Mekaniikan matematiikkaa

Eero-Matti Salonen

1995

ISSN 1237-4903

ISBN 951-22-2753-3

TKK OFFSET

(korjattu versio 1998)

ALKUSANAT

Tämä moniste on tarkoitettu tukiaineistoksi mekaniikan laboratorion perusmekaniikan opetukseen erityisesti statiikan ja dynamiikan kursseihin. Monisteessa on esitetty lähinnä kaavakokoelmatyyliin joitakin tarvittavia matemaattisia apuvälineitä. Niihin tutustuminen voi helpottaa mekaniikan omaksumista, etenkin mikäli lukija ei ole vielä ehtinyt perehtyä riittävästi varsinaisissa matematiikan opinnoissaan kyseisiin aiheisiin.

Monisteen kaavat on numeroitu turhan pitkien kaavanumeroiden välttämiseksi kunkin toisen tason luvun sisällä aina yhdestä eteenpäin. Viitattaessa kyseisen luvun ulkopuoliseen kaavaan on kaavanumero varustettu tällöin lisäksi luvun otsikkonumerolla; esimerkiksi kaava (5.1.2) on luvun 5.1 kaava (2).

Lähteisiin [Salonen 1998, Salonen 1999] ja [Salonen 1995] viitataan lyhyemmillä merkinnöillä [Dyn] ja [Stat].

Kiitän laboratoriomme toimistosihteeri Tuula Donskoita puhtaaksikirjoituksesta ja kuvien laadinnasta, tekn.lis. Jouni Freundia käsikirjoitukseen liittyvistä huomautuksista ja tekn.lis. Risto Huhtasta neuvoista kuvien laadinnassa.

SISÄLLYSLUETTELO

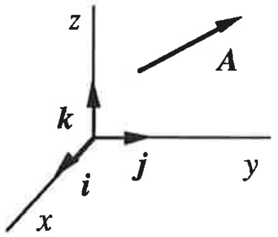
1 VEKTORILASKENTA

Seuraavassa esitetään lyhyesti joitakin tärkeimpiä vektoreihin liittyviä käsitteitä ja kaavoja ilman todistuksia. Lähde [Väisälä] on alan mestarillinen suomenkielinen perusteos, jota on lainattu tässä voimallisesti.

1.1 VEKTORI

Vektori (vector) on suure, jolla on suuruus ja suunta ja joka noudattaa tiettyjä lakeja. Vektoria merkitään tässä kuten yleensä painetussa tekstissä lihavalla kirjaimella. Käsin kirjoitettaessa kirjain varustetaan tavallisesti ylänuolella tai viivalla.

Vektorin $\boldsymbol{A}$ (käsin kirjoitettaessa $\vec{A}$ tai $\overline{A}$) esitys karteesisessa suorakulmaisessa *xyz*-koordinaatistossa (kuva 1.1) on



Kuva 1.1 Karteesinen suorakulmainen koordinaatisto.

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} \ , \tag{1}$$

jossa $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ovat koordinaattiakselien suuntaiset yksikkövektorit sekä A_x, A_y, A_z vastaavat skalaarikomponentit. Yksikkövektoreita pidetään dimensiottomina.

Vektorin $\boldsymbol{A}$ suuruus eli täsmällisemmin *itseisarvo* eli pituus (magnitude, length)

$$|\boldsymbol{A}| \equiv A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \, . \tag{2}$$

Komponentit ovat

$$\begin{aligned} A_x &= A\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{i}) \, , \\ A_y &= A\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{j}) \, , \\ A_y &= A\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{k}) \, . \end{aligned} \tag{3}$$

Vektorin $\boldsymbol{A}$ suuntainen yksikkövektori

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{A}}{A} \, . \tag{4}$$

Merkinnällä $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ tarkoitetaan tässä ja jatkossa vektorien $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ välistä kulmaa "lyhintä tietä mitattuna" eli $0 \leq (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \leq \pi$. Kulma mitataan tasossa, jonka vektorit virittävät, kun ne on saatettu yhdensuuntaissiirrolla alkamaan samasta pisteestä.

1.2 VEKTORIEN SUMMA

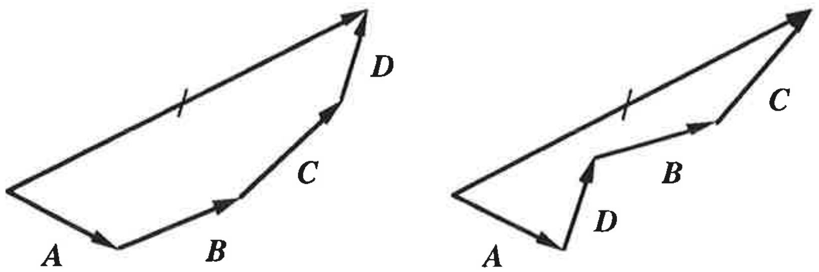
Kahden vektorin $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ summavektorin $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ määritelmä selviää kuvasta 1.2.

Kuva 1.2 (a) "Kolmiosääntö". (b) "Suunnikassääntö".

Kaavoja:

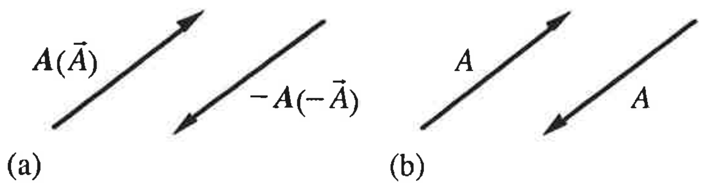
$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \quad \text{(vaihdantalaki)}, \\ &= (A_x+B_x)\boldsymbol{i}+(A_y+B_y)\boldsymbol{j}+(A_z+B_z)\boldsymbol{k}, \qquad (1) \\ \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) &= (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} \quad \text{(liitäntälaki).} \end{aligned}$$

Vaihdanta- ja liitäntälakien perusteella useampien vektorien summa voidaan muodostaa yhdistämällä yhteenlaskettavat mielivaltaisessa järjestyksessä ja ryhmittäinkin. Esimerkkinä käyköön kuvan 1.3 esittämä tapaus. Oheisissa kuvissa summavektori on varustettu poikkiviivalla. Tätä merkintää käytetään joskus etenkin voimavektoreiden yhteydessä korostamaan sitä, että summa ja yhteenlaskettavat ovat erikseen samanarvoiset eivätkä siis "vaikuta" samanaikaisesti.



Kuva 1.3 Vektorien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ summan muodostaminen kahdessa eri järjestyksessä.

Vektorin $\boldsymbol{A}$ *vastavektori* $-\boldsymbol{A}$ on vektori, joka on vektorin $\boldsymbol{A}$ pituinen mutta vastakkaissuuntainen (kuva 1.4 (a)). Mekaniikassa vastavektori-käsite esiintyy jatkuvasti etenkin vapaakappalekuvi-



Kuva 1.4 (a) Vektori ja vastavektori (lihavat tunnukset tai nuolet tunnusten yläpuolella).
(b) Vaihtoehtoinen esitystapa (laihat tunnukset).

oissa voiman ja vastavoiman lain yhteydessä. Tällöin on kuitenkin usein syytä luopua käyttämästä lihavaa kirjasinta tai nuolimerkkiä voimavektoreiden tunnusten yläpuolella ja käyttää pelkästään laihoja tunnuksia ja antaa itse nuolen kuvata voiman vektoriluonnetta ja suuntaa kuvan (b) tapaan. Jos nimittäin toimitaan kuvan (a) merkinnöin, lopullisiin yhtälöihin saattaa kokemuksen mukaan tulla helposti merkkivirheitä, kun vastavektorin suunta otetaan väärin kahdesti huomioon ensin nuolen suuntana ja sitten vielä miinusmerkkinä.

Vektorien $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ *erotus* $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ määritellään vektorin $\boldsymbol{A}$ ja vektorin $\boldsymbol{B}$ vastavektorin $-\boldsymbol{B}$ summana.

1.3 LUVUN JA VEKTORIN TULO

Luvun (skalaarin) p ja vektorin $\boldsymbol{A}$ tulo $p\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}p$ on vektori (kuva 1.5), jonka itseisarvo on $|p|A$ ja suunta sama kuin vektorilla $\boldsymbol{A}$ tai $-\boldsymbol{A}$ sen mukaan, onko p positiivinen tai negatiivinen. (Kuvassa p on positiivinen ja > 1.)

Kuva 1.5 Vektorit $\boldsymbol{A}$ ja $p\boldsymbol{A}$.

Kaavoja:

$$p\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}p$$

$$= pA_x\boldsymbol{i} + pA_y\boldsymbol{j} + pA_z\boldsymbol{k}\,,$$

$$p(q\boldsymbol{A}) = (pq)\boldsymbol{A}\,, \qquad (1)$$

$$p(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = p\boldsymbol{A} + p\boldsymbol{B}\,,$$

$$(p+q)\boldsymbol{A} = p\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{A}\,.$$

1.4 SKALAARITULO

Vektorien $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ *skalaaritulo* eli pistetulo (scalar product, dot product) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ on skalaari, jonka arvo määritellään kaavalla

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\,. \qquad (1)$$

Skalaaritulo on nolla, jos tekijävektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan tai jos ainakin toinen niistä on nolla.

Skalaaritulo esiintyy mekaniikassa etenkin työn käsitteen yhteydessä.

Kaavoja:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\,,$$

$$(p\boldsymbol{A})\cdot(q\boldsymbol{B}) = pq(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,, \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\,,$$

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\,.$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A^2\,, \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1\,,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = 1\,,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1\,,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = 0\,, \qquad (4)$$

$$j \cdot k = k \cdot j = 0\,,$$

$$k \cdot i = i \cdot k = 0\,.$$

Huomattakoon, että

$$\cos(A, B) = \frac{A \cdot B}{AB} \tag{5}$$

ja jos e on yksikkövektori,

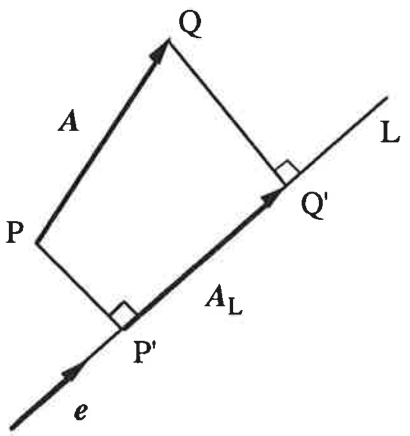
$$A\cos(A, e) = A \cdot e \tag{6}$$

ja jos e_1 ja e_2 ovat yksikkövektoreita

$$\cos(e_1, e_2) = e_1 \cdot e_2\,. \tag{7}$$

1.5 VEKTORIN KOMPONENTIT

Olkoon L yksikkövektorin e suuntaama suora (kuva 1.6). Vektorin A *vektorikomponentti* (ortogonaaliprojektio) A_L suoralla L saadaan kaavasta



Kuva 1.6 Vektorikomponentti.

$$A_L = A_L e\,, \tag{1}$$

jossa

$$A_L = A\cos(A, e) = A \cdot e \tag{2}$$

on vektorin A skalaarikomponentti suoralla L. Projektiopisteet P' ja Q' saadaan vektorin A alku- ja loppupisteiden P ja Q kautta kulkevien suoraa L vastaan kohtisuorassa olevien tasojen ja suoran L leikkauspisteinä.

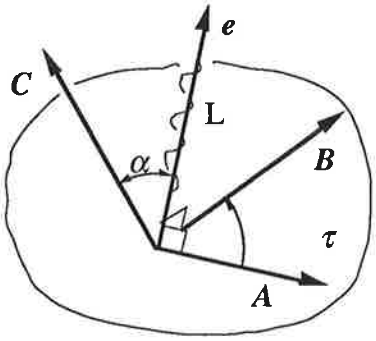
Jos yksikkövektorin e suunta muutetaan vastakkaiseksi, vektori A_L ei muutu, mutta skalaari A_L vaihtaa merkkinsä.

Kaavat (1.1.3) ovat kaavan (2) erikoistapauksia; $e \to i, j, k$.

Skalaaritulon (1.4.1) voidaan siis sanoa olevan arvoltaan yhtä kuin edellisen (jälkimmäisen) vektorin itseisarvo kertaa jälkimmäisen (edellisen) vektorin skalaarikomponentti edellisen (jälkimmäisen) suunnalla.

1.6 OIKEAN KÄDEN SYSTEEMI

Kolmen vektorin A, B, C sanotaan muodostavan tässä järjestyksessä *oikean käden systeemin* (right-handed system) eli oikeakätisen systeemin, jos ne samasta pisteestä alkavina ovat suunnatut samassa järjestyksessä kuin oikean käden peukalo, etusormi ja keskisormi. Tarkas-



tellaan asiaa täsmällisemmin kuvan 1.7 avulla. Vektorit $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ virittävät tason τ. Asetetaan tasoa vastaan kohtisuoraan suuntaan oikeakätinen ruuvi L. Kierretään vektoria $\boldsymbol{A}$ tasossa τ lyhintä tietä kohti vektoria $\boldsymbol{B}$. Ruuvin etenemissuunta vastaavassa kiertymässä määrittää normaalin suuntaisen yksikkövektorin $\boldsymbol{e}$ suunnan. Jos $\boldsymbol{C}$-vektori osoittaa tason τ samalle puolelle kuin $\boldsymbol{e}$-vektori, kyseessä on oikeakätinen systeemi.

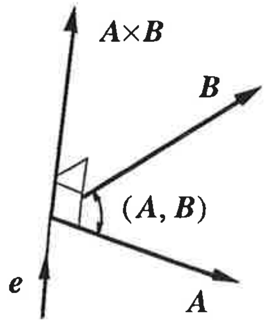
Kuva 1.7 Taso τ ja oikeakätinen ruuvi L.

Kolmen vektorin systeemiä eli ns. *vektorikolmikkoa* (vector triad), joka ei ole oikeakätinen, nimitetään vasenkätiseksi. Tämä voidaan ilmaista myös sanomalla, että kyseessä on oikean tai vasemman käden systeemi, mikäli vastaavasti kuvan 1.7 kulma α on terävä tai tylppä.

Tavallisesti xyz-koordinaatiston koordinaattiakselien suunnat valitaan siten, että kantavektorit $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ muodostavat oikeakätisen systeemin.

1.7 VEKTORITULO

Vektorien $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ *vektoritulo* eli ristitulo (vector product, cross product) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ on vektori (kuva 1.8), jonka itseisarvo on tekijävektoreiden virittämän suunnikkaan pinta-ala $AB\,\sin(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ ja suunta kohtisuorassa tekijävektoreiden virittämää tasoa vastaan siten, että $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ muodostavat oikean käden systeemin. Kaavana saadaan



$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = AB\sin(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}\,, \tag{1}$$

jossa $\boldsymbol{e}$ on vektorin $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ suuntainen yksikkö-kövektori.

Vektoritulo on nolla, jos tekijävektorit ovat yhdensuuntaiset tai jos ainakin toinen niistä on nolla.

Vektoritulo esiintyy mekaniikassa mm. momentin käsitteen yhteydessä.

Kuva 1.8 Vektoritulo.

Kaavoja:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}\,,$$

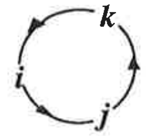
$$(p\boldsymbol{A}) \times (q\boldsymbol{A}) = (pq)(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})\,,$$

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}\,, \tag{2}$$

$$(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}\,,$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}\,, \tag{3}$$

$$
\begin{array}{lll}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}, & \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}, & \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}, \\
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}, \\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},
\end{array}
\tag{4}
$$



Oheinen ympyrämäinen kuvio helpottaa tulojen merkkien muistamista: jos tulon tekijät seuraavat toisiaan samassa (eri) järjestyksessä kuin ympyrällä olevat nuolet, tulo on positiivinen (negatiivinen).

Vektoritulon ns. *determinanttiesitys*, kun allaoleva kolmirivinen determinantti kehitetään ylimmän vaakarivin mukaan (ks. luku 2.8), on

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\
&= (A_yB_z - B_yA_z)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - B_zA_x)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - B_xA_y)\boldsymbol{k}\,.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

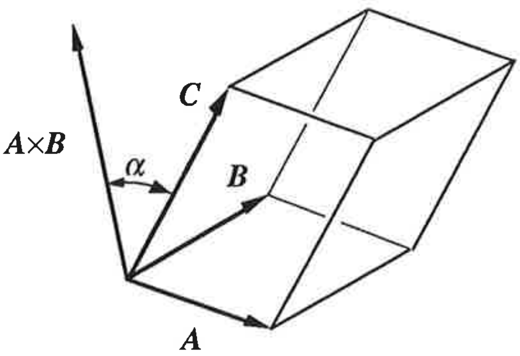
Huomattakoon, että kaava (5) ja kaavat (4) ovat merkeiltään oikeat vain, kun $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ muodostavat oikean käden systeemin.

1.8 SKALAARIKOLMITULO

Kolmen vektorin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ ns. *skalaarikolmitulo* (scalar triple product, mixed triple product) on skalaari

$$
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\,. \tag{1}
$$

Tässä lausekkeessa ei tarvita välttämättä sulkuja, koska ensin on muodostettava ristitulo ja sitten vasta pistetulo; lauseketta $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$ ei ole määritelty, sillä se olisi vektorin ja skalaarin ristitulo.



Kuva **1.9** Skalaarikolmitulo.

Skalaarikolmitulon $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ itseisarvo on vektoreiden $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ virittämän suuntaissärmiön (kuva 1.9) tilavuus ja merkki on + tai – sen mukaan, muodostavatko $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ oikean vai vasemman käden systeemin. Kyseessä on oikean- tai vasemman käden systeemi, mikäli vastaavasti kuvan kulma α on terävä tai tylppä. Skalaarikolmitulo häviää, jos kaksi tekijävektoria ovat yhdensuuntaiset, koska vastaavan suuntaissärmiön tilavuus on tällöin nolla.

Kaavoja:

$$
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \quad \text{(kiertosääntö)}\,, \tag{2}
$$

$$
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} \quad \text{(vaihtosääntö)}\,. \tag{3}
$$

Skalaarikolmitulon *determinanttiesitys* on

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_y \\ C_x & C_y & C_x \end{vmatrix}, \tag{3}$$

kun vektorit $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ muodostavat oikean käden systeemin.

1.9 VEKTORIKOLMITULO

Kolmen vektorin $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ ns. *vektorikolmitulo* (vector triple product) on vektori

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \tag{1}$$

tai (ei sama kuin edellinen)

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}. \tag{2}$$

Kaavoja:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{A}, \\ &\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}. \end{aligned} \tag{3}$$

Viimeinen kaava eli ns. *vektorikolmitulon kehityskaava* osoittaa, että tulovektori on vektoreiden $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$ virittämässä tasossa.

1.10 VEKTORIN DERIVAATTA

Tarkastellaan skalaarimuuttujan p vektoriarvoista funktiota $\boldsymbol{A}(p)$. Derivaatan määrittely tapahtuu aivan samaan tapaan kuin skalaarifunktiolle.

Kahteen lähekkäiseen muuttujan arvoon p ja $p+\Delta p$ liittyy vektorin $\boldsymbol{A}$ muutos

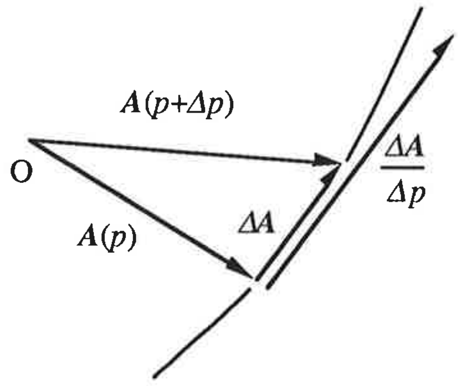
$$\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(p+\Delta p)-\boldsymbol{A}(p). \tag{1}$$

Kerrotaan tämä skalaarilla $1/\Delta p$, jolloin saadaan termi $\Delta\boldsymbol{A}/\Delta p$ ja annetaan muutoksen Δp lähestyä nollaa. Näin syntyy eräs vektori; merkitään

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}p}=\lim_{\Delta p\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta p}, \tag{2}$$

jota nimitetään vektorin $\boldsymbol{A}$ derivaataksi skalaarin p suhteen.

Derivaattaa voidaan havainnollistaa geometrisesti kuvan 1.10 esittämään tapaan, jossa vektori $\boldsymbol{A}$ eri arvoilla p on asetettu alkamaan samasta pisteestä O. Vektorin kärki piirtää suureen p muuttuessa tällöin käyrän ja derivaatan havaitaan olevan kussakin pisteessä käyrän tangentin suuntainen tai nolla.



Kuva 1.10 Geometrinen havainnollistaminen.

Tavanomaisia mekaniikan sovelluksia ovat tapaus $\boldsymbol{A} \rightarrow$ paikkavektori $\boldsymbol{r}$ tai nopeusvektori $\boldsymbol{v}$ ja $p \rightarrow$ aika t, jolloin derivaatta $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t \equiv \boldsymbol{v}$ on nopeus ja derivaaatta $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t \equiv \boldsymbol{a}$ kiihtyvyys.

Kaavoja:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}p} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}p}, \\
&\frac{\mathrm{d}(q\boldsymbol{A})}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\boldsymbol{A} + q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}p}, \\
&\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}p}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}p}, \\
&\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}p}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}p}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Edellä $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(p)$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(p)$, $q = q(p)$ ja viimeisessä kaavassa on muistettava säilyttää tekijöiden järjestys.

Kun käytetään esitystä (1.1.1) eli tässä

$$\boldsymbol{A}(p) = A_x(p)\boldsymbol{i} + A_y(p)\boldsymbol{j} + A_z(p)\boldsymbol{k}, \tag{4}$$

derivaatta

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{A})}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}p}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}p}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}p}\boldsymbol{k}, \tag{5}$$

koska yksikkövektorit ovat vakioita suureen p suhteen.

1.11 GRADIENTTI

Fysiikassa käytetään usein nimitystä *kenttä* (field), kun jokin suure riippuu paikasta $\boldsymbol{r}$ (ja lisäksi mahdollisesti ajasta t). Karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa riippuvuus paikasta ilmaistaan riippumattomien suureiden x, y, z avulla.

Esimerkkinä ns. *skalaarikentästä* voisi olla lämpötilan T jakautuma tietyssä kappaleessa:

$$T = T(x,y,z,t) \tag{1}$$

ja ns. *vektorikentästä* vaikkapa virtausnopeuden $\boldsymbol{v}$ jakautuma tietyssä virtausalueessa:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x,y,z,t). \tag{2}$$

Jos aika t ei ole mukana muuttujaluettelossa, kentän sanotaan olevan *stationaarinen* eli pysyvä (stationary, steady).

Partikkelimekaniikassa tärkein vektorikenttä on ns. *voimakenttä* (force field). Kun partikkeli tuodaan kenttään, partikkeliin vaikuttaa voima $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$. Tavanomaisin esimerkki on gravitaatiovoimakenttä, jossa ei ole mukana aikariippuvuutta ja vakiopainovoimakentän tapauksessa ei myöskään paikkariippuvuutta.

Tietyn kentän $(\cdot)$ muuttumisvoimakkuudesta paikan suhteen saadaan kuva laskemalla kussakin pisteessä osittaisderivaattojen $\partial(\cdot)/\partial x$, $\partial(\cdot)/\partial y$ ja $\partial(\cdot)/\partial z$ (ks. luku 5.2) arvot. Vektorianalyysissä on osoittautunut hyödylliseksi ottaa tiettyjen skalaarikenttien – käytetään vaikka merkintää $V = V(x,y,z)$ – yhteydessä käyttöön niihin liitetty osittaisderivaattojen kombinaationa saatu vektori

$$\mathrm{grad}V \equiv \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

jota nimitetään kyseisen skalaarin *gradientiksi* (gradient). Oikeanpuoleinen gradientin esitysmuoto pätee vain karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa; yleistä gradientin määrittelyä ei käsitellä tässä.

Lauseke (3) saadaan muodollisesti aikaan määrittelemällä ns. *nabla* eli Hamiltonin operaattori

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{4}$$

joka asetetaan kohdistumaan skalaariin V. Nablaoperaattorilla on tärkeä asema vektorianalyysissä.

Partikkelimekaniikassa gradientti tulee esille konservatiivisten voimakenttien yhteydessä. Gradienttivektorin eräs ominaisuus on, että se osoittaa kussakin pisteessä kyseisen skalaarikentän voimakkaimpaan muutossuuntaan ja on kohtisuorassa skalaarikentän tämän pisteen kautta kulkevaa ns. *tasa-arvopintaa* (level surface) vastaan. Skalaarin $V(x,y,z)$ tasa-arvopinta on pinta, jolla funktiolla V on tietty vakioarvo.

Huomautettakoon, että funktio V saa riippua myös ajasta kaavaa (3) sovellettaessa, jolloin gradienttikenttäkin tulee aikariippuvaksi.

Esimerkki 1.1 Gradientti. Tarkastellaan ajasta riippumatonta kaksidimensioista skalaarikenttää

$$V(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x. \tag{a}$$

Määritetään kentän gradientti.

Tässä tapauksessa

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}, \tag{b}$$

koska riippuvuus z-koordinaatista häviää. Saadaan

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2x + y + 1, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 2y + x \tag{c}$$

ja gradientti on siis

$$\nabla V = (2x + y + 1)\boldsymbol{i} + (x + 2y)\boldsymbol{j}. \tag{d}$$

Esimerkiksi pisteessä (1,1)

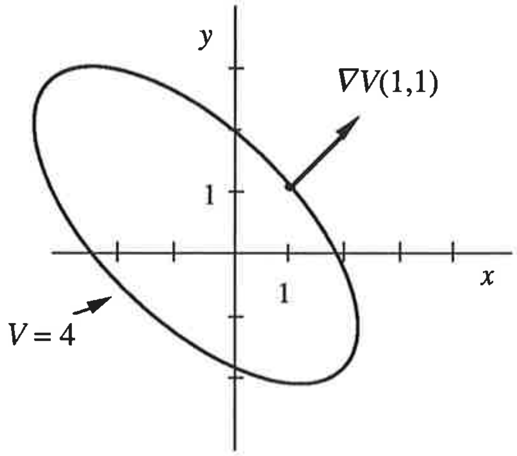
$$\nabla V(1,1) = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}\,. \tag{e}$$

Tasa-arvopinnoista tulee tässä tasa-arvokäyriä. Pisteessä (1,1) saadaan kaavasta (a) arvo

$$V = V_0 = 4\,. \tag{f}$$

Täten pisteen (1,1) kautta kulkeva tasa-arvokäyrä saadaan yhtälön

$$x^2 + y^2 + xy + x = 4$$



Kuva (a)

ratkaisuina. Tasa-arvokäyrän määrittämiseksi tämä voidaan ratkaista esimerkiksi muuttujan y suhteen käyttäen apuna toisen asteen yhtälön (y:n suhteen) ratkaisukaavaa:

$$y = \frac{-x \pm \left[x^2 - 4(x^2 + x - 4)\right]^{1/2}}{2}$$

$$= \frac{-x \pm (-3x^2 - 4x + 16)^{1/2}}{2}\,. \tag{h}$$

Antamalla sitten muuttujalle x eri arvoja voidaan kyseinen tasa-arvokäyrä hahmottaa näkyviin (kuva (a)). Gradientti esimerkkipisteessä (1,1) näyttää todellakin olevan kohtisuorassa vastaavaa tasa-arvokäyrää vastaan.

2 MATRIISILASKENTA

Matriisit muodostavat käyttökelpoisen pikakirjoitusmuotoisen tavan käsitellä useita mekaniikassa esiintyviä yhteyksiä; statiikassa mm. lineaarisia yhtälöryhmiä. Hyvä lähde on [Kivelä].

2.1 MATRIISI

Matriisi (matrix) on "suorakulmaisesti järjestetty" kokoelma suureita, jotka noudattavat tiettyjä sovittuja yhdistelysääntöjä.

Matriisia merkitään tässä esityksessä yleensä hakasulkujen sisään suljetulla kirjaimella:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{p1} & a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Suureet a_{ij} ovat matriisin *alkioita* (element). Edellinen indeksi ilmaisee sen vaakarivin eli *rivin* (row) ja jälkimmäinen sen pystyrivin eli *sarakkeen* (column) numeron, jolla alkio sijaitsee.

Matriisia ei pidä sekoittaa sitä läheisesti ulkonäöltään muistuttavaan determinanttiin; merkitään usein $|A|$ tai det $[A]$. Determinantti on olio, jolla on tietty skalaariarvo (yleensä).

Matriisin *tyyppi* eli dimensio eli kertaluku ilmaistaan tarvittaessa kirjoittamalla esityksen (1) sijasta muoto

$$\underset{p \times n}{[A]}. \tag{2}$$

Jos $p \neq n$, matriisia sanotaan *suorakaidematriisiksi* ja jos $p = n$, *neliömatriisiksi*.

Matriisikaavojen havainnollistamiseksi $n \times 1$-matriisi varustetaan tässä omalla merkinnällään

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \tag{3}$$

ja sitä nimitetään sarakematriisiksi, *pystyvektoriksi* tai usein lyhyesti hieman harhaanjohtavasti vain vektoriksi.

2.2 MATRIISIEN YHTÄSUURUUS

Matriisit $[A]$ ja $[B]$ ovat *yhtä suuret*; merkitään

$$[A] = [B], \tag{1}$$

mikäli niiden vastinalkiot ovat yhtä suuret eli

$$a_{ij} = b_{ij}. \tag{2}$$

Täten yhtäsuuruus vaatii, että matriisit ovat samaa tyyppiä.

2.3 MATRIISISUMMA

Matriisien $[A]$ ja $[B]$ *summa* on matriisi

$$[C]=[A]+[B], \tag{1}$$

jossa

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\,. \tag{2}$$

Tekijämatriisien tulee siis olla samaa tyyppiä. Erotus määritellään vastaavasti.

Kaavoja:

$$[A]+[B]=[B]+[A],$$

$$[A]+([B]+[C])=([A]+[B])+[C]=[A]+[B]+[C]\,. \tag{3}$$

2.4 SKALAARILLA KERTOMINEN

Skalaarin α ja matriisin $[A]$ *tulo* on matriisi

$$[B]=\alpha[A]=[A]\alpha \tag{1}$$

jossa

$$b_{ij}=\alpha\, a_{ij}\,. \tag{2}$$

Kaavoja:

$$\alpha([A]+[B])=\alpha[A]+\alpha[B],$$

$$\alpha([A][B])=(\alpha[A])[B]=[A](\alpha[B])=\alpha[A][B]\,. \tag{3}$$

(Matriisitulo määritellään seuraavassa.)

2.5 MATRIISITULO

Matriisien $[A]$ ja $[B]$ *tulo* on matriisi

$$\underset{p\times q}{[C]}=\underset{p\times n}{[A]}\,\underset{n\times q}{[B]}, \tag{1}$$

jossa

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}\,. \tag{2}$$

Tulon tekijämatriisien tulee olla *yhteensopivaa* (conformable) tyyppiä siten, että edellisen matriisin pystyrivien lukumäärän on oltava yhtä suuri kuin jälkimmäisen matriisin vaakarivien lukumäärä. Muistisäännöksi yleisemmästä tulosta kelpaa yhtälö

$$\underset{p\times r}{[D]} = \underset{p\times n}{[A]}\,\underset{n\times q}{[B]}\,\underset{q\times r}{[C]}\,. \tag{3}$$

Siis vierekkäisten tyyppi-indeksien tekijämatriisien välillä tulee olla samoja ja tulomatriisin indeksit saadaan tekijämatriisien äärimmäisistä indekseistä.

Tulon $[A][B]$ käsin laskemista ja laskuohjeen muistamista helpottaa oheinen kaavio:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{nj} & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \downarrow & \\ \rightarrow & c_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \tag{4}$$

Matriisin $[A]$ vaakarivin i kukin alkio kerrotaan matriisin $[B]$ pystyrivin j vastaavalla alkiolla ja tulot lasketaan yhteen, jolloin saadaan alkio c_{ij}, joka sijoittuu matriisissa $[C]$ nuolten osoittamaan paikkaan.

Kaavoja:

$$\begin{gathered} ([A][B])[C] = [A]([B][C]) = [A][B][C]\,, \\ [A]([B]+[C]) = [A][B]+[A][C]\,. \end{gathered} \tag{5}$$

Matriisitulon suhteen ei ole yleensä voimassa vaihdantalaki eli

$$[A][B] \neq [B][A]\,, \tag{6}$$

vaikka kummankin puolen tulomatriisit olisivat samaa tyyppiä.

Esimerkki 2.1 Matriisitulo. Lasketaan neliömatriisien $[A]$ ja $[B]$ tulot, kun

$$\underset{3\times 3}{[A]} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underset{3\times 3}{[B]} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}. \tag{a}$$

Saadaan

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 12 \\ 5 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -1 \end{bmatrix} = [A][B] \tag{b}$$

ja

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 5 & -2 \\ 7 & 3 & 11 \\ 12 & 3 & -1 \end{bmatrix} = [B][A]. \tag{c}$$

Nähdään, että vaikka $[A]$ ja $[B]$ ovat tässä symmetrisiä (ks. myöhemmin), tulot eivät ole symmetrisiä eivätkä yhtäsuuria.

2.6 MATRIISIN TRANSPONOINTI

Matriisin $\underset{p\times n}{[A]}$ transponoitu matriisi eli *transpoosi*

$$\underset{n\times p}{[B]} = \underset{p\times n}{[A]^{\mathrm{T}}}, \tag{1}$$

jossa

$$b_{ij} = a_{ji}. \tag{2}$$

Neliömatriisin sanotaan olevan *symmetrinen*, mikäli

$$[A]^{\mathrm{T}} = [A] \tag{3}$$

eli

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{4}$$

Pystyvektorin (2.1.3) transpoosi

$$\{A\}^{\mathrm{T}} = [a_1 a_2 \ldots a_n] \tag{5}$$

on $1\times n$-matriisi, jota nimitetään rivimatriisiksi tai usein myös *vaakavektoriksi*.

Kaavoja:

$$\begin{aligned} &([A]+[B])^{\mathrm{T}} = [A]^{\mathrm{T}} + [B]^{\mathrm{T}}, \\ &([A][B])^{\mathrm{T}} = [B]^{\mathrm{T}}[A]^{\mathrm{T}}, \\ &\left([A]^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = [A], \end{aligned} \tag{6}$$

$$(\alpha[A])^{\mathrm{T}} = \alpha[A]^{\mathrm{T}} .$$

On syytä korostaa, että tuloa transponoitaessa tekijämatriisien järjestys siis muuttuu.

Esimerkki 2.2 Transponointi. Tarkastellaan neliömatriisien tuloa

$$[A'] = [L][A][L]^{\mathrm{T}} , \tag{a}$$

jossa [A] on symmetrinen.

Kaavan (a) tyyppinen tulo esiintyy usein mekaniikassa. Merkinnät viittaavat koordinaatiston kierron yhteydessä syntyvään $[A]$-matriisin muuntumiseen matriisiksi $[A']$. Tästä esimerkkinä on mm. hitausmatriisin muuntuminen [Dyn, luku 7.1.2]. Osoitetaan, että jos matriisi $[A]$ on symmetrinen, myös matriisi $[A']$ on symmetrinen.

Muodostetaan matriisin $[A']$ transpoosi:

$$[A']^{\mathrm{T}} = \left([L]^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}[A]^{\mathrm{T}}[L]^{\mathrm{T}} = [L][A]^{\mathrm{T}}[L]^{\mathrm{T}} = [L][A][L]^{\mathrm{T}} . \tag{b}$$

On käytetty hyväksi toista ja kolmatta kaavaa (6) ja tietoa matriisin $[A]$ symmetrisyydestä. Koska siis kaavojen (a) ja (b) perusteella $[A']^{\mathrm{T}} = [A']$, myös matriisi $[A']$ on symmetrinen.

2.7 LÄVISTÄJÄ- JA YKSIKKÖMATRIISI

Nämä ovat symmetrisiä neliömatriiseja. *Lävistäjä-* eli diagonaalimatriisi (diagonal matrix) on muotoa

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

ja *yksikkömatriisi* (unit matrix) muotoa

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} . \tag{2}$$

Matriisille $[A]$ ja yksikkömatriisille $[I]$

$$\underset{p\times n}{[A]}\,\underset{n\times n}{[I]} = \underset{p\times p}{[I]}\,\underset{p\times n}{[A]} = \underset{p\times n}{[A]} \tag{3}$$

eli yksikkömatriisilla kertominen ei muuta matriisin arvoa.

Jos kaava (3) kirjoitetaan ilman tyyppimerkintöjä, yksikkömatriisilla on siis eri koko eri puolilla yhtälöä, mikäli $p \neq n$.

$$(\alpha[A])^{\mathrm{T}} = \alpha[A]^{\mathrm{T}} .$$

On syytä korostaa, että tuloa transponoitaessa tekijämatriisien järjestys siis muuttuu.

Esimerkki 2.2 Transponointi. Tarkastellaan neliömatriisien tuloa

$$[A'] = [L][A][L]^{\mathrm{T}} , \tag{a}$$

jossa [A] on symmetrinen.

Kaavan (a) tyyppinen tulo esiintyy usein mekaniikassa. Merkinnät viittaavat koordinaatiston kierron yhteydessä syntyvään $[A]$-matriisin muuntumiseen matriisiksi $[A']$. Tästä esimerkkinä on mm. hitausmatriisin muuntuminen [Dyn, luku 11.1.1]. Osoitetaan, että jos matriisi $[A]$ on symmetrinen, myös matriisi $[A']$ on symmetrinen.

Muodostetaan matriisin $[A']$ transpoosi:

$$[A']^{\mathrm{T}} = \left([L]^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}[A]^{\mathrm{T}}[L]^{\mathrm{T}} = [L][A]^{\mathrm{T}}[L]^{\mathrm{T}} = [L][A][L]^{\mathrm{T}} . \tag{b}$$

On käytetty hyväksi toista ja kolmatta kaavaa (6) ja tietoa matriisin $[A]$ symmetrisyydestä. Koska siis kaavojen (a) ja (b) perusteella $[A']^{\mathrm{T}} = [A']$, myös matriisi $[A']$ on symmetrinen.

2.7 LÄVISTÄJÄ- JA YKSIKKÖMATRIISI

Nämä ovat symmetrisiä neliömatriiseja. *Lävistäjä-* eli diagonaalimatriisi (diagonal matrix) on muotoa

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

ja *yksikkömatriisi* (unit matrix) muotoa

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} . \tag{2}$$

Matriisille $[A]$ ja yksikkömatriisille $[I]$

$$\underset{p\times n}{[A]}\,\underset{n\times n}{[I]} = \underset{p\times p}{[I]}\,\underset{p\times n}{[A]} = \underset{p\times n}{[A]} \tag{3}$$

eli yksikkömatriisilla kertominen ei muuta matriisin arvoa.

Jos kaava (3) kirjoitetaan ilman tyyppimerkintöjä, yksikkömatriisilla on siis eri koko eri puolilla yhtälöä, mikäli $p \neq n$.

2.8 DETERMINANTTI

Neliömatriisin $\underset{n\times n}{[A]}$ *determinantti* (determinant) – merkitään

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

tai $|A|$ tai $\|[A]\|$ tai $\det[A]$ – on suure, jonka arvo saadaan mm. kehittämällä determinantti mielivaltaisen pysty- tai vaakarivin k mukaan kaavoilla

$$\begin{aligned} \det[A] &= \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots \\ \det[A] &= \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Termi A_{ij} on alkion a_{ij} ns. *komplementti*:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} \,, \tag{3}$$

jossa D_{ij} on determinantin alkion a_{ij} *alideterminantti*. Se on sen $(n-1)\times(n-1)$ matriisin determinantti, joka saadaan poistamalla alkion a_{ij} sisältävä pysty- ja vaakarivi. Lopuksi 2×2 matriisin determinantti lasketaan kaavasta

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \,. \tag{4}$$

Kaavoja:

$$\begin{aligned} &\det[A]^{\mathrm{T}} = \det[A] \,, \\ &\det(\underset{n\times n}{[A]}\underset{n\times n}{[B]}) = \det[A]\det[B] \,, \\ &\det(\alpha \underset{n\times n}{[A]}) = \alpha^n \det[A] \,. \end{aligned} \tag{5}$$

2.9 KÄÄNTEISMATRIISI

Neliömatriisin $\underset{n\times n}{[A]}$ *käänteismatriisi* (inverse matrix) $\underset{n\times n}{[A]^{-1}}$ on matriisi, jolle

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = \underset{n\times n}{[I]} \tag{1}$$

Käänteismatriisin yleinen lauseke on

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

jossa on syytä huomata komplementtien A_{ij} sijoitus transponoituihin asemiin. Käänteismatriisi on olemassa vain silloin, kun $\det[A] \neq 0$. Jos $\det[A] \neq 0$, matriisin sanotaan olevan *säännöllinen* (regular) ja jos $\det[A] = 0$, *singulaarinen* (singular).

Kaavoja:

$$\underset{n\times n\, n\times n}{([A][B])^{-1}} = \underset{n\times n}{[B]^{-1}}\underset{n\times n}{[A]^{-1}}$$

$$([A]^{\mathrm{T}})^{-1} = ([A]^{-1})^{\mathrm{T}} . \tag{3}$$

Symmetrisen matriisin käänteismatriisi on symmetrinen. Lävistäjämatriisille (2.7.1)

$$[\Lambda]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1/\lambda_1 & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\lambda_1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

2.10 LINEAARINEN YHTÄLÖRYHMÄ

Luvussa 3 tarkasteltu lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 , \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 , \\ &\dots \\ &a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{aligned} \tag{1}$$

voidaan esittää ilmeisin matriisimerkinnöin muodossa

$$\underset{p\times n}{[A]}\underset{n\times 1}{\{X\}} = \underset{p\times 1}{\{B\}} . \tag{2}$$

Matriisia $[A]$ nimitetään yhtälöryhmän *kerroinmatriisiksi* ja pystyvektoria $\{B\}$ usein *vakiovektoriksi*. Erityisesti, kun $p = n$ saadaan

$$\underset{n\times n}{[A]}\underset{n\times 1}{\{X\}} = \underset{n\times 1}{\{B\}} . \tag{3}$$

Tämän ratkaisu syntyy muodollisesti kertomalla yhtälön kumpikin puoli vasemmalta käänteismatriisilla $[A]^{-1}$:

$$[A]^{-1}[A]\{X\} = [A]^{-1}\{B\} ,$$

$$[I]\{X\} = [A]^{-1}\{B\} ,$$

$$\{X\} = [A]^{-1}\{B\} . \tag{4}$$

Käytännössä käänteismatriisia ei kuitenkaan yleensä muodosteta vaadittavan suuren työmäärän vuoksi, vaan yhtälöryhmä ratkaistaan esimerkiksi Gaussin algoritmilla.

Yhtälöryhmällä (3) on kaavan (4) perusteella yksikäsitteinen ratkaisu, kun kerroinmatriisi on säännöllinen.

2.11 LINEAARINEN RIIPPUMATTOMUUS

Tarkastellaan pystyvektoreiden $\underset{p\times 1}{\{A\}_1}$, $\underset{p\times 1}{\{A\}_2}$,... $\underset{p\times 1}{\{A\}_n}$, muodostamaa joukkoa. Lauseketta

$$\alpha_1\{A\}_1 + \alpha_2\{A\}_2 + \cdots + \alpha_n\{A\}_n\,, \tag{1}$$

jossa kertoimet α ovat skalaareja, nimitetään kyseisten vektoreiden *lineaarikombinaatioksi* (linear combination).

Muodostetaan lineaarikombinaation avulla yhtälö

$$\alpha_1 \underset{p\times 1}{\{A\}_1} + \alpha_2 \underset{p\times 1}{\{A\}_2} + \cdots + \alpha_n \underset{p\times 1}{\{A\}_n} = \underset{p\times 1}{\{0\}}\,, \tag{2}$$

ja pidetään kertoimia α tuntemattomina. Toisin merkinnöin saadaan myös esitys

$$\underset{p\times n}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p1} & & a_{pn} \end{bmatrix}} \underset{n\times 1}{\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix}} = \underset{p\times 1}{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}}\,, \tag{3}$$

jossa kerroinmatriisin syntymistapa pystyvektoreista $\{A\}$ on ilmeinen. Ns. triviaaliratkaisu $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_n = 0$ on aina voimassa. Jos tämä on ainoa ratkaisu, sanotaan että kyseiset vektorit ovat *lineaarisesti riippumattomia* (linearly independent). Jos sen sijaan on olemassa jokin ratkaisu α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ siten, että ainakin yksi α on nollasta eroava, kyseisten vektoreiden sanotaan olevan *lineaarisesti riippuvia* (linearly dependent). Jälkimmäisessä tapauksessa ainakin jokin vektoreista voidaan ilmaista muiden lineaarikombinaationa. Jos esimerkiksi $\alpha_1 \neq 0$, saadaan nimittäin selvästi

$$\{A\}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\{A\}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\{A\}_3 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\{A\}_n\,. \tag{4}$$

Edellä on tarkasteltu pystyvektoreiden avulla esitettyjä "lineaariavaruuden alkioita eli vektoreita", mutta käsittely voidaan toistaa yhtä hyvin myös vaakavektoreiden avulla. Yhtälön (2) vastine olisi

$$\beta_1 \underset{1\times n}{[B]_1} + \beta_2 \underset{1\times n}{[B]_2} + \cdots + \beta_p \underset{1\times n}{[B]_p} = \underset{1\times n}{[0]} \tag{5}$$

ja vaakavektorit $[B]$ voisivat olla muodostetut esimerkiksi yhtälön (3) kerroinmatriisin vaakariveistä. Matriisiyhtälön (5) transponointi tuottaa samanarvoisen yhtälön

$$\beta_1 \underset{n\times 1}{\{B\}_1} + \beta_2 \underset{n\times 1}{\{B\}_2} + \cdots + \beta_p \underset{n\times 1}{\{B\}_p} = \underset{n\times 1}{\{0\}}\,, \tag{6}$$

joten tarkastelu voidaan palauttaa niin haluttaessa pystyvektoreiden käsittelyyn.

Lineaaristen yhtälöiden kuten (2.10.1) yhteydessä puhutaan myös yhtälöiden lineaarisesta riippumattomuudesta tai riippuvuudesta. Tällä tarkoitetaan samaa kuin kyseisten kerroinmatriisin vaakariveihin liittyvillä vastaavilla termeillä. Esimerkiksi statiikan tasapainoyhtälöitä synnytettäessä on juuri oleellista, että saadaan aikaan riittävä määrä riippumattomia yhtälöitä. Ratkaisun olemassaolon ja laadun selvittämisessä tarvitaan apuna rangin käsitettä.

2.12 RANGI

Suorakaidematriisin *rangin* (rank) eli ns. säännöllisyysasteen määritelmä voidaan esittää mm. seuraavasti. Jos matriisi sisältää kokoa $r \times r$ olevan neliömatriisin (saatu poistamalla vaaka- ja/tai pystyrivejä), jonka determinantti on nollasta eroava ja jos matriisin kaikkien suurempaa kokoa olevien neliömatriisien determinantit ovat nollia, matriisin rangin sanotaan olevan r.

Eräitä tuloksia:

Rangi on pienempi tai yhtäsuuri kuin pienempi luvuista p ja n.
Rangi ilmaisee matriisin lineaarisesti riippumattomien vaakarivien (pystyrivien) lukumäärän. (1)
Neliömatriisi on säännöllinen, jos ja vain jos sen rangi on sama kuin matriisin kertaluku.

Esimerkki 2.3 Rangi. Tarkastellaan voimaruuvin keskeisakselin määrittämiseen liittyvää yhtälöryhmää [Stat, yhtälöt (5.4.4)]

$$\begin{bmatrix} 0 & -F_z & F_y \\ F_z & 0 & -F_x \\ -F_y & F_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pF_x - (M_0)_x \\ pF_y - (M_0)_y \\ pF_z - (M_0)_z \end{Bmatrix}, \tag{a}$$

jossa x, y ja z ovat tuntemattomia. Määritetään kerroinmatriisin rangi r.

Kehitetään kerroinmatriisin determinantti kaavan (2.8.2) avulla vaikka ensimmäisen pystyrivin mukaan:

$$\begin{vmatrix} 0 & -F_z & F_y \\ F_z & 0 & -F_x \\ -F_y & F_x & 0 \end{vmatrix} = -F_z \begin{vmatrix} -F_z & F_y \\ F_x & 0 \end{vmatrix} - F_y \begin{vmatrix} -F_z & F_y \\ 0 & -F_x \end{vmatrix} = -F_z(-F_x F_y) - F_y(F_z F_x) = 0 . \tag{b}$$

Kerroinmatriisi on täten singulaarinen ja rangin tiedetään siis olevan pienempi kuin 3.

Tarkastellaan sitten vaikka alkion $(\ )_{11} = 0$ alideterminantin arvoa:

$$\begin{vmatrix} 0 & -F_x \\ F_x & 0 \end{vmatrix} = F_x^2 . \tag{c}$$

Täten ainakin jos $F_x \neq 0$, on saatu tulos $r = 2$. Yhtälöt ovat siis lineaarisesti riippuvia. Nähdään mm., että

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_z \\ -F_y \end{Bmatrix} = -\frac{F_y}{F_x}\begin{Bmatrix} -F_z \\ 0 \\ F_x \end{Bmatrix} - \frac{F_z}{F_x}\begin{Bmatrix} F_y \\ -F_x \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{d}$$

2.13 LISÄMERKINTÖJÄ

Jos skalaari f on muuttujien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funktio, niin tavanomaisen riippuvuuden kuvaamisen $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sijasta voidaan ensinnäkin kirjoittaa lyhyemmin $f = f(\{X\})$ ajattelemalla muuttujat pystyvektorin $\underset{n\times 1}{\{X\}}$ alkioiksi.

Usein käytetään myös apuna merkintää

$$\frac{\partial f}{\partial\{X\}} \equiv \underset{n\times 1}{\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{Bmatrix}} \tag{1}$$

eli "skalaarin derivaatta pystyvektorin suhteen". Toisin sanoen skalaarista synnytetään tietynlainen gradienttivektori (vrt. luku 1.11) listaamalla osittaisderivaatat uuden pystyvektorin alkioiksi $\partial f/\partial x_1$, $\partial f/\partial x_2, \ldots$. (Joskus kirjallisuudessa vastaavalla merkinnällä tarkoitetaankin vaakavektoria.)

Tämä merkintätapa on kätevä useissa eri yhteyksissä. Esimerkiksi funktion $f(\{X\})$ kokonaisdifferentiaali (5.3.1) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial\{X\}}\right)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\{X\} = \mathrm{d}\{X\}^{\mathrm{T}} \frac{\partial f}{\partial\{X\}} \tag{2}$$

ja funktion $f(\{X\})$stationaarisuusehdot (ks. luku 7) $\partial f/\partial x_1 = 0$, $\partial f/\partial x_2 = 0, \ldots$ ovat ytimekkäästi

$$\frac{\partial f}{\partial\{X\}} = \{0\}. \tag{3}$$

Huomattakoon, että skalaari voidaan tulkita 1×1-matriisiksi. Skalaaria transponoitaessa sen arvo ei muutu, joka seikka selittää myös toista kaavaa (2.6.6) soveltamalla saadut lausekkeen (2) kaksi eri muotoa.

2.14 LINEAARIMUOTO

Skalaari

$$L(\{X\}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$$

$$= \{A\}^{\mathrm{T}}\{X\} = \{X\}^{\mathrm{T}}\{A\}, \tag{1}$$

jossa

$$\underset{n\times 1}{\{A\}} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}, \qquad \underset{n\times 1}{\{X\}} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \tag{2}$$

on ns. (homogeeninen) *lineaarimuoto* eli lineaarinen muoto (linear form) muuttujien x suhteen. Kertoimet a ovat tässä annettuja parametreja, jotka eivät siis riipu muuttujista x.

Todetaan helposti, että

$$\frac{\partial L}{\partial\{X\}} = \{A\}. \tag{3}$$

Esimerkki mekaniikassa esiintyvistä lineaarimuodoista on vaikka virtuaalisen työn lauseke

$$\delta W = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_n\delta q_n = \{Q\}^{\mathrm{T}}\delta\{q\} = \delta\{q\}^{\mathrm{T}}\{Q\}, \tag{4}$$

jossa merkinnät ovat lähteen [Stat, luku 9.2] mukaiset.

2.15 NELIÖMUOTO

Skalaari

$$\begin{aligned} Q(\{X\}) = {} & a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \\ & \cdots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_nx_n \\ = {} & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \{X\}^{\mathrm{T}}[A]\{X\}, \end{aligned} \tag{1}$$

jossa

$$\underset{n\times n}{[A]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \underset{n\times 1}{\{X\}} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \tag{2}$$

on ns. (homogeeninen) *neliömuoto* eli kvadraattinen muoto (quadratic form) muuttujien x suhteen. Neliömatriisin $[A]$ alkiot ovat tässä annettuja parametreja, jotka eivät siis riipu muuttujista x.

Neliömuodolle pätee yhteys

$$\frac{\partial Q}{\partial\{X\}} = 2[A]\{X\}, \tag{3}$$

kun $[A]$ on symmetrinen. (Neliömuodon matriisi $[A]$ voidaan aina valita symmetriseksi ilman yleisyyden menetystä. Jos aluksi esimerkiksi $a_{12} \neq a_{21}$, $a_{12}{}^{\text{uusi}} = a_{21}{}^{\text{uusi}} = (a_{12} + a_{21})^{\text{vanha}}/2$. Neliömuodon arvo ei muutu.)

Neliömuoto esiintyy mekaniikassa mm. konservatiivisten systeemien potentiaalienergian lausekkeissa.

Neliömuoto Q (ja myös sen symmetrinen matriisi) luokitellaan ja nimetään usein seuraavasti. Neliömuoto on *positiivisesti definiitti* (positive definite), mikäli $Q \geq 0$ kaikilla mahdollisilla muutujien $\{X\}$ arvoilla ja täsmälleen nolla vain, kun $\{X\} = \{0\}$. Neliömuoto on *positiivisesti semidefiniitti* (positive semidefinite), mikäli $Q \geq 0$ kaikilla mahdollisilla muuttujen $\{X\}$ arvoilla ja lisäksi nolla jollain arvolla $\{X\} \neq \{0\}$. Negatiivisesti definiitti ja negatiivisesti semidefiniitti neliömuoto ja matriisi määritellään vastaavasti kuin edellä korvaamalla merkki > merkillä < . Negatiivisesta muodosta päästään haluttaessa positiiviseen muotoon tarkastelemalla funktion Q sijasta funktiota $-Q$. Jos Q voi saada sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, neliömuodon ja sen matriisin sanotaan olevan *indefiniitti* (indefinite).

Esimerkki 2.4 Neliömuotoja. Seuraavassa annetaan eräitä hyvin pelkistettyjä esimerkkejä neliömuodoista.

(1) Positiivisesti definiitti muoto:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 2x_1^2 + x_2^2 . \tag{a}$$

$Q = 0$ vain arvoilla $x_1 = x_2 = 0$. Muulloin $Q > 0$. Det $[A] = 2$; matriisi on säännöllinen.

(2) Positiivisesti semidefiniitti muoto:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 . \tag{b}$$

$Q = 0$ kaikilla arvopareilla $x_1 = x_2$. Muulloin $Q > 0$. Det $[A] = 0$; matriisi on singulaarinen.

(3) Indefiniitti muoto:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 2x_1x_2 . \tag{c}$$

$Q > 0$ esimerkiksi arvoilla $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ ja $Q < 0$ taas arvoilla $x_1 > 0$, $x_2 < 0$. Det$[A] = -1$; matriisi on tässä säännöllinen.

(4) Negatiivisesti semidefiniitti muoto:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 = -(x_1 - x_2)^2 . \tag{d}$$

Det $[A] = 0$; matriisi on singulaarinen.

(5) Negatiivisesti definiitti muoto:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = -2x_1^2 - x_2^2 . \tag{e}$$

Det $[A] = 2$; matriisi on säännöllinen.

Definiiteillä matriiseilla on laskennalliselta kannalta useita tärkeitä ominaisuuksia. Suoraan määritelmän perusteella on yleensä vaikea todeta – esimerkissä 2.4 se käy vielä helposti – onko matriisi definiitti. Eräs yleinen keino testata tämä perustuu seuraavaan lauseeseen:

Matriisi on positiivisesti definiitti, jos ja vain jos sen kaikki ensimmäiset *pääalideterminantit* (principal first minors)

$$a_{11}\,, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

ovat positiivisia.

Esimerkki 2.5 Positiivisesti definiitti matriisi. Onko matriisi

$$\underset{3\times3}{[A]} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \tag{a}$$

positiivisesti definiitti?

Lasketaan lausekkeet (4):

$$2 > 0 \;,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \,, \tag{b}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2(11) + 1(-8) + 2(-5) = 4 > 0 \,,$$

joten matriisi (a) on positiivisesti definiitti.

3 LINEAARINEN YHTÄLÖRYHMÄ

3.1 YLEISTÄ

Tarkastellaan yhtälösysteemiä

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \,, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \,, \\
&\ldots \\
&a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Tässä suureet a ja b ovat annettuja ja suureet x tuntemattomia. Kyseessä on ns. (algebrallinen) *lineaarinen yhtälöryhmä* (linear system of equations). Yhtälöitä on p kpl ja tuntemattomia n kpl. Tehtävänä on määrittää tuntemattomien x arvot.

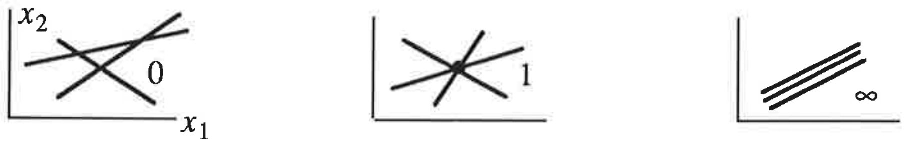
Statiikan tasapainoyhtälöt ovat tavallisesti tyyppiä (1). Tuntemattomina esiintyvät määritettävät voimat tai momentit. Staattisesti määrätyissä tehtävissä lisäksi $p = n$ eli tuntemattomia on yhtä paljon kuin yhtälöitä.

Yhtälöryhmä (1) saadaan – kuten on jo selostettu luvussa 2.10 – matriisimerkinnöin muotoon

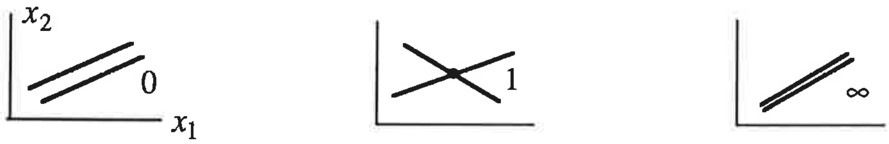
$$
\underset{p\times n}{[A]}\,\underset{n\times 1}{\{X\}} = \underset{p\times 1}{\{B\}}\,. \tag{2}
$$

3.2 RATKAISUN LAATU

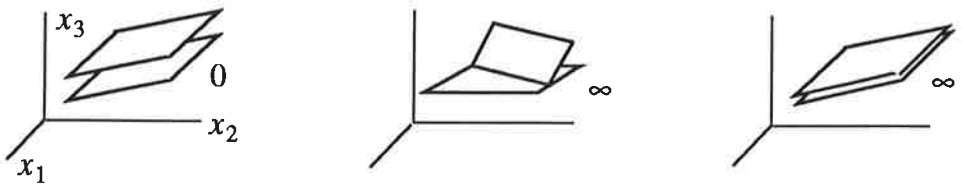
Aihetta on käsitelty huolellisesti lähteessä [Kivelä]. Ensinnäkin ratkaisuja voi olla *joko ei lainkaan, yksi tai ääretön määrä.* Tätä seikkaa on pyritty havainnollistamaan kuvassa 3.1 graafisesti



(a) Kolme yhtälöä; kaksi tuntematonta



(b) Kaksi yhtälöä; kaksi tuntematonta



(c) Kaksi yhtälöä; kolme tuntematonta

Kuva 3.1 (a) $p = 3$, $n = 2$. (b) $p = 2$, $n = 2$. (c) $p = 2$, $n = 3$.

yksinkertaisten esimerkkien avulla. Vallitsevat yhtälöt esittävät tuntemattomien suureiden x_1, x_2 (x_3) muodostamassa avaruudessa suoria (tasoja). Niiden mahdolliset yhteiset leikkauspisteet ovat ratkaisuja. Ratkaisujen lukumäärä on merkitty kuhunkin osakuvaan. Karkeasti ja epätäsmällisesti voidaan yleisesti sanoa, että jos yhtälöitä on enemmän kuin tuntemattomia ($p > n$) on todennäköistä, ettei ratkaisua ole (vrt. kuva (a)). Jos yhtälöitä on yhtä paljon kuin tuntemattomia ($p = n$), saadaan todennäköisesti yksikäsitteinen ratkaisu (vrt. kuva (b)). Jos yhtälöitä on vähemmän kuin tuntemattomia ($p < n$), ratkaisuja on todennäköisesti ääretön määrä (vrt. kuva (c)).

Täsmällisesti voidaan esittää mm. taulukon 3.1 kuvaamat tapaukset [Kivelä, s. 32]. Luku r on kerroinmatriisin rangi. Staattisesti määrätyissä tehtävissä tulee siis päätyä yhtälösysteemiin, joissa $p = n$ ja jossa yhtälöt ovat lineaarisesti riippumattomia, jolloin $r = p = n$ ja saadaan taulukon kuvaama yksikäsitteinen ratkaisu. Taulukon tulos ∞ liittyy taas staattisesti määräämättömiin tapauksiin, jotka ilmaisevat matemaattisesti sen seikan, että käytetty malli on epärealistinen, koska "luonnossa" ratkaisu tulee olemaan yksikäsitteinen.

Taulukko 3.1 *Ratkaisujen lukumäärä.*

<table>
<tr><th colspan="2">Jos</th><th>niin ratkaisujen lukumärä on</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$r = p$ ja</td><td>$r = n$
$\Downarrow$
$p = n$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$r < n$
$\Downarrow$
$p < n$</td><td>∞</td></tr>
</table>

Jatkossa tässä luvussa tarkastellaan enää vain tärkeintä tapausta $p = n$ eli yhtälöryhmää

$$\underset{n\times n}{[A]}\underset{n\times 1}{\{X\}} = \underset{n\times 1}{\{B\}}\,. \tag{1}$$

Sen ratkaisu on taulukon 3.1 perusteella tai myös kaavan (2.10.4) mukaan yksikäsitteinen, mikäli $\det[A] \neq 0$ eli kun kerroinmatriisi on säännöllinen.

3.3 GAUSSIN ALGORITMI

Otsikon algoritmi eli Gaussin eliminaatio perustuu yhtälöryhmän yhtälöiden sopivien yksinkertaisten perättäisten lineaarikombinaatioiden muodostamiseen niin, että tuntemattomien lukumäärä syntyvissä uusissa yhtälöissä vähenee systemaattisesti, kunnes lopuksi viimeisessä uudessa yhtälössä on enää yksi tuntematon. Tämän jälkeen tuntemattomien arvojen määrittäminen tapahtuu perättäisten sijoitusten avulla.

Usein pieniä yhtälöryhmiä voi ratkaista nopeammin vähemmän systemaattisesti, mutta perusajatus on sama: muodostetaan yhtälöiden lineaarikombinaatioita.

Statiikan tehtävissä syntyvät kerroinmatriisit ovat monasti ns. *harvoja* (sparse) eli ne sisältävät paljon nolla-alkioita. Käsin laskiessa voi tällöin päästä verrattain helposti ratkaisuun suorittamalla eliminointeja tehtävän fysiikan antaman tiedon mukaisessa järjestyksessä. Näin on usein asian laita esimerkiksi staattisesti määrättyjen ristikoiden sauvavoimien määrityksessä.

Numeerisesti pystytään nykyään ratkaisemaan helposti yhtälöryhmiä, joissa on useita satoja tai muutamia tuhansia tuntemattomia ainakin tapauksissa, joissa kerroinmatriisi on kohtuullisen harva.

Esimerkki 3.1 Gaussin algoritmi. Tarkastellaan yksinkertaista kolmen tuntemattoman lineaarista yhtälöryhmää

$$\begin{aligned} 4x_1 + 0x_2 - 4x_3 &= 4\,, \\ 2x_1 + 4x_2 + 1x_3 &= 0\,, \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{4} \\ 1x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 11\,. \end{aligned} \tag{a}$$

Sen yhteyteen on jo merkitty lähteen [Kivelä] esittämään tapaan kaarinuolien avulla Gaussin eliminaation ensimmäinen vaihe. Merkinnät tarkoittavat, että ensimmäinen yhtälö on lisätty kerrottuna vastaavasti luvuilla -1/2 ja -1/4 toiseen ja kolmanteen yhtälöön. Syntyy uusi, alkuperäisen yhtälöryhmän kanssa samanarvoinen – siis saman ratkaisun antava – ryhmä

$$\begin{aligned} 4x_1 + 0x_2 - 4x_3 &= 4\,, \\ 4x_2 + 3x_3 &= -2\,, \quad 1 \\ -4x_2 + 7x_3 &= 10\,. \end{aligned} \tag{b}$$

Muuttuja x_1 on saatu näin eliminoitua kahdesta jälkimmäisestä yhtälöstä. Yhtälöryhmän (b) yhteyteen on myös jo merkitty seuraava tarvittava operaatio, joka tuottaa uuden ryhmän

$$\begin{aligned} 4x_1 + 0x_2 - 4x_3 &= 4\,, \\ 4x_2 + 3x_3 &= -2\,, \\ 10x_3 &= 8\,. \end{aligned} \tag{c}$$

Tuntemattomien arvojen määritys tapahtuu yhtälöstä (c) seuraavien ilmeisten kaavojen

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{10}(8) = 0{,}8\,, \\ x_2 &= \frac{1}{4}(-2 - 3x_3) = -1{,}1\,, \\ x_1 &= \frac{1}{4}(4 + 4x_3 - 0x_2) = 1{,}8 \end{aligned} \tag{d}$$

avulla.

Äskeisten askelten lisäksi on joskus tarpeen suorittaa yhtälöiden ja/tai tuntemattomien järjestyksen vaihdoksia, jotta päästäisiin eteenpäin.

Ilman Gaussin algoritmin suoraa käyttöä laskelmat voisivat edetä suunnilleen seuraavasti. Ratkaistaan vaikka ensimmäisestä yhtälöstä esimerkiksi muuttuja x_1 muissa lausuttuna:

$$x_1 = \frac{1}{4}(4 - 0x_2 + 4x_3) = 1 + x_3\,. \tag{e}$$

Tämä tulos sijoitetaan kahteen jälkimmäiseen yhtälöön:

$$
\begin{aligned}
2(1+x_3)+4x_2+1x_3&=0\,,\\
1(1+x_3)-4x_2+6x_3&=11
\end{aligned}
\tag{f}
$$

eli

$$
\begin{aligned}
4x_2+3x_3&=-2\,,\\
-4x_2+7x_3&=10\,.
\end{aligned}
\tag{g}
$$

Ensimmäisestä yhtälöstä (g) saadaan vaikka

$$x_3=\frac{1}{3}(-2-4x_2)\,, \tag{h}$$

jonka sijoitus jälkimmäiseen antaa

$$-4x_2+\frac{7}{3}(-2-4x_2)=10 \tag{i}$$

eli

$$x_2=-1{,}1\,. \tag{j}$$

Tuntemattomat x_3 ja x_1 saadaan tämän jälkeen helposti yhtälöistä (h) ja (e).

3.4 CRAMERIN SÄÄNTÖ

Pienten yhtälöryhmien (3.2.1) yhteydessä voidaan myös käyttää hyväksi usein otsikon nimellä kulkevaa ratkaisukaavaa

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\dots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}\,. \tag{1}$$

Tässä $D=\det[A]$ ja D_k on aina sen matriisin determinantti, joka saadaan korvaamalla matriisin $[A]$ k:s sarake pystyvektorilla $\{B\}$. Cramerin sääntö on hyödyllinen etenkin, jos kerroinmatriisin ja vakiovektorin alkiot eivät ole pelkkiä lukuja vaan tiettyjä lausekkeita.

Esimerkki 3.2 Cramerin sääntö. Määritetään esimerkissä 3.1 käsitellyn yhtälöryhmän

$$\begin{bmatrix}4&0&-4\\2&4&1\\1&-4&6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}4\\0\\11\end{Bmatrix} \tag{a}$$

ratkaisu Cramerin säännön avulla.

Saadaan

$$D=\begin{vmatrix}4&0&-4\\2&4&1\\1&-4&6\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}4&1\\-4&6\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2&4\\1&-4\end{vmatrix}=4(28)-4(-12)=160\,, \tag{b}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 11 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 11\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4(28) + 11(16) = 288\,, \tag{c}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 11 & 6 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 11\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4(11) - 11(12) = -176\,, \tag{d}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 11 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 11\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4(-12) + 11(16) = 128\,. \tag{e}$$

Determinantit (b), (c), (d) ja (e) on kehitetty vastaavasti ensimmäisen vaakarivin sekä ensimmäisen, toisen ja kolmannen pystyrivin mukaan, jolloin laskentatyötä on voitu hieman vähentää nolla-alkioiden avulla.

Ratkaisu on siis

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{288}{160} = 1{,}8\,, \\ x_2 &= \frac{-176}{160} = -1{,}1\,, \\ x_3 &= \frac{128}{160} = 0{,}8\,. \end{aligned} \tag{f}$$

3.5 SUPERPOSITIOPERIAATE

Ns. *superpositioperiaate* (principle of superposition) eli yhteenlaskuperiaate perustuu löysästi sanottuna lineaarisiin systeemeihin liittyvään ominaisuuteen, jonka mukaan *vaste* (response) eli "seuraus" on suoraan verrannollinen *herätteeseen* (excitation) eli "syyhyn".

Tarkastellaan esimerkkinä yhtälöryhmän (3.2.1) ratkaisuja $\{X\}_1$, $\{X\}_2 \ldots$ annettujen vakiovektoreiden $\{B\}_1$, $\{B\}_2 \ldots$ johdosta eli

$$\begin{aligned} &[A]\{X\}_1 = \{B\}_1\,, \\ &[A]\{X\}_2 = \{B\}_2\,, \\ &\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Tällöin ratkaisu vakiovektoreiden lineaarikombinaatiosta (ks. luku 2.11) muodostuvalle vakiovektorille

$$\{B\} = \alpha_1\{B\}_1 + \alpha_2\{B\}_2 + \cdots \tag{2}$$

on vastaava lineaarikombinaatio vastaavista erillisratkaisuista eli

$$\{X\} = \alpha_1\{X\}_1 + \alpha_2\{X\}_2 + \cdots \tag{3}$$

Tämä nähdään välittömästi oikeaksi matriisilaskusääntöjen nojalla:

$$[A]\{X\} = [A](\alpha_1\{X\}_1 + \alpha_2\{X\}_2 + \cdots) = \alpha_1[A]\{X\}_1 + \alpha_2[A]\{X\}_2 + \cdots$$

$$= \alpha_1\{B\}_1 + \alpha_2\{B\}_2 + \cdots = \{B\}\,. \qquad (4)$$

Äskeistä tulosta voidaan pitää eräänä superpositioperiaatteen ilmentymänä eli lyhyesti:

> Useiden herätteiden yhteinen vaste saadaan laskemalla yhteen erillisten herätteiden aiheuttamat vasteet. (5)

Mekaniikassa superpositioperiaatetta sovelletaan mm. niin, että herätteinä ovat kappaleen ulkoiset voimat ja vasteina sisäiset voimat tai siirtymät.

4 OMINAISARVOT JA -VEKTORIT

4.1 TAVALLINEN OMINAISARVOTEHTÄVÄ

Ns. tavallinen (diskreetti) *ominaisarvotehtävä* (eigenvalue problem) voidaan esittää yhtälöryhmänä

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2 , \\ &\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{aligned} \tag{1}$$

eli

$$\underset{n\times n}{[A]}\underset{n\times 1}{\{X\}} = \lambda \underset{n\times 1}{\{X\}} \tag{2}$$

eli

$$(\underset{n\times n}{[A]} - \lambda \underset{n\times n}{[I]})\underset{n\times 1}{\{X\}} = \underset{n\times 1}{\{0\}} . \tag{3}$$

On määritettävä ne tuntemattoman skalaarin λ arvot λ_i, ns. *ominaisarvot* (eigenvalue, characteristic number, latent root) sekä vastaavat pystyvektorin $\{X\}$ arvot $\{X\}_i \neq \{0\}$, ns. *ominaisvektorit* (eigenvector, mode), joilla yhtälöryhmä toteutuu.

Ominaisarvot saadaan periaatteessa skalaarin λ suhteen astetta n olevan yhtälön, ns. *karakteristisen yhtälön*

$$\det([A] - \lambda[I]) = 0 \tag{4}$$

eli

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

juurina. Yhtälön vasenta puolta nimitetään *karakteristiseksi polynomiksi*.

Kutakin ominaisarvoa λ_i vastaava ominaisvektori $\{X\}_i$ määritetään tämän jälkeen yhtälöryhmän

$$([A] - \lambda_i[I])\{X\}_i = \{0\} \tag{6}$$

avulla. Ominaisvektorin alkioiden väliset suhteet ovat kiinteät; sen sijaan ominaisvektorin itseisarvo voi olla mielivaltainen. Täten eräs ominaisvektori $\{X\}_i$ saadaan ottamalla esimerkiksi alkiolle x_1 jokin arvo ja ratkaisemalla loput alkiot $x_2, x_3, ..., x_n$ systeemistä (3) jäljelle jäävän n-1:tä tuntematonta koskevan lineaarisen yhtälöryhmän avulla; hyljätään yksi yhtälö.

Tehtävään (2) liittyviä ominaisarvoja ja ominaisvektoreita nimitetään myös matriisin $[A]$ ominaisarvoiksi ja -vektoreiksi.

Tavallinen ominaisarvotehtävä esiintyy mekaniikassa mm. päävenymien, pääjännitysten ja päähitausmomenttien [Dyn, luku ~~7.2.1~~] määritysten yhteydessä.
11.1.2.

Ominaisarvotehtävän käsittely on käytännössä käsin laskien yleensä liian työlästä, kun $n >\approx 2$ ja on sovellettava numeerisia menetelmiä, joihin ei puututa tässä.

Polynomiyhtälöiden ominaisuuksien perusteella havaitaan, että ominaisarvoja on n kappaletta (joista osa voi olla moninkertaisia).

Eräitä tuloksia:

Matriisi on säännöllinen, jos ja vain jos mikään sen ominaisarvoista
λ_i ei ole yhtä suuri kuin nolla.
Käänteismatriisin ominaisarvot ovat $1/\lambda_i$. (7)
Symmetrisen (reaalisen) matriisin ominaisarvot ovat reaalisia.

Esimerkki 4.1 Ominaisarvot ja -vektorit. Määritetään esimerkissä 2.4 esiintyvän positiivisesti semidefiniitin matriisin

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{a}$$

ominaisarvot ja vektorit.

Karakteristinen yhtälö (5) saa tässä muodon

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-1=0 \tag{b}$$

ja ratkaisut ovat

$$\lambda_1=0\,,\quad \lambda_2=2\,. \tag{c}$$

Huomataan, että ainakin yhden ominaisarvon tuleekin olla arvoltaan nolla, koska matriisi $[A]$ on singulaarinen.

Ensimmäisen ominaisarvon tapauksessa yhtälöryhmä (6) on

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}, \tag{d}$$

jonka esimerkiksi jälkimmäinen yhtälö

$$-1x_1+1x_2=0 \tag{e}$$

antaa valitsemalla vaikka $x_1=1$ arvon $x_2=1$. Täten ensimmäinen ominaisvektori

$$\{X\}_1=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}. \tag{f}$$

Toisen ominaisarvon tapauksessa yhtälöryhmä (6) on

$$\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}, \tag{g}$$

jonka esimerkiksi jälkimmäinen yhtälö

$$-1x_1 + 1x_2 = 0 \tag{h}$$

antaa valitsemalla vaikka $x_1 = 1$ arvon $x_2 = -1$. Täten toinen ominaisvektori

$$\{X\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}. \tag{i}$$

Todetaan, että yhteys (4.2.5) pätee, sillä tässä $([B] = [I])$

$$\{X\}_1^{\mathrm{T}}[I]\{X\}_2 = \{X\}_1^{\mathrm{T}}\{X\}_2 = [1 \quad 1]\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 0. \tag{j}$$

4.2 YLEISTETTY OMINAISARVOTEHTÄVÄ

Esityksen (4.1.2) yleistyksenä saadaan ns. *yleistetty* (diskreetti) *ominaisarvotehtävä* (generalized eigenvalue problem)

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\}, \tag{1}$$

jossa myös $\underset{n\times n}{[B]}$ on neliömatriisi. Kaavojen (4.1.4), (4.1.5) ja (4.1.6) vastineet ovat

$$\det([A] - \lambda[B]) = 0 \tag{2}$$

eli

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \cdots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & \cdots & a_{2n} - \lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

ja

$$([A] - \lambda_i[B])\{X\}_i = \{0\}. \tag{4}$$

Yleistetty ominaisarvotehtävä esiintyy mekaniikassa esimerkiksi ominaisvärähtelyjen [Dyn, esim. 5.14] yhteydessä.

Kun $[B] = [I]$, päästään takaisin tavalliseen ominaisarvotehtävään. Edellä esitetty tavallista ominaisarvotehtävää koskeva teksti pätee oleelliselta osin myös yleistetyn tehtävän yhteydessä.

Jos $[A]$ ja $[B]$ ovat symmetrisiä ja jos lisäksi $[B]$ on positiivisesti definiitti (yksikkömatriisi $[I]$ on symmetrinen ja positiivisesti definiitti), ominaisarvot ovat reaalisia. Tällöin on myös voimassa ns. *ortogonaalisuusehto* matriisin $[B]$ suhteen:

$$\{X\}_i^{\mathrm{T}}[B]\{X\}_j = 0, \quad i \neq j, \quad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,n, \\ j = 1,2,\ldots,n. \end{matrix} \tag{5}$$

Voidaan osoittaa, että myös mahdolliseen moninkertaiseen ominaisarvoon liittyvät erilliset ominaisvektorit toteuttavat yhtälön (5).

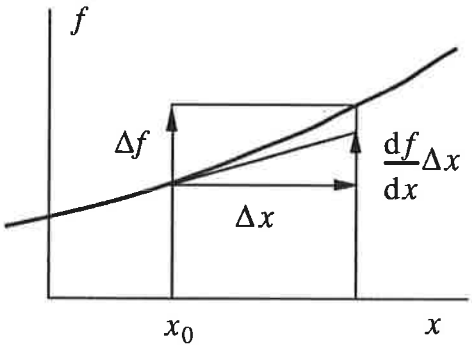
5 DIFFERENTIAALI

5.1 YLEISTÄ

Tarkastellaan riippumattoman muuttujan x funktiota $f(x)$. Funktion ns. *differentiaali* (differential)

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{1}$$

on funktion derivaatan $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ (laskettuna tietyssä pisteessä x_0) ja argumentin muutoksen $\mathrm{d}x$ (laskettuna pisteestä x_0 lähtien) tulo. Äskeinen määritelmä vaatii, että kyseinen funktio on niin säännöllinen, että sillä on derivaatta. Differentiaalin muodostamista nimitetään *differentioimiseksi* (differentiation). Huomattakoon kuitenkin, että englanninkielisessä kirjallisuudessa nimityksellä "differentiation" tarkoitetaan usein vain derivointia, jolle olisi kylläkin soveliaampaa käyttää nimitystä "derivation".



Kuva 5.1 Differentiaali.

Jos merkinnällä $\mathrm{d}x$ tarkoitetaan mekaniikassa vallitsevan käytännön mukaan ns. "äärettömän pientä" eli differentiaalista eli infinitesimaalista muutosta, termi $\mathrm{d}f$ esittää rajalla tarkasti funktion f arvon vastaavaa muutosta. Tämä ymmärrettäneen havaintoon perustuen kuvaa 5.1 tarkastelemalla antamalla äärellisen muutoksen Δx pienentyä ja merkitsemällä $\Delta x \to \mathrm{d}x$.

Pienten äärellisten muutosten yhteydessä yhteys (1) muuntuu likikaavaksi (ks. kuva 5.1)

$$\Delta f \approx \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Delta x\,. \tag{2}$$

5.2 OSITTAISDERIVAATTA

Tarkastellaan esimerkkinä kolmen riippumattoman muuttujan x, y, z funktiota $f(x,y,z)$. Funktion f *osittaisderivaatta* (partial derivative) muuttujan x suhteen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}\,. \tag{1}$$

Osittaisderivaatat $\partial f/\partial y$ ja $\partial f/\partial z$ määritellään vastaavasti. Toisin sanoen osittaisderivaatta lasketaan aivan samoin kuin tavallinen yhden muuttujan funktion derivaatta pitäen vain muita muuttujia kussakin derivoinnissa vakioina.

Pelkkä osittaisderivaatan merkki ei aina välttämättä kerro kaikkea mistä on kysymys, sillä lisäksi on tiedettävä, mitä suureita pidetään kulloinkin riippumattomina muuttujina. Esimerkiksi termodynamiikassa tämä tulee korostetusti esille ja siellä derivaatta (1) kirjoitetaan usein muotoon

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}\,. \tag{2}$$

Tässä alhaalla esiintyvät tunnukset ilmaisevat riippumattomat muuttujat ja sulkeiden ulkopuoliset tunnukset kertovat vakioina pidettävät muuttujat.

Kun funktiot $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ ovat määritetyt, niitä voidaan jälleen derivoida osittain, jolloin saadaan korkeamman kertaluvun derivaattoja kuten

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \ldots. \tag{3}$$

Esimerkki 5.1 Osittaisderivaatta. Tarkastellaan muuttujien x ja y funktiota

$$f(x,y) = 3x^2 y + x \sin y. \tag{a}$$

Muodostetaan sen ensimmäiset ja toiset osittaisderivaatat.

Saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6xy + \sin y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x^2 + x\cos y \end{aligned} \tag{b}$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &\equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &\equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x + \cos y, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &\equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x + \cos y, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &\equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\sin y. \end{aligned} \tag{c}$$

Nähdään, että

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \tag{d}$$

Tämä on yleisesti paikkansa pitävä yhteys, eli ns. sekaderivaatoissa derivointijärjestys ei vaikuta derivaatan arvoon.

5.3 KOKONAISDIFFERENTIAALI

Usean riippumattoman muuttujan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yhteydessä lausekkeen (5.1.1) yleistyksenä saadaan esitys

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \,. \tag{1}$$

Tämä kulkee myös nimellä differentiaali tai tavallisemmin käytetään nimitystä *kokonaisdifferentiaali* (total differential).

Likikaavana saadaan vastaavasti

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \,. \tag{2}$$

Mekaniikassa äskeisiä kaavoja tarvitaan mm. todellisten differentiaalisten ja kuviteltujen virtuaalisten siirtymien käsittelyssä sekä likikaavoina pienten todellisten siirtymien yhteydessä. Tietyn partikkelin paikkavektori voi olla yleistettyjen koordinaattien $q_1, q_2, \ldots, q_n$ funktio: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Tällöin partikkelin todelliselle differentiaaliselle siirtymälle saadaan lauseke (sovelletaan kaavaa (1), joka pätee vastaavana myös vektoriarvoiselle funktiolle)

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}dq_2 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_n}dq_n = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}dq_j \tag{3}$$

ja kuvitellulle virtuaaliselle siirtymälle vastaavasti

$$\delta\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_n}\delta q_n = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}\delta q_j \,. \tag{4}$$

Nämä kaavat siis kuvaavat, mitä partikkelille tapahtuu, kun argumenttien $q_1, q_2, \ldots, q_n$ arvot saavat pieniä (infinitesimaalisia) muutoksia. Todellisessa liikkeessä muutosten dq "syy" on ajan muutos dt. Virtuaalisessa siirtymässä kuviteltujen muutosten δq syy on ajatuskoe. Funktio $\boldsymbol{r}$ ei kuitenkaan pysty näkemään eroa näiden tapausten välillä ja reagoi arvojen muutoksiin samalla tavalla. Oleellista on, että argumenttien muutokset esiintyvät kaavoissa *lineaarisesti*, mikä on jatkokäsittelyjen kannalta tärkeä helpotus, sillä äärellisten muutosten suhteen näin ei yleensä ole asian laita.

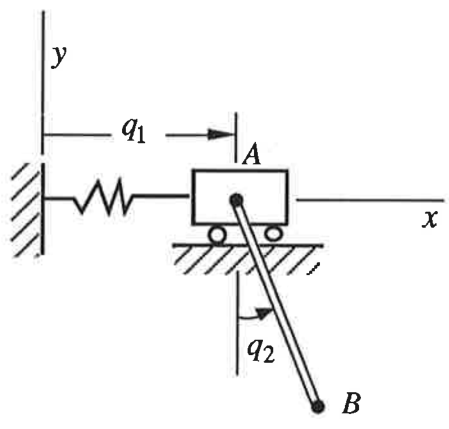
Esimerkki 5.2 Differentiaalinen siirtymä. Tarkastellaan kuvan (a) esittämää kahden vapausasteen systeemiä ja erityisesti sauvan AB pistettä B. Sen paikkavektorin lauseke on

$$\boldsymbol{r}(q_1, q_2) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = (q_1 + l\sin q_2)\boldsymbol{i} - l\cos q_2\boldsymbol{j}\,, \tag{a}$$

jossa q_1 ja q_2 ovat valitut yleistetyt koordinaatit ja l sauvan AB pituus. Määritetään muutoksista dq_1 ja dq_2 johtuva differentiaalinen siirtymä $d\boldsymbol{r}$.

Tarvittavat osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1} = \boldsymbol{i}\,,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2} = l\cos q_2\boldsymbol{i} + l\sin q_2\boldsymbol{j}\,. \tag{b}$$



Kuva (a)

Huomattakoon, että yksikkövektorit $\boldsymbol{i}$ ja $\boldsymbol{j}$ ovat vakioita, joten niitä ei ole merkitty funktion $\boldsymbol{r}$ muuttujaluetteloon.

Siirtymä määritetään kaavan (3) avulla eli tässä

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 = \boldsymbol{i}\mathrm{d}q_1 + (l\cos q_2 \boldsymbol{i} + l\sin q_2 \boldsymbol{j})\mathrm{d}q_2 \\ &= (\mathrm{d}q_1 + l\cos q_2 \mathrm{d}q_2)\boldsymbol{i} + l\sin q_2 \mathrm{d}q_2 \boldsymbol{j} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} \end{aligned} \tag{c}$$

eli siis vielä

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \mathrm{d}q_1 + l\cos q_2 \mathrm{d}q_2 , \\ \mathrm{d}y &= l\sin q_2 \mathrm{d}q_2 . \end{aligned} \tag{d}$$

Näiden kaavojen sisältö on helppo ymmärtää: muutos $\mathrm{d}q_1$ aiheuttaa koko systeemin pienen translaation ja muutos $\mathrm{d}q_2$ sauvan pienen rotaation.

5.4 KETJUDERIVOINTI

Tarkastellaan funktiota $f = f(x)$, jossa vielä $x = x(p)$. Kirjoitetaan $f = f(x(p))$ ja sanotaan, että kyseessä on *yhdistetty funktio* (composite function). Tämän funktion derivaatta muuttujan p suhteen saadaan muodollisesti lausekkeesta (5.1.1) jakamalla se muutoksella $\mathrm{d}p$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} . \tag{1}$$

Tämä kaava kulkee nimellä yhdistetyn funktion derivoimissääntö eli ns. *ketjuderivointi* (chain rule).

Yleisemmin jos kyseessä on funktio $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, jossa $x_1 = x_1(p), x_2 = x_2(p), ..., x_n = x_n(p)$, saadaan vastaavasti lausekkeen (5.3.1) perusteella tulos

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}p} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}p} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}p} . \tag{2}$$

Näitä kaavoja sovelletaan mekaniikassa hyvin usein siten, että muuttujan p roolina on aika t.

Määritetään äskeisen sovelluksena partikkelin nopeuden lauseke, kun sen paikkavektori on annettu muodossa $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, ..., q_n)$. Nyt siis $q_1 = q_1(t), ...$, joten nopeus

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_n}\frac{\mathrm{d}q_n}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_n}\dot{q}_n . \end{aligned} \tag{3}$$

6 SARJAKEHITELMIÄ

6.1 YKSI MUUTTUJA

Tarkastellaan riippumattoman muuttujan x riittävän säännöllistä funktiota $f(x)$. Sen ns. *Taylorin kaava* pisteessä x_0 on muotoa

$$f(x) = f_0 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}^{(n-1)} f}{\mathrm{d}x^{(n-1)}}\right)_0 (x - x_0)^{n-1} + R_n . \quad (1)$$

Piste x_0 on ns. *kehityskeskus* (expansion center) ja indeksi 0 viittaa siihen, että funktion f ja sen derivaattojen arvot lasketaan pisteessä $x = x_0$. R_n on ns. *jäännöstermi*, jolle on esitetty kirjallisuudessa erilaisia lausekkeita. Usein riittää muoto

$$R_n = 0(h^n) , \quad (2)$$

jossa $h = | x - x_0 |$. Merkintä $0(h^n)$ (sanotaan: suuruusluokkaa h^n oleva termi) tarkoittaa karkeasti, että kun h on tarpeeksi pieni, tämä termi käyttäytyy oleellisesti kuten funktio Ch^n, jossa C on vakio.

Jos $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$, Taylorin kaavasta saadaan päättymätön tietyllä välillä $[x_0, x]$ suppeneva sarja, ns. *Taylorin sarja*

$$f(x) = f_0 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}\right)_0 (x - x_0)^3 + \cdots . \quad (3)$$

Jos kehityskeskuksena on erityisesti origo, saadaan

$$f(x) = f_0 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_0 x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 x^2 + \cdots \quad (4)$$

ja syntyvää sarjakehitelmää nimitetään tällöin usein *Maclaurinin sarjaksi.*

Esimerkki 6.1 Sarjakehitelmiä. Määritetään funktioiden (1) $\sin x$, (2) $\cos x$ ja (3) $(1+x)^k$ Taylorin sarjakehitelmät, kun kehityskeskuksena on origo.

(1) Funktion $f(x) = \sin x$ derivaatat ovat

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \cos x , \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = -\sin x , \quad \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3} = -\cos x , \quad \frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4} = \cos x , \quad \frac{\mathrm{d}^5 f}{\mathrm{d}x^5} = \cos x , \ldots \quad (a)$$

Taylorin sarja on $(x_0 = 0)$

$$\sin x = \sin 0 + (\cos 0)x + \frac{1}{2!}(-\sin 0)x^2 + \frac{1}{3!}(-\cos 0)x^3 +$$

$$+ \frac{1}{4!}(\sin 0)x^4 + \frac{1}{5!}(\cos 0)x^5 + \ldots \quad (b)$$

eli

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots . \tag{c}$$

Voidaan osoittaa, että sarja suppenee kaikilla arvoilla $|x| < \infty$.

(2) Funktion $f(x) = \cos x$ derivaatat ovat

$$\frac{df}{dx} = -\sin x , \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = -\cos x , \quad \frac{d^3 f}{dx^3} = \sin x , \quad \frac{d^4 f}{dx^4} = \cos x , \quad \frac{d^5 f}{dx^5} = -\sin x , \cdots . \tag{d}$$

Taylorin sarja on ($x_0 = 0$)

$$\cos x = \cos 0 + (-\sin 0)x + \frac{1}{2!}(-\cos 0)x^2 + \frac{1}{3!}(\sin 0)x^3 +$$

$$+ \frac{1}{4!}(\cos 0)x^4 + \frac{1}{5!}(-\sin 0)x^5 + \cdots \tag{e}$$

eli

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots . \tag{f}$$

Voidaan osoittaa, että sarja suppenee kaikilla arvoilla $|x| < \infty$.

(3) Funktion $f(x) = (1+x)^k$ derivaatat ovat

$$\frac{df}{dx} = k(1+x)^{k-1} , \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = k(k-1)(1+x)^{k-2} , \quad \frac{d^3 f}{dx^3} = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} \cdots , \tag{g}$$

Taylorin sarja on ($x_0 = 0$)

$$(1+x)^k = (1+0)^k + k(1+0)^{k-1}x + \frac{1}{2!}k(k-1)(1+0)^{k-2}x^2 + \frac{1}{3!}k(k-1)(k-2)(1+0)^{k-3} + \cdots$$

$$= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots \tag{h}$$

Voidaan osoittaa, että sarja suppenee kun $|x| < 1$.

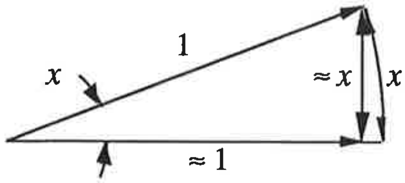
Esimerkiksi funktioille $1/(1+x)$ ja $\sqrt{1+x}$ saadaan kehitelmät

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \tag{i}$$

ja

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \cdots . \tag{j}$$

Äskeisessä esimerkissä johdettuja sini- ja kosinifunktioita koskevia kehitelmiä käytetään usein yksinkertaisimmillaan muodoissa



Kuva 6.1 Suorakulmainen kolmio.

$$\sin x = x + 0(|x|^3) \approx x\,,$$
$$\cos x = 1 + 0(|x|^2) \approx 1\,, \tag{5}$$

kun $|x|$ on pieni. Mekaniikan sovelluksia ovat mm. differentiaaligeometriset tarkastelut ja pienten siirtymien approksimaatiot. Likiarvojen (5) sisältö on helppo ymmärtää geometrisesti kuvan 6.1 avulla, kun kulma x on pieni. Kuvan perusteella on myös nähtävissä approksimaatio

$$\tan x \approx x\,. \tag{6}$$

6.2 USEITA MUUTTUJIA

Tarkastellaan aluksi kahden riippumattoman muuttujan x ja y funktiota $f(x,y)$. Sen eräs Taylorin kaava pisteessä (x_0,y_0) on

$$f(x,y) = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y-y_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 (x-x_0)^2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 (x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 (y-y_0)^2 + 0(h^3)\,. \tag{1}$$

On esitetty kaavan (6.1.1) vastine tapauksessa $n = 3$ ja nyt

$$h = \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]^{1/2}\,. \tag{2}$$

Indeksi 0 viittaa jälleen siihen, että kyseisten suureiden arvot lasketaan pisteessä (x_0,y_0).

Lauseke (1) on matriisimerkinnöin

$$f(x,y) = f_0 + \begin{Bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix}_0 + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_0 \begin{Bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{Bmatrix} + 0(h^3)\,. \tag{3}$$

Esiintyvän neliömuodon matriisin havaitaan olevan (ks. esimerkin 5.1 kaava (d)) symmetrinen.

Usean riippumattoman muuttujan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funktion $f(\{X\})$ tapauksessa kaava (3) laajenee muotoon

$$f(\{X\}) = f_0 + \{\Delta X\}^{\mathrm{T}} \frac{\partial f}{\partial \{X\}} + \frac{1}{2}\{\Delta X\}^{\mathrm{T}}[H]\{\Delta X\} + 0(h^3)\,, \tag{4}$$

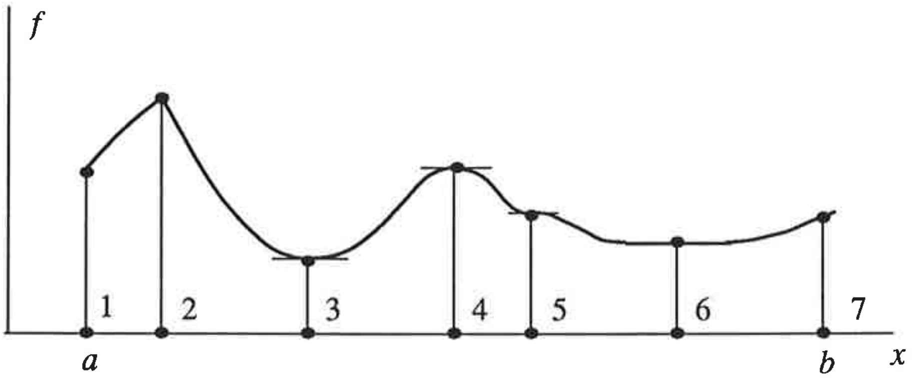
jossa käytettyjen merkintöjen sisältö on ilmeinen.

Taylorin kaavoista saadaan Taylorin sarjoja vastaavasti kuin yhden riippumattoman muuttujan tapauksessa. Tässä ei kuitenkaan esitetä niiden yleisiä muotoja.

7 ÄÄRIARVO

7.1 YKSI MUUTTUJA

Tarkastellaan riippumattoman muuttujan x funktiota $f(x)$ tietyllä välillä $[a,b]$. Kuvassa 7.1 on hahmoteltu eräs esimerkkitapaus funktion mahdollisesta kulusta.



Kuva 7.1 Funktio $f(x)$ välillä $[a,b]$.

Funktiolla $f(x)$ sanotaan olevan pisteessä x_0 suhteellinen eli lokaalinen eli paikallinen *minimi*, mikäli $f(x) \geq f(x_0)$ pisteen x_0 lähiympäristössä. Jos merkin $\geq$ sijasta voidaan käyttää merkkiä $>$ pisteen x_0 aidossa (siis x_0 ei ole mukana) ympäristössä sanotaan, että kyseessä on *oleellinen* eli aito (strict) paikallinen minimi. Termit paikallinen maksimi ja oleellinen paikallinen *maksimi* määritellään vastaavasti korvaamalla merkit $\geq$ ja $>$ merkeillä $\leq$ ja $<$. Minimi- ja maksimiarvoista käytetään yhteistä nimitystä *ääriarvot* (extremum value) ja vastaavia muuttajan x arvoja nimitetään ääriarvopisteiksi. Ääriarvojen teoriaa tarvitaan mekaniikassa mm. konservatiivisten systeemien stabiiliustarkasteluissa.

Kuvassa 7.1 ääriarvopisteitä ovat 1, 2, 3, 4, 6 (ja sen lähiympäristö) ja 7. Pisteissä 1, 3 ja 6 saavutetaan minimi, joista kaksi ensimmäistä ovat oleellisia. Pisteissä 2, 4 ja 7 saavutetaan oleellinen maksimi. Kuvan tapauksessa funktiolla on välillä $[a,b]$ lisäksi pisteessä 3 ns. absoluuttinen eli globaalinen minimi ja pisteessä 2 vastaava maksimi. Kun jatkossa puhutaan ääriarvoista, niillä tarkoitetaan pelkästään paikallisia käsitteitä.

Jos funktio on alueen sisäpisteiden mahdollisten ääriarvokohtien ympäristössä riittävän sileä, ääriarvon olemassaolon välttämätön ehto on ns. *stationaarisuusehto* (stationary condition)

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0 . \tag{1}$$

Ehdon toteuttavia muuttujan x arvoja nimitetään vastaavasti stationaarisiksi pisteiksi. Kuvan tapauksessa näitä ovat pisteet 3, 4, 5 ja 6. Pisteessä 5 ei saavuteta ääriarvoa, joten ehto ei ole siis vielä riittävä edes välin sisäpisteissä. Kuitenkin jo pelkästään stationaariset pisteet, joissa funktion muutosvoimakkuus on nolla, ovat usein tärkeitä.

Mahdollisen ääriarvon luonteen selvittämiseksi stationaarisen pisteen $x = x_0$ ympäristössä riittävän säännöllinen funktio voidaan esittää ensin Taylorin kaavan (luku 6.1) avulla muodossa

$$f(x) = f_0 + 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + 0(h^3) . \tag{2}$$

Jos toinen derivaatta on nollasta eroava, lausekkeen neliöllinen termi vallitsee funktion käyttäytymistä pisteen x_0 riittävän pienessä ympäristössä, koska jäännöstermi on suuruusluokaltaan kolmannen asteen termi (tai mahdollisesti korkeampi). Edellisen perusteella saadaan tulos:

Jos stationaarisessa pisteessä

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 > 0, \tag{3}$$

kyseessä on oleellinen minimi ja jos

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 < 0, \tag{4}$$

kyseessä on oleellinen maksimi. Jos

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 = 0, \tag{5}$$

on tutkittava Taylorin kehitelmän korkeamman asteen termejä ennen kuin voidaan tehdä päätelmiä. Pieni tarkastelu osoittaa, että jos ensimmäinen nollasta eroava derivaatta pisteessä x_0 on paritonta kertalukua, kyseessä ei ole ääriarvo. Jos taas tämän derivaatan kertaluku on parillinen, saadaan oleellinen minimi (maksimi), mikäli derivaatta on suurempi (pienempi) kuin nolla.

7.2 USEITA MUUTTUJIA

Tarkastellaan kahden riippumattoman muuttujan x ja y funktiota $f(x,y)$. Käsitteet ääriarvo, stationaariset pisteet yms. ovat yhden muuttujan tapauksen perusteella heti ymmärrettävissä.

Stationaarisuusehdot ovat nyt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0.\end{aligned} \tag{1}$$

Mahdollisen ääriarvon luonteen selvittämiseksi stationaarisen pisteen (x_0, y_0) ympäristössä voidaan käyttää esitystä (6.2.3):

$$f(x,y) = f_0 + 0 + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_0 \begin{Bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{Bmatrix} + 0(h^3). \tag{2}$$

Lausekkeen neliömuoto kontrolloi funktion muuttumista stationaarisen pisteen välittömässä läheisyydessä. Saadaan seuraavat tulokset:

- Jos neliömuoto on positiivisesti definiitti, kyseessä on oleellinen minimi.
- Jos neliömuoto on negatiivisesti definiitti, kyseessä on oleellinen maksimi. (3)
- Jos neliömuoto on indefiniitti, kyseessä ei ole ääriarvo.
- Jos neliömuoto on semidefiniitti, on tutkittava Taylorin kehitelmän korkeamman asteen termejä ennen kuin voidaan tehdä päätelmiä.

Esitetyt ehdot pätevät sellaisinaan myös useamman kuin kahden muuttujan tapauksessa. Neliömuodon mahdollisen positiivisen definiittiyden toteamiseksi voidaan käyttää apuna ehtoja (2.15.4). Erityisesti kahden muuttujan tapauksessa ehdot ovat siis

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 > 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0^2 > 0\,. \tag{4}$$

Nämä näyttävät aluksi muuttujien x ja y suhteen epäsymmetrisiltä, mutta niistä havaitaan seuraavan myös vaatimus $(\partial^2 f/\partial y^2)_0 > 0$.

Esimerkki 7.1 Ääriarvo. Tarkastellaan esimerkissä 1.1 esitettyä funktiota

$$V(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x \tag{a}$$

ja etsitään sen mahdolliset stationaariset pisteet ja ääriarvot.

Stationaarisuusehdot (1) ovat

$$\frac{\partial V}{\partial x} \equiv 2x + y + 1 = 0\,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} \equiv 2y + x = 0\,. \tag{b}$$

Kyseessä on siis tässä lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{c}$$

jonka ratkaisu on

$$x_0 = -\frac{2}{3}\,, \quad y_0 = \frac{1}{3}\,. \tag{d}$$

Täten tehtävään liittyy vain yksi stationaarinen piste.

Lasketaan toiset derivaatat:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2\,, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2\,, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 1\,. \tag{e}$$

Ne ovat vakioita koko alueessa. Ehtojen (4) tarkastelu antaa tulokset

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 = 2 > 0 \,,$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0 \,. \tag{f}$$

Täten kyseessä on ainakin oleellinen paikallinen minimi, jossa funktion arvo

$$f(x_0, y_0) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \,. \tag{g}$$

Itse asiassa kyseessä on jopa absoluuttinen minimi, koska Taylorin kehitelmä (6.2.3)

$$V(x,y) = -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x + \frac{2}{3} \\ y - \frac{1}{3} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x + \frac{2}{3} \\ y - \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \tag{h}$$

esittää tässä jo ilman jäännöstermiä alkuperäistä funktiota ja neliömuoto kontrolloi siis funktion muuttumista paitsi stationaarisen pisteen läheisyydessä myös koko alueessa.

8 DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

Dynamiikan liikeyhtälöt ovat differentiaaliyhtälöitä, joten otsikon aiheen tärkeys mekaniikassa on ilmeinen.

8.1 TAVALLINEN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖ

Tarkastellaan riippumattoman muuttujan x funktiota $y(x)$. Yhtälöä, joka koskee yhtä tai useampaa funktion derivaatoista, nimitetään *differentiaaliyhtälöksi* (differential equation). Yleisesti voidaan kirjoittaa yhtälö

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0 . \tag{1}$$

Funktion F argumenttiluettelossa voi siis olla mukana derivaattojen lisäksi itse funktio y ja mahdollisesti suoraan myös muuttuja x annettujen funktioiden muodossa.

Korkein esiintyvä derivaatan kertaluku ilmaisee samoin itse differentiaaliyhtälön *kertaluvun* (order). Jos riippumattomia muuttujia on vain yksi – kuten tässä – kyseessä on *tavallinen* (ordinary) differentiaaliyhtälö; jos riippumattomia muuttujia on kaksi tai useampia, kyseessä on *osittaisdifferentiaaliyhtälö* (partial differential equation). Tässä tarkastellaan vain tavallisia differentiaaliyhtälöitä.

Partikkelimekaniikan liikeyhtälöt ovat mm. juuri tavallisia differentiaaliyhtälöitä. Kontinuumimekaniikan liike- ja tasapainoyhtälöt ovat taas yleensä osittaisdifferentiaaliyhtälöitä.

Esimerkiksi yhtälö

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{xy}{x^2 - y^2} = 0 \tag{2}$$

on ensimmäistä kertalukua ja yhtälö

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ky - \hat{F}\sin(\omega x) = 0 , \tag{3}$$

jossa m, c, k, $\hat{F}$ ja ω ovat vakioita, on toista kertalukua. Kummatkin esimerkkiyhtälöt voidaan saattaa niin haluttaessa helposti ns. eksplisiittiseen muotoon eli ratkaista korkeinta kertalukua olevan derivaatan suhteen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{xy}{x^2 - y^2} , \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{c}{m}\frac{dy}{dx} - \frac{k}{m}y + \frac{\hat{F}}{m}\sin(\omega x) . \tag{5}$$

Differentiaaliyhtälö on *lineaarinen*, jos funktio ja sen derivaatat esiintyvät siinä lineaarisesti (eli ensimmäisessä potenssissa); muussa tapauksessa differentiaaliyhtälö on *epälineaarinen*. Yhtälö (2) on epälineaarinen (y ei esiinny lineaarisesti) ja yhtälö (3) lineaarinen.

Yhtälö (3) kuvaa ns. lineaarisen värähtelijän differentiaaliyhtälöä, kun $x \to t$ = aika ja $y \to x$ = siirtymä tasapainoaseman suhteen. Tietty ongelma matematiikan ja mekaniikan esitysten omaksumisen suhteen liittyykin vakiintuneiden tunnusten eri rooleihin eri yhteyksissä.

Tehtävänä on määrittää differentiaaliyhtälön *ratkaisu* (solution) eli funktio $y = y(x)$, joka toteuttaa kyseisen yhtälön. Yleinen ratkaisu sisältää ns. *integroimisvakioita* (n kpl, jossa n on yhtälön kertaluku). Tehtävissä esiintyy tavallisesti ns. *alkuehtoja* (initial condition) tai ns. *reunaehtoja* (boundary condition), joiden perusteella integroimisvakioiden arvot kiinnittyvät. Tavallisesti jos riippumaton muuttuja on aika, puhutaan alkuehdoista ja jos taas kyseessä on paikkamuuttuja, reunaehdoista.

Huomattakoon, että differentiaaliyhtälöiden ratkaisu ei suinkaan onnistu kaikissa – yksinkertaisiltakaan näyttävissä – tapauksissa analyyttisesti, vaan usein on turvauduttava numeerisiin menetelmiin.

8.2 ALKEISTAPAUS

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on pelkistetyimmillään muotoa

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x), \tag{1}$$

jossa f on siis ainoastaan x:n funktio. Ratkaisu on tällöin yksinkertaisesti

$$y(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + C, \tag{2}$$

jossa integraalimerkintä tarkoittaa funktion $f(x)$ mitä hyvänsä *integraalifunktiota* (integral function) eli *määräämätöntä integraalia* (indefinite integral) ja jossa C on integroimisvakio. Derivoimalla lauseke (2) havaitaan integraalifunktion määritelmän perusteella välittömästi, että yhtälö (1) tosiaan toteutuu. Ratkaisu onnistuu analyyttisesti, mikäli siis integraalifunktio on löydettävissä analyyttisesti.

Jos annetaan ehto

$$y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

eli että ratkaisun tulee kulkea xy-tason pisteen (x_0, y_0) kautta, lopullinen ratkaisu voidaan kirjoittaa heti muotoon

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

ilman että täytyy erikseen määrittää integroimisvakio. Nyt kyseessä on *määrätty integraali* (definite integral), joka on vielä käsitettävä ylärajansa x funktioksi. Tätä korostetaan usein kirjoittamalla kaava (4) vaihtoehtoiseen muotoon kuten

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x')\mathrm{d}x', \tag{5}$$

Integroimismuuttuja voidaan nimittäin korvata määrätyssä integraalissa millä hyvänsä tunnuksella, koska tämä ei vaikuta integraalin arvoon. Kyseessä on analoginen tapaus summamerkinnän $\sum_{i=1}^{n} a_i$ kanssa. Summeerausindeksillä voi olla mikä hyvänsä tunnus ilman, että se vaikuttaa summan arvoon. Esimerkiksi $\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3$, mutta samoin $\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3$.

Huomattakoon, että esimerkiksi toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f(x) \tag{6}$$

voidaan käsitellä yllä esitetyllä tekniikalla askeleittain kirjoittamalla se muotoon

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = f(x) \tag{7}$$

ja määrittämällä ensin funktio $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

Esimerkki 8.1 Palkin leikkausvoima. Palkin leikkausvoimaa $Q(x)$ koskeva differentiaaliyhtälö on kaava [Stat (8.3.26)]

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -q, \tag{a}$$

jossa $q(x)$ on palkkiin vaikuttavan poikittaisen kuormituksen intensiteetti ja x palkin akselia pitkin mitattu paikkakoordinaatti. Määritetään leikkausvoiman lauseke ulokepalkille (vasen pää jäykästi kiinnitetty pisteessä $x = 0$, oikeassa vapaassa päässä $x = l$ vaikuttaa poikittaisvoima P), jonka kuormitus on lineaarista muotoa

$$q = \left(1 - \frac{x}{l}\right) q_0, \tag{b}$$

jossa q_0 on intensiteetin arvo palkin jäykästi kiinnitetyssä päässä.

Tehtävän vallitsevat yhtälöt ovat siis differentiaaliyhtälö

$$\frac{dQ}{dx} = \left(-1 + \frac{x}{l}\right) q_0 \tag{c}$$

ja reunaehto (leikkausvoima saa arvon P palkin vapaassa päässä)

$$Q(l) = P. \tag{d}$$

Kaavan (2) mukaisesti

$$Q(x) = \int \left(-1 + \frac{x}{l}\right) q_0 dx + C = \left(-x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{l}\right) q_0 + C. \tag{e}$$

Reunaehdon perusteella

$$\left(-l+\frac{1}{2}\frac{l^2}{l}\right)q_0+C=P\,, \tag{f}$$

josta $C=P+q_0 l/2$ ja tämän sijoitus lausekkeeseen (e) antaa ratkaisun

$$Q(x)=\left(-x+\frac{1}{2}\frac{x^2}{l}\right)q_0+P+\frac{1}{2}q_0 l=P+\frac{1}{2}\left(1-\frac{2x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right)q_0 l\,. \tag{g}$$

Vaihtoehtoinen, suorempi ratkaisutapa perustuu kaavan (4) tai (5) käyttöön. Saadaan (kaava (5))

$$\begin{aligned} Q(x) &= P+\int_l^x\left(-1+\frac{x'}{l}\right)q_0\,dx' = P+\Big|_l^x\left(-x'+\frac{1}{2}\frac{x'^2}{l}\right)q_0 \\ &= P+\left(-x+\frac{1}{2}\frac{x^2}{l}+l-\frac{1}{2}\frac{l^2}{l}\right)q_0 = P+\frac{1}{2}\left(1-\frac{2x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right)q_0 l\,. \end{aligned} \tag{h}$$

Kaavan (4) merkinnöin saadaan vastaavasti

$$\begin{aligned} Q(x) &= P+\int_l^x\left(-1+\frac{x}{l}\right)q_0\,dx = P+\Big|_l^x\left(-x+\frac{1}{2}\frac{x^2}{l}\right)q_0 \\ &= P+\left(-x+\frac{1}{2}\frac{x^2}{l}+l-\frac{1}{2}\frac{l^2}{l}\right)q_0 = P+\frac{1}{2}\left(1-\frac{2x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right)q_0 l\,. \end{aligned} \tag{i}$$

8.3 MUUTTUJIEN EROTTAMISKEINO

Jos ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0 \tag{1}$$

tai sama eksplisiittisessä muodossa

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{2}$$

voidaan manipuloida muotoon

$$g(y)\mathrm{d}y=h(x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

(sanotaan, että muuttujat on erotettu), jossa siis g on vain y:n funktio ja h vain x:n funktio, niin voidaan osoittaa, että differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int h(x)\mathrm{d}x+C\,. \tag{4}$$

Tässä integraalit tarkoittavat funktioiden $g(y)$ ja $h(x)$ integraalifunktioita ja C on integroimisvakio. Se voidaan määrittää tyyppiä (8.2.3) olevan ehdon avulla. Tämän ehdon toteuttava lopullinen ratkaisu saadaan suoraan määrättyjen integraalien muodossa olevasta yhtälöstä

$$\int_{y_0}^{y} g(y)\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x} h(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

Tämä kaava kirjoitetaan usein esimerkiksi muotoon (vrt. luku 8.2)

$$\int_{y_0}^{y} g(y')\mathrm{d}y' = \int_{x_0}^{x} h(x')\mathrm{d}x', \tag{6}$$

kun halutaan jälleen korostaa, että integraalit ovat ylärajojensa funktioita.

Todettakoon vielä, että edellä käsitellyssä yhtälössä (8.2.1) voidaan muuttujat välittömästi erottaa:

$$1 \cdot \mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x \tag{7}$$

(vakio 1 voidaan käsittää minkä hyvänsä muuttujan kuten myös y:n funktioksi) ja kaavan (4) erikoistapauksena saadaan tulos

$$\int 1dy = \int f(x)dx + C \tag{8}$$

eli jälleen

$$y(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + C. \tag{9}$$

Muuttujien erottamiskeino ei vaadi differentiaaliyhtälön lineaarisuutta ja sen käyttömahdollisuus kannattaa yleensä aina tarkistaa. Tarkemmin, jotta muuttujat voitaisiin erottaa, funktion $f(x,y)$ kaavassa (2) täytyy olla tyyppiä $f_1(x)f_2(y)$, jolloin päädytään kaavan (3) mukaiseen muotoon

$$\frac{1}{f_2(y)}\mathrm{d}y = f_1(x)\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Esimerkiksi yhtälöön (8.1.4) ei siis voida ainakaan välittömästi soveltaa muuttujien erottamiskeinoa.

Esimerkki 8.2 Partikkelin liike. Tarkastellaan partikkelin liikeyhtälöä (m, g ja α ovat positiivisia vakioita)

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = mg - \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{a}$$

alkuehtojen

$$x(0)=0\,, \tag{b}$$

$$\frac{dx}{dt}(0)=v_0 \tag{c}$$

alaisena. Kyseessä on partikkelin suoraviivainen liike painovoiman ja lineaarisen vastusvoiman alaisena. Suure $x(t)$ ilmaisee partikkelin aseman ajan t funktiona. Nyt siis t on riippumaton muuttuja ja $x(t)$ on määritettävä funktio. Merkitsemällä $v \equiv dx/dt$, jossa v on partikkelin nopeus, saadaan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$m\frac{dv}{dt}=mg-\alpha v \tag{d}$$

ja alkuehto

$$v(0)=v_0\,, \tag{e}$$

joka ilmaisee alkunopeuden ajan hetkellä $t=0$.

Pieni järjestely tuottaa muuttujat erotettuna olevan muodon (3)

$$\frac{1}{g-\dfrac{\alpha}{m}v}\,dv=dt\,. \tag{f}$$

Kaavan (5) soveltaminen antaa

$$\int_{v_0}^{v}\frac{1}{g-\dfrac{\alpha}{m}v}\,dv=\int_0^t dt\,,\qquad \Bigg|_{v_0}^{v}-\frac{m}{\alpha}\ln\!\left(g-\frac{\alpha}{m}v\right)=\Bigg|_0^t\,t\,,$$

$$-\frac{m}{\alpha}\left[\ln\!\left(g-\frac{\alpha}{m}v\right)-\ln\!\left(g-\frac{\alpha}{m}v_0\right)\right]=t\,,\qquad \ln\frac{g-\dfrac{\alpha}{m}v}{g-\dfrac{\alpha}{m}v_0}=-\frac{\alpha}{m}t\,,$$

$$\frac{g-\dfrac{\alpha}{m}v}{g-\dfrac{\alpha}{m}v_0}=e^{-\frac{\alpha t}{m}}\,,\qquad g-\frac{\alpha}{m}v=\left(g-\frac{\alpha}{m}v_0\right)e^{-\frac{\alpha t}{m}}\,,$$

$$v=\left(v_0-\frac{mg}{\alpha}\right)e^{-\frac{\alpha t}{m}}+\frac{mg}{\alpha}\,. \tag{g}$$

Saatu nopeuden lauseke voidaan käsittää differentiaaliyhtälöksi

$$\frac{dx}{dt}=\left(v_0-\frac{mg}{\alpha}\right)e^{-\frac{\alpha t}{m}}+\frac{mg}{\alpha}\,,$$

jota koskee alkuehto (b). Voidaan soveltaa heti vaikka ratkaisua (8.2.4), joka antaa

$$x=0+\int_0^t\left[\left(v_0-\frac{mg}{\alpha}\right)e^{-\frac{\alpha t}{m}}+\frac{mg}{\alpha}\right]dt=\Bigg|_0^t\left[-\frac{m}{\alpha}\left(v_0-\frac{mg}{\alpha}\right)e^{-\frac{\alpha t}{m}}+\frac{mg}{\alpha}t\right]$$

$$= -\frac{m}{\alpha}\left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha t}{m}} + \frac{m}{\alpha}\left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right) + \frac{mg}{\alpha}t$$

$$= \frac{mv_0}{\alpha}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha t}{m}}\right) + \frac{mg}{\alpha}\left[t - \frac{m}{\alpha}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)\right]. \tag{i}$$

Kun t kasvaa, ratkaisujen (g) ja (i) eksponenttitermit lähestyvät nollaa. Nopeudelle saadaan raja-arvo $v_1 = mg/\alpha$. Tässä tilassa partikkeliin vaikuttava vastusvoima ja painovoima ovat yhtä suuret.

8.4 TOISEN KERTALUVUN LINEAARINEN VAKIOKERTOIMINEN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖ

Toisen kertaluvun *lineaarinen* differentiaaliyhtälö on yleisesti muotoa

$$a_0(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_2(x)y = f(x), \tag{1}$$

jossa kertoimet $a_0(\neq 0)$, a_1, a_2 ja ns. *oikea puoli* eli häiriöfunktio f ovat annettuja riippumattoman muuttujan x funktioita. Jos yhtälö on muotoa

$$a_0(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_2(x)y = 0 \tag{2}$$

eli jos $f(x) = 0$, sitä sanotaan *homogeeniyhtälöksi* (homogeneous equation).

Jos homogeeniyhtälölle on löydetty *yksityisratkaisut* (particular solution) $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, mikä hyvänsä niiden lineaarikombinaatio (luku 2.11)

$$y = \alpha_1 y^{(1)} + \alpha_2 y^{(2)} \tag{3}$$

on edelleen homogeeniyhtälön ratkaisu. Lausekkeen (3) sijoitus yhtälöön (2) antaa nimittäin

$$a_0(x)\left(\alpha_1\frac{\mathrm{d}^2y^{(1)}}{\mathrm{d}x^2} + \alpha_2\frac{\mathrm{d}^2y^{(2)}}{\mathrm{d}x^2}\right) + a_1(x)\left(\alpha_1\frac{\mathrm{d}y^{(1)}}{\mathrm{d}x} + \alpha_2\frac{\mathrm{d}y^{(2)}}{\mathrm{d}x}\right) + a_2(x)\left(\alpha_1 y^{(1)} + \alpha_2 y^{(2)}\right) =$$

$$\alpha_1\left(a_0(x)\frac{\mathrm{d}^2y^{(1)}}{\mathrm{d}x^2} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}y^{(1)}}{\mathrm{d}x} + a_2(x)y^{(1)}\right) + \alpha_2\left(a_0(x)\frac{\mathrm{d}^2y^{(2)}}{\mathrm{d}x^2} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}y^{(2)}}{\mathrm{d}x} + a_2(x)y^{(2)}\right) =$$

$$\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0. \tag{4}$$

Tämä tärkeä tulos kulkee usein myös nimellä *superpositioperiaate* (siis hieman eri mielessä kuin luvussa 3.5).

Voidaan osoittaa, että jos ratkaisut $y^{(1)}$ ja $y^{(2)}$ ovat lineaarisesti riippumattomia (tässä se tarkoittaa, että suhde $y^{(1)}/y^{(2)}$ ei ole tietty sama vakio kaikilla x:n arvoilla), ratkaisu (3) – kirjoitetaan se nyt muotoon

$$y_\mathrm{h} = Ay_\mathrm{h}^{(1)} + By_\mathrm{h}^{(2)}, \tag{5}$$

jossa kertoimet A ja B ovat merkitykseltään integroimisvakioita – esittää homogeeniyhtälön *yleistä ratkaisua* (general solution).

Edelleen voidaan osoittaa, että täydellisen yhtälön (1) yleinen ratkaisu saadaan muodosta

$$y(x) = y_\mathrm{h}(x) + y_\mathrm{p}(x)\,, \tag{6}$$

jossa $y_\mathrm{p}(x)$ on täydellisen yhtälön jokin mielivaltainen *yksityisratkaisu* .

Tämän jälkeen siirrytään tarkastelemaan pelkästään *vakiokertoimisia* (kertoimet a_0, a_1, a_2 eivät riipu muuttujasta x) lineaarisia differentiaaliyhtälöitä, jolloin äskeinen teoria pätee luonnollisesti edelleen, mutta nyt funktioiden y_h ja y_p määrittäminen helpottuu oleellisesti. Voidaan edetä täysin standarditavalla. Yhtälö (8.1.3) on tyyppiesimerkki toisen kertaluvun lineaarisesta vakiokertoimisesta differentiaaliyhtälöstä.

Kirjoitetaan yhtälö (1) muotoon (jaetaan yhtälö puolittain luvulla $a_0 \neq 0$, jolloin esiintyvien tunnusten määrä hieman vähenee)

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = g(x)\,. \tag{7}$$

Vastaava homogeeniyhtälö on

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = 0\,. \tag{8}$$

Homogeeniyhtälön yksityisratkaisuja etsitään eksponenttifunktiotyyppisellä *yritteellä* (trial solution)

$$y = \mathrm{e}^{rx}\,, \tag{9}$$

jossa r on vielä määräämätön vakio. Yritteen sijoitus yhtälöön (8) antaa

$$r^2\mathrm{e}^{rx} + ar\mathrm{e}^{rx} + b\mathrm{e}^{rx} = 0\,,$$

$$\left(r^2 + ar + b\right)\mathrm{e}^{rx} = 0\,. \tag{10}$$

Toteutumisehtona saadaan toisen asteen yhtälö, ns. *karakteristinen yhtälö* (characteristic equation)

$$r^2 + ar + b = 0\,, \tag{11}$$

jonka juuret ovat

$$r_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\,. \tag{12}$$

Jos juuret ovat erillisiä, on löydetty kaksi riippumatonta ratkaisua $y_\mathrm{h}^{(1)} = e^{r_1 x}$ ja $y_\mathrm{h}^{(2)} = e^{r_2 x}$ ja homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$y_\mathrm{h} = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}\,. \tag{13}$$

Tapauksessa $a^2/4-b<0$ juuret ovat kompleksisia. Käyttämällä apuna *Eulerin kaavaa*

$$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi\,, \tag{14}$$

jossa i on imaginaariyksikkö ja muodostamalla esityksen (3) mukaisesti sopivia ratkaisujen e^{r_1x}, e^{r_2x} lineaarikombinaatioita saadaan niin haluttaessa kaksi reaalista riippumatonta ratkaisua, joiden mielivaltainen lineaarikombinaatio on siis homogeeniyhtälön yleinen reaalinen ratkaisu.

Tapauksessa $a^2/4-b=0$ saadaan kaksoisjuuri $r_{1,2}=-a/2$. Sijoittamalla voidaan todeta, että funktion $e^{-a/2\cdot x}$ lisäksi myös funktio $xe^{-a/2\cdot x}$ on eräs yksityisratkaisu ja homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on tässä tapauksessa

$$y_h=Ae^{-\frac{a}{2}x}+Bxe^{-\frac{a}{2}x}\,. \tag{15}$$

Täydellisen yhtälön (7) yksityisratkaisun y_p määrittämiseksi on kirjallisuudessa esitetty periaatteessa yleinen menettelytapa. Jos kuitenkin oikea puoli on yksinkertaista tyyppiä, ratkaisu löytyy helpoiten hyvällä maulla valitulla arvauksella käyttäen ns. *määräämättömien kertoimien keinoa.*

Esimerkki 8.3 Partikkelin liike. Käsitellään esimerkin 8.2 probleema

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-\alpha\frac{dx}{dt}\,, \tag{a}$$

$$x(0)=0\,, \tag{b}$$

$$\frac{dx}{dt}(0)=v_0 \tag{c}$$

vaihtoehtoisesti tämän luvun teorian avulla.

Yhtälö (1) on lineaarinen ja vakiokertoiminen. Kirjoitetaan se yhtälön (7) mukaiseen muotoon

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt}=g\,. \tag{d}$$

Homogeeniyhtälö on

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt}=0 \tag{e}$$

ja yrite $x=e^{rt}$ antaa karakteristisen yhtälön

$$r^2+\frac{\alpha}{m}r=0\,. \tag{f}$$

Tämän juuret ovat $r_1=0$, $r_2=-\alpha/m$ ja vastaavien yksityisratkaisujen $e^{r_1t}=e^0=1$, $e^{r_2t}=e^{-\alpha t/m}$ havaitaan olevan lineaarisesti riippumattomia. Täten homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu

$$x_\mathrm{h}(t) = A + B\mathrm{e}^{-\frac{\alpha t}{m}}. \tag{g}$$

Täydellisen yhtälön (d) yksityisratkaisua haetaan määräämättömien kertoimien keinon avulla. Koska oikea puoli on nollannen kertaluvun polynomi, arvataan polynomimuotoinen yrite

$$x = C + Dt. \tag{h}$$

Sen sijoitus antaa yhtälön

$$0 + \frac{\alpha}{m} D = g, \tag{i}$$

josta $D = mg/\alpha$. Luku C voi olla mitä hyvänsä ja koska tässä riittää jonkin ratkaisun löytyminen, asetetaan $C = 0$, jolloin saadaan

$$x_\mathrm{p} = \frac{mg}{\alpha} t. \tag{j}$$

Täten yhtälön (d) yleinen ratkaisu on kaavan (6) mukaisesti

$$x = x_\mathrm{h} + x_\mathrm{p} = A + B\mathrm{e}^{-\frac{\alpha t}{m}} + \frac{mg}{\alpha} t. \tag{k}$$

Alkuehtoa (c) varten tarvitaan ensimmäinen derivaatta:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -B\frac{\alpha}{m}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha t}{m}} + \frac{mg}{\alpha}. \tag{l}$$

Alkuehdot (b) ja (c) saavat muodot

$$\begin{aligned} &A + B \cdot 1 + 0 = 0, \\ &-B\frac{\alpha}{m} \cdot 1 + \frac{mg}{\alpha} = v_0 \end{aligned} \tag{m}$$

eli

$$\begin{aligned} &A + B = 0, \\ &B = -\frac{m}{\alpha} v_0 + \frac{m^2 g}{\alpha^2}. \end{aligned} \tag{n}$$

Tämän tässä tapauksessa erittäin yksinkertaisen yhtälöryhmän ratkaisu on

$$A = \frac{m}{\alpha} v_0 - \frac{m^2 g}{\alpha^2}, \qquad B = -\frac{m}{\alpha} v_0 + \frac{m^2 g}{\alpha^2} \tag{o}$$

ja sijoitus lausekkeeseen (k) tuottaa lopputuloksen

$$x(t) = \frac{m}{\alpha} v_0 - \frac{m^2 g}{\alpha^2} + \left(-\frac{m}{\alpha} v_0 + \frac{m^2 g}{\alpha^2} \right) e^{-\frac{\alpha t}{m}} + \frac{mg}{\alpha} t$$

$$= \frac{mv_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right) + \frac{mg}{\alpha}\left[t - \frac{m}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)\right]. \qquad \text{(p)}$$

Tämä on sama kuin esimerkin 8.2 lauseke (i).

9 SEKALAISTA

9.1 VÄLTTÄMÄTÖN EHTO JA RIITTÄVÄ EHTO

Tarkastellaan otsikon termien merkitystä sekä muutakin aiheeseen liittyvää.

Olkoot P ja Q kaksi väitettä. Esimerkiksi

P: Kahdella suoralla on yhteinen piste, (1)
Q: Suorat ovat samassa tasossa. (2)

Merkintä $P \Rightarrow Q$ tarkoittaa: Jos P on tosi, myös Q on tosi. Sanotaan: P *implikoi* Q:n eli P:stä *seuraa* Q. Jos $P \Rightarrow Q$, sanotaan myös, että Q on P:n *välttämätön ehto* (necessary condition). Edelleen, jos $P \Rightarrow Q$, sanotaan, että P on Q:n *riittävä ehto* (sufficient condition).

Esimerkkitapauksessa (1) ja (2) nähdään, että $P \Rightarrow Q$, mutta sen sijaan $Q \not\Rightarrow P$ (Suorat voivat olla yhdensuuntaiset ja siis samassa tasossa, mutta eivät silti leikkaa toisiaan.) Esimerkiksi lauseen [Stat (7.3.11)] johdossa on

P: Kappale on tasapainossa (3)
Q: $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{M} = \mathbf{0}$. (4)

Saatiin siis $P \Rightarrow Q$. Saman kohdan huomautuksen 7.3 vastaesimerkissä sen sijaan $Q \not\Rightarrow P$.

Merkintä $P \Leftrightarrow Q$ tarkoittaa: $P \Rightarrow Q$ ja $Q \Rightarrow P$. Sanotaan: Väitteet ovat *yhtäpitäviä*. Jos $P \Leftrightarrow Q$ sanotaan myös:

- Q on P:n *välttämätön ja riittävä ehto* (tai yhtä hyvin P on Q:n ...) tai
- P on tosi *silloin ja vain silloin*, kun Q on tosi tai
- P on tosi *aina ja vain*, kun Q on tosi tai
- P on tosi, *jos ja vain jos* Q on tosi tai
- P on tosi *täsmälleen silloin*, kun Q on tosi.

Jos on todistettava, että $P \Leftrightarrow Q$, tehdään tämä joko

- osoittamalla, että $P \Rightarrow Q$ ja $Q \Rightarrow P$ tai
- osoittamalla, että $P \Rightarrow Q$ ja $-P \Rightarrow -Q$ (tai yhtä hyvin $Q \Rightarrow P$, $-Q \Rightarrow -P$) tai
- osoittamalla, että $-Q \Rightarrow -P$ ja $-P \Rightarrow -Q$.
  Esimerkiksi lauseessa [Stat (9.2.15)] on

P: Kappale on tasapainossa, (5)
Q: Kappaleeseen vaikuttavien voimien tekemä virtuaalinen työ on nolla jokaisen virtuaalisen siirtymän suhteen. (6)

Lauseen sisältö $P \Leftrightarrow Q$ johdetaan osoittamalla, että (1) $P \Rightarrow Q$ ja (2) $Q \Rightarrow P$.

9.2 DIFFERENTIAALIGEOMETRISET JOHDOT

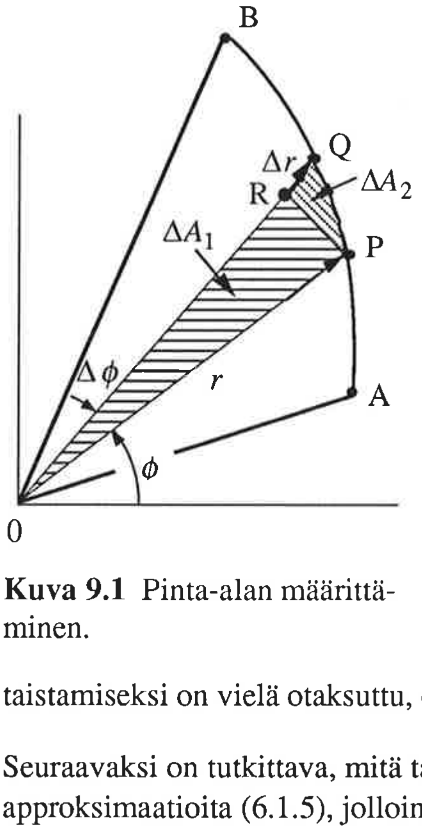
Mekaniikassa – ja tekniikassa yleensä – johdetaan ilmiöitä kuvaavia differentiaaliyhtälöitä hyvin usein ns. *differentiaaligeometrisella tavalla*. Kohteeksi otetaan tällöin tarkastelualueessa mielivaltaisesti sijaitseva pieni alkio, johon sitten sovelletaan ilmiössä vallitsevia lakeja;

statiikassa tasapainoyhtälöitä. Käsittelyjen seuraamisessa voi aiheuttaa hämmennystä se, että johdot etenevät usein tiettyjä likimääräistyksiä käyttäen ja kuitenkin lopputulos voi olla täysin eksakti (kyseisen teorian mielessä). Eräänä selityksenä tähän on seuraava seikka: Alkion koon lähestyessä rajatta nollaa korkeamman kertaluvun pienet termit voidaan jättää ilman virhettä *alemman kertaluvun pienten termien rinnalla pois.*

Äskeinen lause vaatii selvitystä ainakin terminologiansa suhteen. Tarkastellaan tässä tarkoituksessa kuvan 9.1 esittämää hyvin yksinkertaista puhtaasti geometrista esimerkkitehtävää. Käyrän yhtälö on annettu napakoordinaatistossa muodossa

$$r = r(\phi) \tag{1}$$

eli pisteen P etäisyys r origosta O riippuu tietyllä tavalla kulmasta ϕ, joka on siis tässä riippumaton muuttuja. Tehtävänä on määrittää suorien OA ja OB ja kaaren APB rajoittaman sektoriaalisen alueen pinta-ala A. Tarkastellaan ensin pientä tyypillistä sektoriaalista pinta-alkiota OPQO. Sen pinta-ala



Kuva 9.1 Pinta-alan määrittäminen.

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 \,, \tag{2}$$

jossa

$$\Delta A_1 = \frac{1}{2} r r \sin\Delta\phi = \frac{1}{2} r^2 \sin\Delta\phi \,, \tag{3}$$

$$\Delta A_2 = \frac{1}{2}\left(2r\sin\frac{\Delta\phi}{2}\right)\Delta r \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

$$= r\cos\frac{\Delta\phi}{2}\Delta r \sin\frac{\Delta\phi}{2} \,. \tag{4}$$

Osakolmiossa OPR ovat sivujen OP ja OR pituudet r ja välinen kulma $\Delta\phi$. Osakolmiossa RPQ ovat sivujen RP ja RQ pituudet $2r\sin(\Delta\phi/2)$ ja Δr ja välinen kulma $\pi/2+\Delta\phi/2$. Näiden tietojen avulla on saatu pinta-alat ΔA_1 ja ΔA_2. (On käytetty hyväksi kaavaa $\sin(\pi/2+\alpha) = \cos\alpha$ ja käsittelyn yksinkertaistamiseksi on vielä otaksuttu, että käyrä $r = r(\phi)$ on välillä PQ suora.)

Seuraavaksi on tutkittava, mitä tapahtuu, kun $\Delta\phi$ pienenee rajatta. Voidaan esimerkiksi soveltaa approksimaatioita (6.1.5), jolloin

$$\sin\Delta\phi \approx \Delta\phi \,, \quad \sin\frac{\Delta\phi}{2} \approx \frac{\Delta\phi}{2} \,, \quad \cos\frac{\Delta\phi}{2} \approx 1 \tag{5}$$

ja

$$\Delta A_1 \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\phi \,, \tag{6}$$

$$\Delta A_2 \approx \frac{1}{2} r \Delta r \Delta\phi \,. \tag{7}$$

Suure ΔA_1 on tässä ns. *ensimmäisen kertaluvun pieni termi* eli ensimmäisen kertaluvun differentiaali (first order differential) ja ΔA_2 vastaavasti ns. *toisen kertaluvun pieni termi.* Nimitykset syntyvät siitä, että mielivaltaisen pienet suureet $\Delta\phi$ ja Δr esiintyvät näissä lausekkeissa vastaavasti lineaarisesti ja neliöllisesti. Terminologian yleistys yleisempiin tapauksiin on ilmeinen.

Käsitellyssä esimerkkitapauksessa nähdään heti todellakin, että suhde

$$\frac{\Delta A_2}{\Delta A_1} \approx \frac{\Delta r}{r} \to 0, \tag{8}$$

kun $\Delta\phi \to 0$ jolloin siis myös $\Delta r \to 0$.

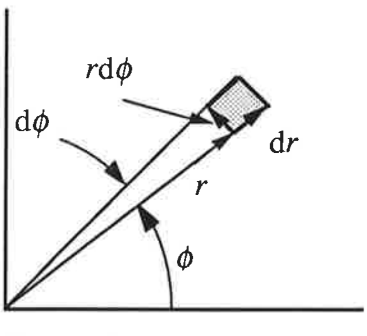
Kun tarkasteluissa annetaan alkion koon rajatta pienentyä, merkinnöissä on tapana suorittaa askel $\Delta \to \mathrm{d}$. Esimerkiksi kaava (2) muuntuu siis rajalla muotoon

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}A_1 = \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\phi . \tag{9}$$

Matemaattisesti täsmällisempi johto osoittaisi, että tulos (9) on täysin eksakti. Rutinoitunut differentiaaligeometrian käyttäjä synnyttää lausekkeen (9) välittömästi kuvaa 9.1 katsomalla, suorittamalla mielessään askelen $\Delta\phi \to \mathrm{d}\phi$ ja laskemalla pinta-alan ajattelemalla esimerkiksi hyvin kapeaa tasakylkistä kolmiota, jonka korkeus $\approx r$ ja kanta vaikka pienen ympyränkaaren PR avulla approksimoituna $\approx r\mathrm{d}\phi$.

Kysytty pinta-ala saadaan täten määrättynä integraalina

$$A = \int \mathrm{d}A = \frac{1}{2} \int_{\phi_A}^{\phi_B} r^2(\phi)\mathrm{d}\phi . \tag{10}$$



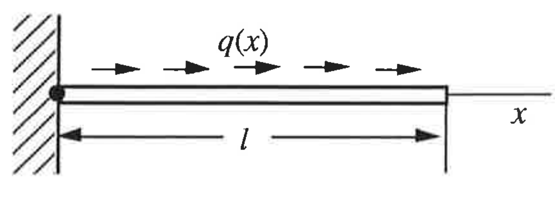
Kuva 9.2 Pinta-alkio.

Huomattakoon, että tavallisimmin napakoordinaatistoa käytettäessä toimitaan edellisestä käsittelystä poiketen kuvan 9.2 esittämän tyypillisen pinta-alkion avulla. Tämän alkion pinta-alan lauseke on

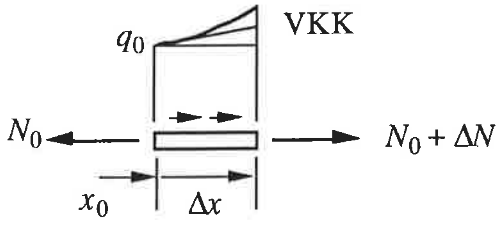
$$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi . \tag{11}$$

Vaikka tässä on käytetty samaa tunnusta $\mathrm{d}A$ kuin kaavassa (9), kyseessä on siis nyt toisen kertaluvun differentiaalinen suure. Lauseke (11) saadaan differentiaaligeometrisesti laskemalla suorakaiteen, jonka sivujen pituudet ovat $\mathrm{d}r$ ja $r\mathrm{d}\phi$, pinta-ala.

Esimerkki 9.1 Normaalivoima. Kuva (a) esittää x-akselin suuntaista sauvaa tai lankaa, johon vaikuttaa akselin suuntainen jakautunut kuormitus, jonka intensiteetti on $q(x)([q] = \mathrm{N/m})$. Määritetään sauvassa vaikuttavaa normaalivoimaa $N(x)$ (tai toisin merkinnöin, langassa vaikuttavaa lankavoimaa $S(x)$) koskeva differentiaaliyhtälö.



Kuva (a)



Kuva (b)

Tarkastellaan sauvan pienen alkion vapaakappalekuviota (kuva (b)). Alkion vasemman pään kohdalla vallitsevat suureiden arvot on varustettu indeksillä 0. Kun riippumaton muuttuja saa muutoksen Δx, saa normaalivoiman arvo vastaavasti muutoksen ΔN. Jakautuneen kuormituksen resultantin arvo alkion alueella kertyy integraalista

$$\Delta F = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} q(x) dx \,. \tag{a}$$

Alkion vaakasuuntainen tasapainoyhtälö on siis

$$\rightarrow \quad -N_0 + N_0 + \Delta N + \Delta F = 0 \tag{b}$$

eli jakamalla vielä suureella Δx:

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = -\frac{\Delta F}{\Delta x} \,. \tag{c}$$

Tavallisimmin johto viedään eteenpäin käyttäen approksimaatiota

$$q(x) \approx q_0 = \text{vakio} \tag{d}$$

alkion alueella, jolloin

$$\Delta F \approx q_0 \Delta x \,. \tag{e}$$

Tämän sijoitus yhtälöön (c) ja askel $\Delta \rightarrow \mathrm{d}$ tuottaa vallitsevan eksaktin differentiaaliyhtälön

$$\frac{\mathrm{d}N(x)}{\mathrm{d}x} = -q(x) \,. \tag{f}$$

(Indeksi 0 on jätetty tässä vaiheessa tarpeettomana pois.)

Tarkastellaan, mitä seuraa, jos käsittelyä yritetään tarkentaa ottamalla mukaan funktion $q(x)$ Taylorin sarjan seuraava termi ($q_0' = (\mathrm{d}q/\mathrm{d}x)_0$):

$$q(x) \approx q_0 + q_0'(x - x_0) \,. \tag{g}$$

Tämähän merkitsee, että kuormitusintensiteetin otaksutaan muuttuvan lineaarisesti alkion alueella (kuva (b)). Sijoitus kaavaan (a) antaa pienen laskelman jälkeen

$$\Delta F \approx q_0 \Delta x + \frac{1}{2} q_0' (\Delta x)^2 \tag{h}$$

ja yhtälö (c) saa muodon

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = -q_0 - \frac{1}{2} q_0' \Delta x \,. \tag{i}$$

Yhtälön oikealla puolella ovat rinnakkain "nollannen" ja ensimmäisen kertaluvun pieni termi ja askeleessa $\Delta \rightarrow d$ jälkimmäinen katoaa. Päädytään siis edelleen yhtälöön (f), joten johdon tarkennusyritys aiheutti itse asiassa vain turhaa laskentatyötä.

Yhtälön (f) täysin moitteeton johto – johon ei yleensä kuitenkaan vaivauduta – tapahtuu parhaiten soveltamalla integraalilaskennan väliarvolausetta integraaliin (a). Saadaan

$$\Delta F = q(\xi) \Delta x \,, \tag{j}$$

jossa $\xi \in [x_0, x_0 + \Delta x]$. Yhtälö (c) on nyt

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = -q(\xi)\,. \tag{k}$$

Kun sitten $\Delta x \to 0$, piste ξ lähestyy pistettä x_0 ja saadaan yhtälö (f).

Määritetään normaalivoiman lauseke vielä erityisesti kuvan (a) esittämässä tapauksessa ja kun kuormitusintensiteetti muuttuu lineaarisesti:

$$q(x) = \frac{x}{l} q_0\,. \tag{l}$$

Tässä q_0 on siis suureen q arvo pisteessä $x = l$. Täten probleema on matemaattisesti differentiaaliyhtälö

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{l} q_0\,. \tag{m}$$

reunaehtoineen

$$N(l) = 0\,. \tag{n}$$

Reunaehto seuraa siitä, että kuvan (a) perusteella normaalivoiman arvon tulee hävitä sauvan oikeassa päässä, koska siellä ei vaikuta mitään ulkoista voimaa.

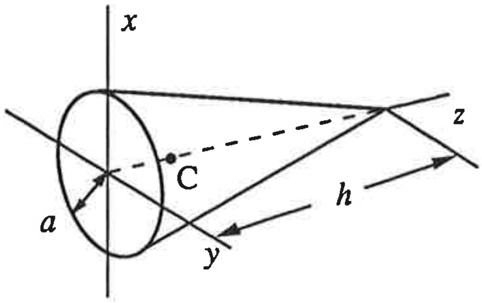
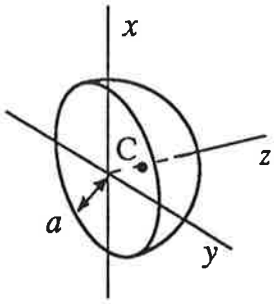
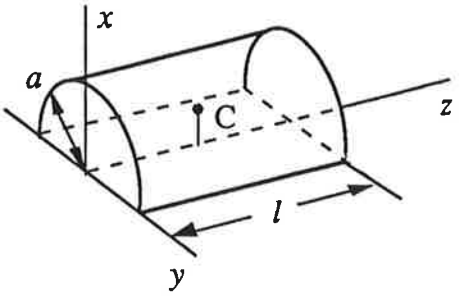
Ratkaisu on (luku 8.2)

$$N(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) q_0\, l\,. \tag{o}$$

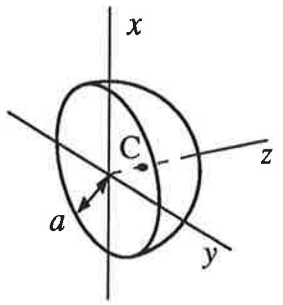
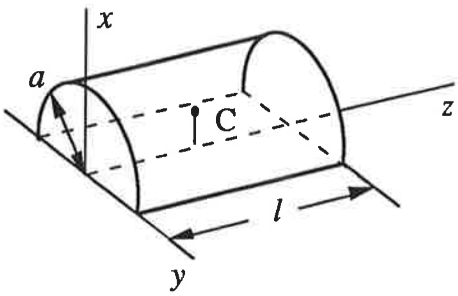
9.3 TAULUKOITA

Tähän kohtaan on liitetty viisi taulukkoa, jotka esiintyvät myös lähteessä [Stat]. Niistä neljä koskee erilaisia keskiöitä ja yksi jakautuneita kuormituksia. Taulukot on numeroitu paitsi tämän monisteen jaottelun myös (suluissa) lähteen [Stat] jaottelun mukaan.

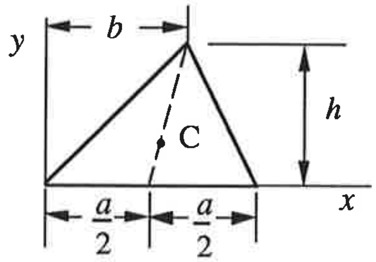
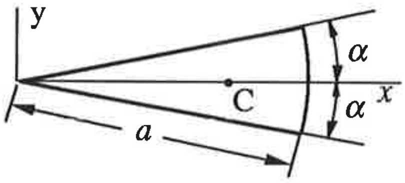
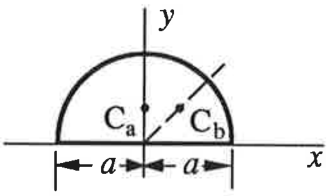
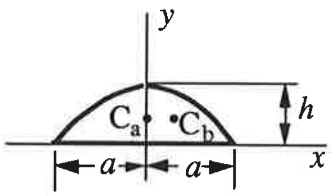
Taulukko 9.1 (3.5) Kappaleiden tilavuuskeskiöitä

Kappale	Koordinaatit	V
Suora ympyräkartio 	$x_C = 0$ $y_C = 0$ $z_C = \frac{1}{4}h$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
Puolipallo 	$x_C = 0$ $y_C = 0$ $z_C = \frac{3}{8}a$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Ympyräsylinterin puolikas 	$x_C = \frac{4}{3\pi}a$ $y_C = 0$ $z_C = \frac{1}{2}l$	$\frac{1}{2}\pi a^2 l$

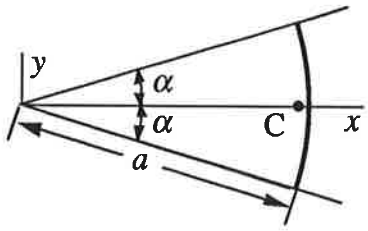
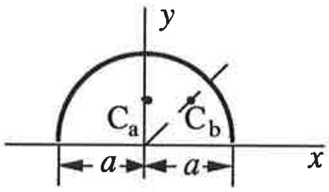
Taulukko 9.2 (3.6) Avaruuspintojen pintakeskiöitä

Pinta	Koordinaatit	S
Puolipallon pinta 	$x_C = 0$ $y_C = 0$ $z_C = \frac{a}{2}$	$2\pi a^2$
Ympyräsylinterin puolikkaan vaippa 	$x_C = \frac{2}{\pi} a$ $y_C = 0$ $z_C = \frac{1}{2} l$	$\frac{1}{2} \pi a l$

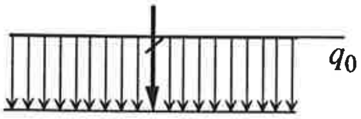
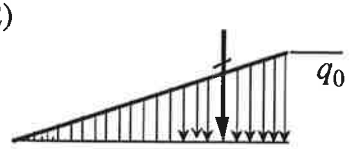
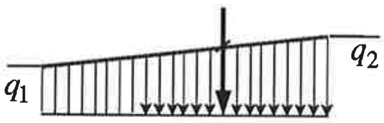
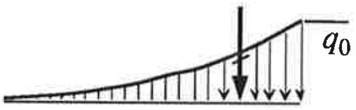
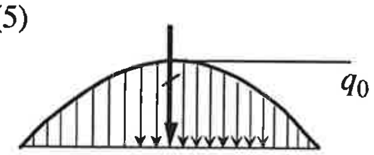
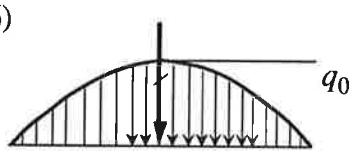
Taulukko 9.3 (3.7) Tasopintojen pintakeskiöitä

Alue	x_C	y_C	A
Kolmio 	$\frac{1}{3}(a+b)$	$\frac{1}{3}h$	$\frac{1}{2}ah$
Ympyränsektori 	$\frac{2\sin\alpha}{3\alpha}a$	0	αa^2
(a) Puoliympyrä (b) Neljännes-ympyrä 	(a) 0	$\frac{4}{3\pi}a$	$\frac{1}{2}\pi a^2$
	(b) $\frac{4}{3\pi}a$	$\frac{4}{3\pi}a$	$\frac{1}{4}\pi a^2$
(a) Parabolinen alue (b) Edellisen puolikas 	(a) 0	$\frac{2}{5}h$	$\frac{4}{3}ah$
	(b) $\frac{3}{8}a$	$\frac{2}{5}h$	$\frac{2}{3}ah$

Taulukko 9.4 (3.8) Tasokäyrien viivakeskiöitä

Käyrä	x_C	y_C	s
Ympyränkaari 	$\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}a$	0	$2\alpha a$
(a) Puoliympyränkaari (b) Neljännesympyränkaari 	(a) 0	$\dfrac{2}{\pi}a$	πa
	(b) $\dfrac{2}{\pi}a$	$\dfrac{2}{\pi}a$	$\dfrac{1}{2}\pi a$

Taulukko 9.5 (5.2) Viivakuormituksia

Kuormitustyyppi	q	F	x_C
(1) 	q_0	$q_0 l$	$\frac{1}{2} l$
(2) 	$\frac{x}{l} q_0$	$\frac{1}{2} q_0 l$	$\frac{2}{3} l$
(3) 	$(1-\frac{x}{l})q_1 + \frac{x}{l} q_2$	$\frac{1}{2}(q_1+q_2)l$	$\frac{1}{3}\frac{q_1+2q_2}{q_1+q_2} l$
(4) 	$(\frac{x}{l})^2 q_0$	$\frac{1}{3} q_0 l$	$\frac{3}{4} l$
(5) 	$4\frac{x}{l}(1-\frac{x}{l})q_0$	$\frac{2}{3} q_0 l$	$\frac{1}{2} l$
(6) 	$\sin\frac{\pi x}{l} \cdot q_0$	$\frac{2}{\pi} q_0 l$	$\frac{1}{2} l$

q = kuormitusintensiteetti; $[q]$ = N/m, F = resultantin arvo, l = kuormitusalueen pituus, x = etäisyys kuormitusalueen vasemmasta reunasta, x_C = voimakeskiön etäisyys kuormitusalueen vasemmasta reunasta.

KIRJALLISUUS

Kivelä, S. K. Matriisilasku ja lineaarialgebra. Otakustantamo 466, 1980. 268 s.

Salonen, E-M. Statiikka. Otatieto 562, 1995. 283 s.

Salonen, E-M. Dynamiikka I. Otatieto 434, ~~1998.~~ 1999, 277 s.

Salonen, E-M. Dynamiikka II, ~~valmistunee 1999.~~ Otatieto 591, 1999, 199 s.

Väisälä, K. Vektorianalyysi. Werner Söderström, 1954. 159 s.