisesti tuettu neliölaatta, a) kuorman vastakkainen puoli, b) kuormitettu sivu.

Tasaisen kuorman $p(x, y) = p_0$ tapauksessa ulkoinen virtuaalinen työ on kuorman intensiteettiä kertaa taipumakuvion tilavuus eli

$$W_u = \frac{1}{3} A w p_0 = \frac{1}{3} L^2 w p_0. \quad (15.71)$$

Asettamalla

$$W_s = W_u \quad (15.72)$$

seuraa

$$p_0^u = 24 \frac{m_p}{L^2}, \quad (15.73)$$

missä indeksi u tarkoittaa ylärajaa (upper bound).

Yleisessä tapauksessa (mielivaltainen jakautunut kuorma) ulkoinen virtuaalinen työ on

$$W_s = \int_A p(x, y) w(x, y) dx dy, \quad (15.74)$$

ja sisäinen virtuaalinen työ on puolestaan

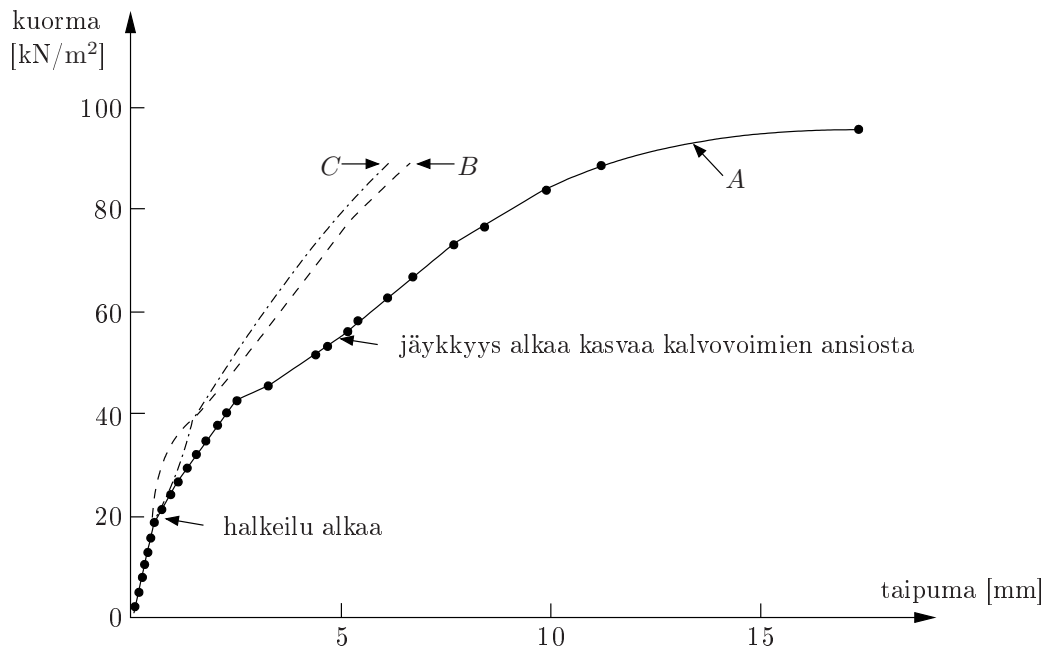
$$W_s = \sum (m_p)_{ij} l_{ij} \omega_{ij}, \quad (15.75)$$

missä lasketaan yhteen dissipaation osuudet eri myötöviivoilta ij .

Myötöviivamenetelmässä etsitään yhden vapausasteen mekanismia, joka antaa pienimmän arvon rajakuormalle. Myötöviivamenetelmä antaa plastisen rajakuorman **yläraja-arvon** (vrt. kehien mekanismimenetelmä).

Myötöviivakuvioita koskevia sääntöjä

1. Myötöviivat ovat (tavallisesti) suoria ja ne ovat pyörähdysakseleita.
2. Myötöviiva loppuu laatan reunaan.



Kuva 15.15 Kuvan 15.14 laatan pisteiden A , B ja C taipumat.

3. Pyörähdysakselit yhtyvät tuettuihin reunoihin, leikkaavat vapaat reunat ja kulkevat pilaritukien kautta.
4. Vierekkäisten laatan osien pyörähdysakselit leikkaavat toisensa (mahdollisesti ääretömyydessä).
5. Myötöviivat ovat positiivisia tai negatiivisia sen mukaan, mikä on momentin merkki.

Mekanismin kinematiikkaa

Otetaan käyttöön kuvan 15.18 merkinnät. Myötöviivojen muodostama mekanismi on täysin määrätty, kun tunnetaan kiertymisakselit laatan osille ja kiertymiskulmien (rotaatioiden) suhteet. Mekanismin määrittävien geometrysten parametrien lukumäärä on

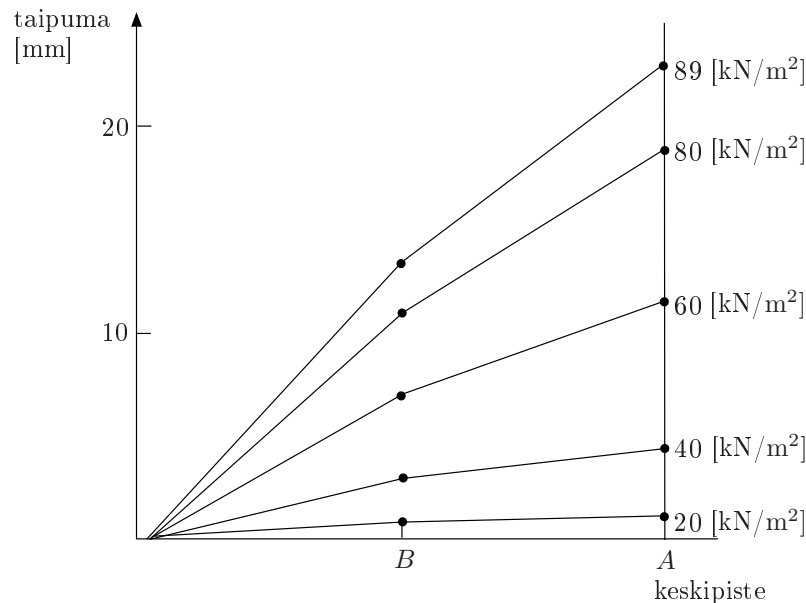
$$p = n + r - 1, \quad (15.76)$$

missä n on osa-alueiden lukumäärä, r on kiertymisakseleiden määrittämiseen tarvittavien parametrien lukumäärä.

Jokaisella myötöviivalla tai sen jatkeella sijaitse kaksi pistettä, joiden kautta kulkee joko

1. kahden vierekkäisen laatanosan kiertymisakselit tai
2. kaksi muuta myötöviivaa.

Esimerkiksi kuvassa 15.19f: pisteet $E\&H$, $F\&H$ ja $G\&H$.



Kuva 15.16 Kuvan 15.14 laatan taipumaprofiilit.

Leikkauspisteet voidaan kuvitella solmuiksi ristikossa, jonka sauvoja ovat kiertymisakselit ja myötöviivat. Tällöin kiertymisvektorit ovat solmuihin vaikuttavia voimia. Kiertymisvektoreista voidaan muodostaa kiertymäkuviio. Osan i kiertymä osan j suhteen on

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}. \quad (15.77)$$

Esimerkiksi kuvan 15.20 laatan pisteessä E on voimassa vektorien yhteenlaskusäännön perusteella

$$\omega_{32} + \omega_{43} + \omega_{24} = \mathbf{0}. \quad (15.78)$$

Laatan osaa i vastaa solmu i' ω -kuviossa. Siirtyminen ω -kuviossa pisteestä i' pisteeseen j' vastaa osien i ja j välisen myötöviivan tai kiertymisakselin ylittämistä.

Laatan kahden vierekkäisen osan välinen kiertymä voidaan määrittää myös tarkastelemalla myötöviivan normaalin kiertymää, kuva 15.21. Kuvassa 15.21

$$w_E = \delta \quad \text{ja} \quad \omega = \frac{\delta}{L_1} + \frac{\delta}{L_2}, \quad (15.79)$$

missä

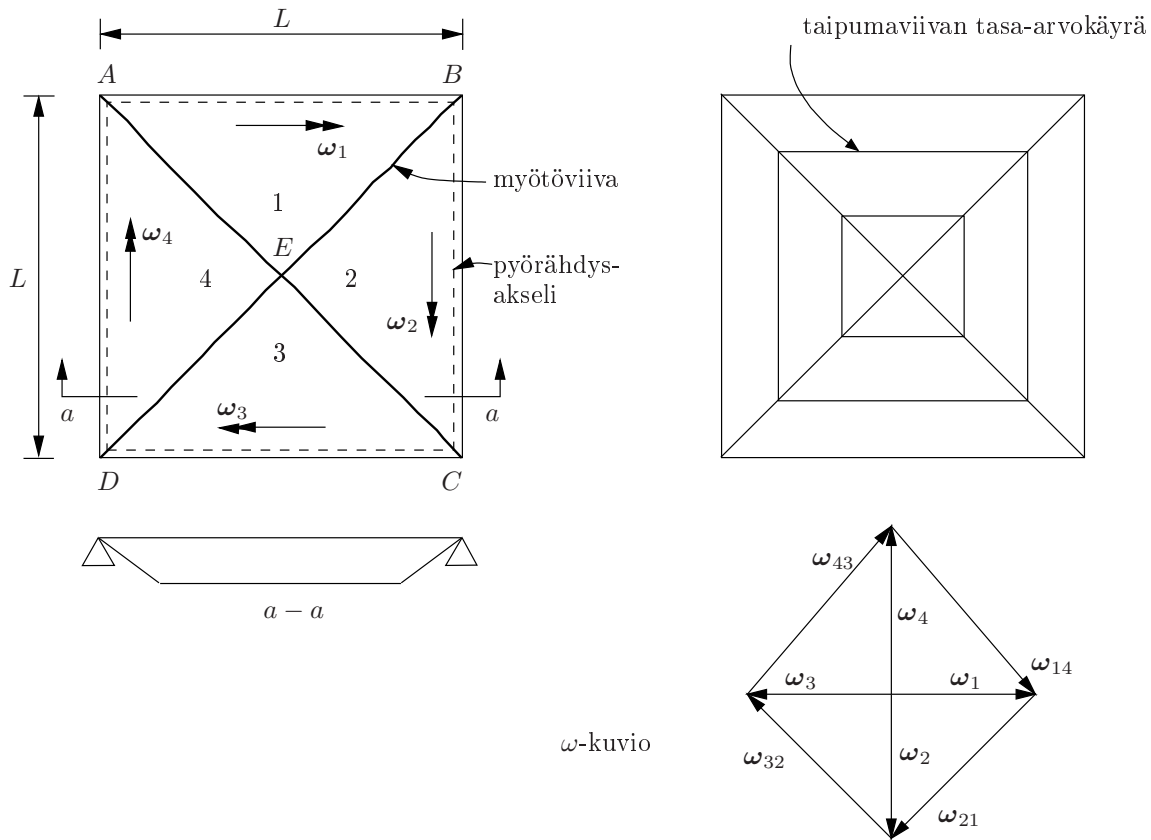
$$L_1 = \frac{\delta}{L \tan \alpha} + \frac{\delta}{L \cot \alpha} = \frac{\delta}{L} (\cot \alpha + \tan \alpha). \quad (15.80)$$

Esimerkki 15.1 Määritetään isotrooppisen, vapaasti tuetun suorakaidelaatan tasaisen kuorman yläraja-arvo.

Kuvan 15.22 vapaasti tuetulla suorakaidelaatalla on tasainen kuorma p_0 . Otaksutaan, että kulma EDC on $\pi/4$. Janan EF taipuma olkoon w . Tällöin

$$\omega_1 = \frac{w}{b/2}, \quad \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_1, \quad (15.81)$$

$$\omega_{21} = \omega_{32} = \omega_{43} = \omega_{14} = \sqrt{2}\omega_1 = 2\sqrt{2}\frac{w}{b}. \quad (15.82)$$



Kuva 15.17 Neliölaatan myötöviivakuviio, taipumapinta ja kiertymäkuviio.

Janalla EF on nivelkiertymä

$$\omega_{13} = 2\omega_1 = 4\frac{w}{b}. \quad (15.83)$$

Kuvan 15.22 perusteella saadaan

$$\begin{aligned} W_s &= m_p \left\{ 4\frac{w}{b}(a-b) + 2\sqrt{2}\frac{w}{b} \cdot 2\sqrt{2}b \right\} \\ &= 4m_p \left(1 + \frac{a}{b} \right) w, \end{aligned} \quad (15.84)$$

ja

$$W_u = p_0 \left\{ \frac{1}{2}(a-b)bw + \frac{1}{3}b^2w \right\} \quad (15.85)$$

tai

$$W_u = p_0 \left\{ \frac{1}{2}abw - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}bw\frac{1}{2}b \right\} = p_0 \frac{1}{2}b^2 \left\{ \frac{a}{b} - \frac{1}{3} \right\} w. \quad (15.86)$$

Asettamalla $W_u = W_s$ tulee

$$p_0^u = 8\frac{m_p}{b^2} \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{1}{3}\frac{b}{a}}. \quad (15.87)$$

Jäykästi tuetun laatan tapauksessa, kun $m_p = m'_p$,

$$W_s = 4m_p \left(1 + \frac{a}{b} \right) w + 4m_p \left(1 + \frac{a}{b} \right) w, \quad (15.88)$$

-----	kiertymisakseli
~~~~~	myötöviiva
~~~~~	negatiivinen myötöviiva
=====	vapaasti tuettu reuna
=====	jäykästi tuettu reuna
=====	vapaa reuna
=====	palkki
■	pilari

Kuva 15.18 Myötöviivateorian merkinnät.

missä jälkimmäinen termi tulee negatiivisilta myötöviivoilta laatan reunalla. Kuvan 15.23 laatalle rajakuorman yläraja on siten kaksinkertainen vapaasti tuetun laatan rajakuormaan verrattuna.

15.4.1 Sisäinen virtuaalinen työ komponenttimuodossa

Laatan osan i kiertyessä myötöviivan osalla a tehty virtuaalinen työ on

$$\begin{aligned} D_a &= |\mathbf{m}_a \cdot \boldsymbol{\omega}| \\ &= m_{ap} l_a \omega \cos \alpha_a. \end{aligned} \quad (15.89)$$

Ortogonaalisesti raudoitetussa laatussa myötöviivan osalla l

$$\mathbf{m} = (m_{py} l_x) \mathbf{i} + (m_{px} l_y) \mathbf{j}, \quad (15.90)$$

missä $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ ovat x :n ja y :n suuntaiset yksikkövektorit. Esittämällä rotaatiovektori komponenttimuodossa

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} \quad (15.91)$$

saadaan

$$D_l = m_{px} l_y \omega_y + m_{py} l_x \omega_x, \quad (15.92)$$

joka on sisäinen virtuaalinen työ osassa i myötöviivan osalla l .

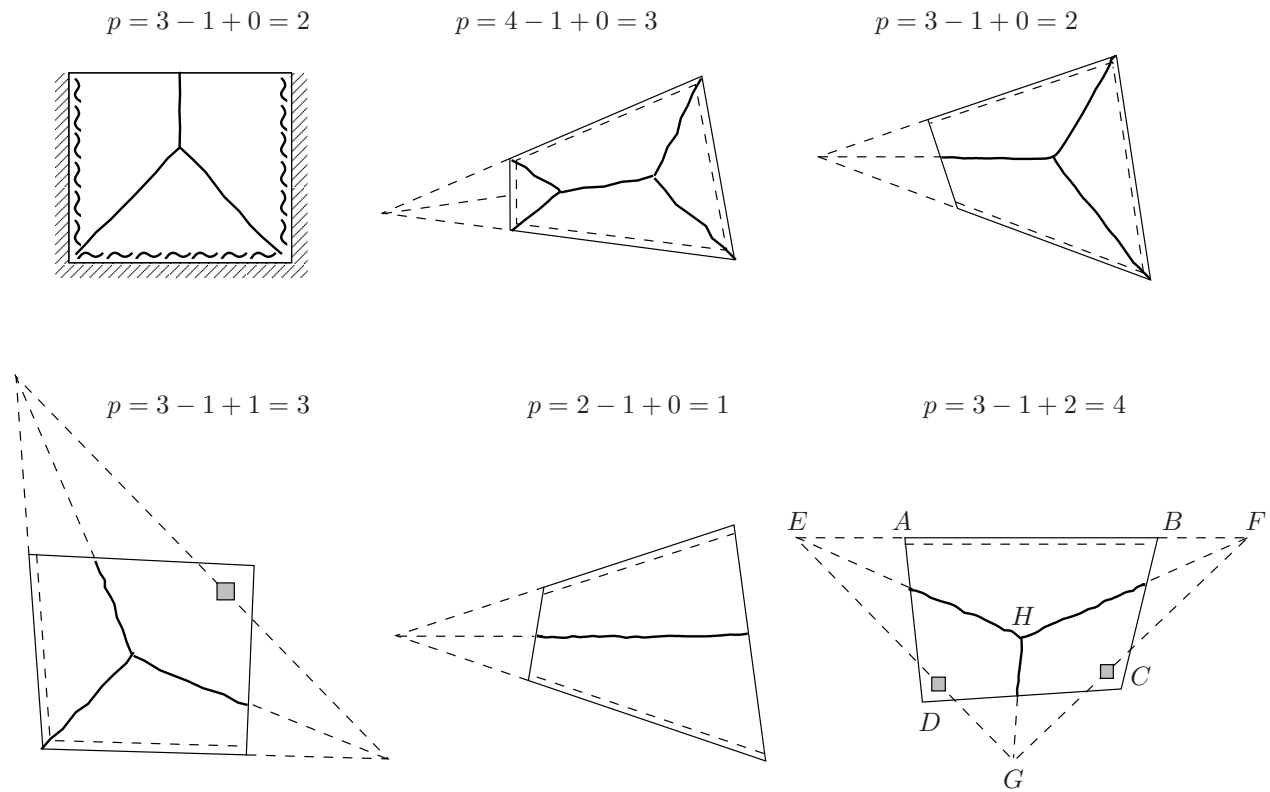
Esimerkki 15.2 *Vapaasti tuetulla ortotrooppisella teräsbetonisella suorakaidelaatalla on tasainen kuorma p . Määritetään plastisen rajakuorman yläraja-arvo.*

Merkitään

$$\omega_1 \equiv \omega. \quad (15.93)$$

Tällöin

$$\omega_2 = \omega \tan \alpha = \omega_1 \frac{b}{2x}, \quad (15.94)$$



Kuva 15.19 Erilaisia myötöviivakuvioita.

missä

$$\tan \alpha = \frac{b/2}{x}. \quad (15.95)$$

Osan 1 kiertäessä on

$$W_{s1} = m_{py} a \omega_1 = m_{py} a \omega, \quad (15.96)$$

ja

$$W_{s3} = W_{s1}. \quad (15.97)$$

Samalla tavalla lasketaan

$$W_{s2} = m_{px} b \omega_2 = m_{px} b \frac{b}{2x} \omega, \quad (15.98)$$

ja sisäinen työ on siten

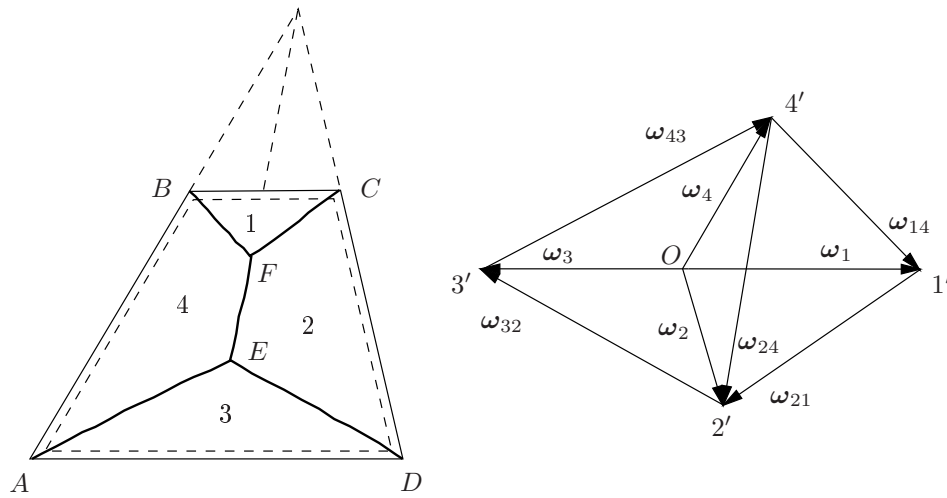
$$W_s = 2(W_{s1} + W_{s2}) = \left\{ m_{py} 2a + m_{px} \frac{b^2}{x} \right\} \omega. \quad (15.99)$$

Ulkoinen työ on puolestaan

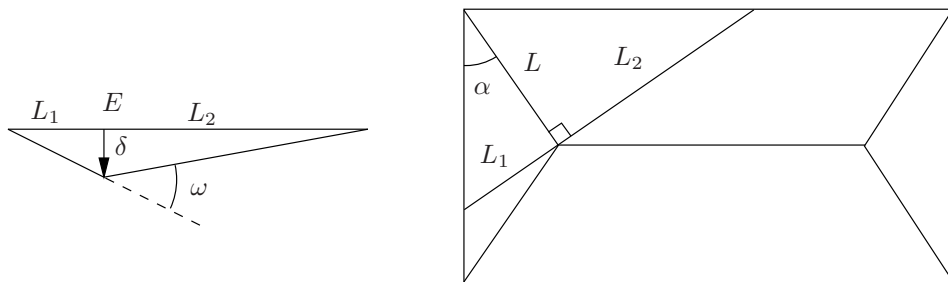
$$W_u = p \left\{ \frac{1}{2}(a - 2x)b + 2 \cdot \frac{1}{3}xb \right\} \frac{b}{2} \omega = p \frac{b^2}{12} (3a - 2x) \omega. \quad (15.100)$$

Työyhtälöstä $W_s = W_u$ seuraa

$$m_{px} \frac{b^2}{x} + m_{py} 2a = p \frac{b^2}{12} (3a - 2x), \quad (15.101)$$



Kuva 15.20 Myötöviivakuvio ja siihen liittyvä kiertymäkuvio.



Kuva 15.21 Laatan osien välinen kiertymä.

mistä ratkaistaan

$$p = \frac{12}{b^2} \frac{m_{px} b^2 + 2m_{py} a x}{x(3a - 2x)}. \quad (15.102)$$

Minimoidaan funktio $p(x)$ x :n suhteen:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow x = \left(\sqrt{1 + 3 \frac{a^2}{b^2} \frac{m_{py}}{m_{px}}} - 1 \right) \frac{b^2}{a^2} \frac{m_{px}}{m_{py}} \frac{a}{2}. \quad (15.103)$$

Tällöin kuorman (ylä)raja-arvoksi tulee

$$p^u = \frac{\frac{24m_{py}}{b^2} \frac{a^2}{b^2} \frac{m_{py}}{m_{px}}}{\left\{ \sqrt{1 + 3 \frac{a^2}{b^2} \frac{m_{py}}{m_{px}}} - 1 \right\}^2}. \quad (15.104)$$

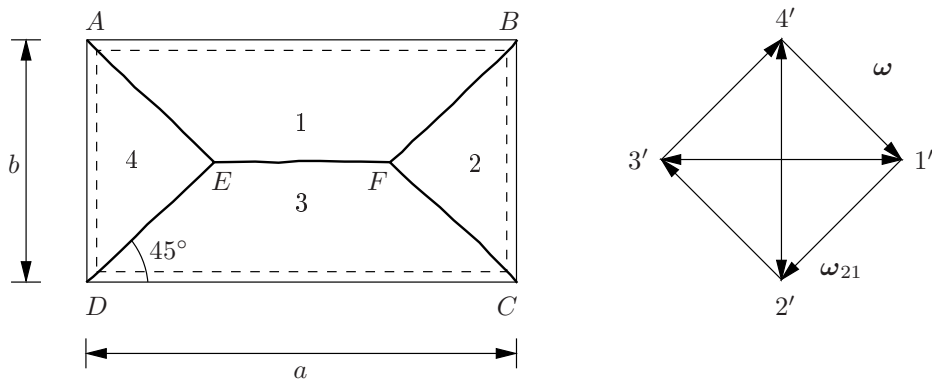
Jos $m_{px} = m_{py}$ ja $a/b = 2$, niin

$$x = (\sqrt{13} - 1) \frac{a}{8} \approx 0.3257a, \quad \tan \alpha \approx 0.76759, \quad \alpha \approx 37.51^\circ \quad (15.105)$$

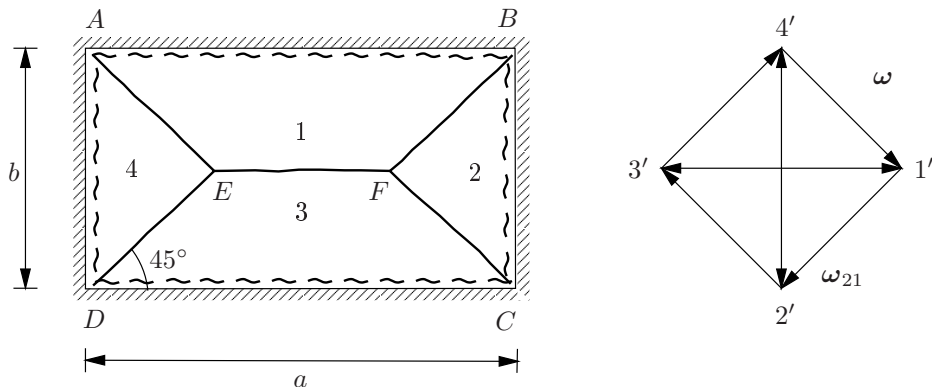
ja

$$p^u = \frac{96m_p/b^2}{\sqrt{13} - 1} \approx 14.1407 \frac{m_p}{b^2}. \quad (15.106)$$

Kaavasta (15.87) seuraa, kun $\alpha = 45^\circ$ ja $a/b = 2$, $p^u \approx 14.4m_p/b^2$.



Kuva 15.22 Vapaasti tuettu suorakaidelaatta.



Kuva 15.23 Jäykästi kiinnitetty suorakaidelaatta.

Esimerkki 15.3 Tarkastellaan isotrooppisesti raudoitettua neliölaattaa, jolla on tasainen kuorma p . Laatan kolme reunaa on vapaasti tuettu ja neljäs on vapaa. Määritetään rajakuorman yläraja-arvo myötöviivamenetelmällä.

Laatan osien 1, 2 ja 3 rotaatiot ovat

$$\omega_1 = \frac{1}{x}, \quad \omega_2 = \frac{2}{L} = \omega_3, \quad (15.107)$$

kun laatan suurin taipuma on $w = 1$. Sisäinen virtuaalinen työ on nyt

$$W_s = m_p L \frac{1}{x} + 2m_p L \frac{2}{L}, \quad (15.108)$$

missä ensimmäinen termi on peräisin osasta 1 ja toinen osista 2 ja 3. Ulkoinen työ on

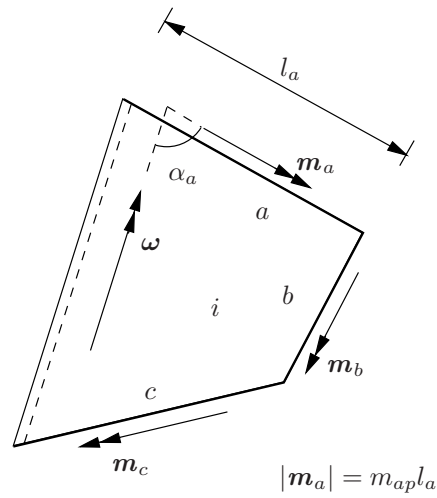
$$W_u = \frac{1}{3} p \frac{Lx}{2} + 2p \left\{ (L-x) \frac{L}{2} \frac{1}{2} + \frac{xL/2}{2} \cdot \frac{1}{3} \right\}, \quad (15.109)$$

missä jälleen 1. termi on peräisin 1. osasta ja toinen osista 2 ja 3. Asettamalla $W_s = W_u$ saadaan työyhtälö

$$m_p \left(\frac{L}{x} + 4 \right) = pL^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{6L} \right). \quad (15.110)$$

Ratkaistaan työyhtälöstä vaihteeksi vaadittava plastinen momentti

$$m_p = pL^2 \left\{ \frac{3 - \frac{x}{L}}{6 \left(\frac{L}{x} + 4 \right)} \right\}. \quad (15.111)$$



Kuva 15.24 Laatan osan i kiertymä.

Ehdosta $dm/dx = 0$ seuraa $x/L \approx 0.65$, ja vaadittava momentti on

$$m_p \approx \frac{pL^2}{14.1}. \quad (15.112)$$

Esimerkki 15.4 Määritetään jäykästi kiinnitetyn ympyrälaatan keskellä olevan pistekuorman yläraja-arvo.

Positiivinen ja negatiivinen momenttikapasiteetti leikkauksessa α ovat

$$m_{p\alpha} = m_{p\varphi} \cos^2 \alpha + m_{pr} \sin^2 \alpha, \quad (15.113)$$

$$m'_{p\alpha} = m'_{p\varphi} \cos^2 \alpha + m'_{pr} \sin^2 \alpha. \quad (15.114)$$

Viuhkamekanismissa

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \dots = \omega_n \equiv \omega, \quad (15.115)$$

$$\omega_{21} = \omega_{32} = \dots \omega_{1n} = \frac{2\pi}{n}\omega. \quad (15.116)$$

Sisäinen työ viuhkassa (1. termi) ja negatiivisella ympyrämyötöviivalla (2. termi) on

$$W_s = nm_{p\varphi} \frac{2\pi}{n} \omega a + nm'_{pr} \omega \frac{2\pi}{n} a = 2\pi a (m_{p\varphi} + m'_{pr}) \omega. \quad (15.117)$$

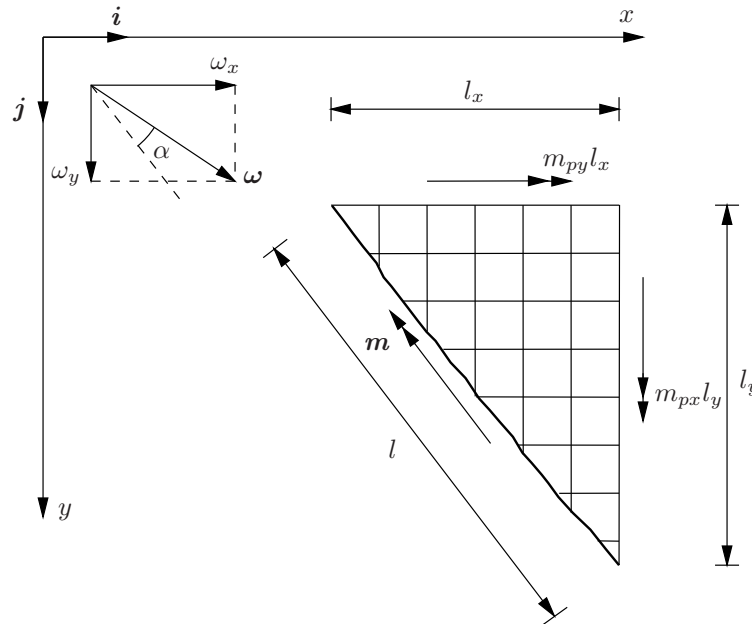
Ulkoinen työ pistekuorman tapauksessa on yksinkertaisesti

$$W_u = F\delta, \quad (15.118)$$

missä $\delta = \omega a$ on keskipisteen taipuma. Asettamalla $W_s = W_u$ seuraa

$$F^u = 2\pi(m_{p\varphi} + m'_{pr}). \quad (15.119)$$

Jos $m_{p\varphi} = m'_{pr} = m_p$, niin kuorman ylärajaksi saadaan $F^u = 4\pi m_p$. Vapaasti tuetun laatan tapauksessa kuorman ylärajaksi saadaan $F^u = 2\pi m_p$.



Kuva 15.25 Rotaatiovektorin ja momenttikapasiteettivektorin komponentit.

Esimerkki 15.5 Lasketaan ympyrälaatan tasaisen kuorman p yläraja-arvo, kun tässä tapauksessa $m_{p\varphi} = m_p$ ja $m'_{pr} = \gamma m_{p\varphi} = \gamma m_p$.

Sisäinen työ on sama kuin edellisessä esimerkissä, eli

$$W_s = 2\pi a(m_p + \gamma m_p)\omega. \quad (15.120)$$

Koska taipumapinta on kartio, saadaan ulkoisen työn lausekkeeksi

$$W_u = \frac{1}{3}p\delta\pi a^2 = \frac{1}{3}p\pi a^3\omega. \quad (15.121)$$

Virtuaalisen työn yhtälöstä seuraa

$$p^u = \frac{6m_p(1 + \gamma)}{a^2}. \quad (15.122)$$

Vapaasti tuetussa laatussa $\gamma = 0$, ja rajakuorma on

$$p^u = \frac{6m_p}{a^2}. \quad (15.123)$$

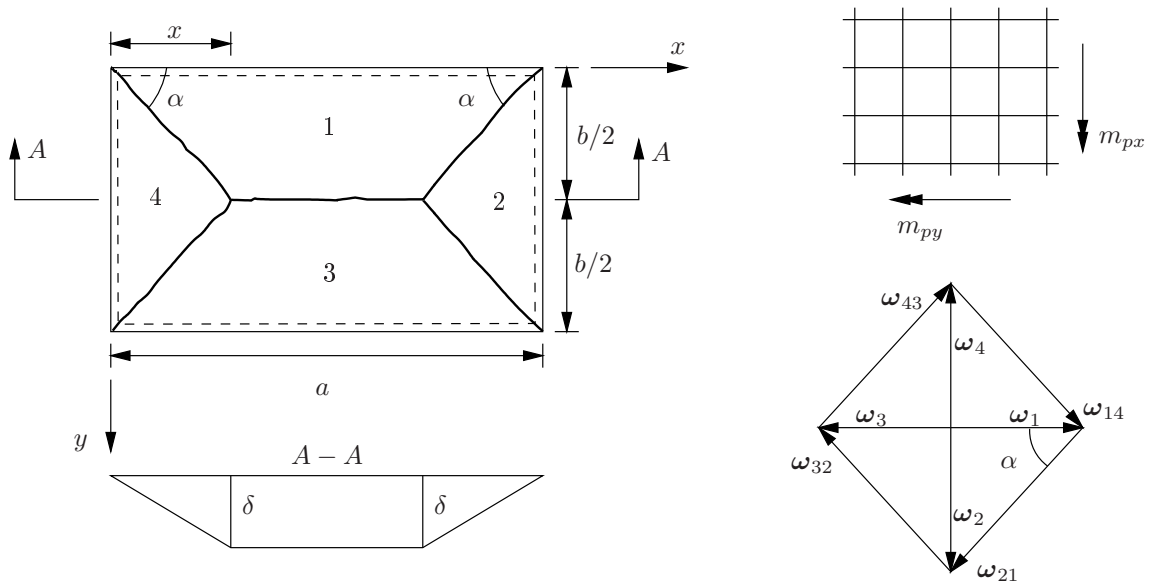
Jos reuna $r = a$ on jäykästi tuettu, niin $\gamma = 1$ ja rajakuormaksi tulee

$$p^u = \frac{12m_p}{a^2}. \quad (15.124)$$

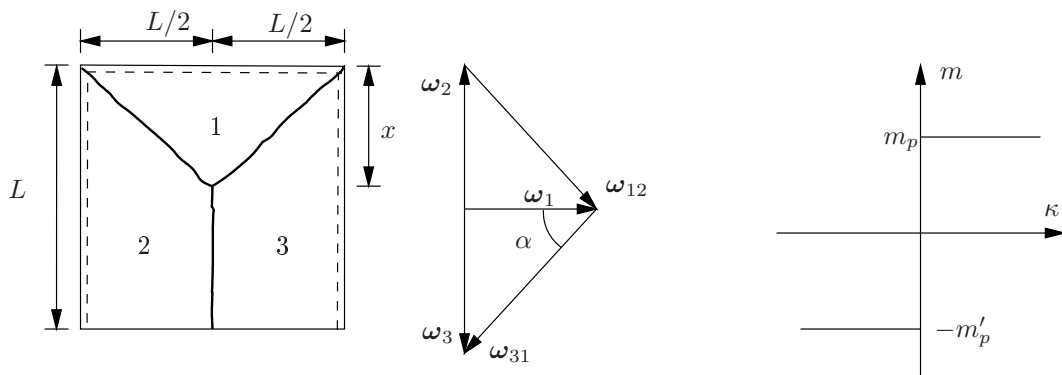
Esimerkki 15.6 Määritetään jäykästi kiinnitetyn isotrooppisen neliölaatan rajakuorma kuvan 15.29 mekanismilla.

Kuvan 15.29 parametri c ja viuhkan säde ovat parametri c ja viuhkan säde ovat

$$c = \frac{a}{2} \tan(45^\circ - \theta) \quad \text{ja} \quad r = \frac{a/2}{\cos(45^\circ - \theta)}. \quad (15.125)$$



Kuva 15.26 Vapaasti tuettu suorakaidelaatta, ortotrooppinen raudoitus.



Kuva 15.27 Kolmelta reunalta vapaasti tuettu ja yhdeltä reunalta vapaa, isotrooppinen laatta.

Merkitään $\omega \equiv \omega_1$. Keskipisteen taipuman w avulla

$$\omega = \frac{2w}{a} \quad (15.126)$$

ja viuhkan kiertymä on

$$\omega_v = \frac{w}{r} = \frac{a}{2r}\omega. \quad (15.127)$$

Sisäinen työ neljässä viuhkassa, viivoilla 12, 23, 34, 45 jne. sekä viivoilla 10, 30, 50 ja 70 on

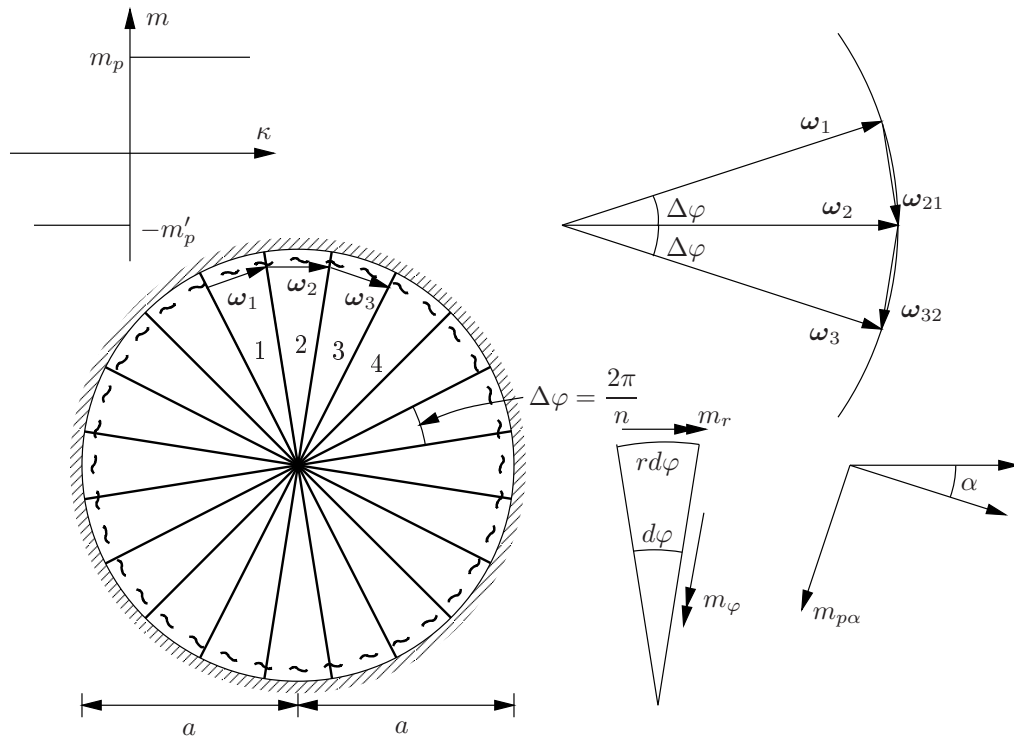
$$W_s = 8\theta r(m_p + \gamma m_p) \frac{a}{2r} \omega + 4(2c)(m_p + \gamma m_p) \omega. \quad (15.128)$$

Sisäisen työn lausekkeeksi tulee

$$W_s = 4m_p \omega a(1 + \gamma)[\theta + \tan(45^\circ - \theta)]. \quad (15.129)$$

Ulkoinen työ on

$$W_u = \frac{1}{3} \frac{8\theta}{2\pi} \pi r^2 \omega \frac{a}{2} p + 4 \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{a}{2} 2c \omega \frac{a}{2} p \quad (15.130)$$



Kuva 15.28 Jäykästi tuettu ympyrälaatta, pistekuorma keskellä.

eli

$$W_u = p \frac{\omega a^3}{6} \left[\tan(45^\circ - \theta) + \frac{\theta}{\cos^2(45^\circ - \theta)} \right]. \quad (15.131)$$

Työyhtälöstä seuraa nyt

$$p^u = \frac{24m_p(1+\gamma)}{a^2} \frac{\theta + \tan(45^\circ - \theta)}{\tan(45^\circ - \theta) + \frac{\theta}{\cos^2(45^\circ - \theta)}} \quad (15.132)$$

$$= f(\theta) \frac{24m_p(1+\gamma)}{a^2},$$

missä

$$f(\theta) = \frac{\theta + \tan(45^\circ - \theta)}{\tan(45^\circ - \theta) + \frac{\theta}{\cos^2(45^\circ - \theta)}} \quad (15.133)$$

$$= 1 - \frac{\theta(1 - \sin 2\theta)}{2\theta + \cos 2\theta}.$$

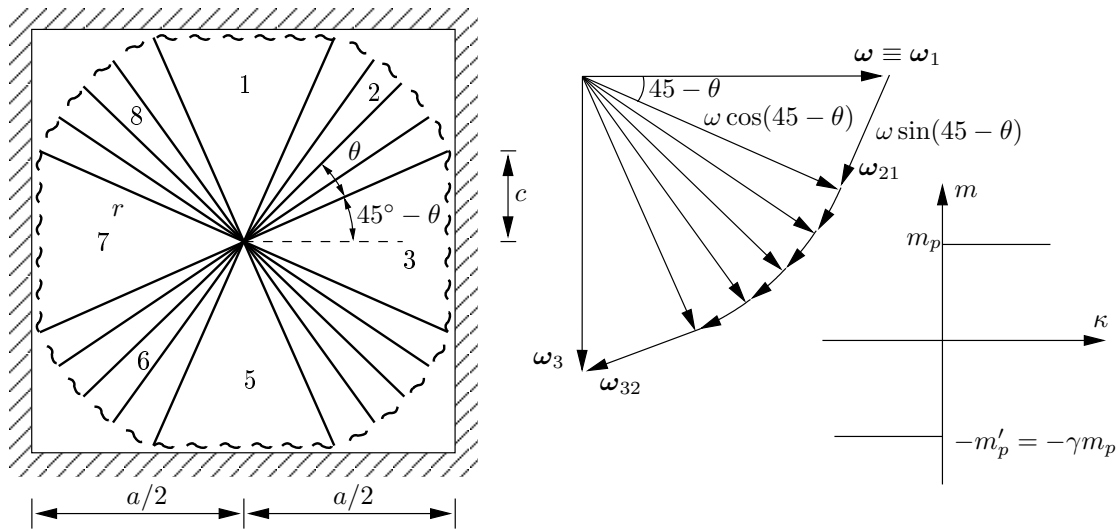
Funktion f minimiarvo on

$$f_{\min} \approx 0.9055, \text{ kun } \theta \approx 0.25 \text{ eli } \theta \approx 14.3^\circ. \quad (15.134)$$

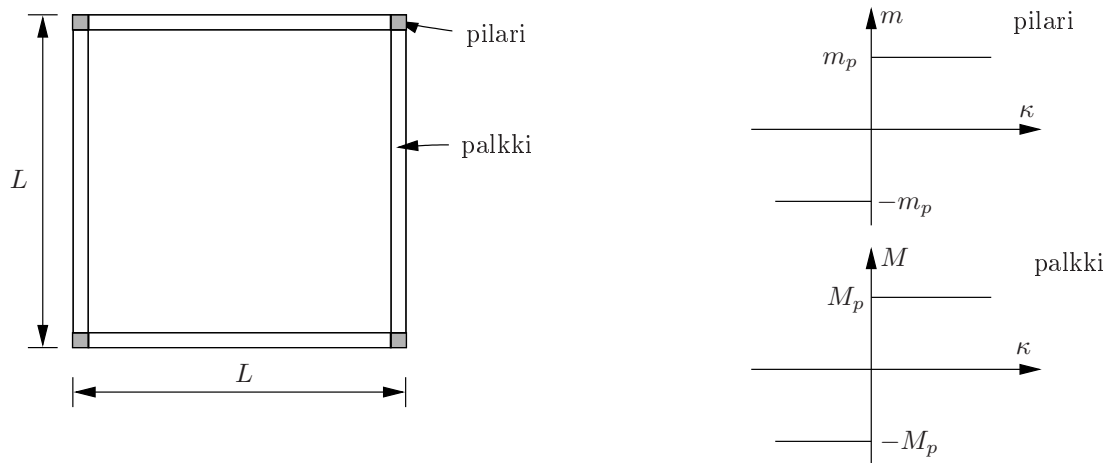
Tällöin

$$p^u \approx 0.9055 \frac{24m_p}{a^2} \approx 21.75 \frac{m_p}{a^2}, \text{ kun } \gamma = 0, \quad (15.135)$$

$$p^u \approx 0.9055 \frac{48m_p}{a^2} \approx 43.46 \frac{m_p}{a^2}, \text{ kun } \gamma = 1. \quad (15.136)$$



Kuva 15.29 Jäykästi tuettu neliölatta.



Kuva 15.30 Reunapalkein vahvistettu ja pilareilla tuettu laatta.

Esimerkki 15.7 Määritetään kuvan 15.30 mukaisen reunapalkeilla vahvistetun ja pilarein tuetun neliölaatan tasaisen kuorman p raja-arvo.

a) Jos reunapalkit ovat tarpeeksi vahvat, niin laatta sortuu kuvan 15.31 mekanismin mukaisesti ja tällöin

$$p^u = \frac{24m_p}{L^2}. \quad (15.137)$$

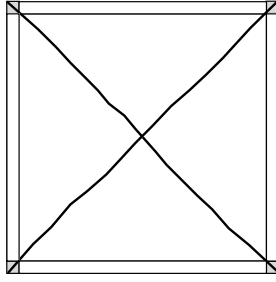
b) Kuvan 15.32 mekanismien tapauksessa

$$W_s = m_p L \left(2 \cdot \frac{1}{L/2} \right) + 2M_p \left(2 \cdot \frac{1}{L/2} \right) = 4m_p + \frac{8M_p}{L}, \quad (15.138)$$

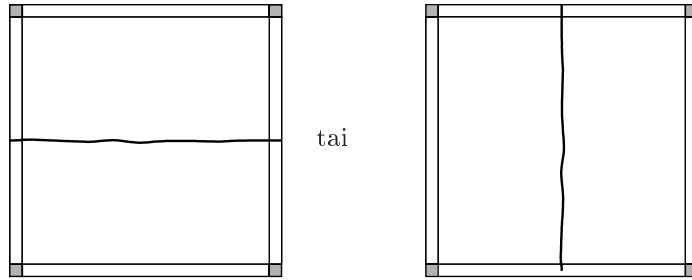
$$W_u = pL \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{pL^2}{2}, \quad (15.139)$$

ja ehdosta $W_s = W_u$ seuraa

$$p^u = \frac{8m_p}{L^2} \left(1 + \frac{2M_p}{m_p L} \right), \quad (15.140)$$



Kuva 15.31 Laatan sortumismekanismi, kun reunapalkit ovat riittävän vahvat.



Kuva 15.32 Reunapalkein tuetun laatan mekanismeja.

missä m_p on laatan plastinen momentti ja M_p on palkin plastinen momentti.

c) Kuvan 15.33 mekanismeilla saadaan sisäisen työn lauseke

$$\begin{aligned} W_s &= \left\{ m_p L \left(2 \cdot \frac{1/2}{L/2} \right) + 2M_p \left(2 \cdot \frac{1/2}{L/2} \right) \right\} \cdot 2 \\ &= 4m_p + \frac{8M_p}{L} \end{aligned} \quad (15.141)$$

ja ulkoisen työn lauseke

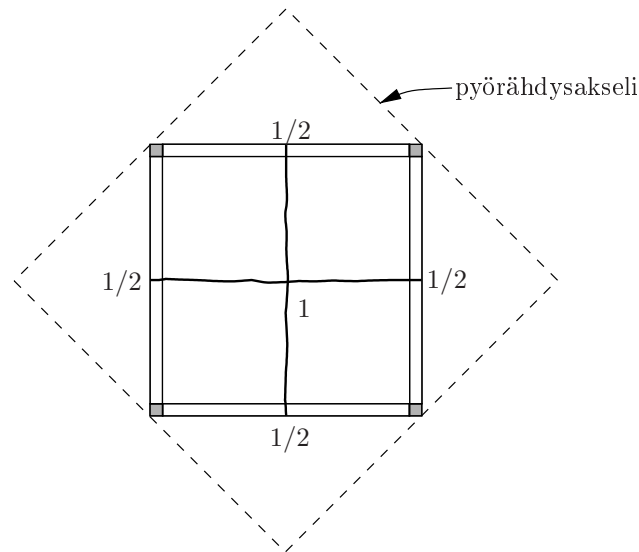
$$W_u = p \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{pL^2}{2}. \quad (15.142)$$

Työyhtälöstä $W_s = W_u$ ratkaistaan

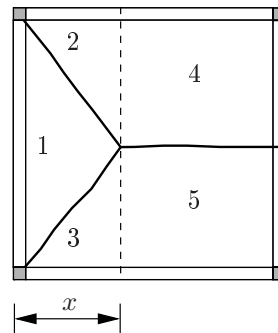
$$p^u = \frac{8m_p}{L^2} \left(1 + \frac{2M_p}{m_p L} \right). \quad (15.143)$$

d) Kuvan 15.34 tapauksessa oikea palkki on heikompi ja työlausekkeiksi saadaan

$$\begin{aligned} W_s &= m_p L \left(2 \cdot \frac{1}{L/2} \right) + M_p \left(2 \cdot \frac{1}{L/2} \right) + m_p L \frac{1}{x} \\ &= 4m_p + \frac{4M_p}{L} + \frac{m_p L}{x} \\ &= 4m_p \left(1 + \frac{M_p}{m_p L} + \frac{L}{4x} \right) \end{aligned} \quad (15.144)$$



Kuva 15.33 Reunapalkein tuetun laatan mekanismi.



Kuva 15.34 Reunapalkein tuetun laatan mekanismi.

ja

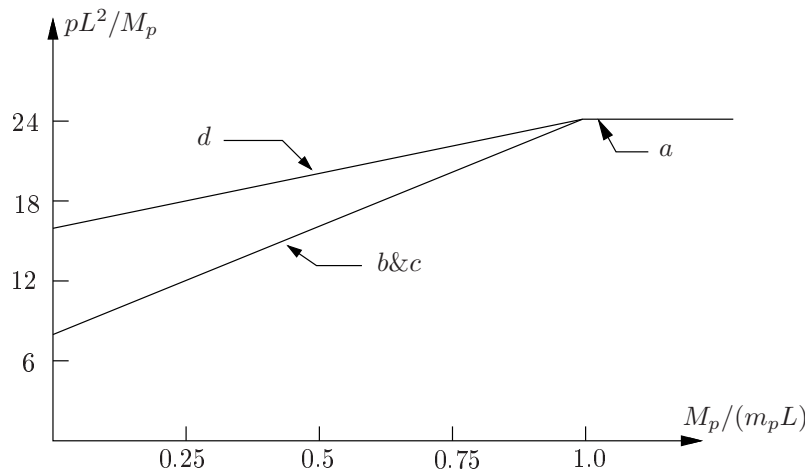
$$\begin{aligned}
 W_u &= p \frac{Lx}{2} \cdot \frac{1}{3} + p \frac{L}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + p(L-x) \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \\
 &= p \frac{Lx}{6} + p \frac{Lx}{6} + p \frac{L^2}{2} - p \frac{Lx}{2} \\
 &= \frac{pL}{2} \left(L - \frac{x}{3} \right).
 \end{aligned} \tag{15.145}$$

Työyhtälöstä seuraa kuvan 15.34 mekanismin tapauksessa

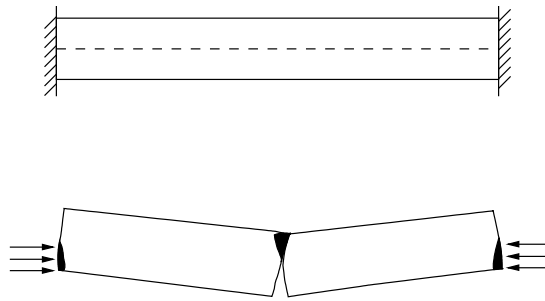
$$p^u = \frac{\frac{8m_p}{L} \left(1 + \frac{M_p}{m_p L} + \frac{L}{4x} \right)}{\left(L - \frac{x}{3} \right)}. \tag{15.146}$$

Eri mekanismien antamat rajakuormat on esitetty kuvassa 15.35 suhteen $M_p/(m_p L)$ funktiona.

Myötöviivamenetelmän ratkaisut ovat ylärajaratkaisuuksina epävarmalla puolella. Menetelmään sisältyy kuitenkin lisävarmuutta, jota ei otettu huomioon. Teräsbetonilaatan rau-



Kuva 15.35 Reunapalkein tuetun laatan rajakuorma mekanismeilla a , b , c ja d .



Kuva 15.36 Holvivaikutus.

doituksen myötölujittumisen ansiosta laatan plastinen momentti voi olla laskettua suurempi.

Kuvan 15.15 kokeesta mitatun kuorma-siirtymä-käyrän tangentin kulmakerroin pienenee ensin, mutta alkaa myöhemmin kasvaa syntyvien kalvovoimien ansiosta.

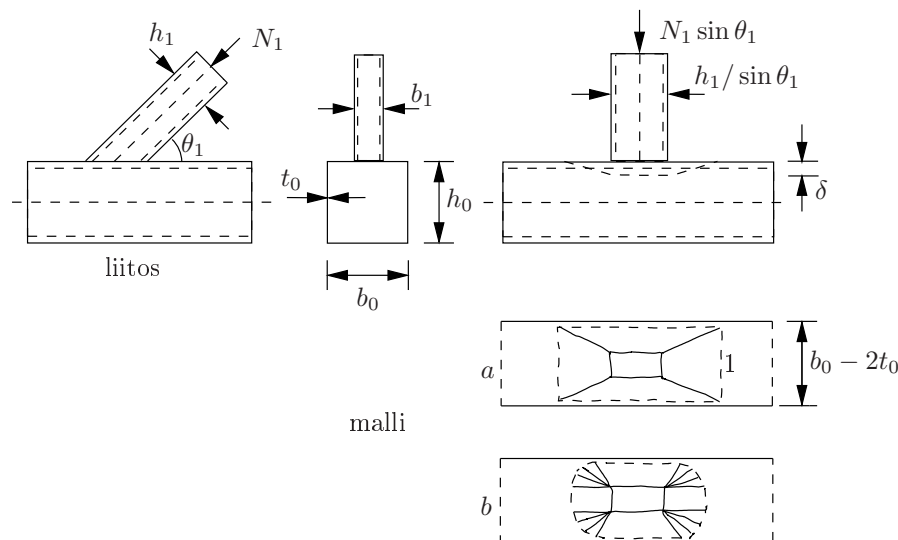
Erityisesti, jos laatan reunat on tuettu jäykästi vaakasuunnassa, rajakuorma voi holvautumisen takia kasvaa jopa 200%, kuva 15.36. Tätä ilmiötä ei kuitenkaan voida hyödyntää käytännössä, koska holvautuminen kehittyy vasta suurilla taipuman arvoilla ja tukien periksiantamattomuutta on vaikea arvioida. Se antaa kuitenkin lisävarmuutta myötöviivamenetelmän ratkaisuihin.

Myötöviivateoriaa voidaan soveltaa myös esim. teräsrakenteiden liitosten suunnittelussa, kuva 15.37.

Kuvissa 15.38 ja 15.39 on esitetty lisää esimerkkejä mekanismeista ja myötöviivakuvioista, joilla voi johtaa ylärajaratkaisuja erilaisille laatoille tasaisen kuorman ja pistekuorman tapauksessa.

15.5 Alarajaratkaisut

Alarajalauseen mukaan laatan kuorma on korkeintaan plastisen rajakuorman suuruinen, jos laatan momentit toteuttavat tasapainoyhtälöt eivätkä riko myötöehtoa.



Kuva 15.37 Liitoskohdan myötöviivakuvioita.

Esimerkki 15.8 Tarkastellaan alarajaratkaisujen esimerkkinä vapaasti tuettua neliölaattaa, jota kuormittaa tasainen paine p .

Otaksutaan laattaan momenttijakaumat

$$m_x = m_p \left[1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right], \quad (15.147)$$

$$m_y = m_p \left[1 - \left(\frac{2y}{a} \right)^2 \right], \quad (15.148)$$

$$m_{xy} = 0. \quad (15.149)$$

Otaksutaan materiaalin noudattavan Trescan myötöehtoa, eli laatan rasitetuimmassa kohdassa keskellä

$$m_x = m_y \leq m_p. \quad (15.150)$$

Sijoittamalla momenttien lausekkeet tasapainoyhtälöön

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p \quad (15.151)$$

saadaan Trescan myötöehdon tapauksessa yhtälö

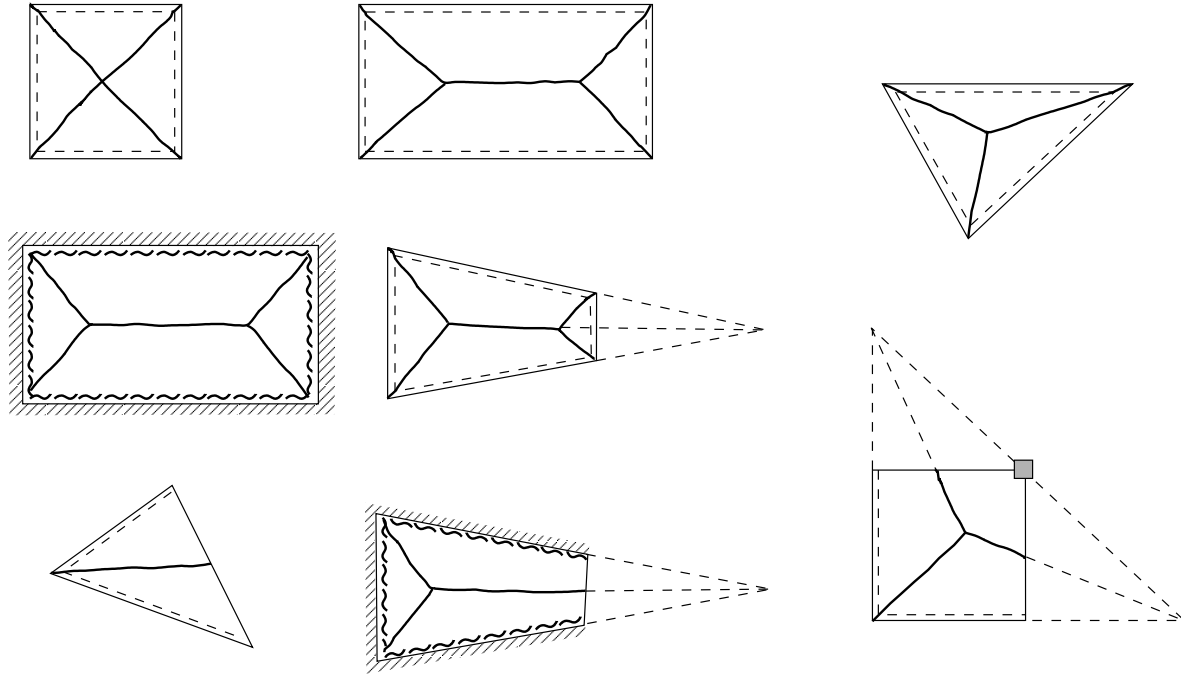
$$-\frac{8m_p}{a^2} + 0 - \frac{8m_p}{a^2} = -p, \quad (15.152)$$

mistä seuraa alarajaratkaisu (lower bound)

$$p^l = \frac{16m_p}{a^2}. \quad (15.153)$$

Otaksumalla

$$m_x = m_p \left[1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right], \quad (15.154)$$



Kuva 15.38 Myötöviivakuvioita, tasainen kuorma.

$$m_y = m_p \left[1 - \left(\frac{2y}{a} \right)^2 \right], \quad (15.155)$$

$$m_{xy} = -\frac{m_p}{2} \left(\frac{2x}{a} \right) \left(\frac{2y}{a} \right) \quad (15.156)$$

ja sijoittamalla momentit tasapainoehtoon saadaan Trescan ehdon tapauksessa parempi alaraja

$$p^l = \frac{20m_p}{a^2}. \quad (15.157)$$

Käyttämällä kimmoisen laatan keskipisteen momentteja

$$m_x = m_y = m_{\max} \approx 0.0479pa^2 \text{ ja } m_{xy} = 0 \quad (15.158)$$

saadaan Trescan ehdon perusteella

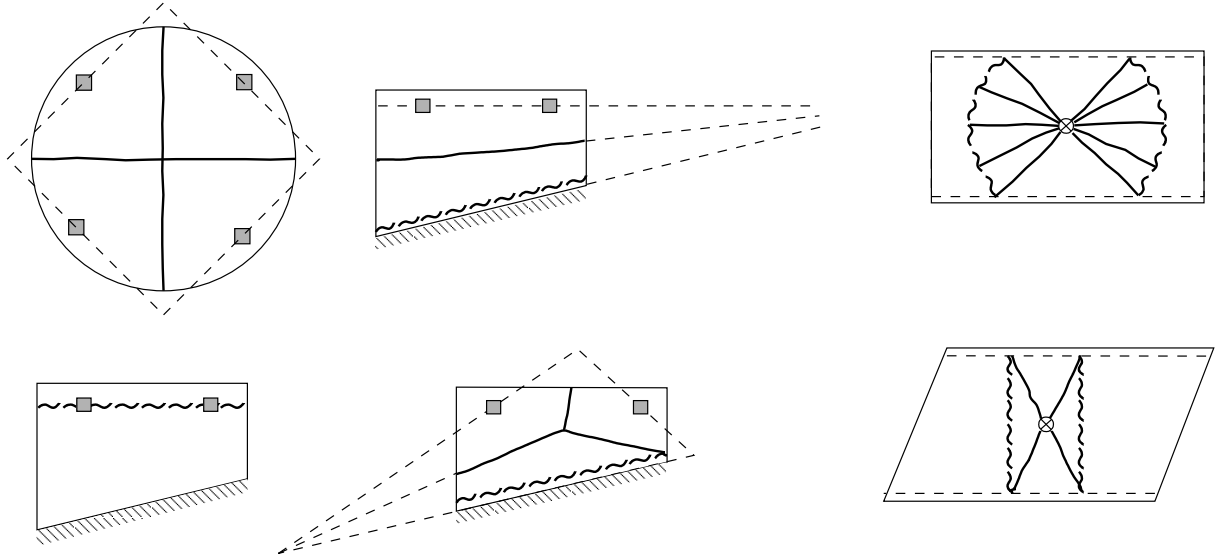
$$p^l = \frac{20.8m_p}{a^2}. \quad (15.159)$$

Esimerkki 15.9 Tarkastellaan kuvan 15.41 vapaasti tuettua suorakaidelaattaa, jota kuormittaa tasainen paine p .

Laattaan otaksutaan momentit

$$m_x = m_p \left[1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right], \quad (15.160)$$

$$m_y = m_p \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right], \quad (15.161)$$



Kuva 15.39 Myötöviivakuvioita, tasainen tai pistekuorma.

$$m_{xy} = -\gamma m_p \left(\frac{2x}{a} \right) \left(\frac{2y}{b} \right), \quad (15.162)$$

missä γ on vakioparametri. Merkitään

$$\xi = \frac{2x}{a} \quad \text{ja} \quad \eta = \frac{2y}{b}. \quad (15.163)$$

Myötöehdon tarkastamista varten lasketaan seuraavaksi laatan päämomentit

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{m_x + m_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_x - m_y}{2} \right)^2 + m_{xy}^2} \\ &= m_p \left\{ \left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right)^2 - (1 - \gamma^2)\xi^2\eta^2} \right\}. \end{aligned} \quad (15.164)$$

a) Johansenin myötöehdon mukaan

$$|m_1| \leq m_p, \quad (15.165)$$

$$|m_2| \leq m_p, \quad (15.166)$$

jolloin kaavan (15.164) perusteella vaaditaan, että

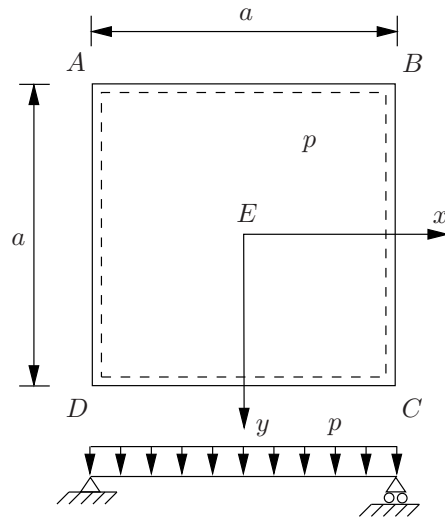
$$\gamma \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \text{valitaan} \quad \gamma = 1. \quad (15.167)$$

b) Trescan ehdon mukaan

$$\max\{|m_1|, |m_2|, |m_1 - m_2|\} \leq m_p. \quad (15.168)$$

Ehdot

$$|m_1| \leq m_p, \quad |m_2| \leq m_p \quad (15.169)$$



Kuva 15.40 Vapaasti tuettu neliölaatta, tasainen kuorma.

toteutuvat, jos (vrt. a-kohta)

$$\gamma \leq 1. \quad (15.170)$$

Ehdon

$$|m_1 - m_2| = 2m_p \sqrt{\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right)^2 - (1 - \gamma^2)\xi^2\eta^2} \leq m_p \quad (15.171)$$

tarkastamiseksi merkitään

$$\alpha = \xi^2 \quad \text{ja} \quad \beta = \eta^2, \quad (15.172)$$

ja haetaan funktion $|m_1 - m_2|$ ääriarvot ehdoista

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} |m_1 - m_2| = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} |m_1 - m_2| = 0, \quad (15.173)$$

joista seuraa

$$\alpha = \beta \quad \text{eli} \quad \xi^2 = \eta^2. \quad (15.174)$$

Myötöehdon toteutumisen kannalta kriittinen piste on siten laatan lävistäjällä $\xi = \eta$. Funktion $|m_1 - m_2|$ maksimi on

$$|m_1 - m_2| = 2\gamma\xi^2 m_p, \quad (15.175)$$

ja ehdosta

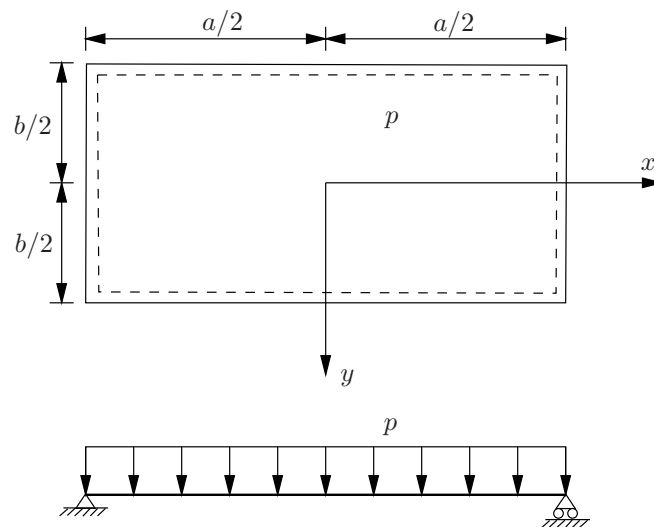
$$|m_1 - m_2| \leq m_p \quad (15.176)$$

seuraa

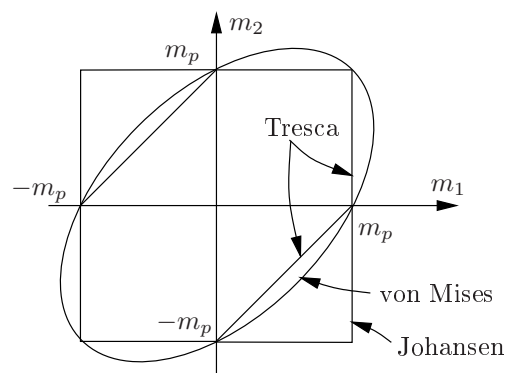
$$\gamma \leq \frac{1}{2}, \quad \text{valitaan} \quad \gamma = \frac{1}{2}. \quad (15.177)$$

c) Koska von Misesin myötöehtoa esittävä käyrä sulkee sisäänsä Trescan ehdon monikulmion, voidaan valita $\gamma = 1/2$ myös von Misesin ehdon tapauksessa murtokuorman alarajan saamiseksi. Sijoittamalla momentit (15.160), (15.161) ja (15.162) tasapainoyhtälöön (15.151) saadaan rajakuormalle alaraja-arvo

$$p^l = \frac{8m_p}{b^2} \left(1 + \gamma \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right). \quad (15.178)$$



Kuva 15.41 Vapaasti tuettu suorakaidelaatta.



Kuva 15.42 Johansenin, Trescan ja von Misesin myötöehdot.