OPINTOJAKSON 0.05.115 S.81 VIRTAUSOPPIOSA

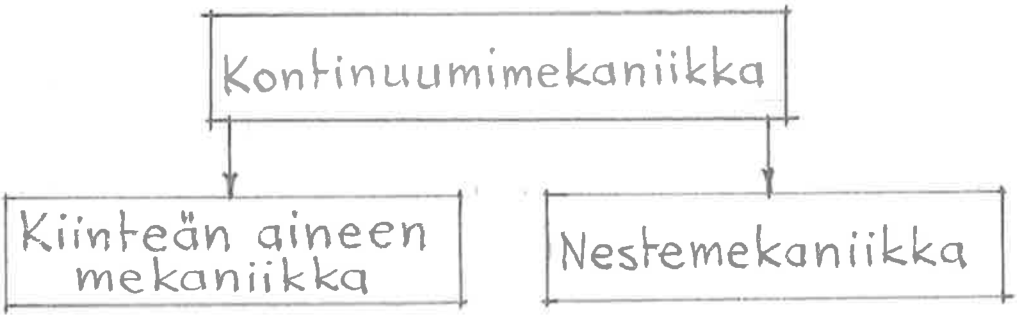
E-M. Salonen

SISÄLLYSLUETTELO

1 JOHDANTO

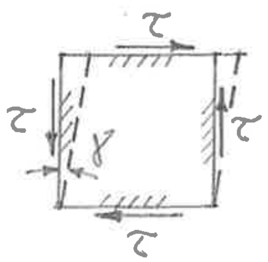
1.1 Yleistä

Ns. jatkuvan aineen mekaniikka eli kontinuumimekaniikka (engl. continuum mechanics) jaetaan tarkasteltavan kappaleen aineen olomuodon perusteella kuvan 1.1.1 mukaisesti kiinteän aineen mekaniikkaan (engl. solid mechanics) ja nestemekaniikkaan (engl. fluid mechanics). Tässä yhte-



Kuva 1.1.1 Kontinuumimekaniikan pääjako.

ydessä nesteellä (engl. fluid) tarkoitetaan paitsi ns. "varsinaista" nestettä (engl. liquid) myös "kaasumaista" nestettä eli kaasua (engl. gas). Yleisnimen fluid suomenkieliseksi vastineeksi on ehdotettu mm. termiä fluidi (1), mutta tässä tullaan kuitenkin käyttämään edelleen sanaa neste. Mekaniikan kannalta aineen luokittelu jako

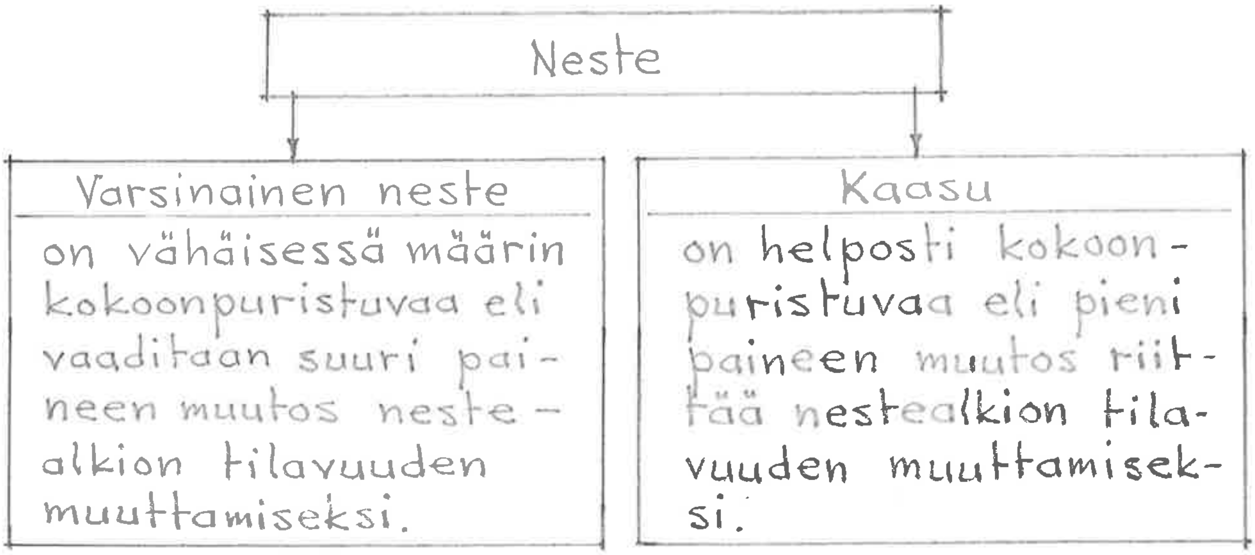


Nesteessä ei voi esiintyä leikkausjännityksiä τ ilman nollasta eroavia liukumanopeuksia $\dot{\gamma}$; kiinteässä aineessa voi.

Kuva 1.1.2 Kiinteän aineen ja nesteen ero.

kiinteäksi aineeksi tai nesteeksi tapahtuu tavallisesti kuvan 1.1.2 esittämällä perusteella. Täten siis leikkausjännitykset häviävät jatkuvassa lepotilassa olevassa nesteessä, sillä siinä kaikki muodonmuutosnopeuskomponentit ≡ 0. Rajatapauksissa sama aine voi olla käytännön kannalta eri tilanteissa kiinteää ainetta tai nestettä riippuen tarkasteltavasta aikavälistä ja käytetystä mittaustarkkuudesta. Esimerkiksi piki käyttäytyy suurten muodonmuutosnopeuksien yhteydessä kuten kiinteä aine hajoten hauraasti vasaran iskun johdosta, mutta toisaalta se valuu oman painonsa vaikutuksesta astian sivussa olevasta reiästä ulos pitkän aikavälin kuluessa. Mekaniikan haaraa, joka liikkuu kiinteän aineen mekaniikan ja nestemekaniikan välimaastossa, nimitetään <u>reologiaksi</u> (engl. rheology). Esimerkiksi betonin, puun ja muovien sekä korkeissa lämpötiloissa olevien metallien pitkäaikaiskäyttäytyminen liittyy läheisesti reologiaan. Eräs reologian alue on ns. <u>viskokimmoisuus</u>- tai viskoelastisuusteoria.

Varsinaisen nesteen ja kaasun mekaaninen ero ilmenee niiden kokoonpuristuvuudessa (kuva 1.1.3).



Kuva 1.1.3 Varsinaisen nesteen ja kaasun ero.

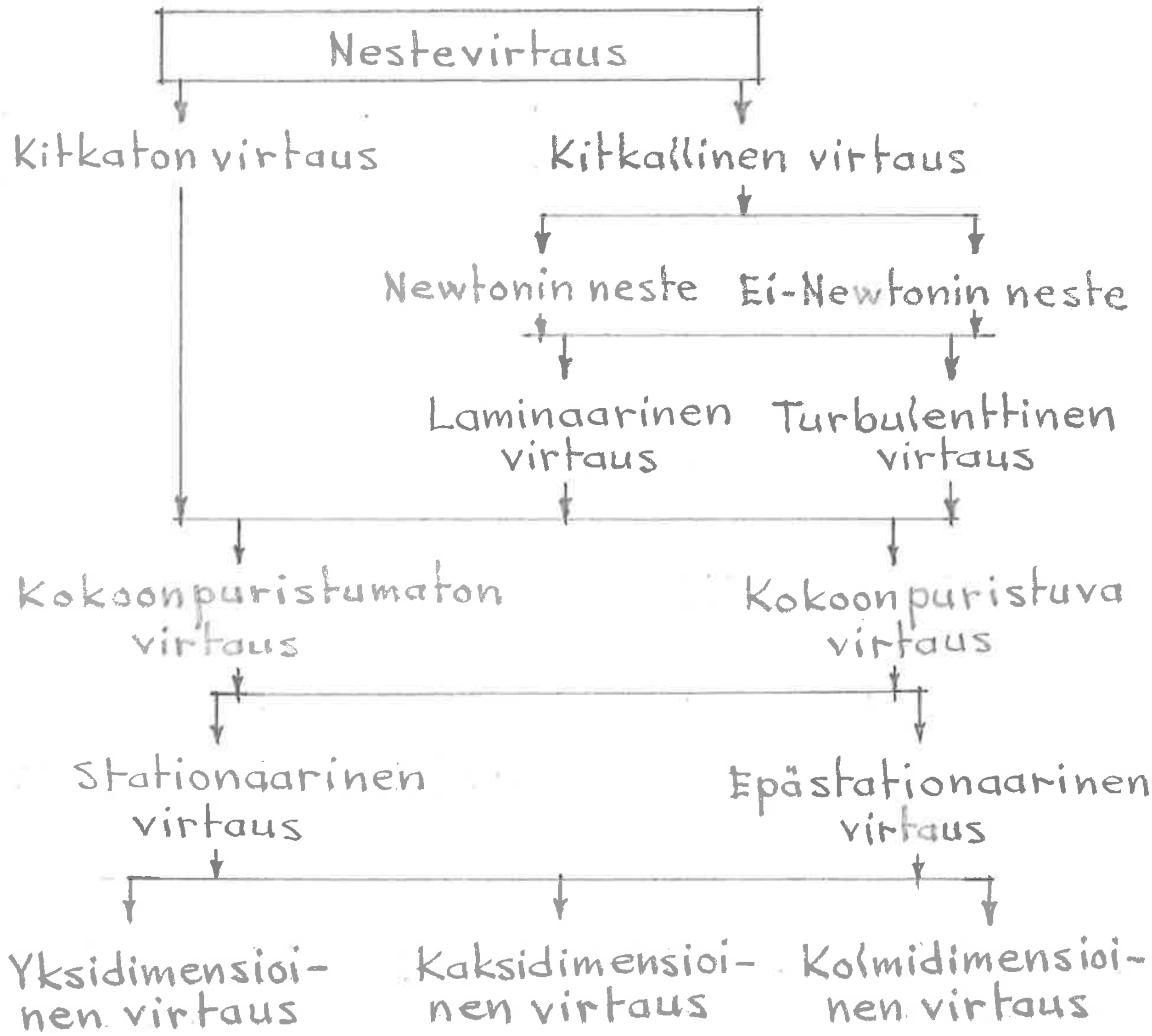
Varsinaisten nesteiden virtauksessa voidaan kokoonpuristuvuus jättää usein kokonaan huomiotta, jolloin puhutaan ns. kokoonpuristumattomasta nesteestä tai <u>kokoonpuristumattomasta virtauksesta</u> (engl. incompressible flow). Koska vesi (kreik. hydor) on yleisimmin esiintyvä varsinainen neste, kokoonpuristumattoman nesteen mekaniikkaa nimitetään usein <u>hydromekaniikaksi</u> ja erityisesti rakennustekniikan sovellutusten yhteydessä myös <u>hydrauliikaksi</u>. Kuitenkin tietyissä ilmiöissä varsinaisten nesteidenkin kokoonpuristuvuus on otettava huomioon; esimerkiksi ääniaaltojen eteneminen nesteessä tai lämpötilaeroista johtuvien tiheyserojen synnyttämä ns. vapaa konvektiovirtaus.

Kaasujen liike on käsiteltävä yleisessä tapauksessa <u>kokoonpuristuvana virtauksena</u> (engl. compressible flow). Koska taas ilma (kreik. aer) on yleisimmin esiintyvä kaasu, kokoonpuristuvan nesteen mekaniikkaa nimitetään usein myös <u>aeromekaniikaksi</u> tai yleisemmin <u>kaasumekaniikaksi</u>. Kokoonpuristuvan virtauksen tyyppi riippuu ns. <u>Machin luvusta</u>

$$\boxed{Ma = \frac{v}{c}\,,} \tag{1.1.1}$$

jossa v on virtausnopeus (itseisarvo) ja c äänen etenemisnopeus (itseisarvo) ko. nesteessä ko. paikassa. Virtaus luokitellaan <u>subsoniseen</u>, <u>transsoniseen</u>, <u>supersoniseen</u> ja <u>hypersoniseen</u> virtaukseen sen mukaan, onko koko alueessa $Ma < 1$, vaihteleeko se arvon 1 molemmin puolin, onko koko alueessa $Ma > 1$ tai $Ma > 5$ (2). Nämä virtauslajit johtavat kukin matemaattiselta kannalta erityyppiseen käsittelyyn. Voidaan osoittaa, että Machin luvun ollessa riittävän pieni — luokkaa < 0,3 — virtauksessa esiintyvät nopeuserot aiheuttavat normaalioloissa niin pieniä paine-eroja, että virtaus voidaan käsitellä riittävällä tarkkuudella kokoonpuristumattomana.

Nesteen virtaus voidaan edelleen luokitella esimerkiksi kuvan 1.1.4 esittämällä tavalla.



Kuva 1.1.4 Virtauksen luokittelu käytetyn mallin mukaan.

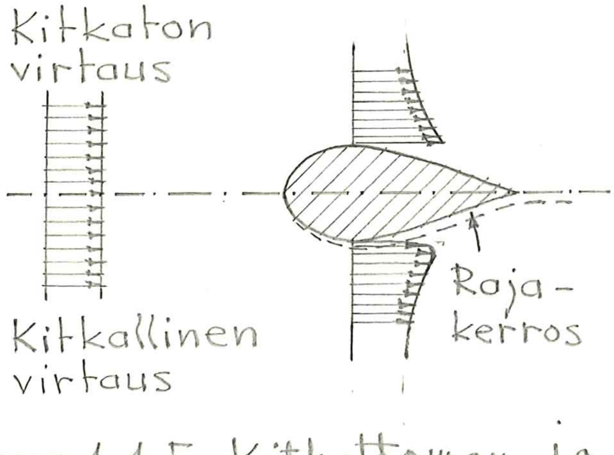
Virtauksen matemaattinen käsittely on yleisesti ottaen sitä vaikeampaa, mitä enemmän oikealta joudutaan kulkemaan kuvan kulkukaavioissa. Täten helpoin tapaus on kitkattoman kokoonpuristumattoman nesteen stationaarinen yksidimensioinen virtaus ja vaikein kitkallisen ei-

(engl. specific volume) $V/m = 1/\varrho$ avulla.)
Kontinuumimekaniikassa voidaan ajatella, että kukin pieni erillinen aine-alkio vastaa liikkuessaan ja muotoaan muuttaessaankin em. systeemiä; ts. otaksutaan, että aine-alkion alueella vallitsee riittävällä tarkkuudella ns. termodynaaminen tasapainotila siten, että äärelliselle systeemille tasapainotilassa mitattu tilanyhtälö pätee samanlaisena aine-alkiollekin. Tästä menettelytavasta käytetään joskus nimitystä lokaalisen tasapainon postulaatti (engl. postulation of local equilibrium) (4). Todettakoon vielä, että kontinuumimekaniikan lopulliset riippumattomat muuttujat ovat paikkakoordinaatit x, y, z ja aika t. Kun edellä puhuttiin riippumattomista muuttujista — esimerkiksi $\varrho = \varrho(p, T)$ —, oli kysymys näistä suureista jonkin konstitutiivisen yhteyden kannalta. Mutta koska esimerkiksi $p = p(x, y, z, t)$, $T = T(x, y, z, t)$, on siis lopuksi myös $\varrho = \varrho(x, y, z, t)$.

Termodynamiikassa tutkitaan systeemien käyttäytymistä erityisesti tapauksissa, joissa lämmöllä ja lämpötilan muutoksilla on paljon merkitystä. Nämä käsitteethän eivät tulleet millään lailla mukaan partikkelimekaniikan teoriassa. Kontinuumimekaniikassa ne täytyy ottaa yleisessä tapauksessa huomioon ja näin käsiteltyä

Newtonin nesteen turbulenttinen kokoonpuristuva epästationaarinen kolmidimensioinen virtaus.

Ns. kitkattomassa virtauksessa (engl. inviscid flow) eli ideaalinesteen (engl. ideal fluid, perfect fluid) virtauksessa otaksutaan, että nesteessä ei esiinny lainkaan leikkausjännityksiä, vaikka liikumanopeudet olisivat nollasta eroavia. Todellisuudessa näin ei ole ja siis ns. todellisen nesteen eli reaalisen nesteen (engl. real fluid) yhteydessä syntyy tällöin leikkausjännityksiä ja puhutaan vastaavasti kitkallisesta tai viskoosista virtauksesta (engl. viscous flow). Myös virtauksen käyttäytyminen seinämien läheisyydessä eroaa kuvitellussa kitkattomassa ja todellisessa kitkallisessa virtauksessa oleellisella tavalla. Kuva 1.1.5 esittää kaaviollisesti vaakanopeuksien jakautumista kaksidimensioisessa tapauksessa tasaisessa virtauskentässä olevan kiinteän kappaleen läheisyydessä tietyssä pystyleikkauksessa. Kaikki todelliset nesteet tarttuvat tehtyjen havaintojen mukaan kiinni nesteen koskemien kappaleiden pintoihin, joten nesteen nopeusvektorin arvo näillä pinnoilla on sama kuin vastaavien kappaleiden partikkelien nopeus ja siis nolla, jos kappaleet ovat liikkumattomia. Kitkattomassa virtauksessa ideaalinesteen malli edellyttää sitä vastoin vain pinnan normaalin suuntaisten nopeuskomponenttien yhtä-

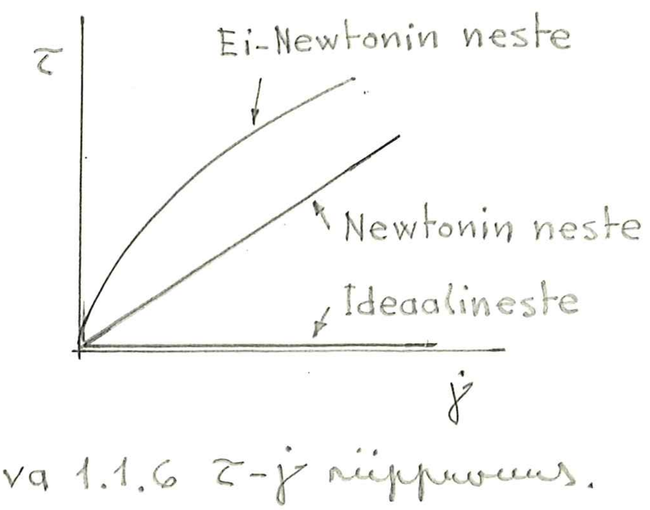


Kuva 1.1.5 Kitkattoman ja kitkallisen virtauksen ero reunaehtojen suhteen.

suuruutta, mutta pinnan tangenttitason suunnassa nesteen ja seinämän vastinpartikkeleilla on yleensä eri nopeuskomponentit eli siis ideaalinesteen ajatellaan liukuvan vapaasti pintaa pitkin. Vaikka ideaalinesteen käyttäytyminen on siis reunaehtojenkin suhteen epärealistista, tämä malli on kuitenkin käyttökelpoinen tietyissä tapauksissa kuten esimerkiksi siipiprofiilien käsittelyssä. Tällöin nimittäin voimakkaasti kitkallinen virtaus on rajoittunut vain ohueen siiven pinnan läheiseen alueeseen eli ns. <u>rajakerrokseen</u> (engl. boundary layer), jonka ulkopuolisessa alueessa virtaus on likimain kitkatonta.

Otaksutun jännitys-muodonmuutosnopeusyhteyden perusteella puhutaan ns. <u>Newtonin nesteestä</u> (engl. Newtonian fluid), mikäli leikkausjännityksen τ ja liukumanopeuden $\dot{\gamma}$ (vrt. kuva 1.1.2) välinen riippuvuus on lineaarista muotoa (kuva 1.1.6)

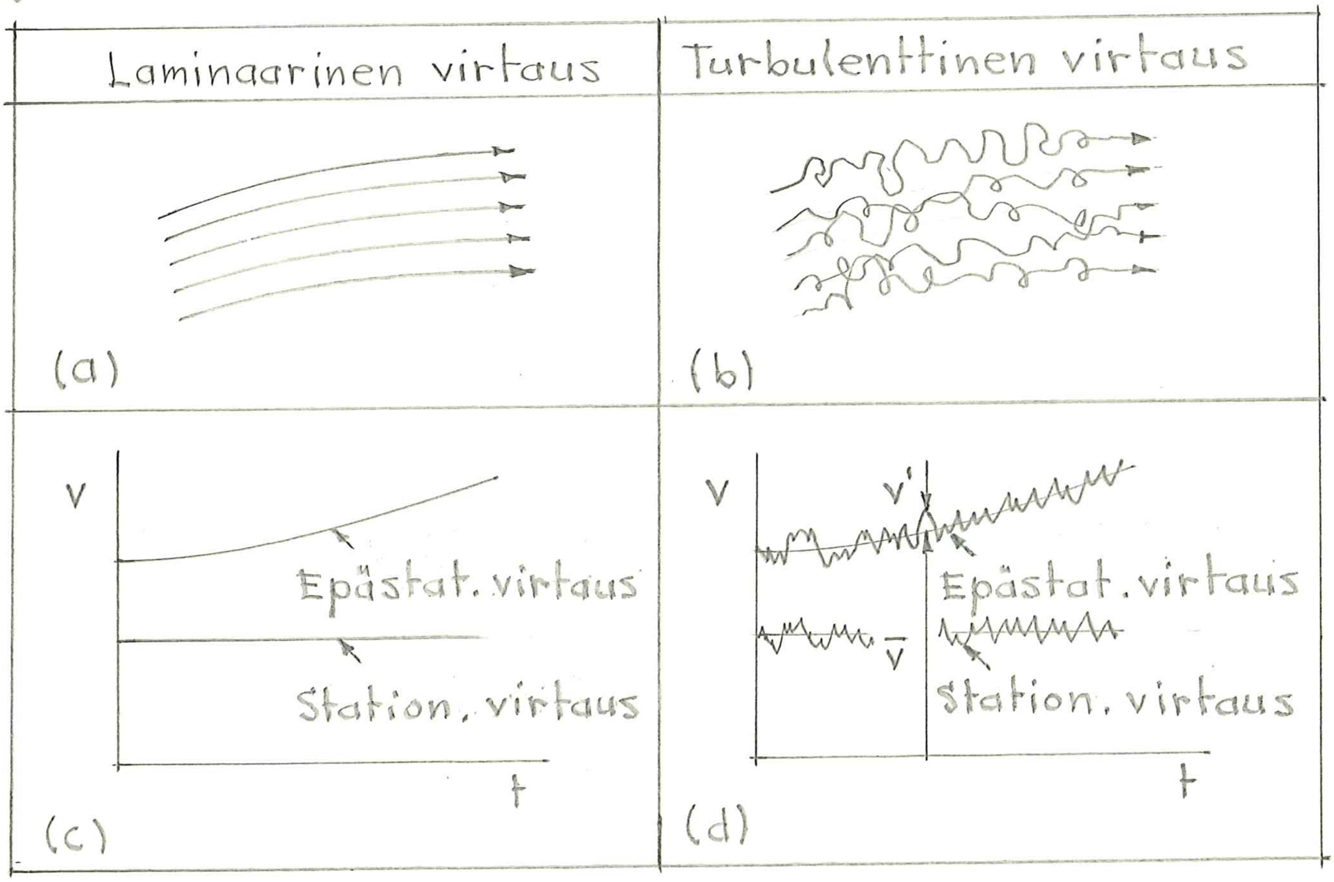
$$\tau = \mu \dot{\gamma}. \qquad (1.1.2)$$



Kuva 1.1.6 τ-$\dot{\gamma}$ riippuvuus.

Kerroin μ on ko. nesteen ns. <u>viskositeetti</u> (engl. viscosity) tai tarkemmin ns. dynaaminen molekylaarinen viskositeetti. Useat nesteet, kuten mm. vesi ja ilma, noudattavat melko tarkasti tätä kaavaa. Jos kaava ei päde riittävällä tarkkuudella, puhutaan <u>ei-Newtonin nesteestä</u> (engl. non-Newtonian fluid). Sen käsittelyn katsotaan yleensä kuuluvan reologian piiriin. Esimerkiksi veri ja sula metalli ovat ei-Newtonin nesteitä. Ideaalineste saadaan muodollisesti Newtonin nesteen erikoistapauksena asettamalla $\mu = 0$. Huomautettakoon, että kiinteän aineen mekaniikassa otaksutaan ns. lineaarisesti kimmoisen aineen mallin yhteydessä leikkausjännityksen τ ja liukuman γ välille kaavan (1.1.2) kanssa analoginen yhteys $\tau = G\gamma$, jossa G on ko. aineen ns. liukukerroin.

Nesteen virtauksen sanotaan olevan <u>laminaarista</u> (engl. laminar), kun virtaus tapahtuu kuviteltuissa kerroksissa ilman kerrosten välistä makroskooppista sekoittumista (kuva 1.1.7 (a) ja (c)). <u>Turbulenttisessa</u> (engl. turbulent) virtauksessa nestealkioiden radat ovat voimakkaasti



Kuva 1.1.7 Nestealkioiden ratoja (a) laminaarisessa ja (b) turbulenttisessa virtauksessa. Tietyn virtausnopeuskomponentin v kuvaaja ajan t funktiona tietyssä pisteessä (c) laminaarisessa ja (b) turbulenttisessa virtauksessa.

mutkittelevia ja kerrosten sekoittumista tapahtuu (kuva 1.1.7 (b) ja (d)). Turbulenttisen virtauksen voidaan ajatella muodostuvan päävirtauksesta (viittaus tunnuksella ($\bar{}$)), joka kuvaa keskimääräistä tietyllä lyhyellä aikavälillä otettua arvoa sekä tähän lisätystä satunnaisesti vaihtelevasta virtauksesta (viittaus tunnuksella ( )'). Täten esimerkiksi virtausnopeus $\vec{v}$ esitetään muodossa (vrt. kuva 1.1.7 (d))

$$\vec{v} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}' \qquad (1.1.3)$$

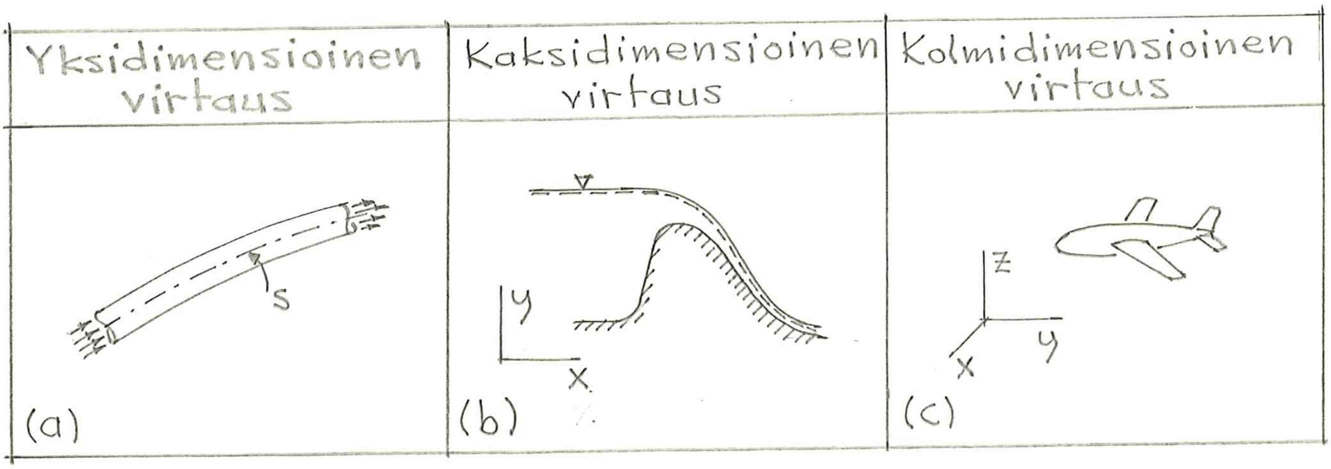
Yleensä ollaan kiinnostuneita vain keskimääräisestä arvosta $\bar{\vec{v}}$, mutta vallitseviin yhtälöihin jää mukaan satunnaistermin $\vec{v}'$ osuus, jonka käsittely johtaa matemaattiselta kannalta tavattoman vaikeisiin tehtäviin. Mitään yleispätevää käyttökelpoista turbulenttisen virtauksen analysoimistapaa ei ole vielä edes olemassakaan — eikä ehkä koskaan tule olemaankaan —, vaan joudutaan turvautumaan kokeiden perusteella saatuihin puoliempiirisiin teorioihin. Turbulenssi lisää oleellisesti esimerkiksi merkkiaineiden tai saasteiden konsentraation pienenemistä voimakkaan sekoittumisen kautta laminaariseen tapaukseen verrattuna. Esimerkiksi putkivirtauksessa virtaus on laminaarista tai turbulenttista sen mukaan, onko ns. <u>Reynoldsin luku</u>

$$\boxed{Re = \frac{\rho L v}{\mu},} \qquad (1.1.4)$$

pienempi tai suurempi kuin tietty kriittinen arvo. Edellä ρ on nesteen tiheys, μ viskositeetti, L sovittu karakteristinen pituus (esimerkiksi putken halkaisija) ja v sovittu karakteristinen virtausnopeus. Luonnossa esiintyvä virtaus on tavallisimmin turbulenttista.

Nesteen liiketilan ajallisen riippuvuuden mukaan virtauksen sanotaan olevan stationaarista eli pysyvää (engl. steady), mikäli nopeus, paine, lämpötila jne. kussakin alueen pisteessä eivät muutu ajan mukana; muulloin virtaus on epästationaarista (engl. unsteady) eli transienttia (vrt. kuva 1.1.7). Tulos riippuu joskus koordinaatiston valinnasta. Jos lentokone lentää maanpinnan suhteen vakionopeudella maanpinnan suhteen lepotilassa olevassa ilmassa, lentokoneen liikkeestä syntyvä virtaus on epästationaarinen maanpintaan kiinnitetyn koordinaatiston kannalta. Tarkastelemalla virtausta lentokoneeseen kiinnitetyn ja sen mukana liikkuvan koordinaatiston kannalta saadaankin sitä vastoin stationaarinen tilanne. Turbulenttinen virtaus ei ole tarkasti ottaen koskaan stationaarista; ko. termiä käytetään viittaamaan keskimääräisen virtauksen käyttäytymiseen (vrt. kuva 1.1.7(d)). Pysyvän virtauksen erikoistapauksena saadaan tilanne, jossa virtausnopeus häviää kaikkialla alueessa; tätä tapausta käsitellään nestestatiikassa.

Kuvan 1.1.4 esittämä alin luokittelu liittyy niiden riippumattomien paikkakoordinaattien lukumäärään, jotka ovat tarpeen virtausilmiön matemaattisessa kuvaamisessa; kuvassa 1.1.8 on



Kuva 1.1.8 (a) Virtaus putkessa. (b) Virtaus äärettömän pitkän padon yli. (c) Lentokoneen liikkeen synnyttämä virtaus.

esitetty joitakin esimerkkejä. Todellisuudessa kaikki virtaukset ovat kolmidimensioisia. On kuitenkin paljon tapauksia, joissa yksi- tai kaksidimensioinen käsittely on käytännön tarpeiden kannalta riittävän tarkka tai ainakin parempi kuin ei mitään. Vastaava tilanne esiintyy analogisena rakenteiden mekaniikassa, jossa käytetään esimerkiksi sauvojen ja palkkien yhteydessä yleensä yhtä riippumatonta muuttujaa ja taas levyjen, laattojen ja kuorien yhteydessä kahta muuttujaa. Nestemekaniikassa riittää yksidimensioinen käsittely esimerkiksi putkivirtauksessa ja avouomavirtauksessa yleensä, mikäli uoman poikkileikkaus muuttuu hitaasti ja uoman kaarevuudet ovat pienehköjä. Riippumattomana paikkakoordinaattina voi olla esimerkiksi uoman pohjaa pitkin mitattu kaarenpituus s (vrt. kuva 1.1.8 (a)). Kuvan 1.1.8 (b) esittämässä tapauksessa kysymyksessä on ns. <u>tasovirtaus</u> (engl. plane flow), jossa kaikki nopeusvektorit ovat tietyn tason — kuvassa xy-tason — suuntaisia ja yhtäsuuria tämän tason normaaleilla. Todellisuudessa kuvan äärettömän pitkää patoa ei tietenkään voi olla olemassa, mutta virtaus voi olla pitkähkön padon keskialueella lähellä tasovirtausta ja padon päistä johtuvat häiriöt tähän on arvioitava erikseen. <u>Pyörähdyssymmetrinen</u> virtaus (engl. axially symmetric flow), jossa virtausnopeus riippuu vain sylinterikoordinaatiston muuttujista z ja r, mutta ei muuttujasta ϕ (vrt. kuva D 2.2.11) on toinen esimerkki kaksidimensioisesta virtauksesta. Kolmantena esimerkkinä mainittakoon ns. <u>voitelu-probleemat</u> (engl. lubrication problems), joissa tutkitaan laitteiden liikkuvien osien välisissä hyvin ohuissa nestekalvoissa tapahtuvia virtauksia ja paineen jakautumista. Nämä tehtävät käsitellään yleensä kaksidimensioisina.

Todetaan vielä jotakin tämän monisteen sisällöstä sekä nestemekaniikkaan kuuluvista sovellutuksista. Opintojakson nimessä esiintyy nestemekaniikka-sanan sijasta ehkä hieman tavallista suppeampaan käsittelyyn viittaava nimitys virtausoppi. Tämä siksi, että käytettävissä olevan ajan niukkuuden vuoksi tässä opintojaksossa voidaan tarkastella vain joitakin nestemekaniikan osa-alueita. Pääpaino on pantu Lagrangen ja Eulerin esitystapojen vertailulle, aineellisen aikaderivaatan ja kontrollialueen käsitteille sekä sitten näiden avulla johdetuille kontinuumimekaniikan yleisten peruslakien saamille eri muodoille. Toisin sanoen keskitytään tiettyjen nestemekaniikassa tarvittavien matemaattisten apuvälineiden esittelyyn ja käyttöön.

Nestemekaniikka voidaan jakaa <u>nestestatiikkaan</u> (engl. fluid statics) ja <u>nestedynamiikkaan</u> (engl. fluid dynamics) vastaavasti kuin mekaniikassa yleensä. Nestestatiikan tehtävät ovat — johtuen jatkuvassa lepotilassa olevan nesteen jännitystilan yksinkertaisuudesta — tavallisesti hyvin helppoja ratkaista.

Joitakin tyypillisiä rakennusinsinöörin työhön liittyviä tehtäviä voisivat kuvata seuraavat esimerkit:

(1) Tietyn luonnonuoman virtaussuhteet tunnetaan. Miten uoman yli rakennettavan sillan maatuet ja virtapilarit tulevat muuttamaan virtausta; syntyvä padotus?

(2) Miten tietyn putkiverkoston putkien mitat sekä mahdollisten pumppujen tehot on valittava, jotta tietyissä kohdin saavutettaisiin halutut paineen ja virtaaman arvot?

(3) Tuulikuormitusten määrittäminen hoikissa rakenteissa; aiheuttaako tuuli vaarallisia värähtelyjä?

(4) Mikä on tietyn suunnitellun maapadon läpi tapahtuvan suotovirtauksen kokonaisvirtaama ja huokosnesteen painejakautuma?

Joskus esiintyy myös yhtäaikaisia eli kytkettyjä kiinteän aineen mekaniikan ja nestemekaniikan tehtäviä kuten esimerkiksi maaperän konsolidaatio tai padon ja sen pidättämän veden yhteinen värähtely maanjäristyskuormituksen johdosta. Lienee tarpeetonta todeta, että tämän opintojakson antamilla tiedoilla yllämainittuihin tehtäviin ei vielä pystytä antamaan tyydyttäviä ratkaisuja.

1.2 Peruslait

Tässä monisteessa tarvittavat kontinuumimekaniikan aksioomat ovat:

(1) Massan säilymisen periaate (engl. principle of conservation of mass). Kappaleen massa

$$m = \text{vakio} \tag{1.2.1}$$

eli

$$\boxed{\dot{m} = 0.} \tag{1.2.2}$$

(2) Liikemäärän taseen periaate (engl. principle of balance of momentum). Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti $\vec{F}$ on yhtä suuri kuin kappaleen liikemäärän $\vec{p}$ muutosnopeus eli

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}}.} \tag{1.2.3}$$

(3) Kulmaliikemäärän taseen periaate (engl. principle of balance of angular momentum). Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien momentti $\vec{M}$ on yhtä suuri kuin kappaleen kulmaliikemäärän $\vec{L}$ muutosnopeus eli

$$\boxed{\vec{M} = \dot{\vec{L}}.} \tag{1.2.4}$$

(4) Energian taseen periaate (engl. principle of balance of energy). Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien tekemä työ W_{ext} plus kappaleen saama lämpö W_Q on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian T ja sisäisen energian U muutos eli

$$W_{ext} + W_Q = \Delta T + \Delta U \tag{1.2.5}$$

eli

$$\boxed{P_{ext} + P_Q = \dot{T} + \dot{U}.} \tag{1.2.6}$$

Näiden lisäksi on olemassa mm. entropian kasvun periaate (engl. principle of entropy growth) sekä joukko konstitutiivisia yhteyksiä koskevia periaatteita. Lait (2), (3) ja (4) pätevät vain inertiaalikoordinaatistossa, joten jos niitä sovelletaan mielivaltaisessa koordinaatistossa, kohdassa D 5.1.5 esitettyjen näennäisvoimien antamat termit on otettava mukaan. Periaatteet (1), (2) ja (3) ovat olleet jo esillä dynamiikkaosassa partikkelimekaniikan aksioomeista johdettuina lauseina. Tässä ne siis otetaan kääntäen aksioomiksi. Periaatetta (4) on myös jo käsitelty esimerkissä D 6.3.4. Täysin yleisessä muodossaan yhtälön (1.2.5) tai (1.2.6) vasen puoli on täydennettävä muilla mahdollisilla kappaleen ulkopuolelta saamillaan energia- tai teho-osuuksilla; esimerkiksi sähköenergian osuus. Periaate (4) kulkee myös nimellä energian häviämättömyyden laki tai termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö.

Esitetyt lait ovat voimassa mielivaltaisesta aineesta olevalle kappaleelle ja ovat täten perustana sekä kiinteän aineen mekaniikassa että nestemekaniikassa. Lagrangen ja Eulerin esitystapojen erosta johtuen periaatteista syntyvät yhtälöt tulevat kuitenkin poikkeamaan ulkonäöltään toisistaan, vaikka ne siis kuvaavat vastaavasti samaa fysikaalista lakia. Koska aksioomissa (1)...(4) puhutaan kappaleesta, ne on siis muotoiltu koskemaan ns. suljettua systeemiä eli koko ajan samoista partikkeleista muodostunutta kokonaisuutta; vrt kohta D 6.9. Eulerin esitystavan lähtökohtana on ns. kontrollialue ja siihen liittyvä ns. avoin systeemi. Tämän johdosta aksioomien muuntaminen nestemekaniikkaan sopivaan muotoon vaatii kinematiikkaan liittyviä esivalmisteluja.

Peruslait koskevat äärellisen kokoisia kappaleita (ei partikkeleita) ja näin ollen niistä kustakin saadaan johdettuna yhtälö, jota nimitetään ko. lain integraalimuodoksi tai <u>äärelliseksi muodoksi</u> (engl. integral form, finite form, global form). Tiettyjen matemaattisten manipulaatioiden avulla kustakin äärellisestä muodosta saadaan lisäksi jokaista kontinuumin alkiota koskeva ko. lain differentiaaliyhtälömuoto eli <u>paikallinen muoto</u> (engl. Local form). Paikallinen muoto voidaan myös johtaa vaihtoehtoisella tavalla soveltamalla peruslakeja suoraan differentiaaliseen kontinuumialkioon.

Tehtävien käsittelyssä periaatteiden äärellisillä muodoilla saadaan selvitettyä vain joitakin kokonaisvaikutuksia kuten niitanksen aiheuttama voima ja momentti tiettyä pintaa vastaan jne. muttei niitanksen yksityiskohtia. Jos äärellismuotoisilla yhtälöillä yleensä saadaan jotain järkevää aikaan, se onnistuu tavallisesti melko pienellä työmäärällä. Paikalliset muodot johtavat osittaisdifferentiaaliyhtälöryhmien käsittelyyn, joiden ratkaisuna saadaan periaatteessa täydellinen selvitys niitausnopeudesta, paineesta, lämpötilasta jne. kaikkialla tutkittavassa alueessa. Käytännössä syntyvän yhtälösysteemin ratkaisu onnistuu analyyttisesti äärimmäisen harvoissa tapauksissa. Tietokoneiden ja numeeristen menetelmien voimakas kehittyminen lisää kuitenkin ratkaisumahdollisuuksia jatkuvasti vähentäen samalla pienoismallikokeiden tarvetta.

Pelkät peruslait eivät vielä riitä tehtävien ratkaisemiseen, sillä kulloinkin tarkasteltavan kappaleen aineen fysikaaliset ominaisuudet eivät ole niissä mukana, joten syntyvää matemaattista mallia on täydennettävä aineen käyttäytymistä kuvaavien ns. konstitutiivisten yhtälöiden kuten nesteen tilanyhtälö, Stokesin kitkalaki, ideaalinesteen otaksuma, Fourierin lämmönjohtumislaki jne. avulla. Nimistään huolimatta nämä yhteydet eivät ole mitään luonnonlakeja eli aksioomia vaan tilanteesta riippuen enemmän tai vähemmän tarkasti todellisen aineen käyttäytymistä matkivia malleja, joiden oikeutus tulee todeta kokeiden avulla.

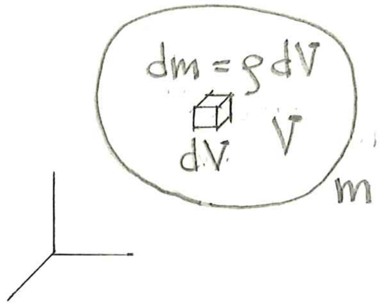
Peruslakien yksityiskohtiin palataan tarkemmin myöhemmin. Fysiikan teoriassa ilman määritelmää jäävien perussuureiden (engl. primitive concept) kuten massa, pituus, aika ja lämpötila kuvailuun ei kuitenkaan ryhdytä, vaan otaksutaan, että lukijalla on koulu- yms. fysiikan kautta kokemusta näiden termien merkityksestä.

1.3 Nesteiden ominaisuuksia

Eri nesteet käyttäytyvät mekaanisten rasitusten ja lämpötilanmuutosten alaisina eri tavoin. Tämän laskennolliseksi esittämiseksi tarvitaan kunkin nesteen fysikaalisia ominaisuuksia kuvaavia tunnuslukuja sekä näiden riippuvuuksia toisistaan eli ns. konstitutiivisia yhteyksiä. Nämä ominaisuudet määritetään mittausten avulla ja alan kirjallisuudesta löytyy tavallisimpia tapauksia varten valmiita taulukoituja tuloksia. Jatkossa puhutaan nesteistä, mutta vastaavat käsitteet ovat monin paikoin samoja myös kiinteän aineen tapauksessa.

<u>Tiheys.</u> Nesteen tiheys ρ ($[\rho]=kg/m^3$) saadaan suhteena

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V},} \qquad (1.3.1)$$



Kuva 1.3.1

jossa m ($[m]=kg$) on tietyn nestemäärän massa ja V ($[V]=m^3$) on tämän nestemäärän tilavuus (kuva 1.3.1). Kaava on kirjoitettu olettaen nesteen tila vakioksi koko alueessa V. Jos näin ei ole, kaava on tarkennettava määritelmän D (4.2.1) mukaiseksi eli paikallinen tiheys $\rho = dm/dV$. Tässä luvussa käytetään kuitenkin mukavuussyistä kaavan (1.3.1) merkintöjä ymmärtäen samalla, että jos tila ei ole vakio paikan suhteen, m ja V on tulkittava differentiaalisiksi suureiksi. Näin menetellen vältytään kömpelön merkinnän $d(dV)$ (tilavuusalkion differentiaalinen muutos) käytöltä ja voidaan kirjoittaa sen sijasta pelkästään dV (nyt eri asia kuin kuvassa 1.3.1 esitetty dV). Koska tietyn nestealkion eli nestekappaleen massa on massan säilymisen periaatteen nojalla vakio, tiheyden muutos voi siis tapahtua kaavan (1.3.1) perusteella ainoastaan nestealkioon liittyvän tilavuuden muutoksen johdosta.

Tilanyhtälö. Lepotilassa olevassa nestealkiossa esiintyviä oleellisia suureita ovat tiheys ρ, paine p ($[p] = N/m^2 = Pa$) ja lämpötila (engl. temperature) T ($[T] = K$ tai °C). Nämä riippuvat toisistaan ja voidaan ainakin periaatteessa kirjoittaa niitä sitova ns. tilanyhtälö (engl. equation of state)

$$\boxed{f(\rho, p, T) = 0.} \qquad (1.3.2)$$

Taas ainakin periaatteessa tästä voidaan ratkaista aina yksi muuttuja muiden lausuttuna, jolloin tilanyhtälö saa muodot

$$\rho = \rho(p, T), \quad p = p(T, \rho), \quad T = T(\rho, p). \qquad (1.3.3)$$

Juhlallinen nimitys tilanyhtälö — joskus käytetään myös nimitystä terminen tilanyhtälö (engl. thermal equation of state) erotuksena myöhemmin esitettävästä ns. kalorisesta tilanyhtälöstä — tarkoittaa siis vain erästä konstitutiivista yhteyttä. Tilanyhtälöä ei pystytä yleensä esittämään yksinkertaisten kaavojen avulla vaan on käytettävä taulukoituja arvoja.

Todetaan tässä yhteydessä joitakin yleisiä ns. termodynamiikan käsitteisiin liittyviä seikkoja. Tilanyhtälöä on jo käsitelty fysiikassa lämpöopin yhteydessä joten tässä esitetyt seikat lienevät lukijalle osittain tuttuja samoin kuin käsitteet termodynaaminen tila (engl. thermodynamic state), tilan muutos eli prosessi (engl. change of state, process) sekä ns. tilasuureet tai tilamuuttujat (engl. state variable) kuten tiheys, paine, lämpötila, ominaissisäenergia, ominaisentropia jne.

Tavanomaisten nesteiden yhteydessä otaksutaan, että riittää, kun aina vain kaksi tilamuuttujaa valitaan riippumattomiksi (esimerkiksi p ja T), jonka jälkeen muut tilasuureet ovat niiden funktioita eli tilafunktioita (engl. state function). Ainetta, jonka suhteen voidaan tehdä riittävällä tarkkuudella em. otaksuma, nimitetään joskus yksinkertaiseksi kokoonpuristuvaksi aineeksi (engl. simple compressible substance) (3). Tässä tullaan käsittelemään vain ko. ainetta, kuten yhtälöt (1.3.2) ja (1.3.3) jo osoittavat. Esimerkiksi kiinteän aineen mekaniikassa esiintyvä ns. kimmoinen aine olisi jo paljon monimutkaisempi tapaus: riippumattomina tilamuuttujina voisivat esiintyä mm. kaikki kuusi muodonmuutoskomponenttia ja lämpötila.

Lämpöopissa tilanyhtälöä ja prosesseja tarkastellaan yleensä systeemissä, joka muodostuu äärellisessä säiliössä olevasta kaasumäärästä, jonka tilaa kontrolloidaan siirtämällä yhden seinämän muodostavaa mäntää ja antamalla systeemin saada tai luovuttaa lämpöä. (Usein operoidaan lisäksi suureen ρ sijasta ns. ominaistilavuuden

(engl. specific volume) $V/m = 1/\varrho$ avulla.)
Kontinuumimekaniikassa voidaan ajatella, että kukin pieni erillinen ainealkio vastaa liikkuessaan ja muotoaan muuttaessaankin em. systeemiä; ts. otaksutaan, että aineelkion alueella vallitsee riittävällä tarkkuudella ns. termodynaaminen tasapainotila siten, että äärelliselle systeemille tasapainotilassa mitattu tilanyhtälö pätee samanlaisena aineelkiollekin. Tästä menettelytavasta käytetään joskus nimitystä <u>lokaalisen tasapainon postulaatti</u> (engl. postulation of local equilibrium) (4). Todettakoon vielä, että kontinuumimekaniikan lopulliset riippumattomat muuttujat ovat paikkakoordinaatit x, y, z ja aika t. Kun edellä puhuttiin riippumattomista muuttujista — esimerkiksi $\varrho = \varrho(p, T)$ —, oli kysymys näistä suureista jonkin konstitutiivisen yhteyden kannalta. Mutta koska esimerkiksi $p = p(x, y, z, t)$, $T = T(x, y, z, t)$, on siis lopuksi myös $\varrho = \varrho(x, y, z, t)$.

Termodynamiikassa tutkitaan systeemien käyttäytymistä erityisesti tapauksissa, joissa lämmöllä ja lämpötilan muutoksilla on paljon merkitystä. Nämä käsitteethän eivät tulleet millään lailla mukaan partikkelimekaniikan teoriassa. Kontinuumimekaniikassa ne täytyy ottaa yleisessä tapauksessa huomioon ja näin käsiteltyä teoriaa nimitetään joskus <u>termomekaniikaksi</u> (engl. thermomechanics) (5).

Lyhyesti sanottuna aksioomat (1), (2) ja (3) kuvaavat puhtaasti mekaanisia ilmiöitä ja aksiooma (4) kuvaa taas ns. termisiä (engl. thermal) ilmiöitä. Yleisessä termomekaniikan probleemassa aksioomista (1)...(4) syntyvät yhtälöt ovat kytkettyjä ja ne on ratkaistava samanaikaisesti, mikä tekee käsittelyn hyvin vaikeaksi. Kuitenkin on tapauksia, joissa kytkentä mekaanisten ja termisten ilmiöiden välillä on niin heikko, että ne voidaan käsitellä erillisinä, jolloin laskelmat helpottuvat ratkaisevasti. Näin on laita melkein aina rakenteiden mekaniikassa. Esimerkiksi lämpöjännitysten teoriassa lasketaan ensin aksioomasta (4) johdetun ns. lämmönjohtumistehtävän avulla lämpötilajakautuma rakenteessa. Tämän jälkeen suoritetaan erillinen jännitysanalyysi tavanomaiseen tapaan ottaen vain huomioon lämpötilajakautumasta johtuvat alkumuodonmuutokset. Nestemekaniikassa kytkentä voimakas kaasumekaniikassa, jossa tiheysmuutokset ovat huomattavia. Varsinaisten nesteiden tapauksessa kytkentä on heikompi ja usein puhtaasti mekaaninen probleema voidaan ratkaista ensin ja tarvittaessa vasta jälkikäteen määritetään aksioomasta (4) johtuvan yhtälön avulla lämpötilajakautuma alueessa.

Palataan takaisin tilanyhtälön eri muotoihin. Ns. <u>ideaalikaasun</u> (engl. perfect gas) — ilma käsitellään tavallisesti ideaalikaasuna — tilanyhtälö on poikkeuksellisesti hyvin yksinkertainen:

trooppista Lakia (engl. polytropic Law)

$$p\rho^{-n} = \text{vakio}, \qquad (1.3.8)$$

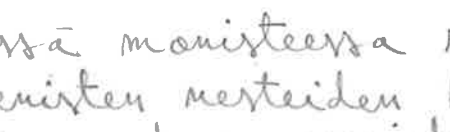
jossa n on vakio, joka valitaan kussakin tapauksessa mahdollisimman sopivaksi. Ideaalikaasun isotermisessä virtauksessa vakio $n=1$ kaavan (1.3.4) perusteella. Ideaalikaasun adiabaattisessa (nestealkio ei saa ulkopuoleltaan lämpöä) (engl. adiabatic) kitkattomassa virtauksessa voidaan osoittaa, että $n = \gamma^* = c_p/c_v$, jossa γ^* ($[\gamma^*] = -$) on ns. adiabaattivakio (esimerkiksi ilmalle $\gamma^* \approx 1{,}4$); termeihin c palataan myöhemmin. Useissa tapauksissa n valitaan väliltä $[1, \gamma^*]$.

Täysin kokoonpuristumattoman virtauksen otaksumassa ensimmäinen kaava (1.3.7) saa muodon

$$\rho = \text{vakio} \qquad (1.3.9)$$

tietylle nestealkiolle. Jälkimmäistä kaavaa (1.3.7) ei voida enää käyttää ja paine on nyt rajoitevoiman tyyppinen suure; vrt. B s. 136.

Tässä monisteessa rajoitutaan pelkästään ns. homogeenisten nesteiden käsittelyyn. Nesteen sanotaan olevan homogeenista (engl. homogeneous), jos kukin alueen nestealkio muodostuu "samanlajisesta" nesteestä; esimerkiksi puhtaasta vedestä. Vastakohtainen tapaus on ns. epähomogeeninen (engl. inhomogeneous) neste, jossa alueen nestealkiot voivat muodostua "erilajisista" nesteistä; esimerkiksi osa vedestä ja osa öljystä (kuva 1.3.2) tai suolaisesta ja makeasta



Kuva 1.3.2

vedestä tai vielä niiden seoksesta siten, että konsentraatiot eivät ole vakioita. Nestemekaniikassa käytetty Eulerin esitystapa ei ole kovin otollinen epähomogeenisten nesteiden yhteydessä, koska siinä kadotetaan tieto kunkin nestealkion liikkeen historiasta. Otaksutaan, että tietyllä hetkellä tunnetaan tietyssä avaruuden pisteessä vaikka paine ja lämpötila. Ensimmäinen tilanyhtälön muoto (1.3.3) antaa tällöin homogeenisen nesteen tapauksessa heti myös nesteen tiheyden ko. pisteessä. Epähomogeenisella nesteen tapauksessa näin ei ole, koska ei tiedetä mitä erityistä tilanyhtälöä on käytettävä; veden, öljyn vai tietyn seoksen tilanyhtälö?

Hydrauliikassa vesi otaksutaan tavallisesti homogeeniseksi ja kokoonpuristumattomaksi. Tämä merkitsee tapausta, jossa nesteen tiheys on kaikkialla alueessa ja koko ajan sama vakio. Tästä tullaan käyttämään nimitystä vakiotiheysneste (engl. constant-density fluid). Tämä on erotettava tarkasti puhuttaessa kokoonpuristumattoman nesteen määritelmästä (1.3.9), jossa ko. vakio voi olla epähomogeenisen nesteen tapauksessa eri vakio eri nestealkioille.

Kuten jo kohdassa 1.1 todettiin on hydrauliikassakin joissakin tapauksissa luovuttava vakiotiheysnesteen otaksumasta. Esimerkiksi ns. vapaassa konvektiovirtauksessa (engl. free convection) otetaan varsinaisten nesteiden yhteydessä tavallisesti käyttöön ns. mekaanisesti kokoonpuristumattoman (engl. mechanically incompressible) nesteen malli. Tällä tarkoitetaan nestettä, jonka tiheys otaksu-

22 bar. (1 bar = 0,1 MPa ≈ ilmakehässä n. 111 m korkeudella merenpinnasta keskimäärin vallitseva paine.) Ilmalla vastaava luku on 0,001 bar vallitsevan paineen ollessa 1 bar.

Voidaan osoittaa, että nesteessä tapahtuvien pienten painevärähtelyjen etenemisnopeus eli ns. <u>äänen nopeus</u> c ($[c] = m/s$) tai paremmin sanottuna äänen vauhti saadaan kaavasta

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{K}{\rho}},} \qquad (1.3.20)$$

jossa K on ko. nesteen puristuvuuskerroin ja ρ nesteen tiheys. Havainnot ovat osoittaneet, että tällainen värähtely tapahtuu lähes adiabaattisesti, joten kaavassa on käytettävä ns. <u>adiabaattista puristuvuuskerrointa</u> $K_s = 1/\kappa_s$. Kirjallisuudessa käytetään yleensä indeksiä s, koska värähtely tapahtuu myös melkein ilman kitkaa ja taas adiabaattinen kitkaton prosessi on ns. <u>isentrooppinen</u> (engl. isentropic) eli nestealkion ominaisentropia s säilyy muuttumatta. Suureet κ_T ja κ_s ja siis suureet K_T ja K_s eroavat toisistaan veden tapauksessa melko vähän (ks. taulukko 1.3.1); kaasuilla ero on huomattava. Kun lämpötila on 20 °C ja paine ≈ 1 bar, äänen nopeus on vastaavasti vedessä ja ilmassa 1483 m/s ja 343 m/s.

Jos vielä tarkastellaan tilanyhtälöä muodossa $p = p(T, \rho)$ pitäen siis lämpötilaa ja tiheyttä riippumattomina muuttujina, saadaan

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\varrho dT + \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_T d\varrho . \tag{1.3.21}$$

Toisaalta kaavasta (1.3.5) seuraa

$$\left.\begin{aligned} dp &= \frac{\gamma_p}{\varkappa_T} dT + \frac{1}{\varrho \varkappa_T} d\varrho \\ &= K_T \gamma_p dT + \frac{K_T}{\varrho} d\varrho , \end{aligned}\right\} \tag{1.3.22}$$

joten lausekkeen (1.3.21) osittaisderivaatat saadaan aikaisemmin määriteltyjen kertoimien avulla kaavoista

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\varrho = K_T \gamma_p , \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_T = \frac{K_T}{\varrho} . \tag{1.3.23}$$

Korostettakoon, että kaikki edellä määritellyt kertoimet on aina ajateltava valittujen riippumattomien muuttujien — kuten T ja p — funktioiksi. Yleensä riippuvuus paineesta on paljon heikompaa kuin riippuvuus lämpötilasta.

Esimerkki 1.3.1. Barotrooppinen neste. Johdetaan kokoonpuristuvuuden $\varkappa$ lauseke barotrooppisessa muutoksessa ja lisäksi erityisesti polytrooppisen lain tapauksessa.

Koska tilanyhtälö on muotoa $\varrho = \varrho(p)$, saadaan heti

$$d\varrho = \frac{d\varrho}{dp} dp \tag{a}$$

ja kaavan (1.3.12) perusteella kokoonpuristuvuus

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dp} . \tag{b}$$

Prosessiin viittaavaa indeksiä ei nyt tarvita, koska valitun tilanyhtälön muodon johdosta $\varkappa$ on yksikäsitteinen.

Kirjoitetaan polytrooppinen laki (1.3.8) tässä muotoon

$$p\rho^{-n} = p_0\rho_0^{-n}, \tag{c}$$

jossa p_0 ja ρ_0 ovat mielivaltaisia samaan tilaan liittyviä paineen ja tiheyden referenssiarvoja. Saadaan ensin

$$\frac{p}{\rho^n} = \frac{p_0}{\rho_0^n}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{d}$$

eli

$$\rho = \rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{e}$$

ja derivointi antaa

$$\frac{d\rho}{dp} = \rho_0\frac{1}{n}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{1}{p_0} = \frac{1}{n}\frac{\rho_0}{\cancel{p_0}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\cancel{p_0}}{p}$$

$$= \frac{1}{n}\frac{\rho_0}{p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{f}$$

Täten kokoonpuristuvuus

$$\varkappa = \frac{1}{np}\frac{\rho_0}{\rho}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{np}\left(\cancel{\frac{p_0}{p}}\right)^{\cancel{\frac{1}{n}}}\cdot\left(\cancel{\frac{p}{p_0}}\right)^{\cancel{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{np}. \tag{g}$$

Ideaalikaasun isotermisessä prosessissa $n=1$ ja tällöin $\varkappa_T = 1/p$ ja $K_T = p$. Ideaalikaasun isentrooppisessa prosessissa $n = \gamma^*$ ja ilmalle $\gamma^* \approx 1{,}4$. Äänen nopeudeksi ilmassa saadaan täten (vrt. kaavat (1.3.20), (1.3.4) ja (1.3.40)) 20 °C lämpötilassa

$$c=\sqrt{\frac{K_s}{\varrho}}=\sqrt{\frac{1}{\varkappa_s\varrho}}=\sqrt{\frac{\gamma^* p}{\varrho}}=\sqrt{\frac{\gamma^*\varrho RT}{\varrho}}$$

$$=\left[1{,}4\cdot 287\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\cdot K}}\cdot(273{,}15+20)\,\mathrm{K}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx\left(1{,}4\cdot 287\,\frac{\mathrm{kg\cdot m^2}}{\mathrm{s^2\cdot kg}}\cdot 293\right)^{1/2}\approx 343\,\mathrm{m/s}. \qquad \text{(h)}$$

Täysin kokoonpuristumattoman nesteen tapauksessa tilanyhtälö $\varrho=$ vakio nestealkiolle antaa tuloksen $d\varrho/dp=0$, joten $\varkappa=0$ ja $K=\infty$. Samoin teoriassa siis $c=\infty$.

---

* Lämpökapasiteetti. Nesteen ns. ominaislämpökapasiteetti (engl. specific heat capacity) c ($[c]=\mathrm{J/(kg\cdot K)}$) määritellään kaavalla

$$\boxed{c=\frac{dW_Q}{m\,dT},} \qquad (1.3.24)$$

jossa dW_Q on tietyn nestemäärän saama differentiaalinen lämpö eli lämpömäärä (engl. heat, amount of heat) ($[dW_Q]=\mathrm{J}$), dT on vastaava lämpötilan muutos ja m ko. nestemäärän massa. Koska lämpö ei ole tilasuure, differentiaalista lämpöä olisi parempi merkitä esimerkiksi tunnuksella $đW_Q$ (kirjallisuudessa yleensä $đQ$). Suureen c arvo riippuu prosessista. Käytössä ovat isobaariseen prosessiin liittyvä ns. ominaislämpökapasiteetti vakiopaineessa c_p sekä isokooriseen prosessiin liittyvä ns. ominaislämpökapasiteetti vakiotilavuudessa (tai siis vakiotiheydessä) c_v. Näiden suureiden välillä on olemassa yhteys

$$c_p - c_v = \frac{T\gamma_p^2}{\varrho \varkappa_T}. \qquad (1.3.25)$$

Varsinaisilla nesteillä ja kiinteillä aineilla suureen c_p kokeellinen määritys on paljon helpompaa kuin suureen c_v, jonka arvo voidaan sitten laskea kaavan (1.3.25) avulla. Ideaalikaasulle saadaan tämän kaavan erikoistapauksena tulos

$$c_p - c_v = R. \qquad (1.3.26)$$

* Sisäenergia. Tietyn nestemäärän sisäenergia U ($[U] = \mathrm{J}$) jaettuna ko. nestemäärän massalla on ko. nesteen ns. ominaissisäenergia (engl. specific internal energy) u ($[u] = \mathrm{J/kg}$). Jos otetaan esimerkiksi T ja ϱ riippumattomiksi muuttujiksi, $u = u(T, \varrho)$. Tämä on ns. kalorinen tilanyhtälö (engl. caloric equation of state). Yleensä ei olla kiinnostuneita itse suureesta u vaan sen muutoksista. Saadaan ensin

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_\varrho dT + \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right)_T d\varrho. \qquad (1.3.27)$$

Termodynamiikan keinoin (6) tämä voidaan saattaa lopuksi mm. muotoon

$$\boxed{du = c_v dT + (p - T\kappa_T\gamma_p)\frac{1}{\varrho^2} d\varrho.} \qquad (1.3.28)$$

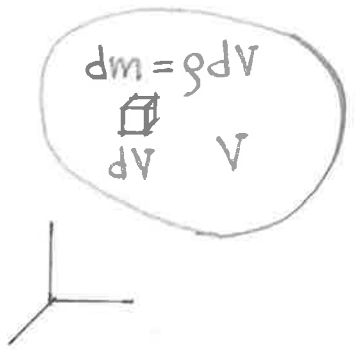
Ideaalikaasun tapauksessa kaavan sulkulauseke häviää ja saadaan tulos

$$du = c_v dT, \qquad (1.3.29)$$

jossa lisäksi c_v on vain lämpötilan funktio; $c_v = c_v(T)$ ja siis myös $u = u(T)$.

Kaava (1.3.28) pätee luonnollisesti vain ainealkion ollessa samassa faasissa; ei siis esimerkiksi veden jäätymis- tai sulamisprosessissa.

Mielivaltaisen kappaleen kokonaissisäenergia saadaan täten lausekkeena



Kuva 1.3.3

$$\left.\begin{aligned} U &= \int u\,dm \\ &= \int_V \varrho u\,dV, \end{aligned}\right\} \qquad (1.3.30)$$

jossa edellinen muoto tarkoittaa integraalia yli kappaleen massan ja jälkimmäinen tilavuusintegraalia kappaleen tarkasteltavalla hetkellä täyttämän avaruuden osan yli (kuva 1.3.3). Jos ϱ ja u ovat paikan suhteen vakioita, saadaan yksinkertaisempi kaava $U = \varrho u V = um$.

Joskus puhutaan huolimattomasti kappaleen lämpöenergiasta tai kappaleessa olevasta lämmöstä (vrt. mm. D, s. 429). Oikea nimitys on sisäenergia. Lämpö on välittynyt kappaleeseen mikroskooppisessa muodossa tehtyä työtä (vrt. esimerkki D 6.3.3). Se kuvaa energian siirtymistä. Makroskooppinen työ kuvaa samoin energian siirtymistä. Täten puhuminen kappaleessa olevasta lämmöstä tai lämpö-määrästä olisi yhtä väärin kuin puhuminen kappaleessa olevasta työstä tai työmäärästä (3).

Usein käytännössä kaavaa (1.3.28) approksimoidaan jättämällä sen jälkimmäinen termi pois olipa sitten kyseessä varsinainen neste tai kiinteä aine. Lisäksi c otaksutaan monasti vakioksi. Tällöin $\Delta u = c\Delta T$ äärellisten muutosten Δu ja ΔT yhteydessä. Esimerkiksi kokoonpuristumattoman nesteen otaksuma antaisi tuloksen $d\varrho = 0$, mutta tämä ei ole tässä yhteydessä ajatuksena tyydyttävä, koska useimmissa prosesseissa lämpötilan muutokseen liittyy myös tiheyden muutos. Jos otaksutaan vain <u>mekaanisesti kokoonpuristumaton neste</u> (ks. kaava (1.3.10)), saadaan

$$
\begin{aligned}
du &= c_v dT + (p - TK_T\gamma_p)\frac{1}{\varrho^2}(-\gamma_p\varrho\, dT) \\
&= [c_v - p\frac{\gamma_p}{\varrho} + \frac{TK_T\gamma_p^2}{\varrho}]dT \\
&= [c_v - p\frac{\gamma_p}{\varrho} + c_p - c_v]dT \\
&= (c_p - p\frac{\gamma_p}{\varrho})dT, \qquad (1.3.31)
\end{aligned}
$$

jossa on käytetty hyväksi kaavaa (1.3.25).

Mekaanisesti kokoonpuristumaton neste saatiin muodollisesti aikaan asettamalla kaavassa (1.3.5) $\varkappa_T = 0$. Vaihtoehtoinen fysikaalisesti realistisempi tulkinta on ottaa $dp = 0$ (isobaarinen muutos) tai vielä paremmin: kyseessä on tapaus, jossa $\varkappa_T dp \ll \gamma_p dT$.

Esimerkki 1.3.2. Veden sisäenergia. Tarkastellaan kaavassa (1.3.31) esiintyvien termien c_p ja $p\gamma_p/\varrho$ sekä vielä kaavan (1.3.25) termien c_p ja c_v keskinäistä suuruutta vedelle.

Taulukon 1.3.1 avulla saadaan arvot

$$c_p \approx 4200 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}, \qquad (T = 80\,^\circ\mathrm{C}) \tag{a}$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_p &= 643 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}, && (T = 80\,^\circ\mathrm{C}) \\ \varrho &\approx 972 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}, && (T = 80\,^\circ\mathrm{C}) \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

ja

$$\frac{p\gamma_p}{\varrho} \approx \frac{1\,\mathrm{bar} \cdot 643 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}}{972\,\mathrm{kg/m^3}}$$

$$= \frac{0{,}1 \cdot 10^{6}\,\mathrm{N} \cdot 643 \cdot 10^{-6} \cdot \cancel{\mathrm{m}^3}}{\cancel{\mathrm{m}^2} \cdot 972\,\mathrm{kg \cdot K}} \approx 0{,}066 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}. \tag{c}$$

Tämä on laskettu lämpötilassa 80 °C, jolloin voimakkaimmin muuttuva termi γ_p on suurimmillaan. Termi (c) on vain noin 0,02 ‰ termistä (a) eli häviävän pieni. Kaava (1.3.31) voitaneen siis käytännössä kirjoittaa muotoon $du = c_p dT$, vaikka paine olisi huomattavasti normaali-ilmanpainetta suurempi. (Oletetaan siis, että γ_p, ϱ ja c_p olisivat paineen kasvaessa edelleen samaa suuruusluokkaa kuin edellä.)

Kaavan (1.3.25) mukaan

$$c_p - c_v = \frac{T\gamma_p^2}{\varrho\,\varkappa_T}. \tag{d}$$

Kun otetaan arvot (b) ja vielä

$$\left.\begin{aligned} T &= (273{,}15 + 80)\,\mathrm{K} \approx 353\,\mathrm{K}, \\ \varkappa_T &= 4{,}48 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m^2/N}, \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

saadaan

$$\frac{T\gamma_p^2}{\varrho \varkappa_T} = \frac{353\,K \cdot (43 \cdot 10^{-12}\,K^{-2})^2}{972\,kg/m^3 \cdot 4{,}48 \cdot 10^{-10}\,m^2/N} \approx 340 \frac{J}{kg \cdot K}. \qquad (f)$$

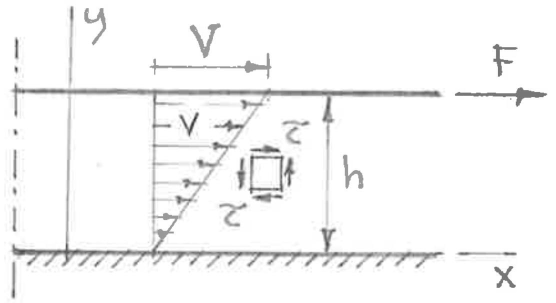
Tämä on noin 8 % termistä c_p. Jos lämpötila on 20 °C, termin suuruus on enää noin 0,7 % termistä c_p ja kun lämpötila on 4 °C, $c_p = c_v$, koska tällöin $\gamma_p = 0$.

Usein käytännössä kaava (1.3.31) kirjoitetaankin muotoon

$$du = c\,dT \qquad (g)$$

ja jätetään mainitsematta, mistä ominaislämpökapasiteetista on kysymys.

Viskositeetti. Kuva 1.3.4 esittää koejärjestelyä, jossa ohut nestekerros on kahden nestekerroksen paksuuteen h verrattuna laajan yhdensuuntaisen levyn välissä. Alempi levy on paikoillaan ja ylempää levyä vedetään x-akselin suunnassa vaakasuoraan nopeudella V. Nesteeseen syntyy nopeusjakautuma, jossa ainoa nollasta eroava nopeuskomponentti on x-akselin suuntainen kasvaen lineaarisesti y-akselin suunnassa:



Kuva 1.3.4

$$v = \frac{y}{h} V. \qquad (1.3.32)$$

Kokeet osoittavat, että tavallisilla nesteillä ylemmän levyn liikuttamiseen vaadittava voima F on suoraan verrannollinen nopeuteen V ja levyn pinta-alaan A sekä kääntäen verranmollinen paksuuteen h eli

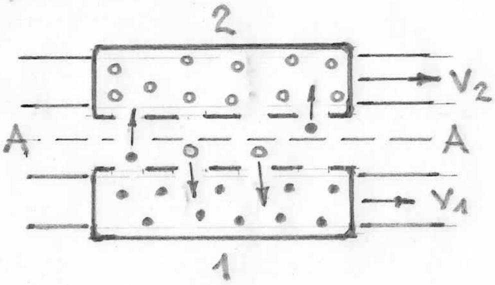
$$F = \mu \frac{VA}{h}, \qquad (1.3.33)$$

jossa kerrointa μ ($[\mu] = \mathrm{Pa \cdot s}$) nimitetään ko. nesteen viskositeetiksi. Levyn pintaan vaikuttava keskimääräinen leikkausjännitys $\tau = F/A$ ja kaavoista (1.3.33) ja (1.3.32) saadaan tulos

$$\tau = \mu \frac{V}{h} = \mu \frac{dv}{dy}. \qquad (1.3.34)$$

Termi dv/dy merkitsee tässä juuri kaavassa (1.1.2) esiintyvää liukukulman eli liukuman γ muutosnopeutta eli ns. liukumanopeutta $\dot{\gamma}$.

Käytetään leikkausjännityksen syntymisen selittämisessä mukaellen lähteessä (7) esitettyä vertausta, jota nimitetään tässä junanvaunuanalogiaksi. Kuva 1.3.5 esittää ylhäältä katsottuna kahta yhdensuuntaisilla raiteilla kitkattomasti liikkuvaa junanvaunua. Vaunun 2 nopeus v_2 on suurempi kuin vaunun 1 nopeus v_1.



1.3.5 Junanvaunuanalogia.

Vaunuissa olevat henkilöt huvittelevat heittelemällä pieniä esineitä suoraan vastakkaisen vaunun avoimista ikkunoista sisään, jolloin esineet lopuksi törmäävät vaunujen seinämiin. Vaunujen liikettä tarkastelee ulkopuolinen havaitsija, joka ei pysty huonon näkökykynsä vuoksi lainkaan havaitsemaan ko. pieniä esineitä. Vaunun 2 esineillä on keskimäärin suurempi nopeus ja siis myös suurempi liikemäärä vaunujen liikesuunnassa kuin vaunun 1 esineillä. Vaunusta 2 vaunuun 1 siirtyvät esineet lisäävät törmätessään vaunun seinämiin vaunun 1 nopeutta ja vastaavasti vaunun 2 nopeus pyrkii pienenemään törmäysten johdosta. Ulkopuolinen havaitsija päättelee tästä käyttäytymisestä, että vaunut vaikuttavat toinen toisiinsa tietyllä voimalla eli vaunujen välillä esiintyy kitkaa. Vaunuissa olevat henkilöt havaitsevat pienten esineiden liikkeen ja selittävät vaunujen käyttäytymisen syyn toisin. Syynä on liikemäärän siirtyminen leikkauksen A-A kautta. Jos vaunut liikkuvat samalla nopeudella, liikemäärän (netto-) siirtyminen katoaa ja samoin myös ulkopuolisen havaitsijan mittaama kitka; tämä vastaa kaavassa (1.3.34) tilannetta $dv/dy = 0$. Tässäkin tapauksessa ulkopuolinen havaitsija toteaa vaunujen vaikuttavan kiskoihin tietyillä poikittaisilla voimilla, joten siis hänen mielestään vaunujen täytyy vaikuttaa toisiinsa poispäin työntävillä voimilla. Vaunuissa olevat henkilöt näkevät saman ilmiön selityksenä esineiden törmäykset seinämiin. Kun esitetyssä vertauksessa korvataan pienet esineet molekyyleillä, junanvaunut pinnan A-A läheisillä suurilla molekyylijoukoilla ja ulkopuolinen havaitsija kontinuumimekaniikan soveltajalla, päästään lähelle kineettisessä kaasuteoriassa käytettyä jännitysten syntymisen selittämistapaa. Käytetään tässä molekyylien vaeltamisen johdosta syntyvästä jännityksestä nimitystä <u>kineettinen jännitys</u>. Kuvan D 4.4.7 yhteydessä esitettiin aivan toinen selitys, nimittäin hyvin läheisten molekyylien välisiin voimiin perustuva tulkinta. Nimitetään tässä näin syntyvää jännitystä <u>koheesiovoimien aiheuttamaksi jännitykseksi</u>. Tämä kuvaa paremmin tilannetta aineen ollessa kiinteässä olomuodossa, jolloin molekyylit ovat lähellä toisiaan ja niiden liike on rajoitettu. Yleisessä tapauksessa kokonaisjännitys muodostuu yhteensä kineettisestä jännityksestä ja koheesiovoimien aiheuttamasta jännityksestä (8).

Nesteen viskositeetti riippuu kokemuksen mukaan hyvin heikosti paineesta mutta huomattavammin lämpötilasta. Kaasuilla viskositeetti kasvaa ja varsinaisilla nesteillä se pienenee lämpötilan kohotessa. Tämä selittyy seuraavasti. Kaasuilla jännitys syntyy miltei yksinomaan kineettisestä osasta. Lämpötilan kohoaminen lisää molekyylien liikkumisaktiviteettia ja junanvaunuanalogian perusteella myös siten liikemäärän siirtymistä. Varsinaisilla nesteillä koheesiovoimien osuus on tärkeämpi kuin kineettinen osuus ja lämpötilan nousu pienentää edellistä osuutta.

Kun turbulenttisessa virtauksessa operoidaan keskimääräisen nopeuden avulla ja muodostetaan liikeyhtälöt, niihin ilmestyy eräitä termejä, joita ei esiinny laminaarisen virtauksen tapauksessa. Näillä termeillä on jännityksen dimensio ja niistä käytetään nimityksiä näennäisjännitykset tai Reynoldsin jännitykset (engl. apparent stress, Reynolds stress). Näiden jännitysten fysikaaliseen selittämiseen voidaan jälleen soveltaa junanvaunuanalogiaa. Otaksutaan, että virtausta tarkkailee havaitsija, joka pystyy tekemään havaintoja vain keskimääräisestä virtauksesta, mutta turbulenttinen satunnaisliike pyörteineen jää häneltä huomaamatta. Pyörteiden mukana liikkuvat nesteosaset aiheuttavat voimakasta liikemäärän vaihtoa eri kerrosten välillä samaan tapaan kuin molekyylien tapauksessa, vaikkakin kyseessä on nyt eri mittakaavassa tapahtuva ilmiö; esimerkiksi lähteessä (9) on mainittu tietyissä kaasun virtauksissa tyypillisiksi pyörteiden mitoiksi arvo 0,1 mm. Esitetyn havaitsijan kannalta liikemäärän vaihto näkyy jännityksinä. Karkein tapa lähestyä Reynoldsin jännityksiä on Boussinesqin aikoinaan esittämä. Esimerkiksi kaavan (1.3.34) tapauksessa kirjoitetaan

$$\bar{\tau} = \mu \frac{d\bar{v}}{dy} + \eta \frac{d\bar{v}}{dy} = (\mu + \eta) \frac{d\bar{v}}{dy} \qquad (1.3.35)$$

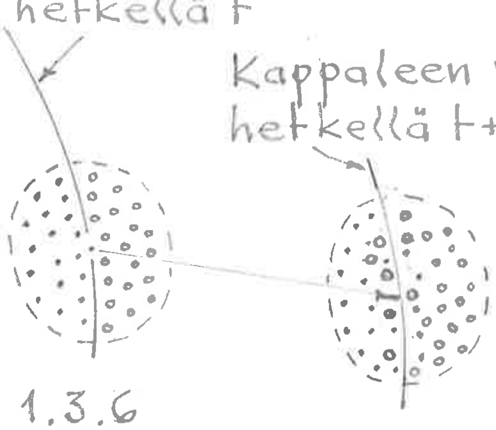
ja kerrointa η nimitetään <u>pyörreviskositeetiksi</u> tai turbulenttiseksi viskositeetiksi (engl. eddy, turbulent viscosity). Tällä tempulla turbulenttisen virtauksen käsittely saadaan muodollisesti samaksi kuin laminaarisessa tapauksessa. η ei ole kuitenkaan nesteen ainevakio kuten $\mu(p,T)$, vaan se riippuu itse virtauksen laadusta kussakin pisteessä ja sen arvo voi vaihdella nollasta lähtien aina tuhansia kertoja μ:tä suuremmaksi. Ongelmaksi siis jää η:n arvon valinta.

Suureet μ ja ϱ esiintyvät tietyissä kaavoissa usein yhdistelmänä μ/ϱ, jolle käytetään samoin usein tunnusta

$$\nu = \mu/\varrho \qquad (1.3.36)$$

ja jota nimitetään <u>kinemaattiseksi viskositeetiksi</u> (engl. kinematic viscosity) ($[\nu] = m^2/s$) erotuksena (dynaamisesta) viskositeetista μ. Kaavan (1.3.34) yleistys mielivaltaisen virtauksen tapaukseen tulee esille kohdassa 4.2.

Edellä ja jatkossa korostetaan jatkuvasti sitä seikkaa, että mekaniikan lait koskevat perusmuodoissaan aina tiettyjä kappaleita eli siis koko ajan samoista partikkeleista muodostuneita systeemeitä. Toisaalta viskositeetin selittämistapa osoittaa, että tarkasti ottaen kontinuumin yhteydessä tälläistä suljettua systeemiä ei voida molekyylien satunnaisliikkeen johdosta koskaan saada aikaan; vrt. kuva 1.3.6. Tämä ei kuitenkaan estä suljetun systeemin käsitteen käyttöä,

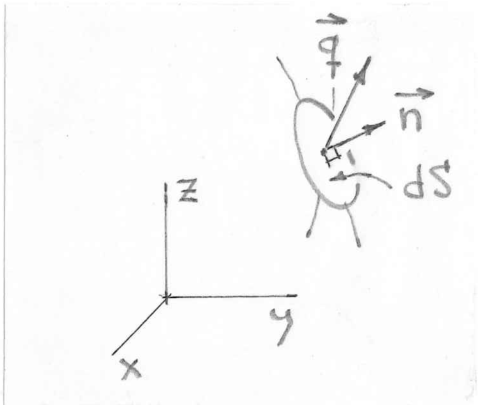


Kuva 1.3.6

sillä makroskooppisen tarkastelun kannalta sellainen on olemassa. Periaatteessa kappaleen reunan aseman hetkellä t+Δt määrittelevät reunalla hetkellä t olleiden pienten — summattoman määrän molekyylejä sisältävien — nesteälkioiden massakeskiöiden uudet asemat ja makroskooppiselta kannalta voidaan sanoa, että kappaleen reuna muodostuu koko ajan samoista kontinuumialkioista. Molekyylien vaellus reunan lävitse ilmenee makroskooppisesti kineettisenä jännityksenä.

* Lämmönjohtavuus. Soveltamalla energian ja liikemäärien taseiden periaatteita pieneen kontinuumikappaleeseen ja antamalla kappaleen koon kutistua kohti nollaa voidaan osoittaa, että voidaan määritellä ns. lämpövuovektori (engl. heat flux vector) $\vec{q}$ ($[\vec{q}] = W/m^2$), jolla on seuraava ominaisuus. Lämpövuovektori on suure, jonka avulla mielivaltaisen kontinuumissa (tai sen pinnalla) olevan pinta-alkion dS kautta kulkevan lämpövirran tiheys (engl. density of heat

flow rate) q_n ($[q_n] = \mathrm{W/m^2}$) pinta-alkion yksikkönormaalivektorin $\vec{n}$ ($[\vec{n}] = -$) osoittamalle puolelle saadaan kaavasta (kuva 1.3.7)



$$\left.\begin{aligned} &\boxed{q_n = \vec{n}\cdot\vec{q}} \\ &= n_x q_x + n_y q_y + n_z q_z . \end{aligned}\right\} \quad (1.3.37)$$

Kuva 1.3.7

Suureet $\vec{q}$ ja q_n ovat keskenään vastaavassa suhteessa kuin jännitystensori ja jännitysvektori. Pinta-alkion dS kautta kulkeva differentiaalinen lämpövirta $dP_Q = q_n dS$ ja tietyn kappaleen reunojensa kautta saama ns. *lämpövirta* (engl. heat flow rate) P_Q^S ($[P_Q^S] = \mathrm{W}$) on täten

$$P_Q^S = -\int_S q_n \, dS = -\int_S \vec{n}\cdot\vec{q} \, dS. \qquad (1.3.38)$$

jossa integraali otetaan kappaleen reunan yli. Kaavassa esiintyvä miinusmerkki selittyy siitä, että tässä ja jatkossa P_Q^S määritellään kappaleen *saamana* lämpövirtana ja taas $\vec{n}$ määritellään kappaleen pinnasta ulospäin suunnattuna *ulkoisena* yksikkönormaalivektorina.

On syytä korostaa, että kaava (1.3.37) kuvaa lämpövirran tiheyttä mitattuna ko. pinta-alkioon liittyvän ns. *ainepinnan* (engl. material surface) suhteen. Ts. tulee ajatella, että kuvitellun ilmiötä mittaava havaitsija liikkuu ko. pinta-alkioon liittyvän ainepinnan mukana ja tarkastelee lämmön-siirtymistä tämän suhteen. Kuten on fysiikasta tuttua, tällainen lämmönsiirtyminen voi tapahtua johtumalla (engl. conduction) ja säteilemällä (engl. radiation) ja siis yhteensä

$$\vec{q} = \vec{q}^{\,c} + \vec{q}^{\,r}, \tag{1.3.39}$$

jossa yläindeksien merkitys on ilmeinen.

Fysiikassa tavallisesti kolmantena lämmönsiirtomuotona mainittu kuljettuminen tai konvektio (engl. convection) liittyy aineen makroskooppisesta liikkeestä johtuvaan energian siirtymiseen paikasta toiseen aineen mukana ja kysymyksessä on aivan eri asia kuin kaavasta (1.3.39). Kuljettuminen tulee automaattisesti mukaan lopullisiin yhtälöihin kohdassa 4.6 esitetyllä tavalla.

Sen sijaan suureiden $\vec{q}^{\,c}$ ja $\vec{q}^{\,r}$ käsittely vaatii konstitutiivisia yhteyksiä. Sekä kiinteiden aineiden että nesteiden tapauksessa tavallisin otaksuma lämmönjohtumisen suhteen on ns. Fourierin laki

$$\vec{q}^{\,c} = -k\vec{\nabla}T \tag{1.3.40}$$

eli

$$q_x^c = -k\frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y^c = -k\frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z^c = -k\frac{\partial T}{\partial z}. \tag{1.3.41}$$

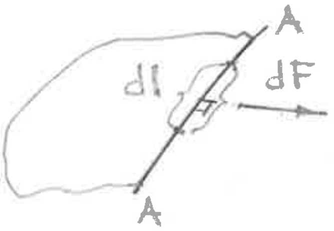
Tässä $\vec{\nabla}T$ ($[\vec{\nabla}T] = \mathrm{K/m}$) on lämpötilan gradientti ja k ($[k] = \mathrm{W/(m\cdot K)}$) on ko. nesteen ns. lämmönjohtavuus (engl. thermal conductivity). Suure k on positiivinen, joten miinusmerkki kaavoissa viittaa siihen, että lämpö virtaa korkeammasta lämpötilasta alempaan päin. Fourierin lain muoto (1.3.40) liittyy lämmönjohtavuudeltaan ns. isotrooppisen aineen tapaukseen, joihin nesteet tavallisesti katsotaan kuuluviksi. Anisotrooppisilla aineilla Fourierin laki on monimutkaisempi.

Säteilyn tapauksessa ei voida esittää mitään yksinkertaisia konstitutiivisia yhteyksiä. Kysymyksessä on monimutkainen ilmiö, jossa tietystä alkiosta emittoituva säteily levitessään absorboituu muihin alkioihin, joista se taas emittoituu jne. Tavallisesti säteily voidaan kuitenkin jättää huomioon ottamatta kontinuumin sisällä. Poikkeuksiakin on: esimerkiksi korkeassa lämpötilassa olevan lasimassan käsittely tai auringon säteilyn vaikutus vesistöjen pintakerroksissa. Usein säteilyn vaikutus pyritään esittämään likimääräisesti ilman vektorin $\vec{q}^r$ käyttöä eräänlaisena sisäenergian lähdeterminä; ks kohta 4.6. Mikroskooppiselta kannalta säteilyn vaikutusta voidaan yrittää havainnollistaa fotonitulkinnalla: Kappaleen ulkopuolelta saapuvat fotonit "syrivät" kappaleen molekyylejä ja muuttavat täten kappaleen sisäenergian arvoa.

<u>Höyrynpaine.</u> Painetta p_v, jossa varsinainen neste kiehuu, nimitetään ko. nesteen <u>höyrynpaineeksi</u>.

eli kyllästymispaineeksi (engl. vapor pressure). Se riippuu lämpötilasta. Taulukossa 1.3.1 on annettu joitakin veden höyrynpaineen arvoja. Jos nesteen paine pääsee laskemaan jossain virtausalueella lähelle vastaavassa lämpötilassa vallitsevaa nesteen höyrynpainetta, on vaarana ns. kavitaatio (engl. cavitation; cavity = onkalo), jossa nesteeseen syntyy höyrykuplia. Tämä ilmiö voi aiheuttaa eri laitteisiin huomattavia vaurioita ja haitata niiden toimintoja.

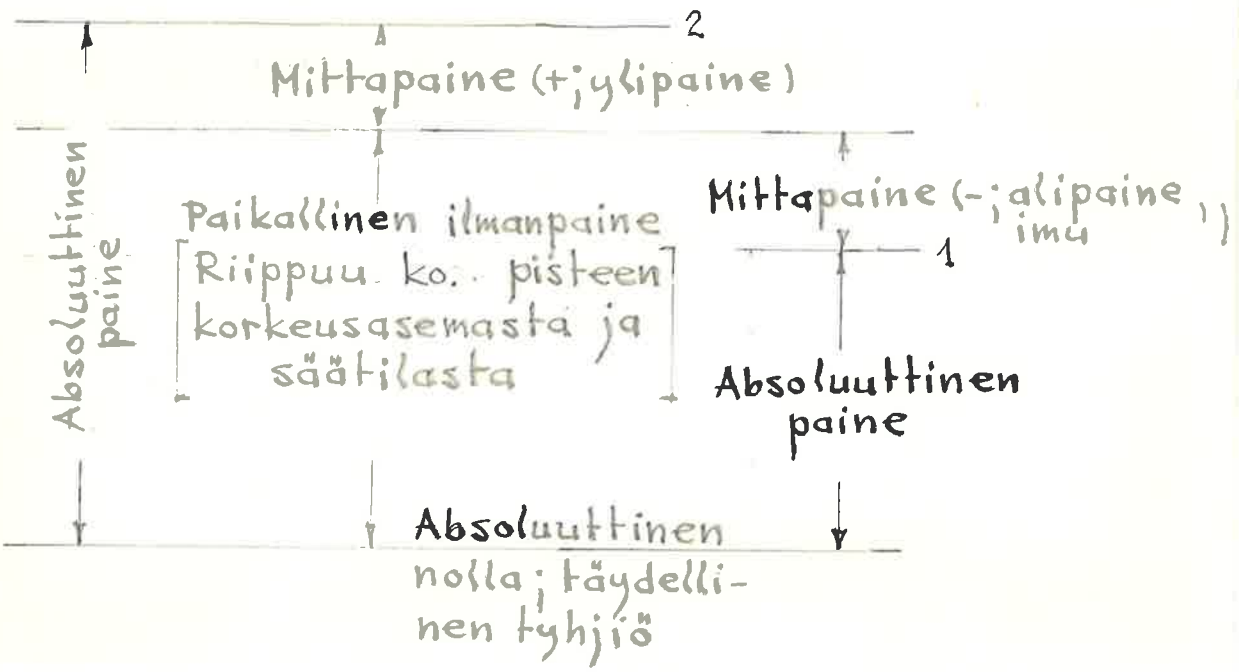
Pintajännitys. Varsinaisen nesteen ja kaasun tai myös kahden sekoittumattoman varsinaisen nesteen rajapinta käyttäytyy tunnetusti – fysiikassa tarkemmin selostetuista syistä johtuen – kuten jännitetty kalvo. Ns. pintajännitys (engl. surface tension) σ ($[\sigma]=\mathrm{N/m}$) vaikuttaa siis jokaisessa rajapinnan kuvitellussa leikkauksessa A-A siten, että viiva-alkioon dl syntyy rajapinnan tangenttitasossa kohtisuorassa viiva-alkiota vastaan oleva resultoiva differentiaalinen voima $dF = \sigma\, dl$ (kuva 1.3.8).



Kuva 1.3.8

Rajapinnan ollessa kaareva paineella on eri arvo pinnan eri puolilla. Pintajännityksellä on merkitystä pienimittakaavaisissa ilmiöissä kuten nesteen nousussa kapillaariputkissa sekä mallikokeissa, kun mallin mitat ovat pieniä.

Paineen ja lämpötilan yksiköistä. Käytännössä nesteen paineen mittauksessa määritetään itse asiassa aina paine-eroja. Kuvassa 1.3.9 on esitetty eräitä nimityksiä. Kaasujen yhteydessä pelkällä nimityksellä paine tarkoitetaan yleensä täydellisen tyhjiön suhteen mitattua paine-eroa eli



Kuva 1.3.9 Paineelle käytettyjä nimityksiä (7).

ns. absoluuttista painetta (engl. absolute pressure). Kaasuilla absoluuttinen paine on aina ei-negatiivinen suure. (Täydellisessä tyhjiössä ei ole enää molekyylejä painetta synnyttämässä.) Varsinaiset nesteet saattavat kestää hyvin puhtaina jonkin verran vetoa, mutta käytännössä niilläkin absoluuttinen paine on positiivinen. Varsinaisilla nesteillä paineen arvo vaikuttaa vähän nesteen ominaisuuksiin, josta johtuen nesteen yhteydessä on usein kätevintä tarkoittaa pelkällä sanalla paine ns. mittapainetta (engl. gauge pressure), joka ilmaisee ko. pisteessä vallitsevan absoluuttisen paineen ja sovitun referenssipaineen eron. Jälkimmäiseksi otetaan tavallisesti ko. pisteessä vallitseva ilmakehän paine. Mittapaine voi siis täten olla merkiltään positiivista tai negatiivista. Yleensä yhteydestä selviää mitä sanalla paine kulloinkin tarkoitetaan. Paineelle käytettyjä vanhentuneita yksiköitä ovat mm.:

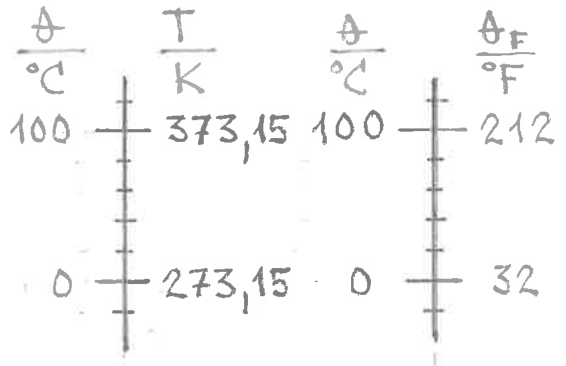
- teknillinen ilmakehä, at
  $1\ \mathrm{at} = 1\ \mathrm{kp/cm^2} = 0{,}098\,066\,5\ \mathrm{MPa}$
- normaali-ilmakehä, atm

$$\left.\begin{array}{l} 1\,\mathrm{atm} = 0{,}101\,325\ \mathrm{MPa} \\ \text{— elohopeamillimetri, mmHg} \\ 1\,\mathrm{mmHg} = 1\,\mathrm{torr} = 133{,}322\ \mathrm{Pa} \\ \text{— naulanvoima neliötuumaa kohti, psi} \\ 1\,\mathrm{psi} = 1\,\mathrm{lbf/in^2} = 6{,}894\,76\ \mathrm{kPa} \end{array}\right\} \quad (1.3.42)$$

Havainnollisin vielä sallittu yksikkö on baari, bar;

$$1\,\mathrm{bar} = 0{,}1\ \mathrm{MPa} \approx 1\,\mathrm{at} \approx 1\,\mathrm{atm}. \qquad (1.3.43)$$

Jos lämpötila esitetään Celsius-asteina (°C), sille käytetään tunnusta ϑ. Kuvassa 1.3.10 näkyvät celsiuslämpötilan ϑ ja termodynaamisen lämpötilan T sekä celsiuslämpötilan ϑ ja fahrenheitlämpötilan ϑ_F väliset yhteydet. Saadaan (10) lukuarvoyhtälöt



Kuva 1.3.10 (10).

$$\left.\begin{array}{l} \{T\} = \{T_0\} + \{\vartheta\}, \\ \{T\} = \frac{5}{9}(\{\vartheta_F\} - 32) + \{T_0\}, \\ \{\vartheta\} = \frac{5}{9}(\{\vartheta_F\} - 32), \end{array}\right\} \quad (1.3.44)$$

joissa $T_0 = 273{,}15$ K. Lämpötilanmuutos ΔT tai $\Delta\vartheta$ voidaan esittää joko yksikköinä kelvin tai Celsius-aste, koska tällöin 1 K = 1°C.

<u>Eräitä numeroarvoja.</u> Taulukoissa 1.3.1 ja 1.3.2 on joitakin tietoja veden ja ilman ominaisuuksista. Pintajännityksen arvo koskee veden ja ilman rajapintaa. Ilman kaasuvakio

$$R = 287\ \mathrm{J/(kg\cdot K)}. \qquad (1.3.45)$$

Taulukko 1.3.1 Veden ominaisuuksia eri lämpötiloissa normaali-ilmanpaineessa (6),(11),(12).

ϑ °C	ρ kg/m³	μ Pa·s	ν m²/s	$\varkappa_T$ Pa⁻¹	$\varkappa_s$ Pa⁻¹
0	999,8	$1,78 \cdot 10^{-3}$	$1,78 \cdot 10^{-6}$	$5,08 \cdot 10^{-10}$	$5,08 \cdot 10^{-10}$
4	1000,0	1,50·	1,50·		
10	999,6	1,30·	1,30·	4,81·	4,80·
20	998,2	1,00·	1,00·	4,58·	4,55·
40	992,2	$6,52 \cdot 10^{-4}$	$6,57 \cdot 10^{-7}$	4,38·	4,27·
60	983,2	4,70·	4,78·	4,37·	4,15·
80	971,8	3,56·	3,66·	4,48·	4,13·
100	958,3	2,82·	2,94·		

ϑ °C	γ_p K⁻¹	c_p J/(kg·K)	k W/(m·K)	σ N/m	p_v kPa
0	$-67 \cdot 10^{-6}$	4 218	0,552	0,0754	0,61
4				0,0749	0,81
10	89·	4 192		0,0740	1,23
20	208·	4 182	0,597	0,0726	2,33
40	390·	4 179	0,628	0,0695	7,38
60	522·	4 184	0,651	0,0662	19,92
80	643·	4 196	0,668	0,0626	47,36
100			0,680	0,0584	101,32

Taulukko 1.3.2 Ilman ominaisuuksia eri lämpötiloissa normaali-ilmanpaineessa (12).

T K	ρ kg/m³	μ Pa·s	ν m²/s	c_p J/(kg·K)	k W/(m·K)
100	3,6010	$0,692 \cdot 10^{-5}$	$1,923 \cdot 10^{-6}$	1 027	0,009 25
150	2,3675	1,028·	4,343·	1 010	0,013 74
200	1,7684	1,329·	7,490·	1 006	0,018 09
250	1,4128	1,488·	9,49 ·	1 005	0,022 27
300	1,1774	1,983·	$1,568 \cdot 10^{-5}$	1 006	0,026 24
350	0,9980	2,075·	2,076·	1 009	0,030 03
400	0,8826	2,286·	2,590·	1 014	0,033 65
450	0,7833	2,484·	2,886·	1 021	0,037 07

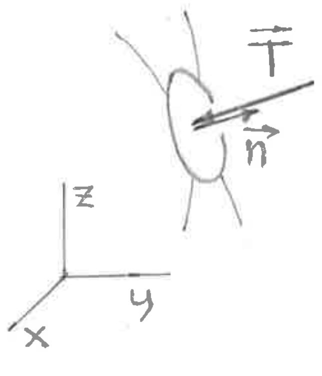
2 NESTESTATIIKKA

2.1 Yleistä

Nestestatiikassa tarkastellaan tietyn koordinaatiston suhteen jatkuvassa lepotilassa olevaa nestettä. Täten ko. aihepiiri ei tarkasti ottaen kuuluisi opintojakson nimen ilmaisemaan mekaniikan alueeseen. Aihetta käsitellään kuitenkin hieman tässä, koska näin voidaan harjoitella tiettyjen matemaattisten keinojen käyttöä ensin mahdollisimman yksinkertaisissa yhteyksissä. Lisäksi eräitä nestestatiikan tuloksia voidaan hyödyntää myös nestedynamiikassa hitausvoima-ajattelua soveltamalla.

Koska neste on levossa, sen muodonmuutosnopeudet häviävät ja nesteen määritelmän perusteella samoin siis myös leikkausjännitykset kaikkialla nesteessä. Tällöin jännitysvektori $\vec{T}$ ($[\vec{T}] = N/m^2 = Pa$) on aina kohtisuorassa tarkasteltavaa pinta-alkiota vastaan ja sen arvo

$$\boxed{\vec{T} = -p\vec{n}}, \qquad (2.1.1)$$



Kuva 2.1.1

jossa $p(x,y,z)$ ($[p] = Pa$) on paine ja $\vec{n}$ on pinnan ulkoinen yksikkönormaalivektori (kuva 2.1.1). Jännityksen ja paineen käsitteitä tarkastellaan perusteellisemmin kohdassa 4.2; ks. myös kohta D 4.4.1. Miinusmerkki kaavassa (2.1.1) aiheutuu siitä, että paine on tapana määritellä positiiviseksi silloin, kun se vaikuttaa puristavana.

Karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa

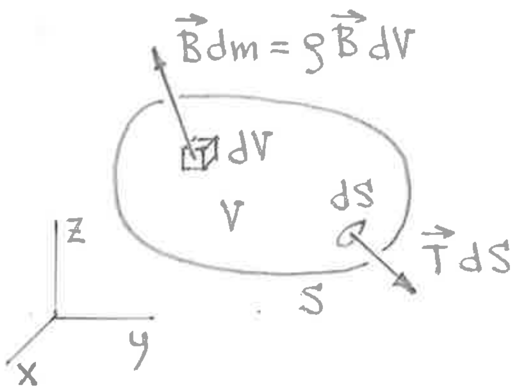
$$\vec{T} = T_x \vec{i} + T_y \vec{j} + T_z \vec{k}, \qquad (2.1.2)$$

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k} \qquad (2.1.3)$$

ja vektoriyhtälö (2.1.1) voidaan kirjoittaa kolmena skalaariyhtälönä

$$T_x = -p n_x, \quad T_y = -p n_y, \quad T_z = -p n_z. \qquad (2.1.4)$$

Tarkastellaan lepotilassa olevaa kappalevoimien massaa kohti tai ns. ominaiskappalevoiman (engl. specific body force) $\vec{B}$ ($[\vec{B}] = N/kg$) ja pintavoimien pinta-alaa kohti tai ns. traktion (engl. traction) eli jännitysvektorin $\vec{T}$ ($[\vec{T}] = Pa$) vaikutuksen alaisena olevaa



Kuva 2.1.2 Kontinuumikappale.

nestekappaletta (kuva 2.1.2). Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti $\vec{F}$ koostuu yleisesti kappalevoimien resultantista $\vec{F}^B$ ja pintavoimien resultantista $\vec{F}^S$ eli

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}^B + \vec{F}^S,} \qquad (2.1.5)$$

jossa

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}^B &= \int \rho \vec{B}\, dV \\ &= \int \rho B_x\, dV \vec{i} + \int \rho B_y\, dV \vec{j} + \int \rho B_z\, dV \vec{k} \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.6)$$

ja

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}^S &= \int \vec{T}\, dS \\ &= \int T_x\, dS\, \vec{i} + \int T_y\, dS\, \vec{j} + \int T_z\, dS\, \vec{k}.\end{aligned}\right\} \qquad (2.1.7)$$

Tässä ja jatkossa jätetään yleensä kappaleen täyttämää avaruuden osaa ja kappaleen pintaa kuvaavat tunnukset V ja S mukavuussyistä integraalimerkeistä pois. Rakenteiden mekaniikassa toimitaan usein suureen kappalevoima / massa = ominaiskappalevoima (joskus käytetään myös nimitystä kenttävoiman intensiteetti) $\vec{B}$ sijasta suureen kappalevoima / tilavuus = $\vec{X} = \rho \vec{B}$ avulla. Koska kappalevoimat kohdistuvat nimenomaan massaan eivätkä tilavuuteen, on $\vec{B}$ tavallaan perustavampaa laatua oleva suure kuin $\vec{X}$. Tavallisin kappalevoima on maan painovoima, jolloin $\vec{B} = \vec{g}$, jossa $\vec{g}$ on putoamiskiihtyvyys. Vanhemmassa kirjallisuudessa suureesta $|\vec{X}| = |\rho \vec{g}| = \rho g$ käytetään tällöin usein nimitystä ominaispaino (tavallinen tunnus on γ). Nykyisten ohjeiden (13) mukaan tämä nimitys on väärä, koska suosituksena on: suure / massa = ominaissuure.

Erityisesti tässä luvussa käsitellyssä tapauksessa pintavoimien resultantiksi saadaan kaavan (2.1.1) perusteella

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}^S &= -\int p \vec{n}\, dS \\ &= -\int p n_x\, dS\, \vec{i} - \int p n_y\, dS\, \vec{j} - \int p n_z\, dS\, \vec{k}.\end{aligned}\right\} \qquad (2.1.8)$$

Sovelletaan liikemäärän taseen periaatetta (1.2.3), jossa nyt kappaleen lepotilan johdosta kappaleen liikemäärä $\vec{p} \equiv \vec{0}$ ja siis $\dot{\vec{p}} = \vec{0}$. Täten saadaan <u>tasapainoyhtälö</u> $\vec{F} = \vec{0}$ eli

$$\boxed{\int \varrho \vec{B}\, dV - \int p\vec{n}\, dS = \vec{0}} \tag{2.1.9}$$

tai vielä skalaariyhtälöt

$$\left.\begin{aligned} &\int \varrho B_x\, dV - \int p n_x\, dS = 0, \\ &\int \varrho B_y\, dV - \int p n_y\, dS = 0, \\ &\int \varrho B_z\, dV - \int p n_z\, dS = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.1.10}$$

Näistä äärellistä kappaletta koskevista tasapainoyhtälöistä saadaan paikalliset muodot <u>Gaussin Lauseen</u> ((14), ks. Liite L.1) avulla. Gaussin Lause toistuu kontinuumimekaniikassa jatkuvasti. Muunnetaan nyt yhtälön (2.1.9) pintaintegraali tilavuusintegraaliksi kaavan (L.1.1) avulla ($* \hat{=}$ tyhjä, $\vec{f} \hat{=} p$), jolloin saadaan tulos

$$\int (\varrho \vec{B} - \vec{\nabla} p)\, dV = \vec{0}. \tag{2.1.11}$$

Tästä saadaan paikallinen muoto seuraavalla päättelyllä. Yhtälön (2.1.11) tulee olla aina voimassa valittiinpa tarkasteltavaksi alueeksi mikä hyvänsä osa-alue ΔV alkuperäisestä alueesta V. (Liikemäärän taseen aksioomahan — kuten muutkin kontinuumimekaniikan aksioomat — pätee millä tavalla hyvänsä valitulle kappaleelle.) Tämä ei ole mahdollista, jollei integrandi ole nolla kaikkialla koko alueessa. Täten lepotilassa olevan nesteen <u>tasapainoyhtälön paikallinen muoto</u> on

$$\boxed{\rho\vec{B}-\vec{\nabla}p=\vec{0}} \qquad (2.1.12)$$

eli skalaariyhtälöt

$$\rho B_x-\frac{\partial p}{\partial x}=0,\ \rho B_y-\frac{\partial p}{\partial y}=0,\ \rho B_z-\frac{\partial p}{\partial z}=0 \qquad (2.1.13)$$

kuten voidaan helposti todeta, kun muistetaan, että karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa p:n gradientti

$$\vec{\nabla}p=(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z})p=\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}. \qquad (2.1.14)$$

Todettakoon, että yhtälöt (2.1.13) saadaan myös suoraan yhtälöistä (2.1.10) soveltamalla Gaussin lauseen muotoa (L.1.4).

*† Tarkastellaan vielä äskeistä huolellisemmin globaalisesta muodosta lokaaliseen johtavutta päättelyä. Olkoon kysymyksessä yleinen globaalinen muoto

$$\int_V f(x,y,z,t)\,dV=0, \qquad (2.1.15)$$

jossa integrandi f on paikan suhteen <u>jatkuva</u> funktio ja voi vielä riippua ajasta; edellä $f \triangleq \rho(x,y,z)\vec{B}(x,y,z)-\vec{\nabla}p(x,y,z)$. Jos yhtälö (2.1.15) pätee jokaisen alueesta V valitun osa-alueen ΔV suhteen eli jos

$$\int_{\Delta V} f\,dV=0, \qquad (2.1.16)$$

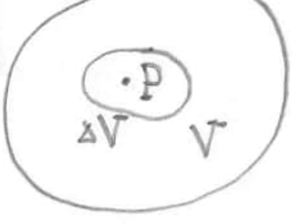
seuraa tästä lokaalinen muoto

$$f = 0 \quad \text{alueessa } V. \qquad (2.1.17)$$

Todistus perustuu vastaoletukseen. Olkoon f nollasta eroava ja vaikka positiivinen alueen tietyssä sisäpisteessä P. Jatkuvana funktiona f on tällöin positiivinen myös pisteen P tietyssä ympäristössä ΔV, jolloin yhtälön (2.1.16) vasen puoli tulisi positiiviseksi. Täten vastaoletus on väärä ja yhtälö (2.1.17) on voimassa.

Tulos pätee myös, kun f on vektorifunktio (kuten kaavan (2.1.11) esittämässä tapauksessa), sillä kaavaa (2.1.17) voidaan soveltaa ensin vektorin $\vec{f}$ jokaiseen komponenttiin, jonka jälkeen saadaan yhtälö $\vec{f} = \vec{0}$.

Kaavan (2.1.12) (ja (2.1.17)) johdossa oletettiin, että suureen $\vec{B}$ (ja suureen f) arvo tietyssä alueen V pisteessä P (kuva 2.1.3) ei riipu osa-alueen ΔV valinnasta. Kenttävoiman intensiteetin $\vec{B}$ arvo tietyssä pisteessä riippuu kuitenkin tarkasti ottaen ΔV:stä,



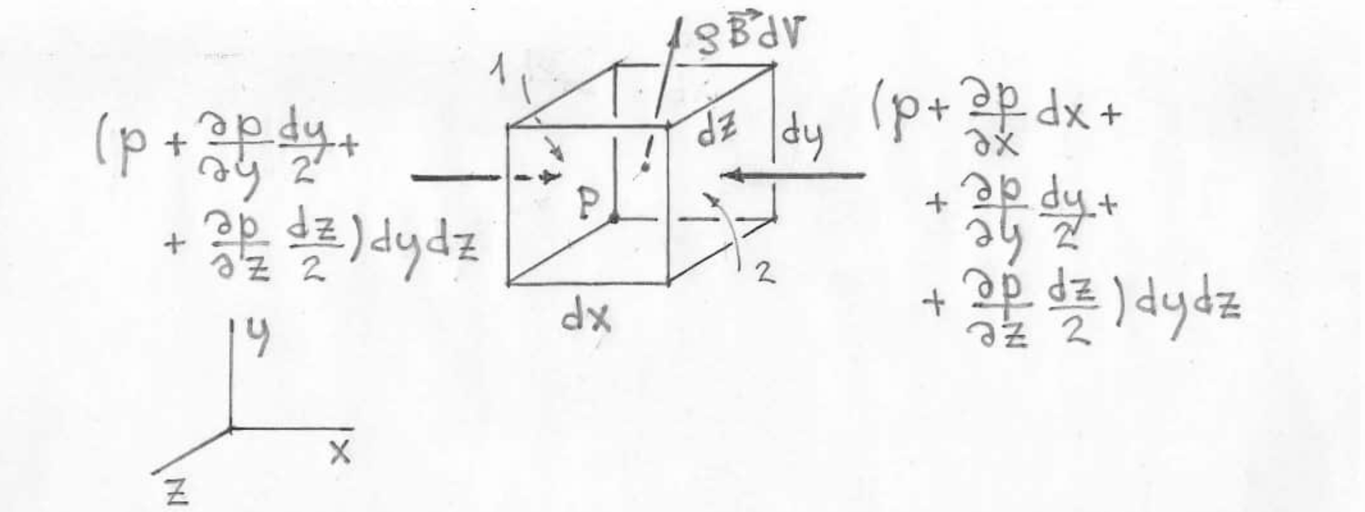
Kuva 2.1.3

koska kaavassa (2.1.6) $\vec{F}^B$ tarkoittaa valittuun kappaleeseen — siis tässä alueessa ΔV olevaan kappaleeseen — vaikuttavista ulkoisista kappalevoimista kertyvää resultanttia. Tavallisissa käytännön tehtävissä $\vec{B}$:n riippuvuus ΔV:stä on kuitenkin mitätön. Esimerkiksi palkin jännitystilaa laskettaessa ei ole tarpeen ottaa huomioon palkin eri osasten välisiä gravitaatiovoimia koko maapallon

aiheuttaman gravitaatiovoiman rinnalla ja $\vec{B}$ voidaan otaksua riippumattomaksi ΔV:stä. Vastakohtainen esimerkki on vaikkapa kaukana avaruudessa leijuva kaasupilvi, jonka analyysissä eri osasten väliset gravitaatiovoimat ovat oleellisia. Suorittamalla kaavojen (2.1.11) ja (2.1.12) välinen johto hieman edellä esitetystä tavasta poiketen, voidaan osoittaa, että kaava (2.1.12) pätee edelleen ja että $\vec{B}$ tarkoittaa siinä sitä raja-arvoa, jota ominaiskappalevoima lähestyy, kun ko. pistettä ympäröivä osa-alue ΔV kutistuu kohti tätä pistettä. $\vec{B}$ on siis periaatteessa kaikesta avaruuden massasta ko. pisteeseen kehittyvä kenttävoiman intensiteetti.
*

Edellä suoritettu paikallisen muodon päättely äärellisestä muodosta lähtemällä tulee toistumaan analogisena eri yhteyksissä jatkossa, jolloin sanallinen selittely tullaan jättämään tarpeettomana pois. Päättely perustuu epähavainnollisen matemaattisen lauseen käyttöön. Vaihtoehtoinen, havainnollisempi, mutta käyräviivaista koordinaatistoa käytettäessä kömpelöksi tuleva johtamistapa perustuu differentiaaligeometriseen tarkasteluun. Viedään johto tässäkin ensin verrattain huolellisesti lävitse, jonka jälkeen jatkossa voidaan taas jättää selittely vähemmälle.

Tarkastellaan kuvan 2.1.4 esittämää suorakulmaisen suuntaissärmiön muotoista nestealkiota. Olkoon pisteen P koordinaatit x, y ja z ja paineen arvo siinä p. Tahkon 1 keskipisteessä



Kuva 2.1.4 Lepotilassa oleva nestealkio.

paineella on arvo

$$p_1 = p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}, \qquad (2.1.18)$$

kun rajoitutaan p:n Taylorin kehitelmän lineaarisiin termeihin ja otetaan huomioon, että pinnan keskipisteen koordinaatit ovat $(x, y+dy/2, z+dz/2)$. Tahkon 2 keskipisteessä paineelle saadaan vastaava arvo

$$p_2 = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}. \qquad (2.1.19)$$

Muihin alkion tahkoihin vaikuttavat painevoimat (ei piirretty kuvaan) ovat kohtisuorassa x-akselia vastaan. Täten alkioon vaikuttavien pintavoimien resultantin komponentti x-akselin suunnassa

$$dF_x^s = (p_1 - p_2)\, dy\, dz = (-\frac{\partial p}{\partial x} dx)\, dy\, dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV. \qquad (2.1.20)$$

Suureille dF_y^s ja dF_z^s saadaan vastaavalla tarkastelulla analogiset lausekkeet

$$dF_y^s = -\frac{\partial p}{\partial y} dV, \quad dF_z^s = -\frac{\partial p}{\partial z} dV. \qquad (2.1.21)$$

Alkioon vaikuttavien pintavoimien resultantti tulee siis olemaan

$$d\vec{F}^S = \vec{f}\,dV, \qquad (2.1.22)$$

jossa

$$\vec{f} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right) = -\vec{\nabla} p. \qquad (2.1.23)$$

Tässä tarkastelussa on siis myös lauseketta (2.1.18) laskettaessa jätetty korkeamman kertaluvun termejä huomiotta (pintaan vaikuttava voima ei ole tarkalleen sama kuin paine keskipisteessä kertaa pinta-ala), mutta nämä yksinkertaistukset eivät aiheuta virheitä rajalla, kun dx, dy ja $dz \to 0$.

Alkioon vaikuttavien kappalevoimien resultantti

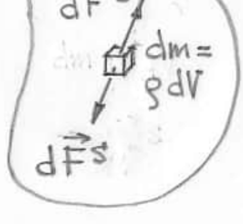
$$d\vec{F}^B = \vec{B}\,dm = \varrho \vec{B}\,dV, \qquad (2.1.24)$$

jossa taas jätetään korkeamman kertaluvun termit huomiotta — jos $\vec{B}$ tai ϱ riippuvat paikasta — ilman virheitä rajalla; $\vec{B}$ on siis kappalevoima massaa kohti eli ominaiskappalevoima eli kenttävoiman intensiteetti pisteessä P. Alkion tasapainoyhtälö on täten

$$d\vec{F}^B + d\vec{F}^S \equiv \varrho\vec{B}\,dV + \vec{f}\,dV \equiv (\varrho\vec{B} - \vec{\nabla}p)\,dV = \vec{0}, \qquad (2.1.25)$$

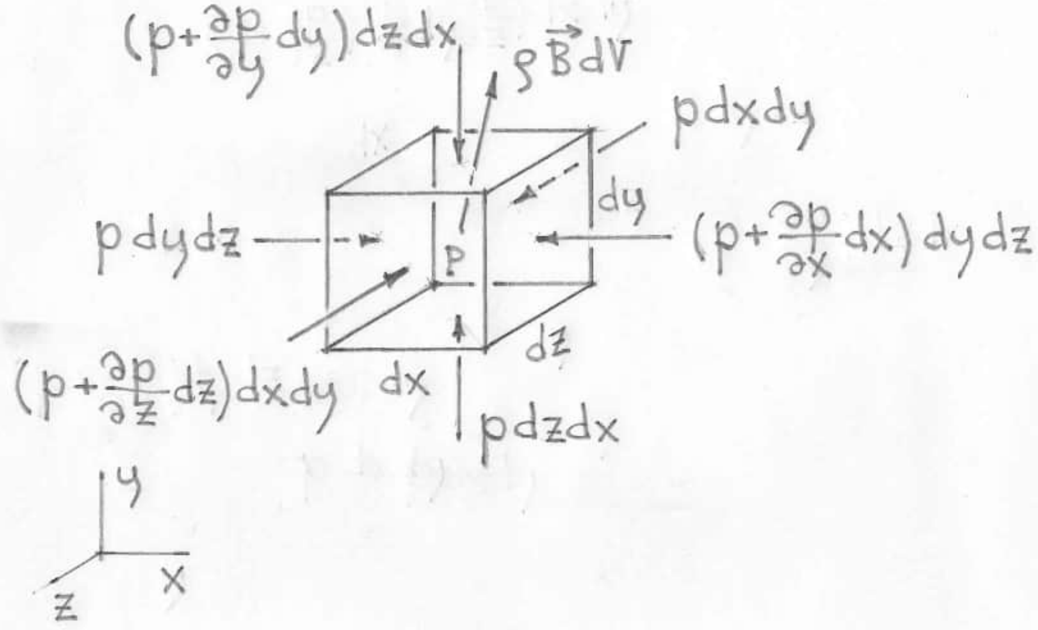
josta saadaan dV:llä jakamalla jälleen yhtälö (2.1.12).

Taulukko 2.1.1

Partikkelisysteemi	Kontinuumi
 $\vec{F}_i = \vec{B} m_i \quad (1)$ $\vec{f}_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{f}_{ij} \quad (2)$	 $d\vec{F}^B = \varrho\vec{B}\,dV \quad (1')$ $d\vec{F}^S = \vec{f}\,dV = -\vec{\nabla}p\,dV \quad (2')$
Tasapainoyhtälö: $\vec{F}_i + \vec{f}_i = \vec{0} \quad (3)$	Tasapainoyhtälö /dV: $\varrho\vec{B} + \vec{f} = \vec{0} \quad (3')$

Taulukossa 2.1.1 on kuvattu vierekkäin partikkelisysteemin tietyn partikkelin i ja nestekontinuumin tietyn massa-alkion tasapainoa. Analogiset termit ovat selvästi havaittavissa.

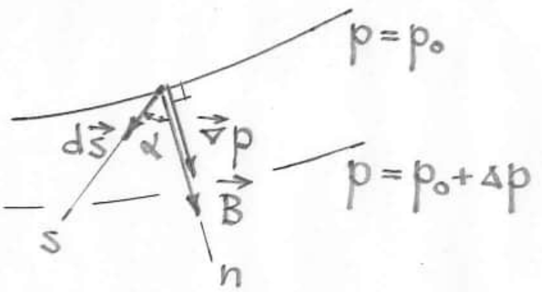
Huomautettakoon vielä, että differentiaaligeometrinen tarkastelu suoritetaan yleensä käyttäen kuvan 2.1.4 sijasta kuvan 2.1.5 esittämiä yksin-



Kuva 2.1.5 Lepotilassa oleva nestealkio.

kertaisempia merkintöjä, jotka ovat muodollisesti vääriä, koska paineella ei ole tässä käytetyssä approksimaatiossa samaa arvoa pisteeseen P rajoittuvien tahkojen keskipisteissä, kuten kuva antaa ymmärtää. Huomataan kuitenkin helposti, että näinkin päästään oikeaan lopputulokseen (2.1.12) (miksi näin käy?).

Tarkastellaan tämän jälkeen perusteellisemmin saatua tasapainoyhtälöä (2.1.12). Sen mukaan siis kappalevoimavektori ja paineen gradientti ovat samansuuntaiset. Toisaalta matematiikasta tiedetään, että funktion gradientti on kohtisuorassa tarkasteltavan pisteen kautta kulkevaa funktion tasa-arvopintaa eli nivoopintaa vastaan. Täten voidaan todeta, että tasapainotilassa (Tässä luvussa tasapainotilalla tarkoitetaan samaa kuin jatkuva lepotila.) olevassa nesteessä <u>paineen tasa-arvopinnat ovat kohtisuorassa kappalevoimavektoria vastaan</u> (kuva 2.1.6).



Kuva 2.1.6

Paineen muutos dp siirryttäessä mielivaltaiseen suuntaan s saadaan kertomalla yhtälö (2.1.12) puolittain skalaarisesti vektorilla $d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$:

$$\left.\begin{aligned} &\rho\vec{B}\cdot d\vec{s} - \vec{\nabla}p\cdot d\vec{s} = 0, \\ &\rho B\cos\alpha\, ds - \left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = 0, \\ &\rho B_s ds - dp = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.26)$$

eli

$$\frac{dp}{ds} = \rho B_s, \qquad (2.1.27)$$

missä B_s on $\vec{B}$:n skalaarikomponentti suuntaan s. Täten <u>paine kasvaa voimakkaimmin kappalevoiman vaikutussuunnassa</u> n, jossa $B_s = B_n = |\vec{B}|$. Yllä esitetyt alleviivatut tulokset ovat tuttuja painovoiman alaisena olevan nesteen tapauksesta.

Tuntuu luonnolliselta, että neste ei voi saavuttaa tasapainotilaa täysin mielivaltaisen kenttävoimajakautuman alaisena. Jos otaksutaan barotrooppinen tapaus, $\rho = \rho(p)$, ja tasapainoyhtälöt (2.1.13) esittävät <u>kolmen</u> osittaisdifferentiaaliyhtälön muodostamaa systeemiä, joissa esiintyy kuitenkin vain <u>yksi</u> tuntematon: $p(x,y,z)$. Täten systeemi on ns. <u>yli</u>-

määräytyvä (engl. overdetermined) ja jotta sillä olisi ratkaisu, funktion $\vec{B}(x,y,z)$ tulee täyttää tiettyjä ehtoja. Esimerkiksi vakiotiheysnesteen tapauksessa saadaan derivoimalla ensimmäinen yhtälö (2.1.13) y:n suhteen ja toinen yhtälö x:n suhteen ja vähentämällä syntyvät yhtälöt puolittain toisistaan ehto $\partial B_x/\partial y = \partial B_y/\partial x$. Lähteen (15) mukaan yleinen ehto on seuraava. Jotta tasapaino olisi yleensä mahdollinen, kenttävoimajakautuman tulee olla sellainen, että jokaisen pisteen kautta voidaan ajatella kulkevaksi jatkuva pinta, joka on kaikkialla kohtisuorassa kenttävoimaa vastaan (engl. surface normal field). Erityisen tärkeä tämän ehdon toteuttava tapaus on se, jossa kappalevoimat ovat konservatiivisia siinä mielessä, että on olemassa pelkästään paikan funktio $\Omega(x,y,z)$ siten, että

$$\boxed{\vec{B} = -\vec{\nabla}\Omega} \tag{2.1.28}$$

eli

$$B_x = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad B_y = -\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \quad B_z = -\frac{\partial\Omega}{\partial z}. \tag{2.1.29}$$

Tällöinhän Ω:n tasa-arvopinnat ovat kohtisuorassa vektoria $\vec{\nabla}\Omega$ ja siis myös vektoria $\vec{B}$ vastaan. Massa-alkioon $dm = \rho\, dV$ vaikuttaa kappalevoima

$$dm\,\vec{B} = dm(-\vec{\nabla}\Omega) = -\vec{\nabla}(dm\,\Omega), \tag{2.1.30}$$

joten tällä voimalla on kaavan D (5.2.6) perusteella potentiaalienergia

$$dV^* = dm\Omega = \varrho\Omega\, dV \qquad (2.1.31)$$

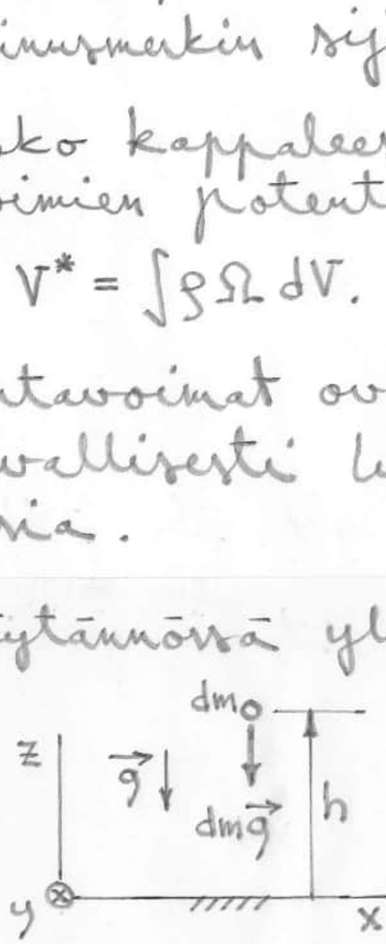
Suure Ω ($[\Omega] = J/kg$) on siis potentiaalienergia massaa kohti eli <u>ominaispotentiaalienergia</u>. Kirjallisuudessa käytetään kuitenkin usein sen sijasta nimitystä voimapotentiaali tai voimafunktio (engl. force potential, force function). Usein myös kaavassa (2.1.28) esiintyy miinusmerkin sijasta plusmerkki.

Koko kappaleeseen vaikuttavien kappalevoimien potentiaalienergia on täten

$$V^* = \int \varrho\Omega\, dV. \qquad (2.1.32)$$

Pintavoimat ovat taas systeemekaniikassa tavallisesti luonteeltaan epäkonservatiivisia.

Käytännössä ylivoimaisesti tavallisin ja tärkein konservatiivinen voimakenttä on <u>vakiopainovoimakenttä</u>, jolle saadaan kuvan 2.1.7 merkinnöin ja vertaamalla kaavaan D (5.2.21) tulos $dV^* = dmgh$, joten kaavan (2.1.31) perusteella saadaan



Kuva 2.1.7

$$\boxed{\Omega = gh} \qquad (2.1.33)$$

ja koska g on vakio

$$\vec{B} = \vec{g} = -g\vec{\nabla}h \qquad (2.1.34)$$

eli

$$B_x = g_x = -g\frac{\partial h}{\partial x},\quad B_y = g_y = -g\frac{\partial h}{\partial y},\quad B_z = g_z = -g\frac{\partial h}{\partial z}. \tag{2.1.35}$$

Jos vielä xyz-koordinaatisto valitaan kuvan 2.1.7 esittämällä tavalla, $h=z$ ja

$$B_x = g_x = 0,\quad B_y = g_y = 0,\quad B_z = g_z = -g. \tag{2.1.36}$$

Tasapainoyhtälö (2.1.12) saa konservatiivisessa voimakentässä muodon (jaetaan vielä ϱ:lla ja vaihdetaan merkit)

$$\boxed{\vec{\nabla}\Omega + \frac{1}{\varrho}\vec{\nabla}p = \vec{0}.} \tag{2.1.37}$$

Tästä yhtälöstä voidaan päätellä pienen tarkastelun jälkeen, että konservatiivisten voimien vaikutuksen alaisessa tasapainotilassa olevassa nesteessä tietyn pisteen kautta kulkevat <u>p:n, Ω:n ja ϱ:n tasa-arvopinnat yhtyvät</u>. Jos neste on homogeenista, sen tilanyhtälöstä $f(\varrho, p, T) = 0$ seuraa myös, että lämpötilankin tasa-arvopinnan tulee yhtyä edellisiin pintoihin.

<u>Barotrooppisen homogeenisen</u> nesteen tapauksessa tilanyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $\varrho = \varrho(p)$, joka pätee samana koko alueessa. Tällöin voidaan määritellä ns. <u>painefunktio</u> (engl. pressure function) Ψ ($[\Psi] = \mathrm{J/kg}$) funktion $1/\varrho(p)$ integraalifunktiona:

$$\boxed{\Psi(p) = \int \frac{1}{\varrho(p)}\,dp.} \tag{2.1.38}$$

Tämän tarkoitus selviää seuraavasta. Ketjuderivoimalla saadaan (Integraalifunktion derivaatta on ko. integroitava funktio.)

$$\frac{\partial \Psi(p(x,y,z))}{\partial x} = \frac{d\Psi}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{2.1.39}$$

Vastaava tulos saadaan myös y- ja z-koordinaatin suhteen eli

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{2.1.40}$$

eli yhteisesti (kerrotaan yhtälöt vektoreilla $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ ja lasketaan yhtälöt puolittain yhteen)

$$\vec{\nabla}\Psi = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\,. \tag{2.1.41}$$

Nesteen homogeenisuutta on tarvittu, jotta voidaan kirjoittaa $\Psi = \Psi(p(x,y,z))$. Epähomogeenisessa tapauksessa yhteys $\rho = \rho(p)$ riippuisi paikasta ja tulisi siis kirjoittaa $\rho = \rho(x,y,z,p)$, jolloin myös saataisiin riippuvuus $\Psi = \Psi(x,y,z,p(x,y,z))$ eikä $\Psi = \Psi(p(x,y,z))$.

Ottamalla tulos (2.1.41) huomioon yhtälössä (2.1.37) saadaan yhtälö

$$\vec{\nabla}\Omega + \vec{\nabla}\Psi = \vec{\nabla}(\Omega + \Psi) = \vec{0}, \tag{2.1.42}$$

jonka perusteella

$$\boxed{\Psi + \Omega = C} = \text{vakio koko alueessa} \tag{2.1.43}$$

<u>konservatiivisten</u> voimien alaisena <u>lepotilassa</u> olevassa <u>barotrooppisessa</u> <u>homogeenisessa</u> nesteessä. Tämä on ns. Bernoullin yhtälön erikoistapaus.

Painefunktio (2.1.38) sisältää mielivaltaisen integroimisvakion, jonka valinnalla ei ole merkitystä kunhan se vain pidetään sitten kiinteänä tietyn tarkastelun aikana; vrt. potentiaalienergian vertailupisteen valinta. Painefunktio esitetään usein myös määrätyn integraalin muodossa

$$\Psi(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{1}{\rho(p)}\, dp, \tag{2.1.44}$$

jossa p_0 on jokin valittu referenssipaine. Tällöin $\Psi(p_0) = 0$.

<u>Vakiotiheysnesteelle</u> saadaan (otetaan $p_0 = 0$)

$$\Psi = \int_0^p \frac{1}{\rho}\, dp = \frac{1}{\rho}\int_0^p dp = \frac{1}{\rho}\Big|_0^p p \tag{2.1.45}$$

eli

$$\boxed{\Psi = \frac{p}{\rho}} \tag{2.1.46}$$

<u>Polytrooppisessa</u> tapauksessa (kaava (1.3.8)) saadaan lopuksi (ρ_0 on referenssipainetta p_0 vastaava tiheys)

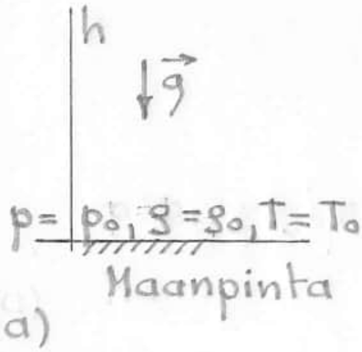
$$\Psi = \frac{n}{n-1}\,\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right] \tag{2.1.47}$$

Kun $n = 1$ eli isotermisessä tapauksessa tämä ei päde, vaan silloin

$$\Psi = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0}. \tag{2.1.48}$$

---

* <u>Esimerkki 2.1.1.</u> Paine ilmakehässä. Tarkastellaan hieman paineen jakautumista ilmakehässä lähellä maanpintaa otaksuen vakiopainovoimakenttä sekä otaksuen ensin (1) vakiotiheysneste ja sitten (2) polytrooppinen tapaus.



(a)

(1) Yhtälö (2.1.43) on nyt kaavojen (2.1.33) ja (2.1.46) perusteella

$$\frac{p}{\rho} + gh = C = \frac{p_0}{\rho_0} + g\cdot 0, \tag{a}$$

jossa vakion C arvo on laskettu maanpinnalla tunnetuiksi otaksutuista arvoista $p=p_0$, $\varrho=\varrho_0$ (kuva (a)). Koska tässä $\varrho=\varrho_0$, saadaan painejakautuma

$$p = p_0 - \varrho_0 g h \tag{b}$$

eli paine pienenee lineaarisesti korkeuden funktiona. Tämän mukaan ilmakehän korkeus h' olisi (korkeus, jossa paine häviää)

$$h' = \frac{p_0}{\varrho_0 g}. \tag{c}$$

(2) Yhtälö (2.1.43) on kaavojen (2.1.33) ja (2.1.47) perusteella

$$\frac{n}{n-1}\frac{p_0}{\varrho_0}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}-1\right]+gh = C = \frac{n}{n-1}\frac{p_0}{\varrho_0}\left[1-1\right]=0, \tag{d}$$

josta saadaan painejakautuma

$$p = p_0\left(1-\frac{n-1}{n}\frac{\varrho_0}{p_0}gh\right)^{\frac{n}{n-1}} = p_0\left(1-\frac{n-1}{n}\frac{h}{h'}\right)^{\frac{n}{n-1}}. \tag{e}$$

Lämpötilajakautuma seuraa eliminoimalla yhtälöistä (suorita laskelmat)

$$p=\varrho RT, \quad p_0=\varrho_0 RT_0, \quad p\varrho^{-n}=p_0\varrho_0^{-n} \tag{f}$$

ϱ ja ϱ_0, jolloin saadaan ensin yleinen tulos

$$T = T_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} \tag{g}$$

sekä vielä tässä kaavan (d) perusteella

$$T = T_0\left(1-\frac{n-1}{n}\frac{h}{h'}\right). \tag{h}$$

Lämpötila muuttuu siis myös lineaarisesti korkeuden funktiona.

Lähteen (15) mukaan ilmakehän alimmissa kerroksissa — ns. troposfäärissä (korkeus alle ≈ 11 km) — havaintojen kanssa parhaiten sopusoinnussa olevat tulokset saadaan arvolla $n = 1{,}2$. Otetaan lisäksi $g = 9{,}807\ \mathrm{m/s^2}$, $T_0 \hat{=} \vartheta_0 = 15\,°C$ ja $p_0 = 1\,\mathrm{atm} \approx 0{,}1013\ \mathrm{MPa}$. Nämä arvot vastaavat likimain ns. standardi-ilmakehän (16) arvoja merenpinnan korkeudella. Ottamalla ilman kaasuvakioksi $R = 287\ \mathrm{J/(kg \cdot K)}$ tilanyhtälö antaa tiheyden

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{0{,}1013 \cdot 10^6}{287\,(273{,}15 + 15)}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} = 1{,}225\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}.$$

Vakiotiheysotaksuma antaa ilmakehän korkeudeksi

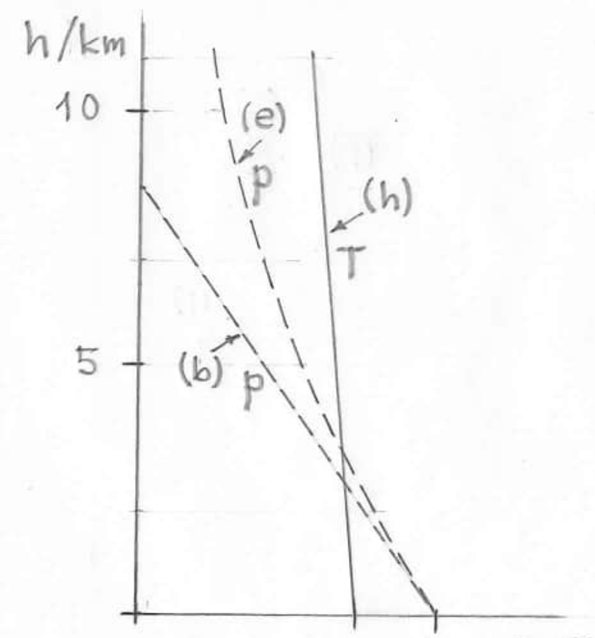
$$h' = \frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{0{,}1013 \cdot 10^6}{1{,}225 \cdot 9{,}807}\ \mathrm{m} = 8430\ \mathrm{m}.$$

Polytrooppiotaksuman mukainen ilmakehän korkeus h'' saadaan kaavasta (e) vaatimalla sulkulausekkeen häviämistä; josta seuraa

$$h'' = \frac{n}{n-1}\,h' = \frac{1{,}2}{1{,}2-1}\,h' = 6h' = 50600\ \mathrm{m}.$$

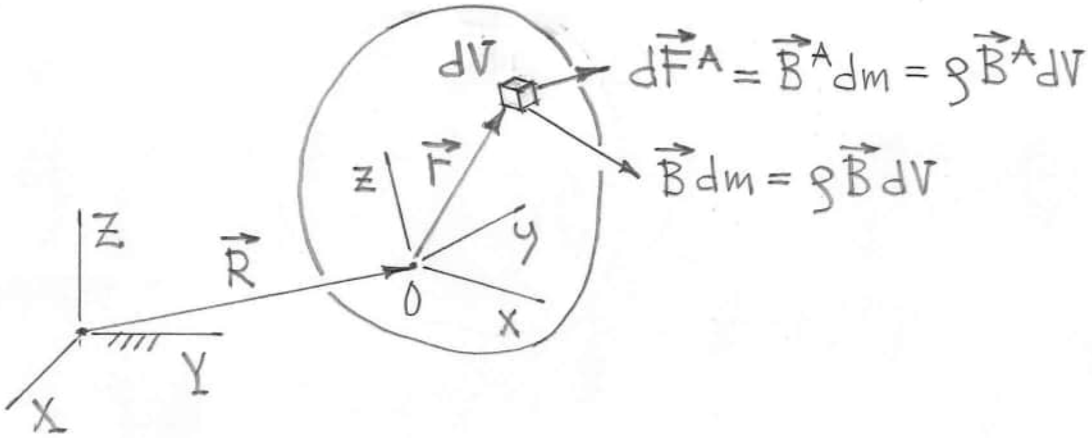
Todellisuudessa troposfääria seuraa 11 km yläpuolella toisentyyppinen vyöhyke, ns. stratosfääri, jossa lämpötila on likimain vakio.

Kuvassa (b) on esitetty graafisesti kaavojen (b) (e) ja (h) mukaiset paineen ja lämpötilan jakautumat. Korkeudella $h = 11$ km lämpötilan arvo $\vartheta = -47{,}5\,°C$. Standardi-ilmakehällä vastaavaksi arvoksi otetaan $-56{,}5\,°C$.



(b)

Jos neste liikkuu kuten jäykkä kappale, muodonmuutosnopeudet häviävät edelleen ja jännitysvektori noudattaa samoin edelleen kaavaa (2.1.1). Tarkastelu voidaan palauttaa edellä käsiteltyyn jatkuvan lepotilan tapaukseen kuvan 2.1.8 esittämällä tavalla antamalla xyz-koordinaatiston liikkua nesteen mukana, jolloin ko. koordi-



Kuva 2.1.8 Suhteellinen liike.

naatiston suhteen kyseessä on jatkuva lepotila. Koska xyz-koordinaatisto ei ole enää yleensä inertiaalikoordinaatisto, tasapainoyhtälöitä on muistettava täydentää näennäisvoimien antamalla osuudella. Kaavan D (5.1.144) perusteella kuhunkin massa-alkioon $dm = \rho dV$ vaikuttaa periaatteessa näennäisvoima

$$d\vec{F}^A = -\rho\left[\vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\right]dV \quad (2.1.49)$$

eli todellisen kenttävoiman intensiteetin $\vec{B}$ lisäksi on operoitava kuvitellulla kenttävoiman intensiteetillä

$$\boxed{\vec{B}^A = -\left[\vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\right].} \quad (2.1.50)$$

Tässä on poikettu mukavuussyistä hieman

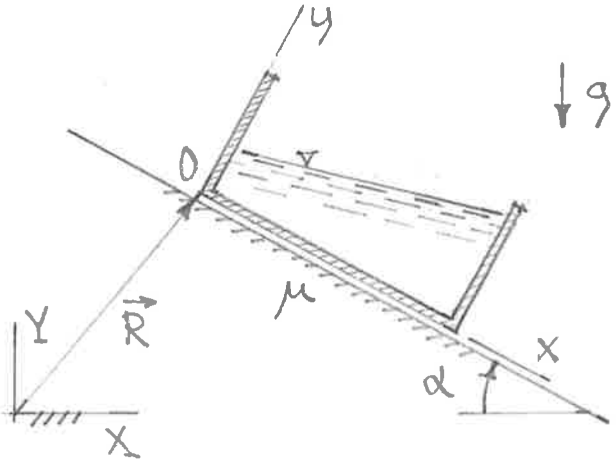
kohdan D 5.1.5 merkinnöistä: $\vec{r}_0 \hat{=} \vec{R}$, $\vec{\rho} \hat{=} \vec{r}$ ja $\vec{v}_r \hat{=} \vec{v}$.

Kaavat (2.1.49) ja (2.1.50) on kirjoitettu tässä yhteydessä liian yleisessä muodossa, sillä ensinnäkin jatkuvan lepotilan johdosta $\vec{v} \equiv \vec{0}$ ja toiseksi suureen $\vec{B}^A$ tulee olla konservatiivinen xyz-koordinaatistossa kaavan (2.1.28) esittämässä mielessä. Tämä rajoittaa lausekkeen (2.1.50) käytännössä muotoon

$$\vec{B}^A = -[\vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})], \qquad (2.1.51)$$

jossa $\vec{a}_0$ ja $\vec{\omega}$ ovat ajan suhteen vakiovektoreita. Kaavan oikean puolen ensimmäinen termi on analoginen vakiopainovoimakentän kanssa ja toinen termi vastaa keskipakovoimakenttää. Vastaavat ominaispotentiaalienergian Ω^A lausekkeet on helppo johtaa kussakin tapauksessa esimerkiksi soveltamalla kaavoja D (5.2.21) ja D (5.2.24).

Esimerkki 2.1.2. Kalteva taso. Kuva (a) esittää kaltevaa tasoa pitkin liukuvaa vakiotiheysnestettä sisältävää ylhäältä avonaista säiliötä. Otaksutaan, että neste on säiliön suhteen jatkuvassa lepotilassa. Määritetään nesteen vapaan pinnan ottama muoto.



(a)

Tarkastellaan nestettä säiliöön kiinnitetyssä xy-koordinaatistossa, joka on siis puhtaassa translaatioliikkeessä inertiaalikoordinaatiston XY suhteen. Tehtyjen otaksumien perusteella säiliön plus nesteen muodostama systeemi liikkuu kuten jäykkä kappale translaatioliikkeessä x-akselin suunnassa ja massakeskiön liikelain perusteella liikkeen kiihtyvyys $\vec{a}_0$ saadaan suoraan esimerkin D 5.1.1 kaavan (c) avulla. Täten

$$\vec{a}_0 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\vec{i} \tag{a}$$

joka on vakio ja näennäisominaiskappalevoima

$$\vec{B}^A = -g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\vec{i} \tag{b}$$

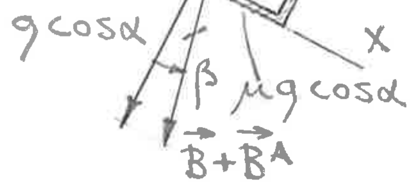
on siis konservatiivinen. Kuvan (a) perusteella taas painovoimakenttä antaa osuuden

$$\vec{B} = g\sin\alpha\,\vec{i} - g\cos\alpha\,\vec{j} \tag{c}$$

ja resultoiva kenttävoiman intensiteetti on siis

$$\vec{B} + \vec{B}^A = \mu g\cos\alpha\,\vec{i} - g\cos\alpha\,\vec{j}. \tag{d}$$

Tämän suunta on vakio, joten kuvan 2.1.6 yhteydessä tehdyn tulkinnan perusteella paineen tasa-arvopinnat ovat vektoria $\vec{B}+\vec{B}^A$ vastaan kohtisuorassa olevia tasoja; samoin siis myös vapaa pinta, koska sillä vallitsee vakio ilman paine.



(b)

Kuvasta (b) saadaan tulos

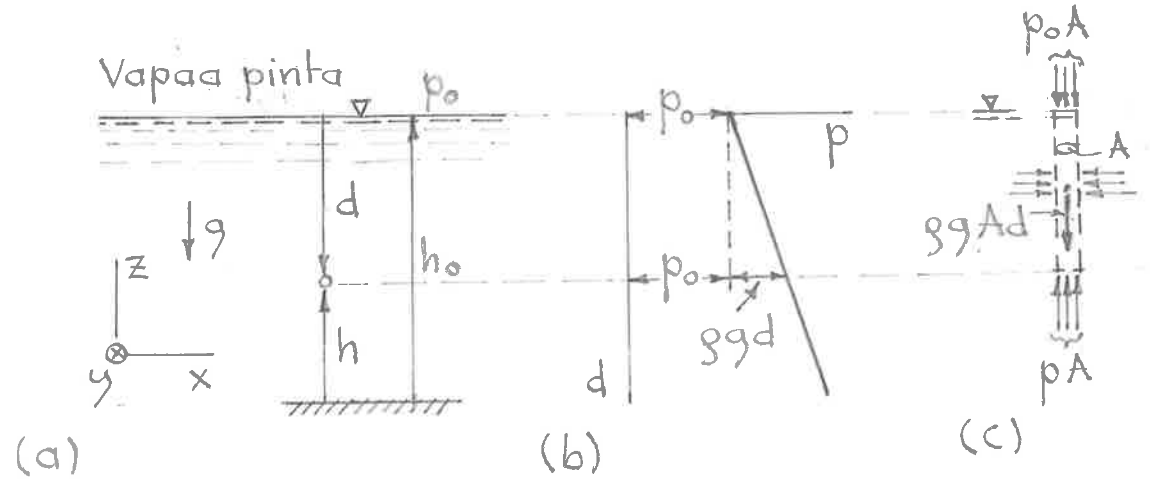
$$\tan\beta = \frac{\mu \cancel{g\cos\alpha}}{\cancel{g\cos\alpha}} = \mu. \tag{e}$$

Kun kitkaa ei oteta huomioon $\beta = 0$ ja vapaa pinta on kaltevan tason suuntainen. Kun taas säiliö liikkuu vakionopeudella, $\mu = \tan\alpha$ ja $\beta = \alpha$ eli vapaa pinta on vaakasuorassa.

2.2 Vakiopainovoimakentässä oleva vakiotiheysneste

Yleistä. Rakennustekniikassa esiintyvät nestestatiikan tehtävät koskevat tavallisimmin rakenteisiin kohdistuvien veden paineesta johtuvien kuormitusten määrittämistä; esimerkiksi vesisäiliöt, padot jne. Otsikon 2.2 esittämät oletukset ovat tällöin hyvin tarkasti voimassa.

Tässä kohdassa käytetään kuvassa 2.2.1 (a) esi-



Kuva 2.2.1 (a) Merkintöjä. (b) Paineen jakautuminen pystysuunnassa. (c) Nestepylvään tasapaino.

tettyjä merkintöjä. Suure h on nestepartikkelin korkeusasema jostain valitusta kiinteästä vaakatasosta ylöspäin positiivisena mitattuna ja d nestepartikkelin syvyysasema nesteen ns. *vapaasta pinnasta* (engl. free surface) positiivisena alaspäin mitattuna. Vapaa pinta tarkoittaa yleisesti kahden erilajisen nesteen kuten kahden sekoittumattoman varsinaisen nesteen tai varsinaisen nesteen ja kaasun rajapintaa erotuksena nesteen rajapinnasta kiinteästä aineesta olevan seinämän kanssa. Tavallisin esimerkki on veden ja ilman välinen vapaa pinta. Vakiopainovoimakentässä Ω:n tasa-arvopinnat ovat vaakasuoria tasoja, joten vapaa pintakin on kohdan 2.1 perusteella tällöin vaakasuora taso. Yhtälö $\Psi + \Omega = \mathcal{C}$ saa tässä muodon (vrt. kaavat (2.1.33) ja (2.1.46))

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + gh = \mathcal{C}.} \tag{2.2.1}$$

Jos paine tunnetaan jossain tietyssä pisteessä, vakion $\mathcal{C}$ arvo saadaan lasketuksi ja tämän jälkeen paine missä hyvänsä pisteessä. Merkitsemällä painetta ja korkeutta vapaalla pinnalla tunnuksilla p_0 ja h_0 saadaan vakion $\mathcal{C}$ arvoksi

$$\mathcal{C} = \frac{p_0}{\rho} + gh_0 \tag{2.2.2}$$

ja yhtälö (2.2.1) tulee muotoon

$$\frac{p}{\rho} + gh = \frac{p_0}{\rho} + gh_0 \tag{2.2.3}$$

eli

$$p = p_0 + \rho g (h_0 - h) \tag{2.2.4}$$

eli vielä (ks. kuva 2.2.1(a))

$$\boxed{p = p_0 + \rho g d.} \tag{2.2.5}$$

Tämän kaavan ilmaisemaa painejakautumaa nimitetään usein ns. <u>hydrostaattiseksi painejakautumaksi</u> (engl. hydrostatic pressure distribution). Kaavaa on havainnollistettu kuvassa 2.2.1 (b). Paine siis kasvaa lineaarisesti syvyyden d mukana ja kasvunopeus on verrannollinen nesteen tiheyteen ρ. Vaakasuunnassa paine on vakio.

Nämä yksinkertaiset tulokset johdettiin tässä kohdan 2.1 yleisten kaavojen erikoistapauksena. Nopeammin samaan tulokseen päästään kuvan

2.2.1 (c) esittämän pystysuoran nestepylvään vapaakappalekuvion avulla kirjoittamalla pystysuuntaisten voimien tasapainoyhtälö

$$pA = p_0 A + \rho g A d, \qquad (2.2.6)$$

(A on pylvään poikkileikkausala ja Ad siis pylvään tilavuus) josta saadaan A:lla jakamisen jälkeen kaava (2.2.5). Tutkimalla vastaavasti vaakasuoran nestepylvään tasapainoa todetaan helposti, että paineen täytyy olla vaakasuunnassa vakio.

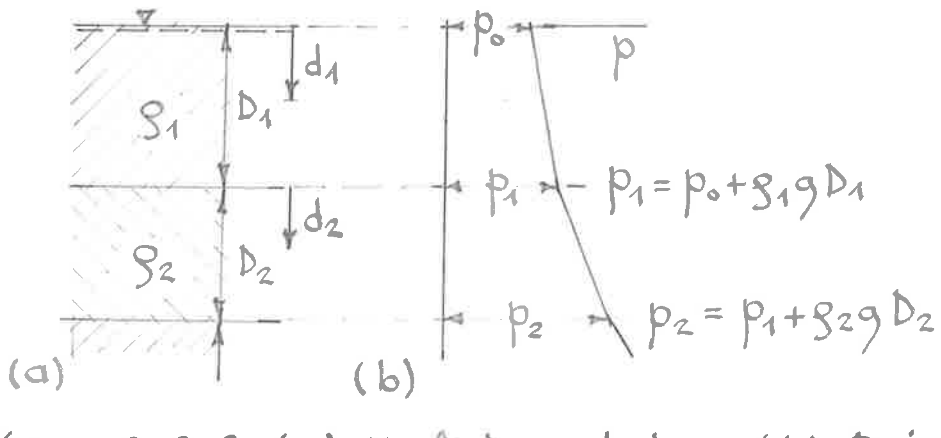
Tavallisesti vapaassa pinnassa vallitsee ilmakehässä ko. pisteessä oleva paine (poikkeus: yli- tai alipaineessa olevassa säiliössä esiintyvä vapaa pinta), joka otetaan referenssipaineeksi ja käsitellään vain mittapainetta eli suhteellista painetta

$$p_g = p - p_0, \qquad (2.2.7)$$

jolloin kaava (2.2.5) saa muodon

$$\boxed{p_g = \rho g d.} \qquad (2.2.8)$$

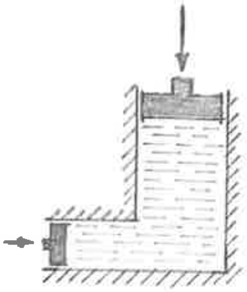
Tapauksessa, jossa esiintyy päällekkäin eri vakiotiheyden omaavia nestekerroksia (kuva 2.2.2(a)),



Kuva 2.2.2 (a) Nestekerroksia. (b) Paineen jakautuminen pystysuunnassa.

kuhunkin kerrokseen erikseen voidaan soveltaa kaavaa (2.2.5) ja saadaan siis kuvassa 2.2.2 (b) esitetty paloittain lineaarisesti muuttuva painejakautuma.

Jos alueessa vallitseva paine on suuri painovoimasta johtuvan termin $\varrho g d$ maksimiarvoon verrattuna, kaava (2.2.5) saa likimain muodon $p = p_0$ (Termin p_0 ei tarvitse tarkoittaa painetta vapaalla pinnalla vaan yleensä painetta tietyllä vaakatasolla). Tulosta

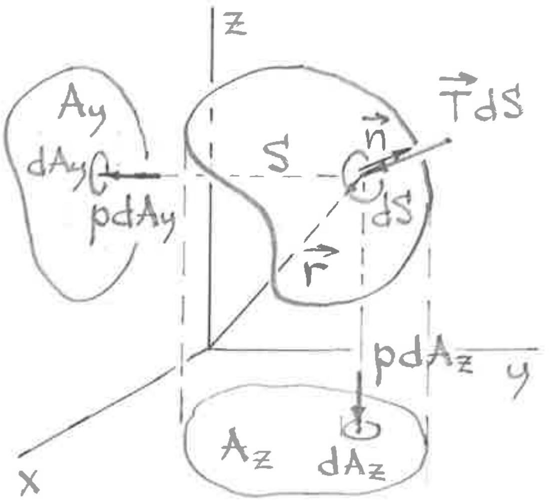


Kuva 2.2.3

$$\boxed{p = \text{vakio}} \qquad (2.2.9)$$

nimitetään **Pascalin Laiksi**. Sama tulos saadaan mielivaltaiselle nesteelle kaavasta (2.1.12) asettamalla $\vec{B} = \vec{0}$. Pascalin Lakia voidaan soveltaa esimerkiksi hydraulisten nostolaitteiden yhteydessä (vrt. kuva 2.2.3).

Pintaan vaikuttava hydrostaattinen voima. Kuva 2.2.4 esittää tiettyä pintaa — esimerkiksi nestesäiliön seinämän tiettyä osaa — johon vaikuttavien paineesta johtuvien voimien resultantti ja momentti jonkin pisteen suhteen halutaan määrittää. Valitaan pinnan yksikkönormaalivektori $\vec{n}$ osoittamaan pinnan sille puolelle, jossa



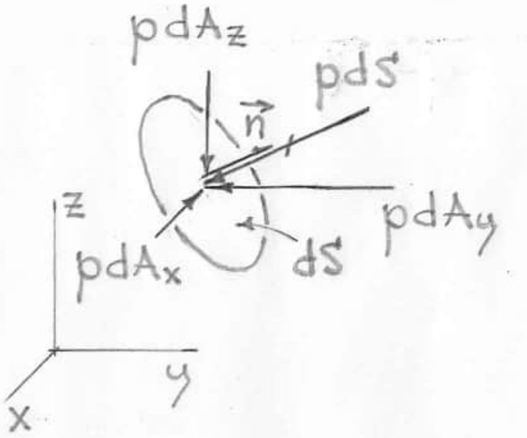
Kuva 2.2.4

olevasta nesteestä syntyvät painevoimat lasketaan. Resultantti $\vec{F}$ ja momentti $\vec{M}$ saadaan lausekkeista

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F} &= \int \vec{T}\,dS = -\int p\vec{n}\,dS,\\ \vec{M} &= \int \vec{r}\times\vec{T}\,dS = -\int \vec{r}\times p\vec{n}\,dS,\end{aligned}} \qquad (2.2.10)$$

jossa redusoimispisteeksi on otettu origo. Kaavoihin on vielä sijoitettava kaavan (2.2.5) mukainen paineen lauseke. Ko. pintaintegraalit voidaan aina laskea periaatteessa helposti käyttäen tarvittaessa numeerista integrointia. Jos kyseessä on tasopinta, käsittely yksinkertaistuu huomattavasti, koska $\vec{n}$ on silloin vakio ja se saadaan siirtää integraalien ulkopuolelle. Tällöin kaavat (2.2.10) voidaan kehittää sovellutuksia varten yksityiskohtaisempaan muotoon (ks. esimerkiksi Lähde (17)), johon ei kuitenkaan puututa tässä perusteellisesti; ks. kuitenkin esimerkki 2.2.1. Voimasysteemi (2.2.10) on esitettävissä (kuten kaikki voimasysteemit) voimaruuvina. Erityistapauksissa voimaruuvin momentti häviää ja voimasysteemi voidaan siis esittää pelkän keskeisakselilla vaikuttavan resultantin avulla. Näin on mm., kun pinta S on pallopinta tai taso. Edellisessä tapauksessa paineesta syntyvät voimat ovat keskeisvoimia ja keskeisakseli kulkee täten pallopinnan keskipisteen kautta. Jälkimmäisessä tapauksessa voimat ovat yhdensuuntaisia, joten keskeisakseli on niiden kanssa yhdensuuntainen ja kohtisuorassa ko. tasoa vastaan. Keskeisakselin ja tason leikkauspistettä nimitetään <u>painekeskiöksi</u> (engl. center of pressure).

Tarkastellaan vielä jatkoa silmälläpitäen tar-



Kuva 2.2.5

kemmin pinta-alkioon dS vaikuttavaa differentiaalista voimaa

$$d\vec{F} = -p\vec{n}\,dS, \quad (2.2.11)$$

jonka suunta on siis $\vec{n}$ pdS (kuva 2.2.5). Tämän voiman x-, y- ja z-akselin suuntaiset komponentit ovat

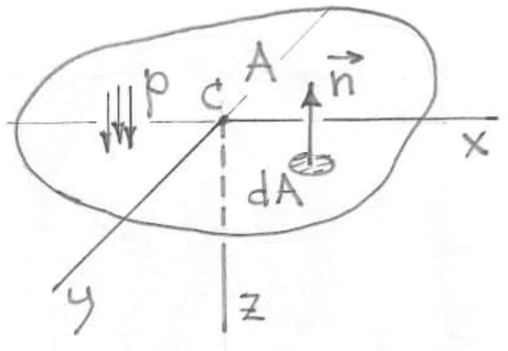
$$\left.\begin{aligned} dF_x &= d\vec{F}\cdot\vec{i} = -p\vec{n}\cdot\vec{i}\,dS = -p\cos(n,x)\,dS = -p\,dA_x, \\ dF_y &= d\vec{F}\cdot\vec{j} = -p\vec{n}\cdot\vec{j}\,dS = -p\cos(n,y)\,dS = -p\,dA_y, \\ dF_z &= d\vec{F}\cdot\vec{k} = -p\vec{n}\cdot\vec{k}\,dS = -p\cos(n,z)\,dS = -p\,dA_z, \end{aligned}\right\} \quad (2.2.12)$$

missä dA_x on ilmeisestikin pinta-alkion dS yz-tasolla olevan projektion pinta-ala merkillä varustettuna (merkki määräytyy pistetulon $\vec{n}\cdot\vec{i}$ merkistä) jne. Nämä komponentit näkyvät kuvassa 2.2.5. (Huomautettakoon, että yleisen pinnan yhteydessä tullaan yleensä käyttämään tunnusta S ja tasopinnan yhteydessä tunnusta A.) Näiden kaavojen ja kuvan 2.2.4 perusteella resultantin (2.2.10) komponentit voidaan laskea tasointegraaleina

$$F_x = -\int p\,dA_x, \quad F_y = -\int p\,dA_y, \quad F_z = -\int p\,dA_z, \quad (2.2.13)$$

ajattelemalla aina pinnalla S sijaitseva paineen arvo siirretyksi x-akselin suunnassa yz-tasoon jne. vaikuttavaksi.

Esimerkki 2.2.1. Tasopinta. Tarkastellaan kuvan (a) esittämää xy-tasossa olevaa tasopintaa, johon vaikuttaa negatiivisen z-akselin puolelta



(a)

x:n ja y:n suhteen lineaarisesti jakautunut paine

$$p = p_c + \alpha x + \beta y, \qquad \text{(a)}$$

jossa p_c sekä α ja β ovat annettuja vakioita; p_c on paineen arvo origossa C. Origo on valittu yhtymään pinnan pintakeskiöön, jolloin tunnetusti

$$\int x\,dA = 0\,, \quad \int y\,dA = 0. \qquad \text{(b)}$$

(Pintakeskiön sijasta puhutaan usein pinnan painopisteestä.) Lasketaan painejakautumasta (a) syntyvän voiman resultantti $\vec{F}$.

Ensimmäisen kaavan (2.2.10) perusteella saadaan ($dS \to dA$, $\vec{n} = -\vec{k}$)

$$\vec{F} = \int p\vec{k}\,dA = \int (p_c + \alpha x + \beta y)\,dA\,\vec{k}$$

$$= \Big(p_c \int dA + \alpha \cancel{\int x\,dA} + \beta \cancel{\int y\,dA} \Big)\vec{k} = p_c A\vec{k}. \qquad \text{(c)}$$

Täten <u>voimaresultantin suuruus on yhtä kuin paine pintakeskiön kohdalla kertaa pinnan pinta-ala</u>.

Lasketaan vielä jälkimmäisen kaavan (2.2.10) avulla voimasysteemin momentti origon suhteen:

$$\vec{M} = \int (x\vec{i} + y\vec{j}) \times p\vec{k}\,dA = -\int xp\,dA\,\vec{j} + \int yp\,dA\,\vec{i} \qquad \text{(d)}$$

eli

$$M_x = \int yp\,dA = \int (p_c y + \alpha xy + \beta y^2)\,dA$$

$$= p_c \cancel{\int y}\,dA + \alpha \int xy\,dA + \beta \int y^2\,dA$$

$$= \alpha I_{xy} + \beta I_{xx}, \qquad \text{(e)}$$

$$M_y = -\int x p \, dA = -\int (p_c x + \alpha x^2 + \beta x y)\, dA$$

$$= -p_c \cancel{\int x\, dA} - \alpha \int x^2 dA - \beta \int x y \, dA$$

$$= -\alpha I_{yy} - \beta I_{xy}, \qquad \text{(f)}$$

$$M_z = 0, \qquad \text{(g)}$$

jossa käytettyjen tunnusten merkitys on ilmeinen. Painekeskiön koordinaatit x_p ja y_p saadaan siis kaavoista

$$x_p = -\frac{M_y}{p_c A}, \quad y_p = \frac{M_x}{p_c A}. \qquad \text{(h)}$$

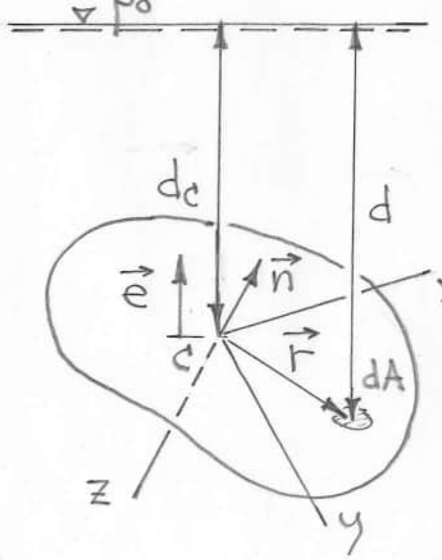
Kaavan (c) sisältöä voidaan laajentaa seuraavasti. Sijaitkoon kuvan (a) esittämä tasopinta missä asennossa hyvänsä nesteessä, jossa vallitsee hydrostaattinen painejakautuma (2.2.5). Ei ole vaikeaa osoittaa, että pinnalle syntyvä painejakautuma on edelleen kaavan (a) mukainen. Täten paineresultantin suuruus on samoin edelleen $p_c A$.

Todistetaan vielä edellä esitetty väite painejakautumasta ko. tasopinnalla kuvan (b) merkintöjä apuna käyttäen. Yksikkövektori $\vec{e}$ osoittaa ylöspäin, joten

$$d = d_c - \vec{e} \cdot \vec{r}, \qquad \text{(i)}$$

jossa $-\vec{e} \cdot \vec{r}$ on $\vec{r}$-vektorin alaspäin mitattu skalaarikomponentti. Täten vielä

$$d = d_c - e_x x - e_y y, \qquad \text{(j)}$$



(b)

ja kaavan (2.2.5)

perusteella

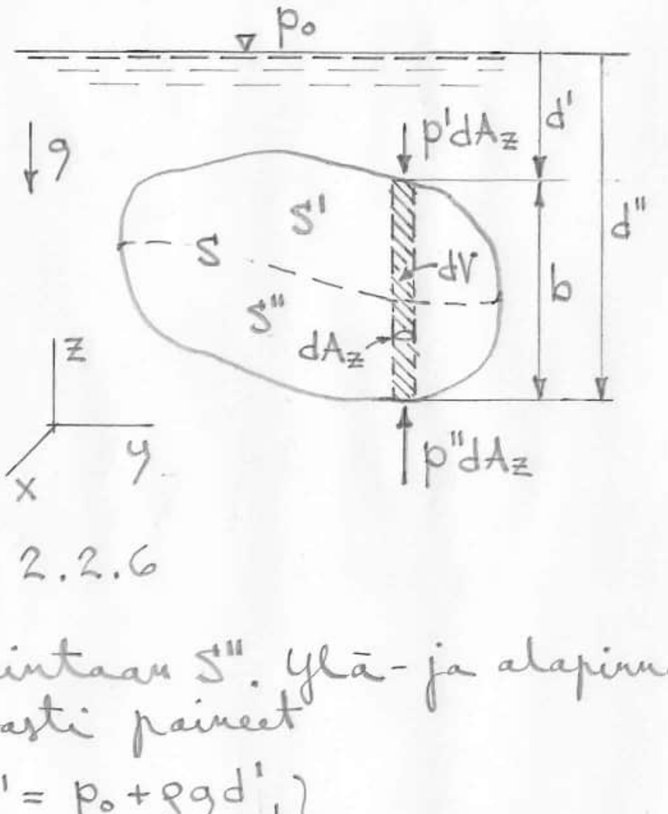
$$p = p_0 + \varrho g(d_c - e_x x - e_y y)$$
$$= p_0 + \varrho g d_c - \varrho g e_x x - \varrho g e_y y, \qquad (k)$$

ja siis

$$\left.\begin{aligned} p_c &= p_0 + \varrho g d_c, \\ \alpha &= -\varrho g e_x, \\ \beta &= -\varrho g e_y. \end{aligned}\right\} \qquad (l)$$

---

* Noste. Tarkastellaan vakiotiheysnesteessä lepotilassa olevan kiinteän kappaleen umpinaiseen pintaan S vaikuttavasta paineesta syntyvää voimasysteemiä (kuva 2.2.6). Kysymyksessä on siis kaavojen (2.2.10) soveltaminen. Jaetaan kappaleen pinta S ylhäältä katsoen yläpintaan S' ja alapintaan S''. Ylä- ja alapinnalla vaikuttavat vastaavasti paineet



Kuva 2.2.6

$$\left.\begin{aligned} p' &= p_0 + \varrho g d', \\ p'' &= p_0 + \varrho g d''. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.14)$$

Differentiaalisen poikkileikkausalan dA_z omaavan pystysuoran pylvään ylä- ja alapintoihin pystysuunnassa vaikuttavat voimat ovat (ks. kaavat (2.2.12); tässä dA_z valitaan aina positiiviseksi) $-p'dA_z$ ja $p''dA_z$ ja niiden resultantti

$$dF_z = (p'' - p')dA_z = (p_0 + \varrho g d'' - p_0 - \varrho g d')dA_z$$
$$= \varrho g(d'' - d')dA_z = \varrho g b\, dA_z = \varrho g\, dV, \qquad (2.2.15)$$

jossa b on ko. pylvään korkeus ja dV sen tilavuus. Integroimalla yli kaikkien differentiaalisten pylväiden saadaan pystysuunnassa vaikuttava resultantiksi

$$F_z = \int \varrho g \, dV = g \int \varrho \, dV \tag{2.2.16}$$

eli

$$\boxed{F_B \equiv F_z = m_f g.} \tag{2.2.17}$$

Voimaa F_B nimitetään kappaleeseen vaikuttavaksi nosteeksi (engl. buoyancy). Suure m_f on kappaleen syrjäyttämän nestemäärän massa ja $m_f g$ siis sen paino. Tämä tulos on ns. Arkhimedeen laki.

Jaetaan kappale sitten esimerkiksi x-akselin suuntaisiin differentiaalisiin pylväisiin. Kunkin pylvään päissä vallitsee sama paine, koska päiden korkeusasema on sama. Täten päissä vaikuttavat differentiaaliset x-akselin suuntaiset voimat $-p\,dA_x$ ja $p\,dA_x$ kumoavat aina toisensa ja kappaleeseen ei siis vaikuta paineesta syntyvää x-akselin suuntaista voimaresultanttia. Sama päättely pätee myös y-akselin suunnassa, joten paineesta syntyvä kokonaisresultantti on siis nimenomaan kaavan (2.2.17) ilmaisema pystysuora voima.

Lasketaan sitten kappaleeseen vaikuttavan voimasysteemin momenttikomponentit x-, y- ja z-akselin suhteen. Saadaan (ks. kuva 2.2.6)

$$\left.\begin{aligned}
M_x &= \sum y \, dF_z = \int y \varrho g \, dV = g \int \varrho y \, dV = y_B F_B, \\
M_y &= -\sum x \, dF_z = -\int x \varrho g \, dV = -g \int \varrho x \, dV = -x_B F_B, \\
M_z &= 0,
\end{aligned}\right\} \tag{2.2.18}$$

jossa x_B ja y_B on määritelty kaavoilla

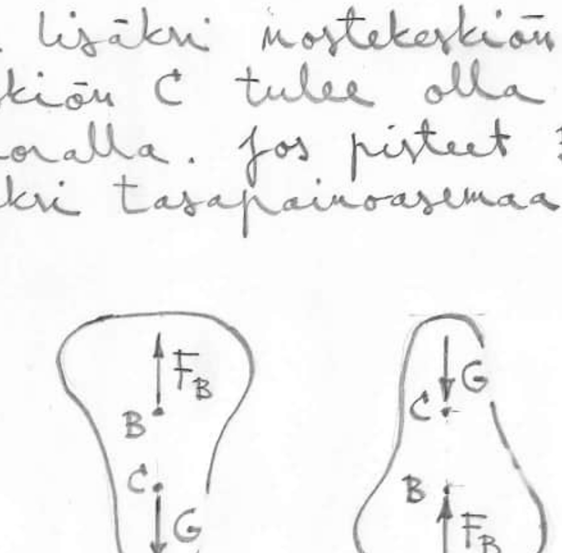
$$m_f x_B = \int \varrho x \, dV, \quad m_f y_B = \int \varrho y \, dV. \tag{2.2.19}$$

Nämä kaavat ovat kappaleen syrjäyttämän nestemäärän <u>massakeskiön</u> B (painopisteen) x- ja y-koordinaattien määritelmät (vrt. kaavat D (6.1.6)...(6.1.8)), joten nosteen vaikutussuora (keskeisakseli ilman momenttia) kulkee aina tämän massakeskiön kautta. Pistettä B nimitetään tässä yhteydessä myös <u>nostekeskiöksi</u> (engl. center of buoyancy). Todettakoon, että ρ on pidetty edellä integraalimerkin sisäpuolella, vaikka se oli otaksuttu vakioksi. Näin on tehty, koska kaavat (2.2.16)...(2.2.18) pätevät tässä muodossa myös tapauksissa, joissa ρ ei ole vakio.

Jotta kappale olisi tasapainossa painovoiman G ja nostevoiman F_B alaisena, täytyy olla

$$F_B = G \tag{2.2.20}$$

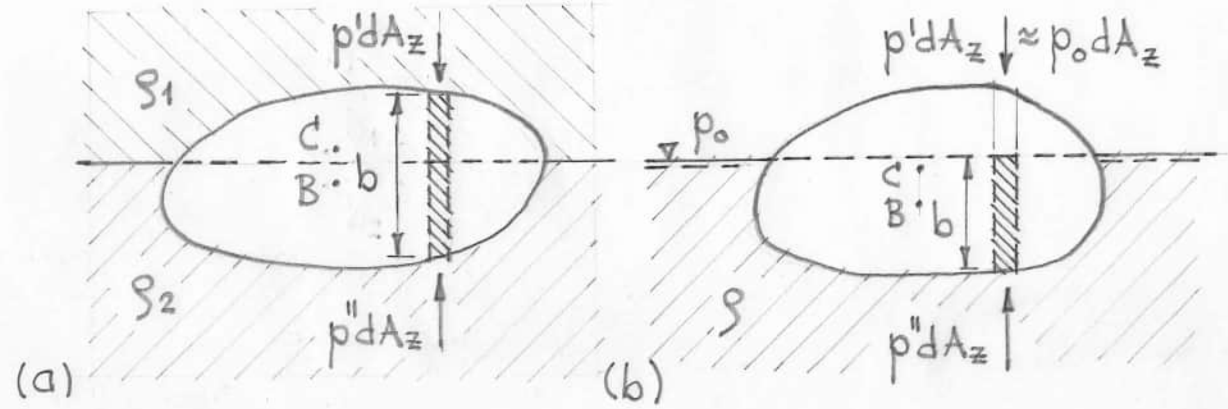
ja lisäksi nostekeskiön B ja kappaleen massakeskiön C tulee olla samalla pystysuoralla suoralla. Jos pisteet B ja C ovat erillisiä, kaksi tasapainoasemaa ovat mahdollisia (kuva 2.2.7). Jos C on B:n alapuolella, kyseessä on <u>stabiili</u> tasapaino kuten voidaan todeta ajattelemalla tilaa hieman häirityksi, jolloin vallitseva voimasysteemi pyrkii palauttamaan kappaleen alkuperäiseen asemaansa. Kun C on B:n yläpuolella, tasapainoasema on vastaavasti <u>labiili</u>.



Kuva 2.2.7 (a) Stabiili ja (b) Labiili tasapaino.

Jos pisteet B ja C yhtyvät, kappale on tasapainossa missä hyvänsä asennossa; tasapaino on <u>indifferentti</u>. Pisteet B ja C yhtyvät mm. silloin, kun kappaleen tiheys on vakio.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta, jossa kappale sijaitsee kahden eri tiheyden omaavan sekoittumattoman nesteen rajapinnassa (kuva 2.2.8). On



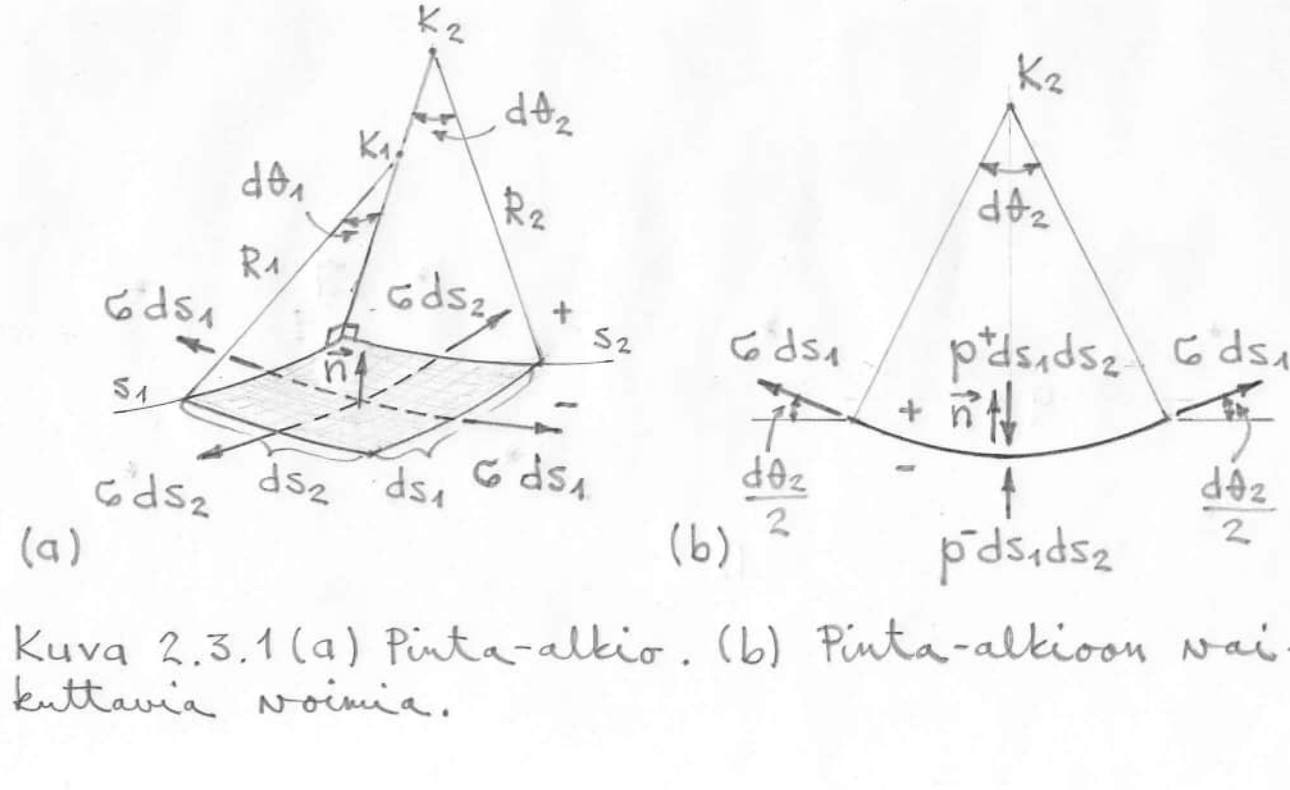
Kuva 2.2.8

helppo todeta, että paine-ero $p''-p'$ on yleisesti kuvassa (a) esitetyn b-korkuisen nestepatsaan paino jaettuna sen pinta-alalla dA_z ja että kaavan (2.2.15) differentiaalinen voima dF_z on nimenomaan yhtä suuri kuin ko. nestepatsaan paino. Koko <u>nostevoima on täten yleisesti yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän nestemäärän paino</u>. Tällöin siis täytyy ajatella kappaleen alueelle se nesteen tiheysjakautuma, joka vallitsisi nesteessä ilman ko. kappaletta. Nostevoima kulkee syrjäytetyn nestekappaleen massakeskiön kautta. Tasapainoehdot ovat samat kuin edellä paitsi stabiiliustarkastelussa.

Nyt nimittäin kappaleen syrjäyttämän (kuvitellun) nestekappaleen massakeskiön B asema itse kappaleen suhteen riippuu kappaleen asemasta nesteiden rajapinnan suhteen eikä ole enää vakio kuten oli laita täysin upoksissa vakiotiheysnesteessä sijaitsevan kappaleen tapauksessa. Tasapainoaseman laatu tulee tutkia tarkemmin antamalla kappaleelle pieniä poikkeamia tasapainoaseman suhteen; ks. esimerkiksi lähde (17). Taas tavallisin sovellutus edellisestä on ilman ja veden rajapinnassa kelluva kappale (kuva (b)). Koska ilman tiheys on veden tiheyteen verrattuna hyvin pieni (yhden ilmakehän paineessa ja 20 °C lämpötilassa $\rho_{ilma}/\rho_{vesi} \approx 0{,}0012$), voidaan kappaleen ilmassa olevaan osaan kohdistuva noste jättää normaalisti huomiotta — tämä on sama kuin otaksua kappaleen ilman kanssa kosketuksissa olevalle pinnalle paineen arvoksi vapaalla pinnalla vallitseva arvo (kuva (a)) — jolloin nostevoima määräytyy pelkästään syrjäytetyn veden johdosta.

* 2.3 Pintajännitys

Kuva 2.3.1 (a) esittää liioiteltuna kahden nes-



Kuva 2.3.1 (a) Pinta-alkio. (b) Pinta-alkioon vaikuttavia voimia.

teen rajapinnassa olevaa differentiaalista suorakulmaista pinta-alkiota, jonka sivujen pituudet ovat ds_1 ja ds_2. Valitaan pinnan toinen puoli positiiviseksi (ja pannaan yksikkönormaalivektori $\vec{n}$ osoittamaan tälle puolelle) ja toinen negatiiviseksi ja merkitään paineen arvoja pinnan eri puolilla vastaavasti tunnuksilla p^+ ja p^-. Alkion sivujen kaarevuussäteet olkoot R_1 ja R_2 merkillä varustettuina (plus tai miinus) riippuen siitä, ovatko vastaavat kaarevuuskeskipisteet $\vec{n}$:n positiivisella vai negatiivisella suunnalla. Alkion sivuihin vaikuttavat voimat σds_1 ja σds_2 ja alkion pintoihin voimat $p^+ds_1ds_2$ ja $p^-ds_1ds_2$. Muodostetaan näiden voimien tasapainoyhtälö normaalin $\vec{n}$ suunnalle käyttäen kuvaa (b) apuna:

$$2\sigma ds_1 \sin\frac{d\theta_2}{2} + 2\sigma ds_2 \sin\frac{d\theta_1}{2} - p^+ds_1ds_2 + p^-ds_1ds_2 = 0. \quad (2.3.1)$$

Kun sinit korvataan argumenteillaan ja otetaan huomioon yhteydet

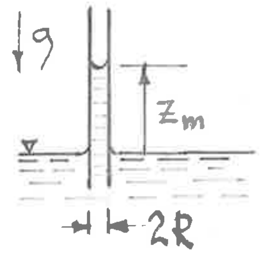
$$d\theta_1 = \frac{ds_1}{R_1}, \quad d\theta_2 = \frac{ds_2}{R_2}, \quad (2.3.2)$$

saadaan jakamalla vielä suureella ds_1ds_2 tulos

$$\boxed{\Delta p \equiv p^+ - p^- = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).} \quad (2.3.3)$$

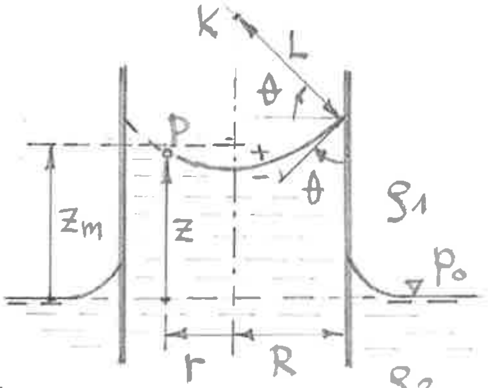
Täten paine ei ole jatkuva, vaan saa kaavan osoittaman hypäyksen Δp siirryttäessä pinnan negatiiviselta puolelta sen positiiviselle puolelle. Sama tulos koskee dynaamisessa tapauksessa pinnassa vaikuttavia normaalijännityksiä. Paine on suurempi pinnan koveralla puolella. Geometrian keinoin voidaan osoittaa, että suure $1/R_1 + 1/R_2$ on tietyssä pinnan pisteessä ns. invariantti suure eli sen arvo ei muutu olivatpa toisiaan vastaan kohtisuorassa olevat suunnat s_1 ja s_2 valitut miten hyvänsä. Tämä tieto on sopusoinnussa kaavan (2.3.3) fysikaalisen merkityksen kanssa.

Esimerkki 2.3.1. Kapillaarinen nousukorkeus. Johdetaan ohuessa poikkileikkaukseltaan ympyränmuotoisessa (säde R) putkessa kuvan (a) esittämässä tapauksessa syntyvä nesteen nousukorkeuden z_m lauseke.

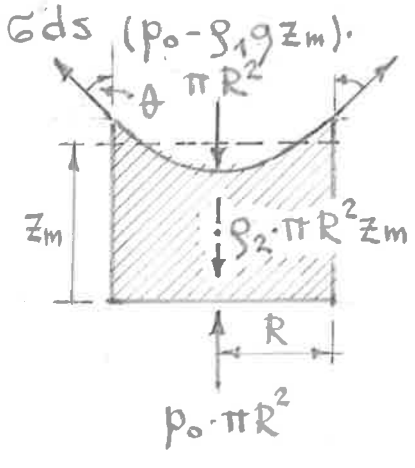


(a)

Käytetään kuvan (b) esittämiä merkintöjä. Olkoon ϱ_1 ilman tiheys, ϱ_2 tutkittavan varsinaisen nesteen tiheys ja ϑ reunakulma, jonka ko. neste muodostaa ko. putken aineen kanssa. Kun $\vartheta < 90°$, sanotaan, että neste kastelee pintaa ja tällöin syntyy kapillaarista nousua. Näin on esimerkiksi tapaus veden ja lasin yhteydessä. Kun $\vartheta > 90°$, neste ei kastele pintaa ja syntyy kapillaarinen laskeutuminen. Tästä on esimerkkinä elohopea ja lasi.



(b)



(c)

Otaksumalla ilma ja ko. neste vakiotiheysnesteiksi saadaan paineen arvoiksi pisteessä P rajapinnan ylä- ja alapuolella kaavaa (2.2.5) soveltamalla

$$p^+ = p_0 - \varrho_1 g z, \quad p^- = p_0 - \varrho_2 g z. \qquad \text{(a)}$$

Sijoittamalla nämä kaavaan (2.3.3) saadaan yhtälö

$$g(\rho_2-\rho_1)z = \sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad (b)$$

Tuntematon nousukorkeus z on pyörähdyssymmetrian takia vain r:n funktio: $z=z(r)$. Lausumalla vielä kaarevuudet $1/R_1$ ja $1/R_2$ z:n avulla yhtälöstä (b) tulee monimutkainen differentiaaliyhtälö, jota ei voida ratkaista suljetussa muodossa (15).

Ratkaisun saamiseksi ohuiden putkien yhteydessä oletetaan tavallisesti, että kyseessä on pallopinta, jonka säde on kuvassa (b) esitetty mitta $L = R/\cos\theta$. Tällöin siis $R_1 = R_2 = L = R/\cos\theta$. Lisäksi kaavaan (b) sijoitetaan z:n tilalle tietty keskimääräinen arvo z_m, jolloin saadaan

$$z_m = \frac{2\sigma\cos\theta}{g(\rho_2-\rho_1)R}. \qquad (c)$$

Sama tulos seuraa suoraviivaisemmin kuvan (c) esittämään nestekappaleeseen pystysuunnassa vaikuttavien voimien tasapainosta:

$$\sigma\cdot 2\pi R\cos\theta - \rho_2\cdot\pi R^2 z_m + p_0\cdot\pi R^2 + -(p_0-\rho_1 g z_m)\cdot\pi R^2 = 0. \qquad (d)$$

Huomataan, että suure z_m on nimenomaan kaarevan nestepinnan keskikorkeus.

Esimerkiksi vedelle lasiputkessa otetaan tavallisesti $\theta = 0$ ja $\rho_1 \approx 0$, jolloin veden nousukorkeudeksi saadaan

$$z_m = \frac{2\sigma}{g\rho_2 R}. \qquad (e)$$

Kun otetaan esimerkiksi $2R = 1$ mm ja taulukon 1.3.1 arvot lämpötilassa 20°C saadaan nousukorkeus 30 mm.

3 KINEMATIIKKA

3.1 Yleistä

Kuten on jo edellä todettu, kiinteän aineen mekaniikassa käytetään yleensä ns. Lagrangen esitystapaa ja nestemekaniikassa ns. Eulerin esitystapaa. Nämä esitykset poikkeavat riippumattomien muuttujien valinnan suhteen oleellisesti toisistaan ja tähän liittyvien seikkojen omaksuminen on jatkon kannalta ratkaisevaa.

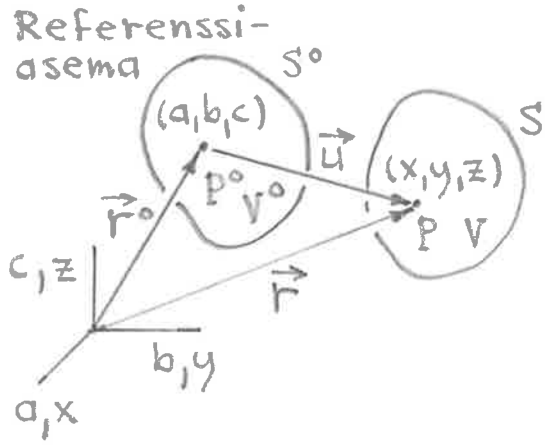
Lagrangen esitystä käsitellään ensin hinkan vertailukohdan saamiseksi ja tämän jälkeen siirrytään nestemekaniikassa tärkeämmän Eulerin esityksen perusteellisempaan tarkasteluun. Kohdassa 3.3.6 esitetään vielä tärkeimmät tulokset yhteenvetona taulukkomuodossa.

Kontinuumimekaniikan kinematiikka poikkeaa partikkelimekaniikan kinematiikasta siinä, että erillisten massapisteiden liikkeen sijasta tarkastellaan äärettömän tiheässä sijaitsevien pisteiden liikkeitä. Tämä merkitsee riippumattomien muuttujien määrän kasvua arvosta yksi (aika) arvoon neljä (kolme paikkakoordinaattia plus aika).

Huomautettakoon vielä, että kun jatkossa puhutaan kontinuumin partikkelista, sillä tarkoitetaan todellisuudessa tiettyä ns. fysikaalista pistettä eli pienen pientä kontinuumialkiota, joka sisältää vielä suuren määrän toisenlaisia "partikkeleita", ts. molekyylejä; vrt. kohta D 4.2 ja D. s. 290.

3.2 Lagrangen esitystapa

Yleistä. Lagrangen esitystavassa eli ns. aineellisessa esitystavassa (engl. Lagrangian description, material description) riippumattomina muuttujina ovat ns. ainekoordinaatit (engl. material coordinate) eli Lagrangen koordinaatit a, b, c ja aika t. Suureet a, b ja c ovat kappaleen partikkelin koordinaatit kappaleelle valitussa alku- eli referenssiasemassa (engl. reference configuration) (kuva 3.2.1).



Kuva 3.2.1

Viittaus referenssitilan suureisiin tapahtuu tarvittaessa yläviitteellä 0. Useimmiten referenssiasemaksi otetaan kappaleen asema hetkellä $t = 0$.

Yhteys

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}^{\,0}, t)} \qquad (3.2.1)$$

tai

$$\left.\begin{aligned} x &= x(a,b,c,t), \\ y &= y(a,b,c,t), \\ z &= z(a,b,c,t) \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.2)$$

antaa kappaleen aseman mielivaltaisella ajan hetkellä. Esitys (3.2.1) vastaa partikkelimekaniikan esitystä $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$. Koska kuitenkin kontinuumissa on ääretön määrä partikkeleita, niitä ei voida identifioida käytännössä varustamalla ne numeroilla. Sen sijaan partikkelin identifioivat tietyt arvot a, b ja c; D-monisteessa käytettiin tunnuksia x^0, y^0 ja z^0. Kaavat siis sanovat, että partikkelilla, jolla oli referenssiasemassa koordinaatit a, b ja c, on ajan hetkellä t koordinaatit x, y ja z.

Ainederivaatta, siirtymä, nopeus, kiihtyvyys ja muodonmuutos. Tietyn partikkelin rata saadaan yhteydestä (3.2.1) tai (3.2.2) pitämällä $\vec{r}^{\,o}$ eli a, b ja c kiinteinä ja antamalla vain ajan t muuttua. Täten <u>nopeus</u> (m/s)

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}(\vec{r}^{\,o},t)}{\partial t}.} \tag{3.2.3}$$

Partikkelimekaniikan tuttua merkintää $d(\ )/dt \equiv (\dot{\ })$ nimitetään ns. <u>aineelliseksi aikaderivaataksi</u> tai vielä lyhyemmin <u>ainederivaataksi</u> (engl. material time derivative, material derivative, total derivative, substantial derivative, derivative following the particle ym.) Kuten esitetyt nimitykset antavat ymmärtää, tämä derivaatta mittaa aina tietyn aineakion "kokemana" jonkin tähän alkioon liittyvän suureen muutosnopeuden. Lagrangen esityksessä pätee siis mielivaltaiselle funktiolle $f(\vec{r}^{\,o},t)$ tulos

$$\boxed{\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}} \tag{3.2.4}$$

eli ainederivaatta saadaan f:n osittaisderivaattana ajan suhteen. Kaava pätee samana myös vektoriarvoiselle funktiolle. Operaattorimuodossa saadaan tulos

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{3.2.5}$$

Tavanomainen yhden muuttujan funktion derivoimistunnus d/dt sovellettuna useamman muuttujan funktioon saattaa aiheuttaa sekaannusta. Tämän vuoksi kirjallisuudessa — ja nimenomaan nestemekaniikassa — käytetään usein myös tunnusta D/Dt tai D/dt. Tässä monisteessa pitäydytään kuitenkin jatkossa edelleen merkinnässä d/dt.

Todettakoon vielä, että kaavojen (3.2.2) tunnukset a, b, c ja x, y, z voisivat tarkoittaa mitä hyvänsä koordinaatteja, jotka määrittäisivät kappaleen partikkelien asemat. Jatkossa niillä tarkoitetaan kuitenkin karteesisia suorakulmaisia koordinaatteja siten, että vastaavasti a- ja x-akseli jne. yhtyvät kuten on jo esitetty kuvassa 3.2.1. Kun vastaavat yksikkökantavektorit ovat $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$, saadaan siis lausekkeet

$$\vec{r}^{\circ} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \qquad (3.2.6)$$

ja

$$\vec{r} = x(a,b,c,t)\vec{i} + y(a,b,c,t)\vec{j} + z(a,b,c,t)\vec{k}. \qquad (3.2.7)$$

Koska kantavektorit ovat ajan suhteen muuttumattomia, nopeudelle saadaan myös esitys

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \frac{\partial x}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial t}\vec{k}, \\ &= v_a\vec{i} + v_b\vec{j} + v_c\vec{k}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.8)$$

jossa siis v_a, v_b ja v_c ovat nopeuden skalaarikomponentit a-(x-)akselille jne.

<u>Kiihtyvyys</u> $\vec{a}$ ($[\vec{a}] = m/s^2$) saadaan taas nopeuden ainederivaattana eli

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}^{\circ},t)}{\partial t} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \vec{r}(\vec{r}^{\circ},t)}{\partial t^2}} \qquad (3.2.9)$$

tai vielä

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\vec{k}, \\ &= a_a\vec{i} + a_b\vec{j} + a_c\vec{k}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.10)$$

Tavallisesti esitykset (3.2.1) tai (3.2.2) kirjoitetaan muotoihin

$$\vec{r} = \vec{r}^{\,\circ} + \vec{u}(\vec{r}^{\,\circ}, t) \qquad (3.2.11)$$

tai

$$\left.\begin{aligned} x &= a + u_a(a,b,c,t), \\ y &= b + u_b(a,b,c,t), \\ z &= c + u_c(a,b,c,t), \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.12)$$

joissa vektori

$$\vec{u} = u_a\vec{i} + u_b\vec{j} + u_c\vec{k} \qquad (3.2.13)$$

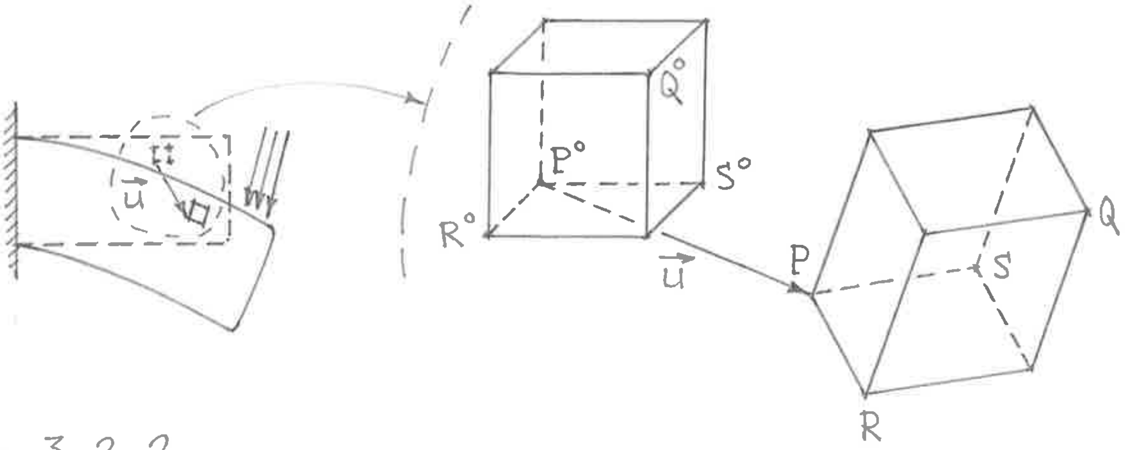
on ns. siirtymä ($[\vec{u}] = \mathrm{m}$). Koska $\vec{r}^{\,\circ}$:n aikaderivaatta häviää — $\vec{r}^{\,\circ}$ ei riipu ajasta — nopeudelle ja kiihtyvyydelle saadaan siis myös esitykset

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} = \dot{\vec{u}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= \frac{\partial u_a}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial u_b}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial u_c}{\partial t}\vec{k}, \\ &= v_a\vec{i} + v_b\vec{j} + v_c\vec{k}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.14)$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} = \ddot{\vec{u}} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}\vec{k}, \\ &= a_a\vec{i} + a_b\vec{j} + a_c\vec{k}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.15)$$

* Lagrangen esityksen kinematiikan käsittely lopetetaan tähän. Se tulee perusteellisemmin esille rakenteiden mekaniikan ja lujuusopin opintojaksoissa. Tällöin myös käytetään eri tunnuksia kuin tässä. Usein mm. $a \hat{=} x$, $b \hat{=} y$, $c \hat{=} z$, $u_a \hat{=} u$, $u_b \hat{=} v$, $u_c \hat{=} w$. Todettakoon vielä, että Lagrangen esityksessä kinematiikan käsittely tulee yksinkertaiseksi, mutta sen sijaan kineettisten yhteyksien käsittely on monimutkaisempaa. Eulerin esityksessä tilanne on päinvastainen. Tähän liittyen tarkastellaan kuvaa 3.2.2. Referenssitilassa oleva suorakulmainen ainealkio muuttuu kappaleen liikkeen johdosta suuntaissärmiön muotoiseksi alkioksi. Kappaleen liike- tai tasapainoyhtälöitä muodostettaessa täy-

tyy kappaleen uusi vielä tuntematon geometria

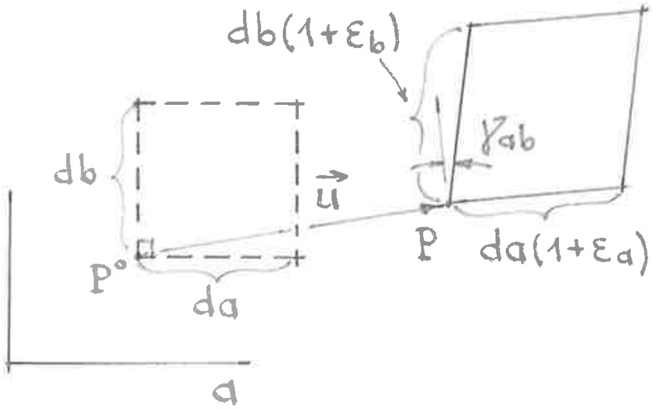


Kuva 3.2.2

ottaa yleisessä tapauksessa huomioon, joka johtaa ymmärrettävästi hankalaan käsittelyyn. Onneksi valtaosa lujuusopin tehtävistä on sellaisia, joissa siirtymät ovat niin pieniä, että liike- tai tasapainoyhtälöt voidaan muodostaa alkuperäisen geometrian suhteen (poikkeus: esimerkiksi nurjahdustehtävät). Pienten siirtymien yhteydessä ero Lagrangen ja Eulerin esitysten välillä katoaa ja täten useat myöhemmin esiintyvät kaavat näkyvät samanlaisina pienten siirtymien teorian mukaisessa lujuusopissa. Esitetään vielä jatkoa varten tavanomaiset lujuusopin muodonmuutoskomponentit eli ns. infinitesimaaliset "insinööri"-muodonmuutoskomponentit (engl. Lagrangian infinitesimal strain component) (–)

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_a &= \frac{\partial u_a}{\partial a}, & \gamma_{bc} = \gamma_{cb} &= \frac{\partial u_b}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial b}, \\
\varepsilon_b &= \frac{\partial u_b}{\partial b}, & \gamma_{ca} = \gamma_{ac} &= \frac{\partial u_c}{\partial a} + \frac{\partial u_a}{\partial c}, \\
\varepsilon_c &= \frac{\partial u_c}{\partial c}, & \gamma_{ab} = \gamma_{ba} &= \frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.2.16)$$

Termit ε_a, ε_b ja ε_c esittävät alkuaan a-, b- ja c-akselin suuntaisten viiva-alkioiden suhteellisia pituudenmuutoksia eli ns. suhteellisia venymiä tai venymiä (engl. normal strain). Termit γ_{bc} jne. esittävät alkuaan kohtisuorassa toisiaan vastaan olleiden b- ja c- akselien jne. suuntaisten viiva-alkioiden välisiä kulmanmuutoksia; ns. liukukulmia tai liukumia (engl. shearing strain). Kuvassa 3.2.3 havainnollistetaan termejä ε_a, ε_b ja γ_{ab} liioitellussa muodossa.



Kuva 3.2.3

<u>Esimerkki 3.2.1.</u> Olkoon kontinuumin liike annettu yhtälöiden

$$x = a + \alpha b, \quad y = b + \beta a, \quad z = c \tag{a}$$

kautta, joissa $\alpha(t)$ ja $\beta(t)$ ovat annettuja ajan funktioita ($\alpha(0)=0$, $\beta(0)=0$), joista lisää myöhemmin. Määritetään syntyvä nopeus-, kiihtyvyys- ja muodonmuutosjakautuma.

Kysymyksessä on ab-tason suuntainen (partikkelien c-koordinaatit pysyvät vakioina) hyvin yksinkertainen tasoliike. Siirtymäkomponentit ovat (vrt. kaavat (3.2.12))

$$u_a = \alpha b, \quad u_b = \beta a, \quad u_c = 0 \tag{b}$$

ja kaavoja (3.2.14) ja (3.2.15) soveltamalla saadaan

$$v_a = \frac{\partial u_a}{\partial t} = \dot{\alpha} b, \quad v_b = \frac{\partial u_b}{\partial t} = \dot{\beta} a, \quad v_c = 0, \tag{c}$$

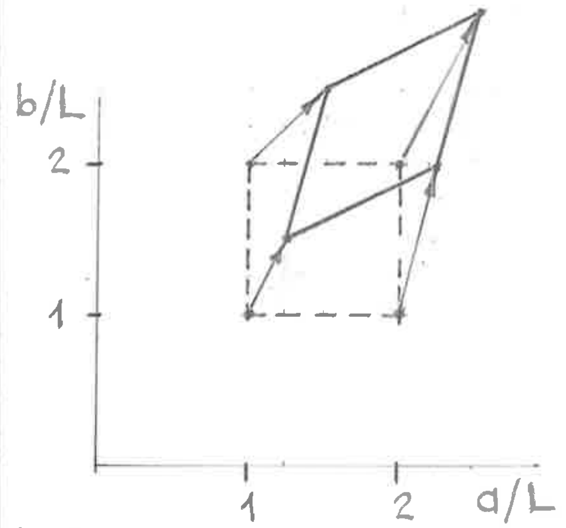
sekä

$$a_a = \frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2} = \ddot{\alpha} b, \quad a_b = \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} = \ddot{\beta} a, \quad a_c = 0. \tag{d}$$

Ainoa nollasta eroava muodonmuutoskomponentti on leikkausmuodonmuutos

$$\gamma_{ab} = \frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a} = \alpha + \beta . \qquad \text{(e)}$$

Otetaan yksinkertaisuuden vuoksi tapaus $\beta = 2\alpha$, jolloin kaavoista (c) nähdään kunkin partikkelin nopeusvektorin suunnan pysyvän vakiona α:sta riippumatta ($V_b/V_a = 2a/b$), joten partikkelien radat ovat suoria. Kuvassa (a) on esitetty kaavojen (a) avulla laskettu alkutilassa neliön muotoisen alueen muuttuminen suunnikkaaksi hetkellä, jolloin funktiolla α on arvo 1/4. Suure L on valittu mielivaltainen referenssipituus. Funktion α täsmällistä muotoa ei siis ole tässä tarpeen valita.



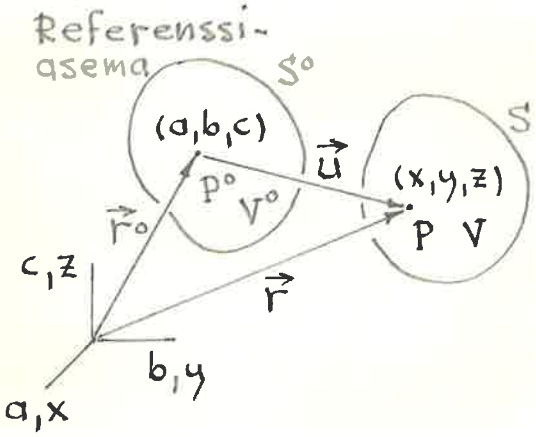
(a)

Kuvasta näkyy selvästi infinitesimaalisten muodonmuutoskomponenttien soveltumattomuus näin suurten siirtymien yhteydessä. a- ja b-akselien suuntaisten janojen suhteellisiksi venymiksi saadaan kuvan avulla arvot 11,8% ja 3,1%, kun sen sijaan kaavat (3.2.15) ilmoittavat niiden häviävän. Leikkausmuodonmuutoksen arvoiksi saadaan vastaavasti luvut 0,709 ja 0,75. Kun α ja siis sen mukana siirtymät pienenevät, infinitesimaalisten muodonmuutoskomponenttien tarkkuus kasvaa. Esimerkiksi α:n arvolla $1/40 = 0{,}025$ kuvasta mitatut suhteelliset venymät ovat enää 1,3‰ ja 0,3‰ ja leikkausmuodonmuutokselle saadaan vastaavasti jo verrattain läheiset arvot 0,07495 ja 0,075.

3.3 Eulerin esitystapa

3.3.1 Yleistä

Eulerin esitystavassa eli ns. spatiaalisessa esitystavassa (engl. Eulerian description, spatial description) riippumattomina muuttujina ovat ns. spatiaalikoordinaatit (engl. spatial coordinate) eli Eulerin koordinaatit x, y, z ja aika t. Suureet x, y, z ovat avaruuden pisteessä P hetkellä t sijaitsevan partikkelin koordinaatit (kuva 3.3.1).



Kuva 3.3.1

Ajatellaan yhteydet (3.2.1) tai (3.2.2) käänteisiksi, jolloin saadaan esitykset

$$\vec{r}^{\,\circ} = \vec{r}^{\,\circ}(\vec{r}, t) \qquad (3.3.1)$$

tai

$$\left.\begin{aligned} a &= a(x, y, z, t), \\ b &= b(x, y, z, t), \\ c &= c(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.2)$$

Nämä yhteydet ilmaisevat siis kappaleen liikkeen muodossa: Partikkelilla, jonka koordinaatit ovat x, y ja z hetkellä t, on ollut referenssiasemassa koordinaatit a, b, c.

Eulerin esitystapa poikkeaa täysin partikkelimekaniikan ajattelusta, jossa huomio kiinnitettiin kunkin partikkelin rataan. Lagrangen esitystä voidaan sen sijaan pitää partikkelimekaniikan esityksen suorana yleistyksenä kontinuumiin ja tältä pohjalta Lagrangen esitys onkin paljon helpommin omaksuttavissa. Matemaattisessa mielessä ero esitysten välillä näkyy myös siinä, että Lagrangen esityksessä tehtävään määrittelyalue on koko ajan referenssiaseman alue V°, kun taas Eulerin esityksessä määrittelyalueena on tietty kiinteä (tavallisesti) avaruuden osa, ns. kontrollialue, jonka läpi kontinuumi virtaa. Eulerin esityksen yhteydessä käytetään usein jonkin suureen jakautumasta alueessa nimitystä kenttä (engl. field): esimerkiksi nopeuskenttä. Samaa nimitystapaa käytetään joskus myös Lagrangenkin esityksessä.

3.3.2 Nopeus

Tavallisesti Eulerin esityksen lähtökohtana on kuitenkin yhteyksien (3.3.1) tai (3.3.2) sijasta nopeuden $\vec{v}$ eli ns. nopeuskentän esitys

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)} \tag{3.3.3}$$

tai

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, t), \\ v_y &= v_y(x, y, z, t), \\ v_z &= v_z(x, y, z, t), \end{aligned}\right\} \tag{3.3.4}$$

jolloin siis

$$\boxed{\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}\,.} \tag{3.3.5}$$

Nopeuskenttä saadaan periaatteessa selville mittaamalla tietyllä hetkellä kussakin avaruuden pisteessä siinä sillä hetkellä sijaitsevan kontinuumin partikkelin nopeus.

Lähteessä (18) on annettu seuraava kaavojen (3.3.3) ja (3.2.3) eroa kuvaava vertaus. Tarkastellaan ajoneuvojen virtaa yksisuuntaisella kadulla, jolla on ohituskielto. Eulerin esitys vastaa havaintoja, joita liikenne–

poliisi tekee raportoidessaan ohikulkevien ajoneuvojen nopeuksia tietyillä kohdin. Lagrangen esitys taas vastaa havaintoja, joita ajajat tekevät raportoidessaan etenemistään kadulla.

Nopeuskenttään liittyen puhutaan virta-, rata- ja juovaviivoista. Virtaviiva (engl. stream line) on viiva, jonka kuhunkin pisteeseen kuuluva nopeusvektori sivuaa tätä viivaa. Tämä on vektorianalyysissä yleiseen vektorikenttään liittyvän ns. kenttäviivakäsitteen sovellutus nopeuskenttään nähden (14). Rataviiva (engl. path line) eli ratakäyrä on tietyn nesteparttikkelin kulkema rata. Kuva 3.3.2 pyrkii selittämään virta-

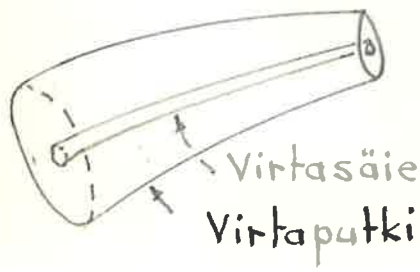
Kuva 3.3.2

ja rataviivan välistä eroa. Juovaviiva (engl. streak line) on viiva, jonka muodostavat tietyllä hetkellä tietyn kiinteän pisteen kautta aikaisemmin kulkeneet partikkelit. Juovaviiva voidaan ajatella aikaansaaduksi päästämällä nesteeseen ko. pisteen kautta jatkuvasti väriainetta. Virtaviivoja voidaan havainnollistaa ajattelemalla nesteeseen sijoitetuksi sinne tänne "väritettyjä" partikkeleita. Tietyllä hetkellä otetussa valokuvassa kukin väritetty partikkeli näkyy lyhyenä viivana, jonka (todellinen, ei projisioitu) pituus on verrannollinen valotusaikaan ja partikkelin vauhtiin ja jonka suunta ilmaisee partikkelin nopeusvektorin suunnan. Näin syntyvän kuvan avulla voidaan sitten hahmotella eri virtaviivojen kulku (kuva 3.3.3).

Ottamalla taas samaan kuvaan useita perättäisiä valotuksia saadaan hahmoteltua eri rataviivoja.

Kuva 3.3.3

Tietyn umpinaisen käyrän jokaisen pisteen kautta kulkevat virtaviivat määrittävät pinnan (kuva 3.3.4), jota nimitetään virtaputkeksi (engl. stream tube). Virtaputkea, jonka poikkileikkauspinta-ala on infinitesimaalinen, nimitetään joskus virtasäikeeksi (engl. stream filament). Virtaputken määritelmän perusteella putken pinnan läpi ei tapahdu nesteen virtausta, koska nesteen nopeus on pinnan jokaisessa pisteessä pinnan suuntainen.



Kuva 3.3.4

Pysyvässä virtauksessa muuttuja t häviää esityksestä (3.3.3) ja tietyn pisteen kautta kulkevat virta-, rata- ja juovaviivat yhtyvät päinvastoin kuin yleensä epästationaarisessa tapauksessa. Samoin tietyn umpinaisen käyrän määrittämä virtaputki ei muuta asemaansa ajan muuttuessa pysyvässä virtauksessa.

Myös ns. virtaussuunnaltaan pysyvässä (saks. richtungsstationär (19)) virtauksessa — se on tapauksessa, jossa virtausnopeusvektori kussakin avaruuden pisteessä säilyttää ajan muuttuessa suuntansa, mutta jossa nopeuden itseisarvo saattaa sen sijaan muuttua — virta-, rata- ja juovaviivat yhtyvät ja virtaputket eivät muuta asemiaan. Esimerkiksi putkivirtaus on tavallisesti lähes summaltaan pysyvää, vaikka virtaaman arvo vaihtelisikin, koska putken seinämät rajoittavat virtaussuunnan likimain putken suuntaiseksi.

Kun turbulenttisen virtauksen yhteydessä puhutaan virtaviivoista, virtaputkista jne., näillä käsitteillä tarkoitetaan tavallisesti keskimääräiseen nopeuteen $\vec{v}$ liittyviä suureita.

Kirjallisuudessa virtausnopeuden karteesisille suorakulmaisille komponenteille käytetään hyvin yleisesti tunnuksia

$$v_x = u\,,\quad v_y = v\,,\quad v_z = w\,, \tag{3.3.6}$$

jolloin nopeus

$$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}. \tag{3.3.7}$$

Koska D-monisteessa ja yleensä kiinteän aineen mekaniikassa u, v ja w tarkoittavat siirtymävektorin komponentteja, jatkossa tullaan toimimaan kuitenkin lähinnä kaavan (3.3.5) merkintöjen avulla.

3.3.3. Ainederivaatta

Yleinen tapaus. Tarkastellaan mielivaltaista Eulerin esitystavan mukaista paikan ja ajan funktiota $f(\vec{r}, t)$. Halutut tulokset johdetaan käyttäen apuna karteesista suorakulmaista koordinaatistoa, joten lähdetään liikkeelle funktiomuodosta $f(x, y, z, t)$. Suureen f arvon muuttumista ajan (ja paikan) muuttuessa voidaan mitata usealla eri tavalla.

Havainnollistetaan tätä Lähteessä (20) esitettyä esimerkkiä seuraten. Olkoon f vaikkapa tietyssä joessa esiintyvä kalojen konsentraatio ($[f] = kg/m^3$), joka siis riippuu sekä paikasta että ajasta. Havaitsija on veneessä ja mittaa konsentraatiota suoraan alapuoleltaan. Otetaan kolme eri tapausta:
(1) Vene on kiinnitetty paikoilleen laituriin,
(2) Vene liikkuu joessa moottorin kuljettamana,
(3) Vene lipuu virran mukana.
Funktion f kokonaisdifferentiaali

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \qquad (3.3.8)$$

Ensimmäisessä tapauksessa havaitsijan asema ei muutu, joten $dx = dy = dz = 0$ ja suureen f arvon muutosnopeudelle saadaan dt:llä jakamalla arvo $\partial f/\partial t$. Toisessa tapauksessa havaitsijan asema muuttuu ajan dt aikana määrillä dx, dy ja dz, jotka riippuvat veneen nopeudesta ja siis f:n muutosnopeudelle saadaan eri arvo kuin edellä. Kolmannessa tapauksessa vene liikkuu samalla nopeudella kuin neste ja tällöin siirtymät ovat

$$dx = v_x dt, \quad dy = v_y dt, \quad dz = v_z dt. \qquad (3.3.9)$$

Sijoittamalla nämä lausekkeeseen (3.3.8) ja jakamalla yhtälö puolittain ajan differentiaalilla dt saadaan muutosnopeuden arvo

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_x\frac{\partial f}{\partial x} + v_y\frac{\partial f}{\partial y} + v_z\frac{\partial f}{\partial z}. \qquad (3.3.10)$$

Tämä on juuri tietyn partikkelin mukana kulkevan havaitsijan mittaama aikaderivaatta eli siis jo kohdassa 3.2 määritelty ns. <u>ainederivaatta</u>, joka saa nyt vain Eulerin esityksessä eri ulkönäön – monimutkaisemman – kuin

Lagrangen esityksessä. Ainederivaatan lauseke voidaan kirjoittaa vielä tiiviimpään koordinaatistosta riippumattomaan yleiseen muotoon

$$\boxed{\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} f} \tag{3.3.11}$$

tai operaattoreilla esitettynä

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}, \tag{3.3.12}$$

sillä tässä

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla} = (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})\cdot\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$= v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.3.13}$$

Termiä $\partial f/\partial t$ nimitetään lokaaliseksi muutosnopeudeksi (engl. local rate of change) ja termiä $\vec{v}\cdot\vec{\nabla} f$ konvektiiviseksi muutosnopeudeksi (engl. convective rate of change; convective = viittaava, johtuva). Edellinen häviää pysyvässä virtauksessa ja jälkimmäinen ainakin kohdissa, joissa nopeus on nolla tai alueissa, joissa nopeus ei riipu paikasta.

Voidaan osoittaa, että kaavat (3.3.10) ja (3.3.11) pätevät myös vektorifunktiolle $\vec{f}$, jolloin kuitenkin konvektiivisessa termissä $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{f}$ osuus $\vec{\nabla}\vec{f}$ on tensori, ns. vektorin gradientti (14). Jos toimitaan vain karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa, konvektiivinen termi voidaan silti edelleen esittää yksinkertaisemmassa muodossa $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{f}$. Tämä on helppo osoittaa toistamalla kaavan (3.3.10) johto vektorifunktiolle, jolloin loppu-tuloksen havaitaan säilyvän samana: $f \to \vec{f}$.

Ei ole myöskään vaikea todistaa esimerkiksi kaavan (3.3.10) avulla, että ainederivaatalle pätevät tavanomaiset derivoimislaskukaavat kuten $d(f_1+f_2)/dt = df_1/dt + df_2/dt$, $d(f_1 f_2)/dt = df_1/dt \cdot f_2 + f_1 \cdot df_2/dt$ jne. Toistettakoon vielä, että mekaniikan kirjallisuudessa ainederivaatan tavallisin tunnus on $D(\,)/Dt$, jota ei ole haluttu kuitenkaan käyttää tässä esityksessä, koska D-monisteessa on jo totuttu tunnuksen $d(\,)/dt$ käyttöön.

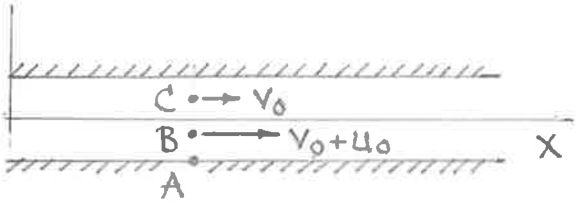
<u>Karteesinen suorakulmainen koordinaatisto.</u> Tämä tapaus on tullut esille jo edellisessä kohdassa, joten voidaan heti kirjoittaa yhteenvetona seuraavat kaavat. Skalaarifunktiolle f

$$\boxed{\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_x\frac{\partial f}{\partial x} + v_y\frac{\partial f}{\partial y} + v_z\frac{\partial f}{\partial z}\,.} \tag{3.3.14}$$

Vektorifunktiolle $\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{f}} \equiv \frac{d\vec{f}}{dt} &= \frac{\partial\vec{f}}{\partial t} + v_x\frac{\partial\vec{f}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\vec{f}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\vec{f}}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial f_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial f_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial f_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial f_x}{\partial z}\right)\vec{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial f_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial f_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial f_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\vec{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial f_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial f_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial f_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)\vec{k}.\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Esimerkki 3.3.1. Saasteen konsentraatio. Kuva (a) esittää ylhäältä katsottuna kanavaa, jossa virtaavan veden nopeus oletetaan vakioksi sekä paikan että ajan suhteen:



(a)

$$\vec{v} = v_0 \vec{i}. \qquad (a)$$

Vedessä esiintyy tiettyä saastetta, jonka konsentraation c ($[c] = kg/m^3$) lauseke on muotoa

$$c = c(x,t) = c_0 e^{-\frac{\alpha x}{L_0}} \sin \beta\frac{t}{t_0} + c_1, \qquad (b)$$

jossa α ja β ovat dimensiottomia lukuja ja c_0, c_1 ($\geq c_0$) ja L_0 sekä t_0 ovat suureita, joilla on vastaavasti konsentraation ja matkan sekä ajan dimensiot. Määritetään havaitsijoiden A, B ja C mittaamat suureen c muutosnopeudet — merkitään niitä tässä tunnuksilla $(dc/dt)_A$, $(dc/dt)_B$ ja $(dc/dt)_C$ —, kun:

(1) Havaitsija A istuu kanavan reunalla,

(2) Havaitsija B on veneessä, joka liikkuu vakiovauhdilla u_0 veden suhteen alavirtaan päin,

(3) Havaitsija C on veneessä, joka ajelehtii virran mukana.

(1). Yleisesti saadaan kaavan (3.3.8) erikoistapauksena c:n kokonaisdifferentiaalin lauseke

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial x} dx \qquad (c)$$

eli

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial c}{\partial x}, \qquad (d)$$

jossa

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= c_0 \frac{\beta}{t_0} e^{-\frac{\alpha x}{L_0}} \cos\frac{\beta t}{t_0}, \\ \frac{\partial c}{\partial x} &= -c_0 \frac{\alpha}{L_0} e^{-\frac{\alpha x}{L_0}} \sin\frac{\beta t}{t_0}.\end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

Havaitsijan A tapauksessa ajan lisäyksen dt aikana $dx = 0$ ja

$$\left(\frac{dc}{dt}\right)_A = \frac{\partial c}{\partial t} = c_0 \frac{\beta}{t_0} e^{-\frac{\alpha x}{L_0}} \cos\frac{\beta t}{t_0} \qquad (f)$$

Saadaan siis lokaalinen muutosnopeus.

(2). Havaitsijan B absoluuttinen nopeus $\vec{v} = (v_0 + u_0)\vec{i}$ ja ajan lisäyksen dt aikana $dx = (v_0 + u_0)dt$, joten

$$\left(\frac{dc}{dt}\right)_B = \frac{\partial c}{\partial t} + (v_0 + u_0)\frac{\partial c}{\partial x}$$

$$= c_0 e^{-\frac{\alpha x}{L_0}} \left[\frac{\beta}{t_0}\cos\frac{\beta t}{t_0} - (v_0 + u_0)\frac{\alpha}{L_0}\sin\frac{\beta t}{t_0}\right]. \qquad (g)$$

(3) Havaitsijan C absoluuttinen nopeus $\vec{v} = v_0\vec{i}$ on sama kuin itse nesteen nopeus, joten kyseessä on ainederivaatta. Asettamalla kaavassa (d) $dx = v_0 dt$ tai soveltamalla suoraan kaavaa (3.3.14) saadaan

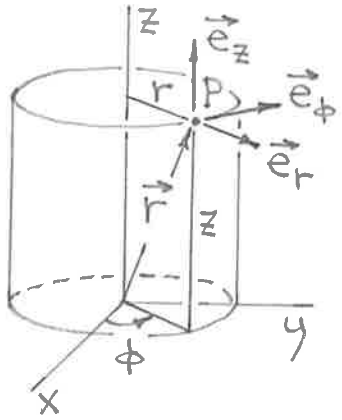
$$\left(\frac{dc}{dt}\right)_C = \frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_0\frac{\partial c}{\partial x}$$

$$= c_0 e^{-\frac{\alpha x}{L_0}} \left[\frac{\beta}{t_0}\cos\frac{\beta t}{t_0} - v_0\frac{\alpha}{L_0}\sin\frac{\beta t}{t_0}\right]. \qquad (h)$$

Korostettakoon vielä, että sanonnalla havaitsijan mittaama muutosnopeus on tarkoitettu tässä havaitsijan nesteestä sijaintipaikastaan ottamien näytteiden perusteella saatua arvoa.

---

* Sylinterikoordinaatisto. Käytetään kuvan 3.3.5 esittämiä merkintöjä. Sylinterikoordinaatit ovat r, ϕ ja z. Pisteeseen P koordinaattikäyrien tangenteiksi asetetut yksikkövektorit $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\phi$ ja $\vec{e}_z$ muodostavat tässä järjestyksessä oikeakätisen ortonormaalin kannan.



Kuva 3.3.5

Mielivaltaisen vektorin $\vec{f}(\vec{r},t)=\vec{f}(r,\phi,z,t)$ esitys tässä kannassa on

$$\vec{f}=f_r\vec{e}_r+f_\phi\vec{e}_\phi+f_z\vec{e}_z, \tag{3.3.16}$$

jossa komponentit f_r, f_ϕ ja f_z ovat yleisesti muuttujien r, ϕ, z ja t funktioita ja jossa lisäksi kantavektorit $\vec{e}_r$ ja $\vec{e}_\phi$ riippuvat muuttujasta ϕ.

Lähteen (14) mukaan skalaarifunktion f gradientti $\vec{\nabla} f$ saa sylinterikoordinaatistossa muodon

$$\vec{\nabla} f=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z. \tag{3.3.17}$$

Kun virtausnopeuden esitys on nyt

$$\vec{v}=v_r\vec{e}_r+v_\phi\vec{e}_\phi+v_z\vec{e}_z, \tag{3.3.18}$$

kaavasta (3.3.11) saadaan, kun muodostetaan ensin termien (3.3.18) ja (3.3.17) skalaaritulo, skalaarifunktion f ainederivaatan lauseke

$$\dot{f}\equiv\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+v_r\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}+v_z\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{3.3.19}$$

Tämä kaava pätee myös vektorifunktiolle: $f\to\vec{f}$. Suorittamalla tarvittavat derivoinnit

Lausekkeelle (3.3.16) saadaan lopuksi pitkähkön käsittelyn jälkeen tulos

$$\dot{\vec{f}} \equiv \frac{d\vec{f}}{dt} = \left(\frac{\partial f_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial f_r}{\partial \phi} + v_z\frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{v_\phi}{r} f_\phi\right)\vec{e}_r$$
$$+\left(\frac{\partial f_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial f_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} + v_z\frac{\partial f_\phi}{\partial z} + \frac{v_\phi}{r} f_r\right)\vec{e}_\phi +$$
$$+\left(\frac{\partial f_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial f_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial f_z}{\partial \phi} + v_z\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)\vec{e}_z . \qquad (3.3.20)$$

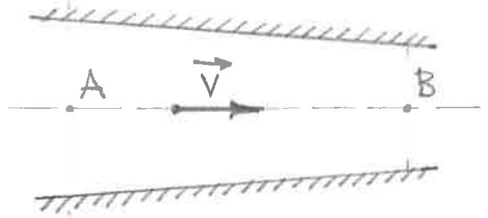
Sama tulos saadaan myös muodostamalla ensin tensori $\vec{\nabla}\vec{f}$ ja kertomalla se vektorilla $\vec{v}$. On syytä huomata, että vektorin $\dot{\vec{f}}$ komponentteja ei siis saa yleensä laskea soveltamalla kaavaa (3.3.19) suoraan vektorin $\vec{f}$ komponentteihin paitsi lausekkeen (3.3.20) viimeisen komponentin tapauksessa.

3.3.4 Kiihtyvyys

Yleinen tapaus. Aine-alkion kiihtyvyys saadaan nopeuden aine-derivaattana, koska kiihtyvyyshän kuvaa juuri tietyn aine-alkion kokemaa nopeuden aikaderivaattaa. Täten kaavan (3.3.11) perusteella kiihtyvyys

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}.} \qquad (3.3.21)$$

Kiihtyvyyden yhteydessä puhutaan vastaavasti kuin kohdassa 3.3.3 lokaalisesta ja konvektiivisesta kiihtyvyydestä. Kuva 3.3.6 havainnollistaa näiden termien merkitystä. Kyseessä on virtaus poikkileikkauspinta-alaltaan virtaussuunnassa pienenevässä uomassa. Virtausnopeus



Kuva 3.3.6

tietyllä hetkellä pisteessä B on suurempi kuin pisteessä A, koska poikkileikkaus-pinta-ala pisteessä B on pienempi kuin pisteessä A; ks. tarkemmin kohta 3.4.1.

Täten nopeuden gradientti $\vec{\nabla}\vec{v}$ on nollasta eroava välillä AB ja siis samoin konvektiivinen kiihtyvyys on nollasta eroava pysyvässä virtauksessakin. Epästationaarisessa virtauksessa myös lokaalinen kiihtyvyys antaa oman lisänsä.

Kiihtyvyyden lausekkeiden (3.2.15) ja (3.3.21) vertailu osoittaa niiden välillä vallitsevan oleellisen eron. Lagrangen esityksessä esiintyy toinen aikaderivaatta ja lauseke on lineaarinen $\vec{u}$:n suhteen. Eulerin esityksessä esiintyy ensimmäinen aikaderivaatta ja lauseke on epälineaarinen (konvektiivinen osa on kvadraattinen) $\vec{v}$:n suhteen. Nestemekaniikan tehtävät ovat täten yleensä epälineaarisia ja tästäkin johtuen myös vaikeita ratkaista. Toinen oleellinen vaikeustekijä on turbulenssi.

Karteesinen suorakulmainen koordinaatisto. Kaavan (3.3.15) perusteella kiihtyvyyden

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (3.3.22)$$

komponentit saadaan lausekkeista

$$\boxed{\begin{aligned} a_x = \dot v_x = \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ a_y = \dot v_y = \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ a_z = \dot v_z = \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned}} \qquad (3.3.23)$$

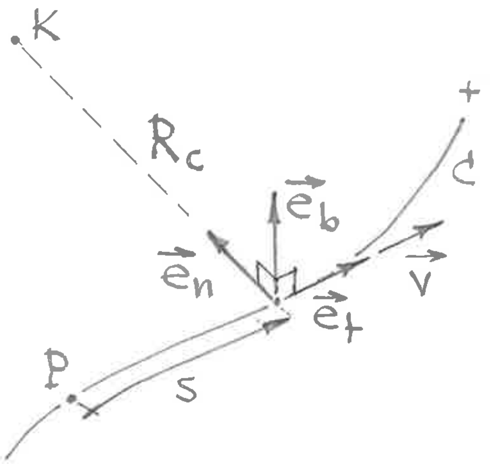
* Sylinterikoordinaatisto. Kaavan (3.3.20) perusteella kiihtyvyyden

$$\vec a = a_r\vec e_r + a_\phi\vec e_\phi + a_z\vec e_z \qquad (3.3.24)$$

komponentit saadaan lausekkeista

$$\left.\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r}, \\ a_\phi &= \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r} \\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.25)$$

Ratakoordinaatit. Tarkastellaan tietyn avaruuden pisteen P kautta tietyllä hetkellä kulkevaa virtaviivaa C (kuva 3.3.7). Käsitellään vain virtaussuunnaltaan pysyvää tai sen erikoistapauksena pelkästään pysyvää virtausta. Tällöin käyrä C on koko ajan myös pisteen P kautta kulkevien partikkelien ratakäyrä



Kuva 3.3.7

ja C ei muuta asemaansa ajan muuttuessa.

Käyrän C yhteydessä käytetään vastaavia merkintöjä kuin D-moniston kuvassa 2.2.5; ainoastaan kaarevuussädettä merkitään nyt tunnuksen ϱ sijasta tunnuksella R_c. Virtausnopeus käyrällä C on siis muotoa

$$\vec{v}(s,t) = v(s,t)\,\vec{e}_t(s), \tag{3.3.26}$$

jossa vielä riippuvuus ajasta häviää pysyvässä virtauksessa. Suure v on tässä vauhti merkillä varustettuna eli ns. algebrallinen vauhti.

Koska käyrällä C $x=x(s)$, $y=y(s)$ ja $z=z(s)$, mielivaltainen Eulerin esityksen mukainen funktio $f(x,y,z,t)$ voidaan kirjoittaa muotoon $f=f(s,t)$. Sen kokonaisdifferentiaali

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial s}ds. \tag{3.3.27}$$

Kun tarkastellaan aineälkion kokemaa muutosta, siirtymä

$$ds = v\,dt \tag{3.3.28}$$

ja ainederivaatan lauseke saa nyt siis muodon

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial s}. \tag{3.3.29}$$

Tämä kaava on voimassa myös vektoriarvoiselle funktiolle $\vec{f}$.

Lasketaan kiihtyvyys ottamalla lausekkeen (3.3.26) ainederivaatta:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}(s,t)\,\vec{e}_t + v\,\dot{\vec{e}}_t(s)$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}\right)\vec{e}_t + v\left(0 + v\frac{d\vec{e}_t}{ds}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}\right)\vec{e}_t + \frac{v^2}{R_c}\vec{e}_n. \qquad (3.3.30)$$

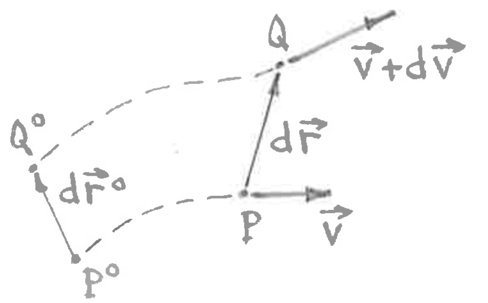
Tässä on siis käytetty hyväksi kaavan (3.3.29) lisäksi kaavaa D (2.2.39). Näin on saatu kiihtyvyyden komponenteiksi suunnille $\vec{e}_t$, $\vec{e}_n$ ja $\vec{e}_b$

$$\left.\begin{aligned} a_t &= \frac{dv}{dt} \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}, \\ a_n &= \frac{v^2}{R_c}, \\ a_b &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.31)$$

Pysyvässä virtauksessa termi $\partial v/\partial t$ katoaa. Termi $v(\partial v/\partial s)$ voidaan kirjoittaa myös muotoon $1/2 \cdot \partial(v^2)/\partial s$. Kaavat (3.3.31) saadaan aikaan myös sylinterikoordinaatiston kaavojen (3.3.25) sopivana erikoistapauksena.

3.3.5 Muodonmuutosnopeus

Tarkastellaan tietyllä hetkellä kahta äärettömän läheistä avaruuden pistettä P ja Q, joissa olevien partikkelien nopeudet ovat vastaavasti $\vec{v}$ ja $\vec{v} + d\vec{v}$ (kuva 3.3.8). Pisteessä Q olevan partikkelin suhteellinen nopeus pisteessä P olevan partikkelin suhteen on siis $d\vec{v}$, jonka lauseke saadaan kokonaisdifferentiaalina



Kuva 3.3.8

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}dz \qquad (3.3.32)$$

eli

$$\left.\begin{aligned} dv_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz, \\ dv_y &= \frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{\partial v_y}{\partial z}dz, \\ dv_z &= \frac{\partial v_z}{\partial x}dx + \frac{\partial v_z}{\partial y}dy + \frac{\partial v_z}{\partial z}dz. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.33)$$

On huomattava, että tässä kohdassa tarkastellaan vain nopeuskentän paikasta riippuvaa muuttumista, joten $\vec{v}$:n differentiaalia laskettaessa otetaan $dt = 0$.

Tarkoituksena on selvittää, miten pisteen P ympärillä olevan nestealkion muoto ja koko tulevat muuttumaan. Tämän saavuttamiseksi on tarpeen palata hetkeksi jäykän kappaleen kinematiikkaan. Jäykän kappaleen mielivaltaisen partikkelin nopeus saadaan kaavasta $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{\varrho}$ (kaava D (3.3.6)) ja jos otetaan tässä niitopiste O origoon, saadaan jäykän kappaleen liikettä vastaavaksi nopeuskentäksi

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0(t) + \vec{\omega}(t)\times\vec{r}. \qquad (3.3.34)$$

Muodostamalla lauseke $\vec{\nabla}\times\vec{v}$ saadaan eräiden vaiheiden (14, s. 48) jälkeen tulos $\vec{\nabla}\times\vec{v} = 2\vec{\omega}$ eli

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{v}.} \qquad (3.3.35)$$

Täten jäykän kappaleen liikkeessä nopeuskentän roottorin puolikas antaa jäykän kappaleen kulmanopeuden. Tämä tulos on sikäli tärkeä, että sitä käytetään myös muotoaan muuttavien kappaleiden yhteydessä <u>määrittelemään kussakin pisteessä kontinuumin alkion kulmanopeus</u>, joka tulee siis olemaan yleensä paikasta riippuva päinvastoin kuin jäykän kappaleen tapauksessa. Kaavasta (3.3.35) saadaan kehittämällä

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\Big)\vec{i} + \Big(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\Big)\vec{j} + \Big(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big)\vec{k}\Big] \tag{3.3.36}$$

eli kulmanopeuden komponentit ovat

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\Big), \\ \omega_y &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\Big), \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big). \end{aligned}\right\} \tag{3.3.37}$$

Nämä lausekkeet saadaan mukaan esitykseen (3.3.33) kirjoittamalla se muodossa

$$\left.\begin{aligned} dv_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\Big)dy + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\Big)dz + \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\Big)dy + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\Big)dz, \\ dv_y &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big)dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\Big)dz + \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big)dx + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\Big)dz, \\ dv_z &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\Big)dx + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\Big)dy + \frac{\partial v_z}{\partial z}dz + \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\Big)dx + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\Big)dy. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.38}$$

Matriisimerkintöjä käyttäen tämä on

$$\{dv\} = [D]\{dr\} + [W]\{dr\} \tag{3.3.39}$$

eli

$$\begin{Bmatrix} dv_x \\ dv_y \\ dv_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x & \frac{1}{2}g_{xy} & \frac{1}{2}g_{xz} \\ \frac{1}{2}g_{yx} & d_y & \frac{1}{2}g_{yz} \\ \frac{1}{2}g_{zx} & \frac{1}{2}g_{zy} & d_z \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}, \tag{3.3.40}$$

jossa termit

$$\boxed{\begin{aligned} d_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, & g_{yz} = g_{zy} &= \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}, \\ d_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y}, & g_{zx} = g_{xz} &= \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ d_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, & g_{xy} = g_{yx} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{aligned}} \qquad (3.3.41)$$

ovat ns. muodonmuutosnopeuskomponentteja (engl. rate of deformation components). Tunnusten d ja g ($[d] = [g] = s^{-1}$) sijasta kirjallisuudessa käytetään usein tunnuksia ε ja γ, jotka ovat tässä kuitenkin jo varattu muodonmuutoskomponenttien merkeiksi.

Symmetrinen matriisi $[D]$ on ns. muodonmuutosnopeusmatriisi ja antisymmetrinen matriisi $[W]$ on ns. pyörrematriisi (engl. vorticity matrix, spin matrix). Tähän liittyen todetaan seuraavaa. Jos nestealkio liikkuisi kuten jäykkä kappale ja sovellettaisiin taas kaavaa $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ ottaen siirtopisteeksi piste P ja toiseksi pisteeksi piste Q saataisiin ($\vec{\rho} \mathrel{\hat{=}} d\vec{r}$) $\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times d\vec{r}$ eli siis

$$d\vec{v} = \vec{\omega} \times d\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = (\omega_y dz - \omega_z dy)\vec{i} + (\omega_z dx - \omega_x dz)\vec{j} + (\omega_x dy - \omega_y dx)\vec{k}. \qquad (3.3.42)$$

Tämän matriisiesitysvastineen nähdään olevan kaavaa (3.3.40) tarkastelemalla $\{dv\} = [W]\{dr\}$. Täten kaavan (3.3.40) jälkimmäinen osuus $[W]\{dr\}$ esittää nestealkion rotaatiosta syntyvää nopeuden muutosta, joten edellisen osuuden $[D]\{dr\}$ täytyy siis johtua nestealkion muodon muuttumisesta, joka seikka selittää käytettyjä nimityksiä.

Muodonmuutosnopeuskomponentit (3.3.41) ovat ulkonäöltään täysin analogisia Lagrangen infinitesimaalisten muodonmuutosten (3.2.16) kanssa. Ottamalla jälkimmäisten ainederivaatat saadaan

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_a &= \frac{d\varepsilon_a}{dt} = \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u_a}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{\partial \dot{u}_a}{\partial a} = \frac{\partial v_a}{\partial a}, \\
\dot{\gamma}_{bc} &= \frac{d\gamma_{bc}}{dt} = \frac{\partial \gamma_{bc}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_b}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial b}\right) = \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial u_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial u_c}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \dot{u}_b}{\partial c} + \frac{\partial \dot{u}_c}{\partial b} = \frac{\partial v_b}{\partial c} + \frac{\partial v_c}{\partial b},
\end{aligned}
\right\}
\quad (3.3.43)
$$

jne.

Pienten siirtymien teoriassa voidaan asettaa likimain $a = x$, $b = y$ ja $c = z$, jolloin vertailu lausekkeisiin (3.3.41) johtaa yhteyksiin

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_a &= d_x, & \dot{\gamma}_{bc} &= g_{yz}, \\
\dot{\varepsilon}_b &= d_y, & \dot{\gamma}_{ca} &= g_{zx}, \\
\dot{\varepsilon}_c &= d_z, & \dot{\gamma}_{ab} &= g_{xy}.
\end{aligned}
\right\}
\quad (3.3.44)
$$

Tämä tulos antaa selityksen nimitykselle muodonmuutosnopeus. Lisäksi saadaan fysikaaliset tulkinnat muodonmuutosnopeuskomponenteille. Termit d_x, d_y ja d_z esittävät x-, y- ja z-akselien suuntaisten viiva-alkioiden suhteellisten pituudenmuutosten muutosnopeuksia. Termit g_{yz} jne. esittävät taas y- ja z-akselien jne. suuntaisten viiva-alkioiden välisten kulmanmuutosten muutosnopeuksia; vrt. kuva 3.2.3. Huomautettakoon vielä, että itse lausekkeet (3.3.41) ovat täysin yleispäteviä ilman mitään siirtymiä koskevia rajoituksia.

Nestemekaniikassa on tavallisempaa käsitellä kulmanopeusvektorin $\vec{\omega}$ sijasta sen kaksinkertaista arvoa $2\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$, jota nimitetään yleensä pyörrevektoriksi (engl. vorticity vector). Joskus näkee kuitenkin myös kulmanopeusvektorille käytettävän tätä nimitystä. Tässä tullaan toimimaan pelkästään kulmanopeusvektorin $\vec{\omega}$ avulla. Jos kulmanopeusvektori

$$\vec{\omega} = \vec{0} \tag{3.3.45}$$

tietyssä alueessa, virtauksen sanotaan olevan pyörteetöntä (engl. irrotational).

*Johdetaan lopuksi eräs kiihtyvyyden yleinen lauseke, joka osoittautuu jatkossa hyödylliseksi. Tarkastellaan ensin vain kiihtyvyyden x-komponenttia

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}. \tag{3.3.46}$$

Lisätään ja vähennetään termi $v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}$ sekä termi $v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - v_y\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} - v_z\frac{\partial v_z}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)v_z - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)v_y. \end{aligned} \tag{3.3.47}$$

Ottamalla käyttöön kulmanopeusvektorin komponenttien merkinnät (3.3.37) saadaan siis

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{v^2}{2} + 2(\omega_y v_z - \omega_z v_y), \\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{v^2}{2} + 2(\omega_z v_x - \omega_x v_z), \\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{v^2}{2} + 2(\omega_x v_y - \omega_y v_x), \end{aligned}\right\} \tag{3.3.48}$$

jossa kaksi jälkimmäistä lauseketta voidaan johtaa aivan analogisesti. Kaavojen vektoriesityksen havaitaan olevan

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}.} \tag{3.3.49}$$

Tulos johdettiin karteesisen suorakulmaisen koordinaatiston avulla, mutta kaava (3.3.49) pätee silti yleisesti koordinaatistosta riippumatta. Merkintä v tarkoittaa vauhtia tai yhtä hyvin myös algebrallista vauhtia.

Esimerkki 3.3.2. Tarkastellaan uudestaan esimerkissä 3.2.1 Lagrangen esitystavalla annettua liikettä

$$x = a + \alpha b, \quad y = b + \beta a, \quad z = c \tag{a}$$

nyt kuitenkin käyttäen Eulerin esitystä. Yhteydet (a) ovat niin yksinkertaiset, että ne pystytään kääntämään — päinvastoin kuin yleensä — eksplisiittisesti ratkaisemalla ko. lineaarinen yhtälöryhmä. Saadaan Eulerin esitys

$$a = \frac{1}{1-\alpha\beta}(x-\alpha y), \quad b = \frac{1}{1-\alpha\beta}(y-\beta x), \quad c = z. \tag{b}$$

Esimerkissä 3.2.1 johdettiin nopeuden ja kiihtyvyyden komponenttien lausekkeet

$$v_a = \dot{\alpha} b, \quad v_b = \dot{\beta} a, \quad v_c = 0 \tag{c}$$

ja

$$a_a = \ddot{\alpha} b, \quad a_b = \ddot{\beta} a, \quad a_c = 0. \tag{d}$$

Sijoittamalla näihin yhteydet (b) päästään Eulerin esityksen nopeus- ja kiihtyvyyskomponentteihin

$$v_x = \frac{\dot{\alpha}}{1-\alpha\beta}(y-\beta x), \quad v_y = \frac{\dot{\beta}}{1-\alpha\beta}(x-\alpha y), \quad v_z = 0 \tag{e}$$

ja

$$a_x = \frac{\ddot{\alpha}}{1-\alpha\beta}(y-\beta x), \quad a_y = \frac{\ddot{\beta}}{1-\alpha\beta}(x-\alpha y), \quad a_z = 0. \tag{f}$$

Kiihtyvyys saadaan vaihtoehtoisesti myös nopeuskentästä (e) soveltamalla kaavoja (3.3.23). Esimerkiksi

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + 0$$

$$= \frac{\ddot{\alpha}}{1-\alpha\beta}(y-\beta x) + \frac{\dot{\alpha}}{1-\alpha\beta}(-\dot{\beta}x) - \frac{\dot{\alpha}(-\dot{\alpha}\beta-\alpha\dot{\beta})}{(1-\alpha\beta)^2}(y-\beta x) +$$

$$+ \frac{\dot{\alpha}}{1-\alpha\beta}(y-\beta x)\frac{\dot{\alpha}}{1-\alpha\beta}(-\beta) + \frac{\dot{\beta}}{1-\alpha\beta}(x-\alpha y)\frac{\dot{\alpha}}{1-\alpha\beta}, \qquad (g)$$

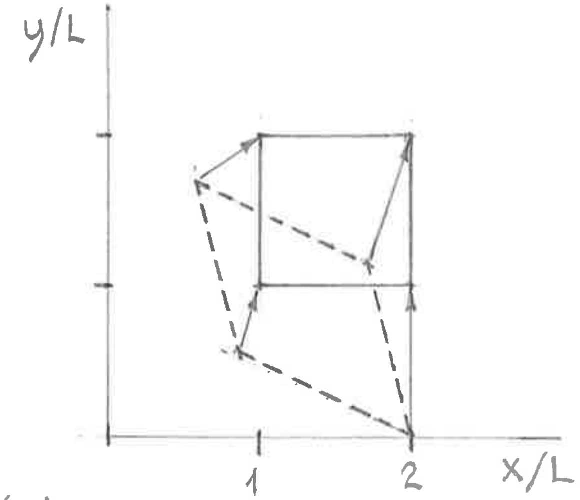
josta tulee kehittämällä lopulta kaavan (f) mukainen tulos.

Nollasta eroavat muodonmuutosnopeuskomponentit ovat

$$\left.\begin{aligned} d_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\dot{\alpha}\beta}{1-\alpha\beta}, \quad d_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\alpha\dot{\beta}}{1-\alpha\beta}, \\ g_{xy} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\dot{\alpha}}{1-\alpha\beta} + \frac{\dot{\beta}}{1-\alpha\beta} = \frac{\dot{\alpha}+\dot{\beta}}{1-\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (h)$$

Pienten siirtymien teorian mukainen tilanne saadaan, kun α ja $\beta \ll 1$. Kaavojen (3.3.44) havaitaan pitävän paikkansa. Esimerkiksi ε_a oli identtisesti nolla, joten $\dot{\varepsilon}_a = 0$. Toisaalta kun $\alpha \approx 0$ ja $\beta \approx 0$, on myös kaavan (h) $d_x \approx 0$. Esimerkiksi $\gamma_{ab} = \alpha + \beta$, joten $\dot{\gamma}_{ab} = \dot{\alpha} + \dot{\beta}$. Toisaalta kun $\alpha \approx 0$ ja $\beta \approx 0$, kaavan (h) $g_{xy} \approx \dot{\alpha} + \dot{\beta}$.

Kulmanopeuden ainoa nollasta eroava komponentti



(a)

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\frac{\dot{\beta}-\dot{\alpha}}{1-\alpha\beta}, \qquad (i)$$

joten pyörrevektori on kohtisuorassa liiketasoa vastaan. Näin on aina tasoliikkeessä.

Kuvassa (a) on esitetty

kaavojen (b) avulla laskettu ($\beta = 2\alpha$) tarkasteltavalla hetkellä ($\alpha = 1/4$) neliön muotoisen ainealueen sijainti alkutilassa; katkoviivoitettu suunnikas.

---

* Lähteen (14) mukaan vektorifunktion $\vec{F}$ roottori saa sylinterikoordinaatistossa muodon

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f_z}{\partial \phi} - \frac{\partial f_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\phi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r f_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \phi}\right)\vec{e}_z . \tag{3.3.50}$$

Täten kulmanopeuden (3.3.35) komponentit ovat

$$\left.\begin{aligned} \omega_r &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right), \\ \omega_\phi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.3.51}$$

Voidaan osoittaa, että muodonmuutosnopeuskomponenttien lausekkeet ovat

$$\left.\begin{aligned} d_r &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, & g_{\phi z} = g_{z\phi} &= \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi}, \\ d_\phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r}, & g_{zr} = g_{rz} &= \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}, \\ d_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, & g_{r\phi} = g_{\phi r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.52}$$

Näiden fysikaalinen merkitys selviää tarkastelemalla vastaavia pienten siirtymien teorian mukaisia muodonmuutoskomponentteja esimerkiksi lähteen (21) avulla.

3.3.6 Tilavuusintegraalin ainederivaatta

Kohdassa D 6.9 on jo korostettu, että mekaniikan peruslait koskevat ns. suljettuja systeemejä eli koko ajan samoista partikkeleista muodostuneita kappaleita. Näin on laita myös kohdassa 1.2 esitettyjen peruslakien suhteen. Kun käytetään Eulerin esitystapaa, joudutaan laskemaan erilaisten tilavuusintegraalien

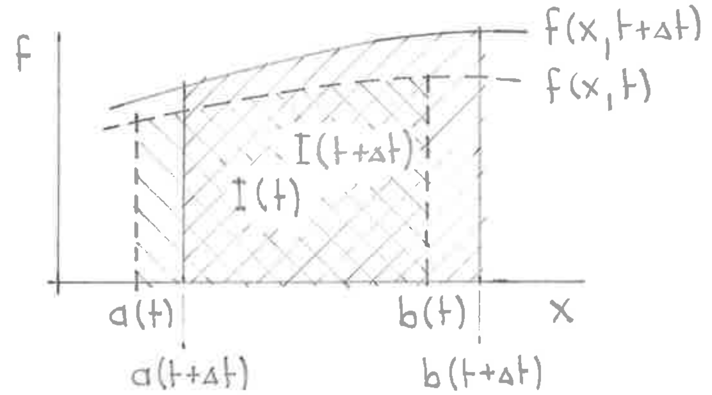
$$I(t) = \int_{V(t)} f(\vec{r}, t)\, dV = \int_{V(t)} f(x, y, z, t)\, dV \qquad (3.3.53)$$

aikaderivaattoja $\dot{I} = dI/dt$. Esimerkkinä mainittakoon kappaleen kokonaismassa $m = \int_{V(t)} \varrho(\vec{r}, t)\, dV$. Integroimisalueen tunnukseen V on merkitty argumentiksi aika t muistuttamaan siitä, että kappaleen liikkeen johdosta sen täyttämä avaruuden osa $V(t)$ muuttuu jatkuvasti. Kun ajatellaan vaadittava integrointi paikan suhteen suoritetuksi kullakin ajan hetkellä, nähdään integraalista tulevan pelkästään ajan funktio. Täten yhden muuttujan funktion I tavanomainen derivaatta $\dot{I} = dI/dt$ on tässä samalla kappaleeseen liittyvään suureeseen I kokonaismäärään kappaleen kokemana mitattu muutosnopeus eli ns. aineellinen aikaderivaatta tai lyhyemmin ainederivaatta.

Derivaatan laskemisessa on tavallaan kysymys matematiikasta tutun, usein ns. Leibnitzin säännön nimellä kulkevan kaavan yleistyksestä kolmeen dimensioon. Tarkastellaan määrättyä integraalia

$$I(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx, \qquad (3.3.54)$$

jossa I on parametrin t funktio paitsi sen johdosta, että t esiintyy integroitavassa myös koska integroimisrajat a ja b ovat t:n funktioita. Integraalin muuttumista t:n muuttuessa on havainnollistettu kuvassa 3.3.9. Leibnitzin



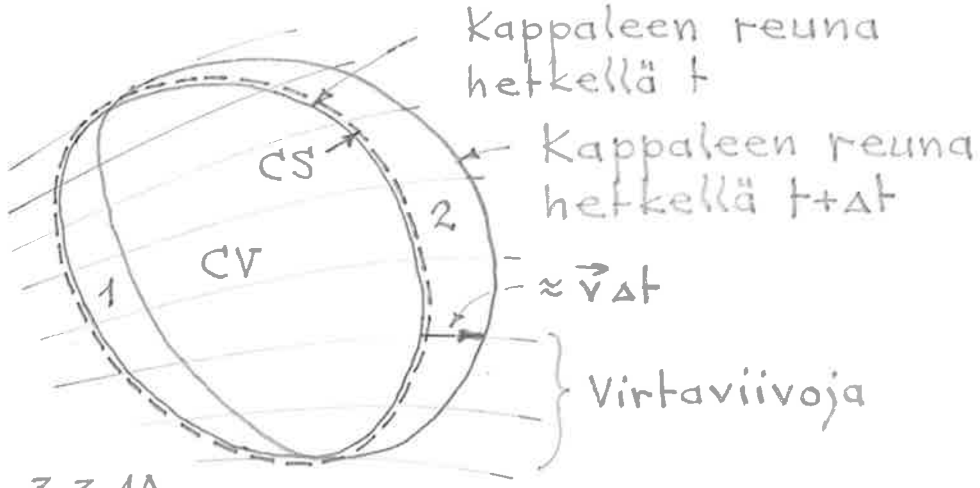
Kuva 3.3.9

säännön mukaan

$$\frac{dI}{dt} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}\,dx + f\Big|_{x=b}\frac{db}{dt} - f\Big|_{x=a}\frac{da}{dt}. \qquad (3.3.55)$$

Jos parametri t tulkitaan ajaksi, termit $db/dt = \dot{b}$ ja $da/dt = \dot{a}$ esittävät rajojen siirtymisnopeuksia.

Siirrytään takaisin integraalin (3.3.53) käsittelyyn. Kappale on esitetty kuvassa 3.3.10 kahdella läheKkäisellä ajan hetkellä. Valitaan avaruudesta



Kuva 3.3.10

tietty umpinaisen pinnan rajaama alue CV, ns. <u>kontrollialue</u> (engl. <u>c</u>ontrol <u>v</u>olume), joka <u>otetaan tässä</u> valitun koordinaatiston suhteen <u>kiinteäksi</u>. Kontrollialueen reunapintaa CS nimitetään <u>kontrollipinnaksi</u> (engl. <u>c</u>ontrol <u>s</u>urface). Valitaan tarkasteltava suljettu systeemi eli kappale siten, että se muodostuu hetkellä t kontrollialueessa olevasta kappaleesta. Hetkellä $t+\Delta t$ osa kappaleen partikkeleista on poistunut kontrollialueesta (alue 2) ja alueeseen on saapunut kappaleen ulkopuolisia partikkeleita (alue 1). Derivaatan määritelmän perusteella ja kuvaa 3.3.10 tarkastelemalla saadaan

$$\frac{dI}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[(I_2+I_{cv}-I_1)_{t+\Delta t} - (I_2+I_{cv}-I_1)_t\right]}{\Delta t}$$

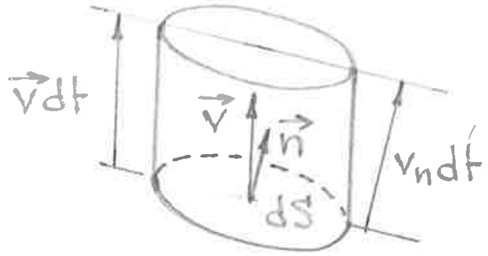
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(I_{cv})_{t+\Delta t} - (I_{cv})_t}{\Delta t} \quad \left[\begin{array}{l}\text{Kontrollialueen yli ote-}\\ \text{tun integraalin } I_{cv} =\\ \int_{cv} f\,dV \text{ muutosnopeus}\\ \int_{cv} \frac{\partial f}{\partial t} dV\end{array}\right]$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(I_2)_{t+\Delta t} - \cancel{(I_2)_t}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(I_1)_{t+\Delta t} - \cancel{(I_1)_t}}{\Delta t}, \quad \left[\begin{array}{l}\text{Kontrollialueesta pois-}\\ \text{tuva suureen I virta}\\ -\\ \text{Kontrollialueeseen saa-}\\ \text{puva suureen I virta}\\ =\\ \text{Nettovirta ulos alu-}\\ \text{eesta}\\ \int_{cs} f v_n dS\end{array}\right] \tag{3.3.56}$$

jossa esiintyvien merkintöjen sisältö lienee selvä. Jos luotetaan hakasulkeissa annettuihin tulkintoihin, on siis saatu tulos (vrt. kaava (3.3.55))

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f\,dV = \int_{CV} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{CS} f\, v_n dS. \tag{3.3.57}$$

Pintaintegraalitermin merkityksen selvittämiseksi tarkastellaan kuvaa 3.3.11, jossa näkyy kontrollipinnan pinta-alkio dS ja pinnan ulkoinen yksikkönormaalivektori $\vec{n}$. Ajassa dt pinta-alkion läpi virrannut aine muodostaa vinopohjaisen sylinterin, jonka pohjan pinta-ala on dS ja korkeus $\vec{n}\cdot\vec{v}dt = v_n dt$. Suure



Kuva 3.3.11

$$v_n = \vec{n}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{n} \tag{3.3.58}$$

on ns. nopeuden normaalikomponentti (engl. normal velocity). Täten sylinterin tilavuus $dV = v_n dt dS$ ja pinta-alkion läpi virranneen suureen I määrä on $f dV = f v_n dt dS$. Koko pinnan läpi ajassa dt virrannut suureen I määrä on siis $\int_{CS} f v_n dt dS$ ja tämä jaettuna kuluneella ajalla dt on ns. suureen I virta tai vuo (engl. flow rate, flow, flux.) (Laatu $[I]/s$)

$$\int_{CS} f v_n dS. \tag{3.3.59}$$

kontrollipinnan läpi alueesta ulos. Jos virtausta tapahtuu alueen sisään, $v_n = \vec{n}\cdot\vec{v}$ on negatiivinen, joten lauseke (3.3.59) kuvaa ns. nettovirtaa alueesta ulospäin. Termiä $f v_n$ (Laatu $[I]/(sm^2)$) voidaan nimittää ko. suureen I virran tiheydeksi (engl. flow rate density) ko. pinnalla.

Jätetään jatkossa kaavasta (3.3.57) integroimisalueita kuvaavat tunnukset yksinkertaisuuden vuoksi pois. On saatu tärkeä kaava, ns. Reynoldsin kuljetuslause (engl. Reynolds transport theorem) (muoto 1)

$$\boxed{\dot I \equiv \frac{dI}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\int f\,dV = \int \frac{\partial f}{\partial t}\,dV + \int f v_n\,dS,} \qquad (3.3.60)$$

joka antaa siis Eulerin esityksessä tarvittavan tilavuusintegraalin ainederivaatan lausekkeen. Pintaintegraali esiintyy usein seuraavissa samanarvoisissa muodoissa:

$$\left.\begin{aligned} \int f v_n\,dS &= \int f\vec v\cdot\vec n\,dS = \int f\vec v\cdot d\vec S \\ &= \int f(n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z)\,dS. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.61)$$

Soveltamalla Gaussin lausetta (kaava (L.1.3), $\vec F \,\hat{=}\, f\vec v$) kaavan (3.3.43) pintaintegraalin muuntamiseksi tilavuusintegraaliksi saadaan Reynoldsin lause muodossa (muoto 2)

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{\frac{d}{dt}\int f\,dV = \int \Big[\frac{\partial f}{\partial t} + \vec\nabla\cdot(f\vec v)\Big]dV,} \\ &\qquad = \int \Big[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (f v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (f v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (f v_z)}{\partial z}\Big]dV. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.62)$$

Usein ainederivaatta lasketaan integraalista $\int \rho f\,dV$, jossa $\rho(\vec r,t)$ on tiheys ja $f(\vec r,t)$ on jokin suure massaa kohti. Kaavat (3.3.60)...(3.3.62) pätevät tietenkin edelleen ($f \to \rho f$), mutta eräs hyvin yksinkertainen muoto saadaan soveltamalla kaavaa (3.3.62) ja tulon derivoimissääntöä:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int \rho f\,dV &= \int \Big[\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho f v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho f v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho f v_z)}{\partial z}\Big]dV \\ &= \int \Big[\rho\frac{\partial f}{\partial t} + \rho v_x\frac{\partial f}{\partial x} + \rho v_y\frac{\partial f}{\partial y} + \rho v_z\frac{\partial f}{\partial z} + \\ &\qquad + f\frac{\partial \rho}{\partial t} + f\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + f\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + f\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\Big]dV \\ &= \int \Big\{\rho\Big[\frac{\partial f}{\partial t} + v_x\frac{\partial f}{\partial x} + v_y\frac{\partial f}{\partial y} + v_z\frac{\partial f}{\partial z}\Big] + \\ &\qquad + f\cancel{\Big[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\Big]}\Big\}dV. \end{aligned} \qquad (3.3.63)$$

jälkimmäinen hakasulkulauseke häviää myöhemmin esitettävän ns. jatkuvuusyhtälön (3.4.55) johdosta. Funktion ainederivaatan lausekkeen (3.3.10) perusteella saadaan siis tulos, Reynoldsin lause (muoto 3)

$$\left.\begin{aligned} \boxed{\frac{d}{dt}\int \rho f \, dV = \int \rho \frac{df}{dt} dV,} \\ = \int \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}\right) dV. \end{aligned}\right\} \quad (3.3.64)$$

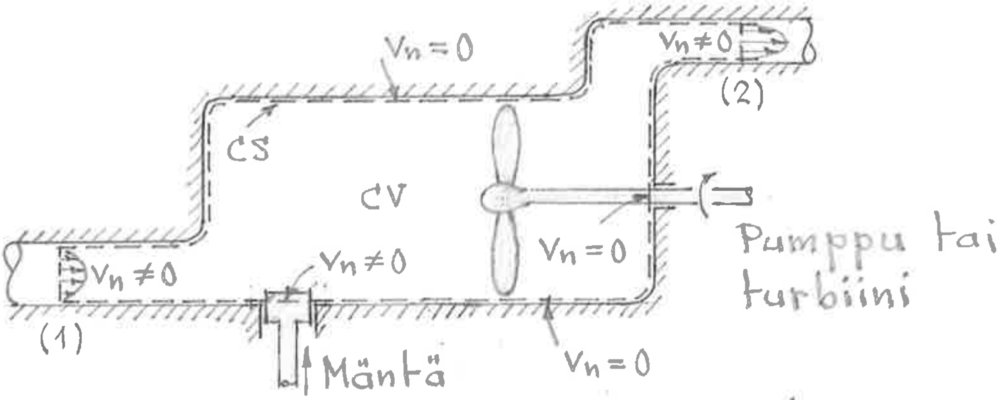
Kaava on helppo muistaa ajattelemalla, että se saadaan muodollisesti siirtämällä d/dt integraalimerkin sisäpuolelle ja ottamalla huomioon, että termin $\rho dV = dm$ derivaatta on massan säilymisen perusteella nolla. Todettakoon vielä, että esitetyt Reynoldsin lauseen eri muodot pätevät myös vektorifunktiolle $\vec{F}$. Tällöin kuitenkin termi $f\vec{v}$ on kirjoitettava muotoon $\vec{v}\vec{F}$ ja se on tulkittava dyadiksi eli tensoriksi.

Kaavaa (3.3.60) sovelletaan yleisten periaatteiden äärellisiä muotoja käytettäessä, koska tällöin pyritään siihen, että lausekkeissa esiintyisi mahdollisuuksien mukaan vain alueen reunalta kertyviä termejä, jotka ovat yleensä kohtuullisen helppoja arvioida tai mitata. Pysyvässä virtauksessa tilavuusintegraali $\int \partial f/\partial t \cdot dV$ häviää. Yleisten periaatteiden paikallisia muotoja johdettaessa sovelletaan taas kaavoja (3.3.62) ja (3.3.64), joissa ei esiinny pintaintegraalitermejä.

On syytä korostaa, että suure $v_n = \vec{n}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{n}$ kaavassa (3.3.60) tarkoittaa kontrollialueessa ko. hetkellä olevan aineen virtausnopeuden normaalikomponenttia kontrollipinnan kohdalla; ei siis suinkaan itse kontrollipinnan nopeutta (kontrollipintakaan otettiin tässä esityksessä kiinteäksi).

Kontrollialue valitaan kussakin tehtävässä siten, että haluttu tieto saadaan — mikäli tämä on ylipäänsä äärellistä muotoa käyttäen ratkaistavissa — mahdollisimman helposti esille. Kontrollialueen valinnasta on vaikea antaa mitään yleisiä ohjeita. Vasta eri sovellutusten kautta saatu kokemus auttaa tässä.

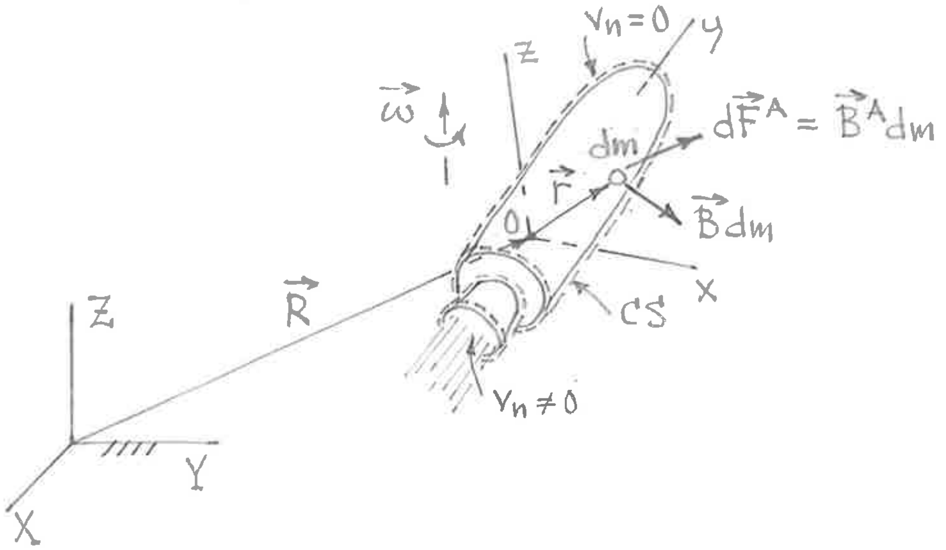
Kontrollipinnan ei tarvitse mitenkään välttämättä leikata pelkästään nestettä, vaan se voi kulkea myös kiinteästä aineesta muodostuvien osien (kuva 3.3.12) tai "tyhjän" (kuva 3.3.13) kautta. Kuva 3.3.12) esittää kaavi-



Kuva 3.3.12 Kontrollipinnan valinta.

olliseksi kuviteltua laitetta, johon neste saapuu putkivirtauksena leikkauksen 1 kautta ja poistuu putkivirtauksena leikkauksen 2 kautta. Muualla kontrollipinta on valittu seuraamaan laitteen kiinteitä seinämiä, joilla siis $v_n = 0$ olipa neste ideaalinesteen mallin mukaista tai todellista. Kontrollipinta leikkaa lisäksi kuvan esittämän liikkuvan männän ja pumpun pyörivän akselin. Edellisessä leikkauksessa $v_n \neq 0$ ja jälkimmäisessä $v_n = 0$, vaikkakin tangentiaalinen nopeuskomponentti $v_t \neq 0$.

Kuva 3.3.13 esittää tapausta – raketin liike –



Kuva 3.3.13 Suhteellinen liike.

jossa on tarpeen käyttää inertiaalikoordinaatiston suhteen liikkeessä olevaa kontrollialuetta. Kontrollipinta on asetettu seuraamaan raketin rungon ulkopintaa ja liikkumaan sen mukana. Ottamalla käyttöön kontrollialueen mukana liikkuva xyz-koordinaatisto, päästään jälleen edellä käsiteltyyn, Reynoldsin lauseen johdossa esiintyneeseen tilanteeseen, jossa kontrollialue on valitun koordinaatiston suhteen kiinteä. Derivaatat kaavassa (3.3.60) on siis nyt laskettava xyz-koordinaatistossa ja esimerkiksi v_n tarkoittaa kontrollialueen tai mikä on sama xyz-koordinaatiston suhteen mitattua virtausnopeuden normaalikomponenttia. Yleisiä periaatteita (1.2.3) ... (1.2.6) sovellettaessa on muistettava ottaa huomioon näennäisvoimien (2.1.49) osuus. Kuvassa 3.3.13 samoin kuin kuvassa 2.1.8 on käytetty hieman kohdan D 5.1.5 esityksestä poikkeavia merkintöjä.

* [Joskus on hyödyllistä ottaa käyttöön muotoaan muuttava kontrollialue. Tätä seikkaa

on selostettu mm. teoksessa (22). Kontrollialueiden käsittelyn yhteydessä tässä esityksessä käytetty ainederivaatan merkki $d(\,)/dt$ ei ole kaikissa tapauksissa tällöin oikein riittävä. Kaavan (3.3.60) täysin yleinen muoto esitetään kirjallisuudessa tavallisimmin seuraavasti:

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} f\,dV = \frac{d}{dt}\int_{CV} f\,dV + \int_{CS} f v_n\,dS.} \tag{3.3.65}$$

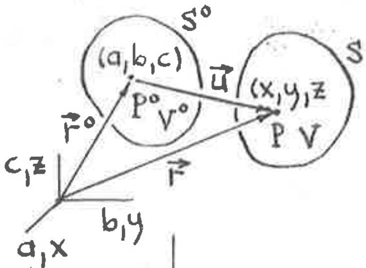
Tässä $D(\,)/Dt$ on ainederivaatta ja oikean puolen derivaatta tarkoittaa koko ajan kontrollialueen yli otetun integraalin $\int_{CV} f\,dV$ — joka on pelkästään ajan funktio, mutta joka ei siis yleensä kuvaa mitään suljetun systeemin summetta päin vastoin kuin integraali $\int_{V(t)} f\,dV$ — muutosnopeutta. Oikean puolen jälkimmäisen termin suure v_n tarkoittaa kontrollipinnan suhteen mitatun virtausnopeuden normaalikomponenttia. Kaavana $v_n = \vec{n}\cdot\vec{v} - (w_{cs})_n$, jossa $(w_{cs})_n$ on kontrollipinnan siirtymisnopeus ko. pisteessä pinnan ulkoisen normaalin suunnassa. Kontrollipinta saa liikkua ja muuttaa muotoaan mielivaltaisella tavalla. Kaava on verrattain helppo johtaa vastaavaan tapaan kuin mitä käytettiin kaavan (3.3.57) yhteydessä. Jos kontrollialue on valitun koordinaatiston suhteen kiinteä, kaavan (3.3.65) derivaatta $d(\int_{CV} f\,dV)/dt$ voidaan kirjoittaa muotoon $\int_{CV} \partial f/\partial t \cdot dV$

* ja päästään kaavaan (3.3.57).

Taulukossa 3.3.1 on esitetty yhteenveto Lagrangen ja Eulerin esitystapojen mukaisista kinematiikan tärkeimmistä kaavoista.

* Taulukko 3.3.1 Lagrangen ja Eulerin esitystapojen kinematiikkaa

<table>
<tr><th>Lagrangen esitystapa</th><th>Eulerin esitystapa</th></tr>
<tr><td>Lagrangen esitystavassa riippumattomina muuttujina ovat ainekoordinaatit $\vec{r}^\circ$ (eli a, b, c) ja aika t. Tämä esitys on tavallisin kiinteän aineen mekaniikassa. Tehtävän matemaattisena määrittelyalueena on paikan suhteen referenssialue V°.</td><td>Eulerin esitystavassa riippumattomina muuttujina ovat spatiaalikoordinaatit $\vec{r}$ (eli x, y, z) ja aika t. Tämä esitys on tavallisin nestemekaniikassa. Tehtävän matemaattisena määrittelyalueena on paikan suhteen kontrollialue V:ssä.</td></tr>
<tr><td colspan="2">



</td></tr>
<tr><td>Funktion $f(\vec{r}^\circ, t)$ ainederivaatta

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}. \qquad (1)$$</td><td>Funktion $f(\vec{r}, t)$ ainederivaatta

$$\left.\begin{aligned}\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} f\\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + v_x\frac{\partial f}{\partial x} + v_y\frac{\partial f}{\partial y} + v_z\frac{\partial f}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \qquad (1')$$</td></tr>
<tr><td>Tilavuusintegraalin $I(t) = \int_{V^\circ} f(\vec{r}^\circ, t)\, dV^\circ$ ainederivaatta

$$\dot{I} \equiv \frac{dI}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\int_{V^\circ} f\, dV^\circ = \int_{V^\circ} \frac{\partial f}{\partial t}\, dV^\circ. \qquad (2)$$</td><td>Tilavuusintegraalin $I(t) = \int_{V(t)} f(\vec{r}, t)\, dV$ ainederivaatta

$$\dot{I} \equiv \frac{dI}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\int_V f\, dV$$

$$\left.\begin{aligned}&= \int \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int f v_n\, dS,\\ &= \int \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int f(n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z)\, dS,\end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

$$\left.\begin{aligned}&= \int \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(f\vec{v})\right] dV,\\ &= \int \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (f v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (f v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (f v_z)}{\partial z}\right] dV.\end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

$$\frac{d}{dt}\int \rho f\, dV = \int \rho \frac{df}{dt}\, dV \qquad (4')$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Yllä olevat kaavat pätevät myös vektorifunktiolle $\vec{f}$. Kaavan (1') termi $\vec{\nabla}\vec{f}$ on tällöin tensori. Samoin kaavan (3') termi $f\vec{v}$ on kirjoitettava järjestyksessä $\vec{v}\vec{f}$ ja tulkittava tensoriksi.</td></tr>
<tr><td>Partikkelin rata ($\vec{r}^\circ$ on kiinteä, t muuttuu)

$$\vec{r} = \vec{r}^\circ + \vec{u} \qquad (5)$$</td><td>Ei yksinkertaista esitystä. Periaatteessa ratkaistavissa differentiaaliyhtälöstä

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(\vec{r}, t), \qquad (5')$$

jossa $\vec{v}$ on annettu.</td></tr>
<tr><td>Siirtymä

$$\left.\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{r} - \vec{r}^\circ,\\ &= (x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j} + (z-c)\vec{k},\\ &= u_a\vec{i} + u_b\vec{j} + u_c\vec{k}.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$</td><td>Ei yksinkertaista esitystä</td></tr>
</table>

Taulukko 3.3.1 Jatkoa

Lagrangen esitystapa	Eulerin esitystapa
Nopeus $$\left.\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{u}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t},\\ &= \frac{\partial u_a}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial u_b}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial u_c}{\partial t}\vec{k},\\ &= v_a\vec{i} + v_b\vec{j} + v_c\vec{k}.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$	Nopeuskenttä $$\left.\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}(\vec{r}, t),\\ &= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\end{aligned}\right\} \quad (7')$$ on Eulerin esityksen lähtökohtana.
Kiihtyvyys $$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{u}} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2},\\ &= \frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}\vec{k},\\ &= a_a\vec{i} + a_b\vec{j} + a_c\vec{k},\end{aligned}\right\} \quad (8)$$ $$\left.\begin{aligned}a_a &= \frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2},\\ a_b &= \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2},\\ a_c &= \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}.\end{aligned}\right\} \quad (9)$$	Kiihtyvyys $$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v},\\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \vec{v}}{\partial z},\\ &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\end{aligned}\right\} \quad (8')$$ $$\left.\begin{aligned}a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z},\\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z},\\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \quad (9')$$
Muodonmuutoskomponentit (Green-Lagrange) $$\left.\begin{aligned}E_{aa} &= \frac{\partial u_a}{\partial a} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_a}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_b}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_c}{\partial a}\right)^2\right],\\ &\dots\\ E_{bc} &= E_{cb} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_c}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial c} + \frac{\partial u_a}{\partial b}\frac{\partial u_a}{\partial c} + \frac{\partial u_b}{\partial b}\frac{\partial u_b}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial b}\frac{\partial u_c}{\partial c}\right]\\ &\dots\end{aligned}\right\} \quad (10)$$	Ei yksinkertaista esitystä
Infinitesimaaliset rotaatiokomponentit $$\left.\begin{aligned}\omega_a &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_c}{\partial b} - \frac{\partial u_b}{\partial c}\right),\\ \omega_b &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_a}{\partial c} - \frac{\partial u_c}{\partial a}\right),\\ \omega_c &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_b}{\partial a} - \frac{\partial u_a}{\partial b}\right).\end{aligned}\right\} \quad (11)$$	Kulmanopeuskomponentit $$\left.\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right),\\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right),\\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).\end{aligned}\right\} \quad (11')$$
Infinitesimaaliset "insinööri"muodonmuutoskomponentit $$\left.\begin{aligned}\varepsilon_a &= \frac{\partial u_a}{\partial a}, & \gamma_{bc} &= \gamma_{cb} = \frac{\partial u_b}{\partial c} + \frac{\partial u_c}{\partial b},\\ \varepsilon_b &= \frac{\partial u_b}{\partial b}, & \gamma_{ca} &= \gamma_{ac} = \frac{\partial u_c}{\partial a} + \frac{\partial u_a}{\partial c},\\ \varepsilon_c &= \frac{\partial u_c}{\partial c}, & \gamma_{ab} &= \gamma_{ba} = \frac{\partial u_a}{\partial b} + \frac{\partial u_b}{\partial a}.\end{aligned}\right\} \quad (12)$$	Muodonmuutosnopeuskomponentit $$\left.\begin{aligned}d_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, & g_{yz} &= g_{zy} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y},\\ d_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y}, & g_{zx} &= g_{xz} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z},\\ d_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, & g_{xy} &= g_{yx} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \quad (12')$$

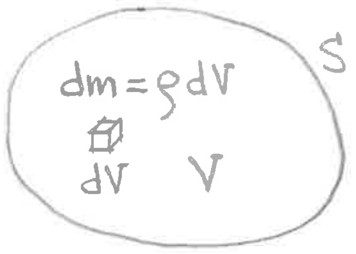
Jotta Lagrangen ja Eulerin esitysten välinen ero tulisi selvästi esille, on käytetty eri tunnuksia ainekoordinaateille a, b, c ja spatiaalikoordinaateille x, y, z. Kun toimitaan vain jommankumman koordinaatiston avulla, käytetään usein seuraavia tunnuksia

$a \to x$, $b \to y$, $c \to z$ $u_a \to u$, $u_b \to v$, $u_c \to w$	$v_x \to u$, $v_y \to v$, $v_z \to w$ $d_x \to \varepsilon_x$, $g_{yz} \to \gamma_{yz}$, $\dots$ $\dots$

3.4 Massan säilyminen

3.4.1 Äärellinen muoto

Yleinen tapaus. Massan säilymisen periaate on luonteeltaan puhtaasti kinemaattinen, joten on paikallaan käsitellä tätä aksioomaa jo tässä vaiheessa.



Kuva 3.4.1 Kontinuumikappale.

Kappaleen kokonaismassa (vrt. kuva 3.4.1)

$$m = \int \rho \, dV. \qquad (3.4.1)$$

Massan säilymisen periaatteen (1.2.2) perusteella $\dot{m} = 0$ eli

$$\frac{d}{dt}\int \rho \, dV = 0. \qquad (3.4.2)$$

Soveltamalla tähän Reynoldsin lausetta (3.3.60) ($f \hat{=} \rho$) saadaan massan säilymisen periaatteen äärellinen muoto

$$\boxed{\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int \rho v_n \, dS = 0.} \qquad (3.4.3)$$

Suure $\int \rho v_n \, dS$ on ns. massavirta (engl. mass flow rate) (kg/s) kontrollipinnan läpi alueesta ulos ja ρv_n on ns. massavirran tiheys (kg/(sm^2)) (ks. kaavaan (3.3.59) liittyvä teksti).

Pysyvässä virtauksessa (ρ = vakio kussakin avaruuden pisteessä) $\partial \rho / \partial t = 0$ ja yhtälö (3.4.3) yksinkertaistuu muotoon

$$\int \rho v_n \, dS = 0. \qquad (3.4.4)$$

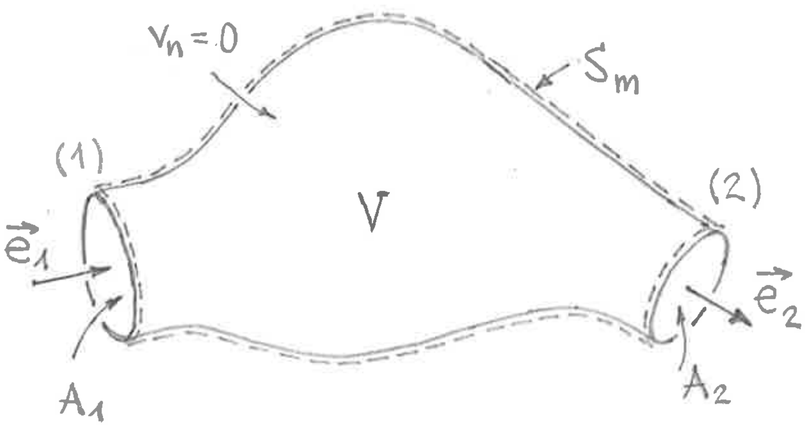
Vakiotiheysnesteelle (ρ = vakio sekä ajan että paikan suhteen) $\partial\rho/\partial t = 0$ ja ρ voidaan ottaa lisäksi integraalimerkin ulkopuolelle, joten yhtälöstä (3.4.3) saadaan myös epästationaarisessa tapauksessa pätevä muoto

$$\boxed{\int v_n \, dS = 0.} \tag{3.4.5}$$

Termi $\int v_n dS$ on ns. tilavuusvirta (engl. volume flow rate) (m^3/s) kontrollipinnan läpi alueesta ulos, joka siis häviää vakiotiheysnesteen virtauksessa.

Standardikontrollialue, [0(1)]. Kaavojen (3.4.3)...(3.4.5) saamia yksityiskohtaisia muotoja tullaan tarkastelemaan tässä eräissä erikoistapauksissa, joista ensimmäinen liittyy ns. standardikontrollialueeseen.

Kuva 3.4.2 esittää käytännössä melko usein



Kuva 3.4.2. Standardikontrollialue.

syntyvää kontrollialueen valintaa. Kontrollipinta muodostuu kohdissa 1 ja 2 tasopinnoista; pinta-alat A_1 ja A_2. Kontrollipinnan loppuosaa $S - A_1 - A_2$ nimitetään tässä ja jatkossa vaippapinnaksi tai lyhyemmin vaipaksi (engl. mantle) ja sitä merkitään tunnuksella S_m. Täten mielivaltainen pintaintegraali

$$\boxed{\int f\,dS = \int_{S_m} f\,dS + \int_{A_1} f\,dA + \int_{A_2} f\,dA.} \tag{3.4.6}$$

Jos tasopintoja on useita, kaava laajenee muotoon

$$\int f\,dS = \int_{S_m} f\,dS + \sum \int_{A_i} f\,dA, \tag{3.4.7}$$

jossa käytettyjen tunnusten merkitys on ilmeinen. Huomautettakoon, että kuten kohdassa 2.2 tässäkin tullaan tasopintaa merkitsemään tunnuksella A.

On syytä sopia tietyistä merkkisäännöistä. Valitaan kullakin tasopinnalla mielivaltaisella tavalla positiivinen puoli ja asetetaan yksikkönormaalivektori $\vec{e}$ osoittamaan tähän suuntaan. Usein $\vec{e}$ pyritään valitsemaan siten, että se osoittaa otaksuttuun virtaussuuntaan päin. Koska yksikkönormaalivektori $\vec{n}$ merkitsi kontrollipinnasta ulospäin suunnattua vektoria, <u>$\vec{e}$ on aina joko $\vec{n}$ tai $-\vec{n}$</u>.

Palataan kuvan 3.4.2 esittämään tapaukseen. Neste virtaa alueeseen tason 1 — tai sanotaan myös poikkileikkauksen 1 kautta — ja poistuu alueesta poikkileikkauksen 2 kautta. Kontrollipinnan vaippaosan S_m läpi ei tapahdu virtausta eli siellä $v_n = 0$. Kirjataan tämä mumallakin käytettäväksi numerolla varustetuksi otaksumaksi

$$O(1): \boxed{v_n = 0 \quad S_m\text{:llä.}}$$

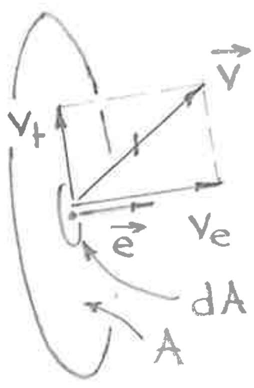
Otaksuman (1) toteuttava vaippa muodostuu tavallisesti jonkin laitteen tai putken seinämästä tai yleisemmin se on tietyn virtaputken vaippapinta. Kuvan 3.4.2 tyyppistä kontrollialuetta, joka toteuttaa lisäksi <u>otaksuman (1)</u>, tullaan nimittämään tässä paremman puutteessa <u>standardikontrollialueeksi</u>. Tämä nimitys ei ole yleisessä käytössä. (Joskus otaksumasta (1) voidaan tehdä tietyllä alueella erikseen mainittu poikkeus; vrt. kuvan 3.3.12 mäntä.)

Kuvan 3.4.2 esittämässä tapauksessa vektorin $\vec{e}$ suunnaksi tullaan valitsemaan suunta $1 \rightarrow 2$, joten tässä $\vec{e}_1 = -\vec{n}_1$ ja $\vec{e}_2 = \vec{n}_2$. Indeksit viittaavat ko. poikkileikkauspinnalla oleviin suureisiin. Edelleen otetaan käyttöön poikkileikkauksessa vallitseva virtausnopeuden normaalikomponentti vektorin $\vec{e}$ avulla määriteltynä (vrt. kaava (3.3.58))

$$v_e = \vec{e} \cdot \vec{v}, \tag{3.4.8}$$

jolloin

$$\left.\begin{aligned} (v_e)_1 &= -(v_n)_1, \\ (v_e)_2 &= (v_n)_2 . \end{aligned}\right\} \tag{3.4.9}$$



Kuva 3.4.3

Etenkin putkivirtauksen yhteydessä on tapana toimia poikkileikkauksen suhteen laskettujen keskimääräisten suureiden avulla. Määritellään yleisesti suureen f ns. <u>pinta-alakeskiarvo</u> (engl. surface average) $\langle f \rangle$ kaavalla (ks. Lähde (23))

$$\boxed{\langle f \rangle = \frac{1}{A} \int f \, dA,} \tag{3.4.10}$$

jossa A on ko. poikkileikkauksen pinta-ala. Vastaavasti siis myös

$$\int f\,dA = \langle f\rangle A. \tag{3.4.11}$$

Otetaan vielä käyttöön seuraavat tunnukset. Poikkileikkauksen läpi vektorin $\vec{e}$ suuntaan kulkevaa <u>massavirtaa</u> merkitään tunnuksella w. Vastaavaa <u>tilavuusvirtaa</u> merkitään tunnuksella Q. Täten siis

$$\boxed{w = \int \varrho v_e\,dA = \langle \varrho v_e\rangle A,} \tag{3.4.12}$$

ja

$$\boxed{Q = \int v_e\,dA = \langle v_e\rangle A.} \tag{3.4.13}$$

Hydrauliikassa nimen tilavuusvirta sijasta käytetään tavallisesti nimeä <u>virtaama</u> (engl. discharge).

Kirjataan seuraava jatkossa usein esiintyvä otaksuma

$$O(2): \boxed{\varrho = \text{vakio } A\text{:lla.}}$$

Havainnot ja laskelmat ovat osoittaneet, että etenkin yksidimensioisessa virtauksessa homogeenisen nesteen tiheys on todellakin yleensä melko vakio kullakin poikkileikkauksella, vaikka tiheys vaihtelisikin virtauksen suunnassa. <u>Vakiotiheysnesteellä otaksuma (2) on automaattisesti voimassa.</u>

Otaksumasta (2) seuraa, että

$$\int \varrho f\,dA = \varrho \int f\,dA \quad [O(2)] \tag{3.4.14}$$

ja

$$\langle \varrho f\rangle = \varrho\langle f\rangle. \quad [O(2)] \tag{3.4.15}$$

Samoin siis massavirta

$$w = \rho\langle v_e\rangle A = \rho Q. \quad [O(2)] \qquad (3.4.16)$$

Kirjataan vielä kolmas otaksuma

$$O(3): \boxed{\text{Yhdensuuntaisvirtaus } A\text{:lla.}}$$

Etenkin kinetiikan yhteydessä standardikontrollialueen mielekkään käytön edellytyksenä on, että poikkileikkaukset 1 ja 2 voidaan valita kohdista, joissa virtaus on oletettavasti riittävällä tarkkuudella *yhdensuuntaisvirtausta* (engl. parallel flow) ts. *virtaviivat ovat yhdensuuntaisia* (suoria). Tällöin siis koko poikkileikkauksen alueella pätee likimain (ks. kuva 3.4.3)

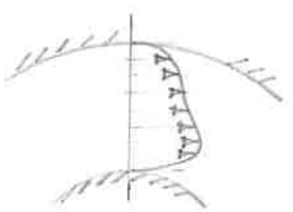
$$\vec{v} = v_e\vec{e} \equiv v\vec{e}, \quad [O(3)] \qquad (3.4.17)$$

eli

$$v_e = v, \; v_t = 0, \quad [O(3)] \qquad (3.4.18)$$

kun poikkileikkaus on otettu kohtisuoraan virtaussuuntaa vastaan. Suure v on ns. *algebrallinen vauhti* (vrt. kaava (3.3.26)) vaikkakin usein käytännössä puhutaan vain nopeudesta. Termi v_t on ns. *tangentiaalinen nopeus* tai tangentiaalinopeus. Esimerkiksi putkivirtaus on yleensä likimain yhdensuuntaisvirtausta, koska putken seinämät rajoittavat virtaussuunnan likimain putken akselin suuntaiseksi.

Edellä esitetyssä yhdensuuntaisvirtauksen määritelmässä vaaditaan tavallisesti — kuten on merkitty sulkuihin — että virtaviivat ovat tietyn poikkileikkauksen kohdalla paitsi yhdensuuntaisia myös likimain suoria eli että virta-



Kuva 3.4.4

niivojen kaarevuus on pieni. Kun tätä korostetaan, tullaan jatkossa puhumaan <u>suorasta yhdensuuntaisvirtauksesta</u>. Kinetiikassa osoitetaan, että vakiotiheysnesteen painejakautuma on kussakin poikkileikkauksessa hydrostaattinen suorassa yhdensuuntaisvirtauksessa. Tätä seikkaa käytetään kinetiikassa paljon hyväksi. Jos virtaviivat ovat kaarevia, näin ei enää ole asian laita. Kinematiikan kannalta sana suora voidaan kuitenkin jättää tässä pois yhdensuuntaisvirtauksen määritelmästä, sillä vain kaavat (3.4.17) ja (3.4.18) ovat nyt oleellisia (vrt. kuva 3.4.4).

Otaksumasta (3) seuraa, että aikaisemmissa olleissa kaavoissa $v_e \rightarrow v$ ja saadaan mm.

$$w = \int \varrho v \, dA = \langle \varrho v \rangle A, \quad [0(3)] \qquad (3.4.19)$$

$$Q = \int v \, dA = \langle v \rangle A, \quad [0(3)] \qquad (3.4.20)$$

$$w = \varrho \langle v \rangle A \, (= \varrho Q.) \quad [0(2), 0(3)] \qquad (3.4.21)$$

Suureetta

$$\boxed{\langle v \rangle = \frac{Q}{A}} = \frac{1}{A} \int v \, dA \quad [0(3)] \qquad (3.4.22)$$

nimitetään tavallisesti poikkileikkauksessa vallitsevaksi <u>keskimääräiseksi nopeudeksi</u> tai lyhyemmin keskinopeudeksi (engl. average velocity); tarkemmin ottaen siis tietty algebrallinen nopeus. Samaa nimitystä voidaan myös käyttää kirjoittamalla kaava (3.4.22) ilman otaksumaa (3), jolloin $v \rightarrow v_e$.

Otaksumat (2) ja (3) on esitetty jo tässä kohdassa lähinnä jatkoa silmällä pitäen. Johdetaan nyt yleisen kaavan (3.4.3) saama muoto standardikontrollialueen tapauksessa. Tehdään aluksi vain otaksuma (1). Kaavoja (3.4.6), (3.4.9) ja (3.4.12) soveltamalla saadaan

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \cancel{\int_{S_m} \rho v_n dS} + \int_{A_1} \rho v_n dA + \int_{A_2} \rho v_n dA = 0,$$

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV - \int_{A_1} \rho v_e dA + \int_{A_2} \rho v_e dA = 0,$$

$$\boxed{\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV - w_1 + w_2 = 0.} \quad [0(1)] \qquad (3.4.23)$$

Pysyvässä virtauksessa $\partial \rho / \partial t = 0$ ja saadaan yhtälö

$$\boxed{w_1 = w_2} = w = \text{vakio} \quad [0(1)] \qquad (3.4.24)$$

eli poikkileikkausten 1 ja 2 läpi kulkeva massavirta on yhtä suuri.

Vakiotiheysmassan virtauksessa $\partial \rho / \partial t = 0$ ja ρ voidaan ottaa integraalimerkkien ulkopuolelle (0(2) toteutuu itsestään), joten saadaan supistamalla vielä ρ:lla

$$\boxed{Q_1 = Q_2} = Q = \text{vakio} \quad [0(1)] \qquad (3.4.25)$$

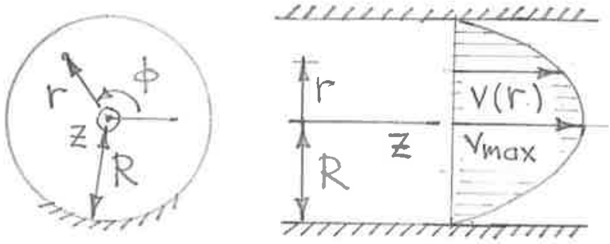
eli poikkileikkausten 1 ja 2 läpi kulkeva virtaama on yhtä suuri (kullakin hetkellä myös epästationaarisessa virtauksessa).

Soveltamalla kaavaa (3.4.20) yhtälöön (3.4.25) yhtälöön (3.4.25) syntyy havainnollinen tulos

$$\boxed{\frac{\langle v \rangle_1}{\langle v \rangle_2} = \frac{A_2}{A_1}} \quad [0(1), 0(3)] \qquad (3.4.26)$$

eli keskinopeudet ovat kääntäen verrannollisia vastaaviin poikkileikkauspinta-aloihin.

Esimerkki 3.4.1. Ympyräpoikkileikkaus. Tarkastellaan suoraa ympyräpoikkileikkauksen omaavaa putkea. Käytetään sylinterikoordinaatistoa (kuva (a)). Pitkässä putkessa virtaus on yhdensuuntaisvirtausta eli vain komponentti $v_z \equiv v \neq 0$ ja symmetriasyistä v riippuu vain koordinaatista r eli $v = v(r)$.



(a)

Mittaukset — ja laminaarisessa virtauksessa myös teoria — ovat osoittaneet, että nopeuden jakautuma poikkileikkauksessa on (1) laminaarisessa virtauksessa muotoa

$$v(r) = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] v_{max} \tag{a}$$

ja (2) turbulenttisessa virtauksessa likimain muotoa

$$v(r) = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} v_{max}, \tag{b}$$

jossa $n = 7$ ja $v_{max} = v(0)$. Määritetään kummassakin tapauksessa suureen v_{max} arvo keskinopeuteen $\langle v \rangle$ verrattuna.

(1). Laminaarisessa virtauksessa

$$\int_A v\,dA = \int_0^R v(r)\,2\pi r\,dr = 2\pi \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r\,dr \cdot v_{max}$$

$$= 2\pi \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr \cdot v_{max} = 2\pi \Big|_0^R \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4}\frac{r^4}{R^2}\right) v_{max}$$

$$= 2\pi R^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) v_{max} = \frac{1}{2}\pi R^2 v_{max}. \tag{c}$$

Poikkileikkauspinta-ala $A = \pi R^2$, joten keskinopeus (ks. kaava (3.4.22))

$$\langle v \rangle = \frac{1}{A}\int v\,dA = \frac{1}{2} v_{max} \qquad (d)$$

ja

$$v_{max} = 2\langle v \rangle. \qquad (e)$$

(2). Turbulenttisessa virtauksessa

$$\int_A v\,dA = \int_0^R v(r)\,2\pi r\,dr = 2\pi \int_0^R \left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/n} r\,dr \cdot v_{max}. \qquad (f)$$

Ottamalla käyttöön apumuuttuja $t = \left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/n}$, saadaan

$$r = R(1-t^n), \quad dr = -Rnt^{n-1} \qquad (g)$$

ja integraaliksi tulee

$$\int_A v\,dA = 2n\pi R^2 \int_1^0 (t^{2n} - t^n)\,dt \cdot v_{max}$$

$$= 2n\pi R^2 \Big|_1^0 \left(\frac{1}{2n+1} t^{2n+1} - \frac{1}{n+1} t^{n+1}\right) \cdot v_{max}$$

$$= 14\pi R^2 \left(-\frac{1}{15} + \frac{1}{8}\right) v_{max} = \frac{49}{60}\pi R^2 v_{max}. \qquad (h)$$

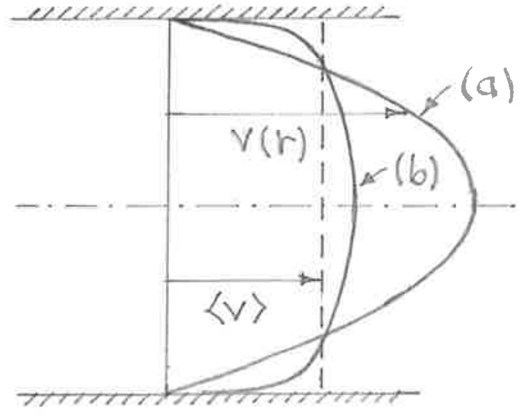
Täten keskinopeus

$$\langle v \rangle = \frac{1}{A}\int v\,dA = \frac{49}{60} v_{max} \approx 0{,}817\, v_{max} \qquad (i)$$

ja

$$v_{max} = \frac{60}{49}\langle v \rangle \approx 1{,}22 \langle v \rangle. \qquad (j)$$

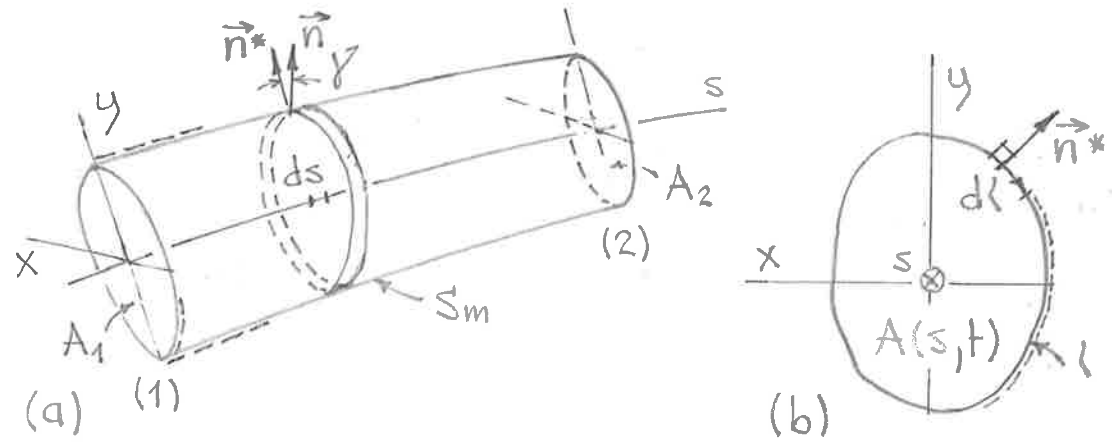
Kuvaan (b) on piirretty näkyviin kaavojen (a) ja (b) mukaiset nopeusjakautumat ottaen kummassakin tapauksessa keskinopeus samaksi. Tulokset on saatu kokoonpuristumattomalle Newtonin nesteelle. Turbulenttisen



(b)

virtauksen nopeusjakautuma on paljon tasaisempi kuin laminaarisen. Tämä on tyypillistä myös muillekin poikkileikkausmuodoille kuin ympyrälle. Kaava (b) ei ole enää realistinen seinämän välittömässä läheisyydessä.

Yleinen yksidimensioinen virtaus, [0(2), 04]. Tarkastellaan kuvan 3.4.5 esittämää kontrollialuetta, joka on tyypiltään putkimainen. Käy-



Kuva 3.4.5 (a) Kontrollialue, (b) Tyypillinen poikkileikkaus.

tetään paikkakoordinaattina putken suunnassa kulkevaa sopivasti valittua käyrää – jota tullaan nimittämään jatkossa virtausakseliksi – pitkin mitattua kaarenpituutta s. Virtausakseli voi olla varsinaisessa putkivirtauksessa esimerkiksi poikkileikkauspintojen pintakeskiöiden kautta kulkeva käyrä ja avouomavirtauksessa esimerkiksi uoman pohjaa seuraava käyrä. Kukin ns. poikkileikkauspinta tai poikkileikkaus tarkoittaa taas ainakin likimain akselia vastaan kohtisuorassa olevan tason sitä aluetta, joka jää vaipan S_m ja ko. tason leikkauskäyrän l sisäpuolelle (kuva 3.4.5(b)).

Kunkin poikkileikkauksen alueella oleva piste voidaan esittää esimerkiksi x- ja y-koordinaattien avulla (kuva 3.4.5(b)). Täten kontrollialueessa määriteltyjen funktioiden riippuvuus on yleisesti tyyppiä $f(x,y,s,t)$. Jos kuitenkin toimitaan lähinnä pinta-alakeskiarvojen avulla, riippuvuus koordinaateista x ja y häviää ja päästään tyyppiä $\langle f\rangle(s,t)$ olevien funktioiden käsittelyyn. Koska tällöin yksi paikkakoordinaatti riittää, puhutaan vastaavasti yksidimensioisesta virtauksesta.

Jatkon kannalta on tarpeen tehdä seuraava otaksuma

$$O(4): \boxed{\text{Virtausakselin kaarevuus on pieni.}}$$

Tästä otaksumasta seuraa, että voidaan tehdä approksimaatiot (ks. tarkemmin kohta L.2)

$$\int f dV \approx \int_1^2 \left(\int f dA\right) ds = \int_1^2 \langle f\rangle A\, ds, \; [O(4)] \qquad (3.4.27)$$

$$\int f dS = \int_{S_m} f dS + \int_{A_1} f dA + \int_{A_2} f dA$$

$$\approx \int_1^2 \left(\int \frac{f}{\cos\gamma} dl\right) ds + \langle f\rangle_1 A_1 + \langle f\rangle_2 A_2 . \; [O(4)] \qquad (3.4.28)$$

Nämä kaavat ovat täysin tarkkoja suoran akselin tapauksessa. Jos geometria on pyörähdyssymmetrinen, γ ja $\cos\gamma$ ovat kussakin poikkileikkauksessa vakioita ja $\cos\gamma$ voidaan viedä piirin yli otetun integraalin ulkopuolelle. Jos geometria on prismaattinen, $\gamma = 0$ ja $\cos\gamma = 1$. Käytännössä yksidimensioisessa virtauksessa päästään lähelle tärkeän otaksuman (3) toteutumista vain, jos poikkileikkaus muuttuu hitaasti s:n suhteen, jolloin $\gamma \approx 0$ ja $\cos\gamma \approx 1$. Kirjallisuudessa ei ole esitetty mitään selkeitä ohjeita otaksuman (4) kaarevuuden numeroarvoista.

Liitteessä L.2 on osoitettu, että Reynoldsin lause (3.3.60) saa kaavojen (3.4.27) ja (3.4.28) avulla lopuksi muodon

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int f\,dV \approx \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}(\langle f\rangle A)\,ds + \\ -\langle f v_e\rangle_1 A_1 + \langle f v_e\rangle_2 A_2 . \end{aligned}} \quad [0(4)] \qquad (3.4.29)$$

(Tässä on lisäksi otaksuttu, että neste ei saa suotovirtauksena tai sateena tulevaa osuutta vaippapinnan kautta. Jos tämä osuus tulee ottaa huomioon, on sovellettava täydellistä kaavaa (L.2.15).)

Kohtuullisen yksinkertaisten kaavojen saavuttamiseksi tehdään vielä <u>otaksuma (2)</u> eli ρ on vakio kullakin poikkileikkauspinnalla, jolloin riippuvuus $\rho = \rho(x,y,s,t)$ tulee muotoon

$$\rho = \rho(s,t) . \quad [0(2)] \qquad (3.4.30)$$

Johdetaan nyt yleisen yhtälön (3.4.2) saama muoto (kaavassa (3.4.29) $f \hat{=} \rho$)

$$\frac{d}{dt}\int \rho\, dV = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}(\langle\rho\rangle A)\, ds - \langle\rho v_e\rangle_1 A_1 + \langle\rho v_e\rangle_2 A_2$$

$$= \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\, ds - \rho_1 \langle v_e\rangle_1 A_1 + \rho_2 \langle v_e\rangle_2 A_2 = 0 \qquad (3.4.31)$$

eli

$$\boxed{\int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\, ds - \rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 = 0.} \quad [0(2), 0(4)] \qquad (3.4.32)$$

Johdossa on siis käytetty hyväksi kaavan (3.4.30) tai kaavan (3.4.15) lisäksi virtaaman Q määritelmää (3.4.13).

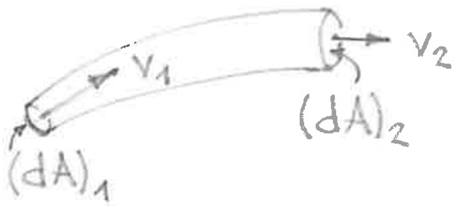
Yleisestä yhtälöstä (3.4.32) saadaan helposti esille erikoistapauksia, kun otetaan huomioon, että esimerkiksi pysyvässä virtauksessa $\rho(s,t) = \rho(s)$ ja $A(s,t) = A(s)$, vakiotiheyksisen virtauksessa $\rho(s,t) = \rho =$ vakio. Näitä tuloksia on esitetty taulukossa 3.4.1.

Yksidimensioisen virtauksen tärkeä sovellutusalue on ns. putkivirtaus (engl. pipe flow), jossa vaippapinta S_m on nimenomaan tietyn nesteellä täynnä olevan putken sisäpinta. Yleensä voidaan lisäksi otaksua ns. jäykän seinämän (engl. rigid wall) tapaus, jolloin $A(s,t) = A(s)$. Vastakohtainen ns. joustavan seinämän (engl. flexible wall) otaksuma on tarpeen esimerkiksi ns. vesi-iskun (engl. water-hammer) käsittelyssä tai vaikkapa tutkittaessa virtausta verisuonistossa.

Edellä on korostettu, että kontrollialue on valittu tässä esityksessä aina kiinteäksi.

Onko kaava (3.4.32) sitten enää voimassa, jos pinta-ala A jossain kohdassa on kasvanut esimerkiksi kaksinkertaiseksi alkuperäiseen arvoonsa verrattuna? Kyllä kaava pätee yleisesti. Täsmällisemmin sanottuna kaavan johto tulisi suorittaa periaatteessa aina eri kontrollialueelle, joka pidettäisiin sitten ajan välin $(t, t+dt)$ verran kiinteänä, joka asetelma riittäisi johdon suorittamiseen.

Yksidimensioisen virtauksen kaavoja voidaan myös soveltaa stationaarisessa ja virtaussuunnaltaan stationaarisessa tapauksessa mielivaltaiseen virtasäikeeseen (kuva 3.4.6), jolla siis $dA(s,t) = dA(s)$. Virtasäikeellä nopeutta voidaan pitää vakiona differentiaalisen poikkileikkauksen alueella ja keskiarvomerkit $\langle\ \rangle$ voidaan jättää pois. Esimerkiksi



Kuva 3.4.6

kaavan (3.4.26) perusteella voidaan saada mielikuva nopeuden jakautumasta, jos virtaviivojen kulku on selvillä. Samoin huomataan, että virtasäie ei voi kuroutua pisteeksi, koska se johtaisi teoriassa äärettömään virtausnopeuden arvoon.

Johdetaan vielä kaavaa (3.4.32) vastaava <u>differentiaaliyhtälömuoto</u> — tämän voisi katsoa kuuluvan yhtä hyvin kohtaan 3.4.2 — tarkastelemalla kahta läheikkäistä kohdissa s ja $s+\Delta s$ olevaa poikkileikkausta ja antamalla $\Delta s \to 0$. Soveltamalla integraalilaskennan väliarvolausetta yhtälön (3.4.32) integraaliin saadaan <u>yleinen tulos</u>

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\right]^{*} \Delta s - (\rho Q)\Big|_{s} + (\rho Q)\Big|_{s+\Delta s} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\right]^{*} + \frac{-(\rho Q)|_{s} + (\rho Q)|_{s+\Delta s}}{\Delta s} = 0,$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho Q) = 0.} \quad [0(2),0(4)] \tag{3.4.33}$$

Edellä merkinnät $[\ ]^{*}$, $(\ )|_{s}$ ja $(\ )|_{s+\Delta s}$ tarkoittavat suureen $[\ ]$ arvoa pisteessä ξ $(s<\xi<s+\Delta s)$, suureen $(\ )$ arvoa pisteessä s ja suureen $(\ )$ arvoa pisteessä $s+\Delta s$. Kun $\Delta s \to 0$, $\xi \to s$ ja saadaan yhtälö (3.4.33). Tästä yhtälöstä esiintyy kirjallisuudessa hyvin suuri määrä eri versioita riippuen siitä onko kyseessä pysyvä virtaus, vakiotiheysneste, jäykän seinämän tapaus jne. Joskus näkee käytettävän myös ainederivaatan tyyppistä merkintää (vrt. kaava (3.3.29))

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle v_e \rangle \frac{\partial f}{\partial s}, \tag{3.4.34}$$

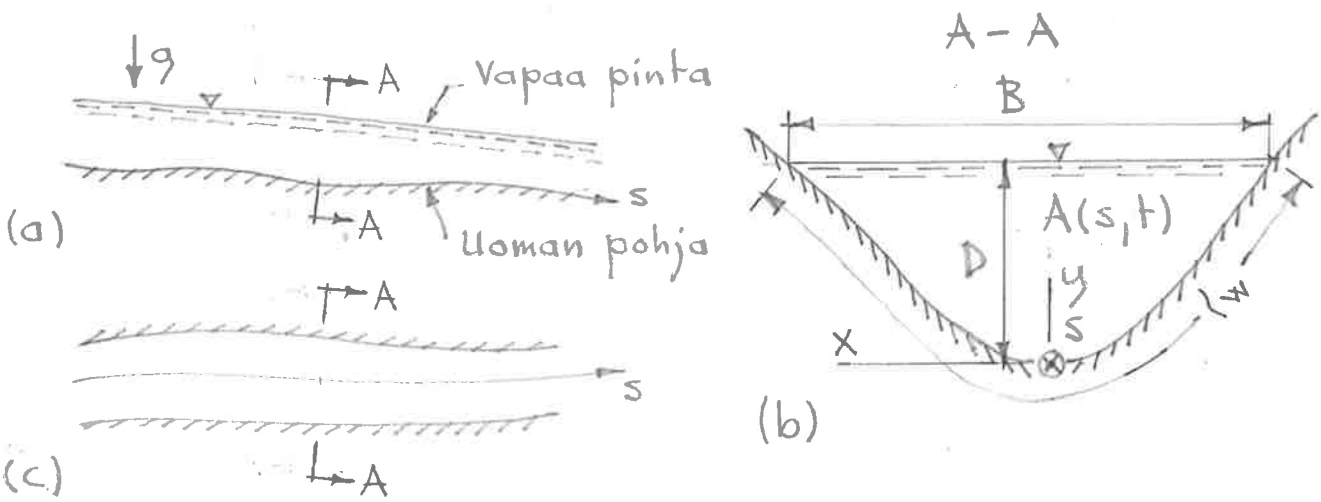
jonka soveltaminen lisää jälleen eri versioiden määrää. Kaavan (3.4.34) esittämä derivaatta kuvaa keskinopeudella $\langle v_e \rangle$ liikkuvan havaitsijan mittaamaa funktion $f(s,t)$ muutosnopeutta. Taulukossa 3.4.1 on esitetty eräitä yhtälön (3.4.33) erikoistapauksia.

Huomautettakoon vielä, että kinetiikan käsittelyssä joudutaan yleensä tekemään lisäksi oletus (3), jolloin myös edellä esitetyissä kaavoissa on asetettava $v_e \to v$.

Putkivirtauksen lisäksi yksidimensioista tarkastelutapaa sovelletaan eniten ns. avouomavirtauksessa.

Avouomavirtaus, [O(2), O(3), O(4), joista otaksuma (3) ei ole oleellinen.] Avouomavirtauksella (engl. open channel flow) tarkoitetaan tavallisesti varsinaisen nesteen virtausta painovoiman johdosta tietyssä uomassa siten, että nesteellä on ilman kanssa rajapinta eli ns. vapaa pinta. Tavallisimpia sovellutuksia ovat veden virtaus joissa, kanavissa, uittorännneissä jne. Avouomavirtauksen analysointi on putkivirtaukseen verrattuna paljon vaikeampaa, koska nesteen vapaan pinnan asema esiintyy tuntemattomana suureena. Lisäksi luonnonuomien geometria ja pintojen karheus voivat vaihdella hyvin mielivaltaisella tavalla, jotka seikat hankaloittavat teoreettista tarkastelua.

Kuvassa 3.4.7 näkyy tässä esityksessä käy-



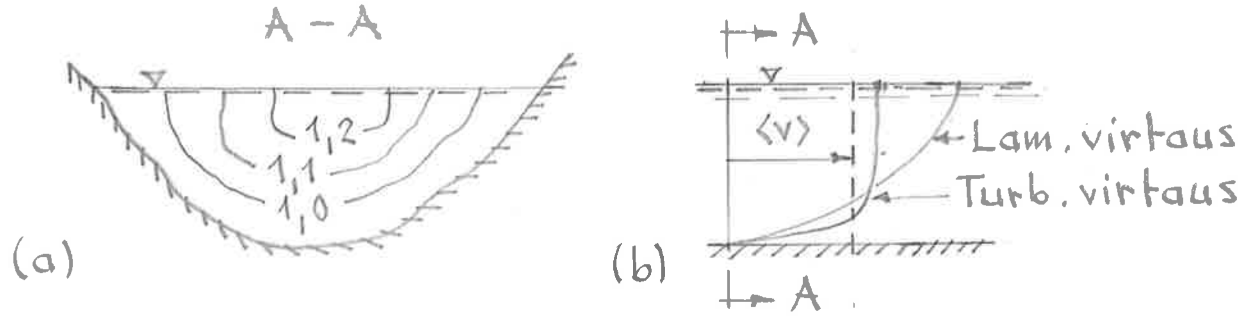
Kuva 3.4.7. (a) Uoma sivulta katsottuna. (b) Uoman poikkileikkaus. (c) Uoma ylhäältä katsottuna.

tettyjä merkintöjä. Avouomavirtausta käsitellään yleensä samaan tapaan kuin putkivirtaustakin yksidimensioisena. Riippumattomaksi paikkakoordinaatiksi on otettu uoman alinta kohtaa pitkin mitattu kaarenpituus s. (Hyvin voimakkaasti pohjamuodoltaan vaihtelevassa tapauksessa akseli on ajateltava sopivasti tasoitetuksi; ei ole mielekästä antaa suureen s kasvaa seuraamalla esimerkiksi uoman pohjalla olevien kuoppien pohjia.) Seuraavassa käsitellään vain vakiotiheysnesteen virtausta.

Avouomavirtausta pidetään ratkaistuna, kun tunnetaan nesteen täyttämän uoman poikkileikkauksen pinta-ala $A(s,t)$ tai syvyys $D(s,t)$ sekä virtaama $Q(s,t)$. Keskinopeus $\langle v \rangle$ saadaan kaavasta

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{A}. \quad [O(3)] \tag{3.4.35}$$

Yksityiskohtaista nopeusjakautumaa $v(x,y,s,t)$ ei yleensä pystytä määrittämään laskennollisesti eikä se ole usein tarpeenkaan, vaan tyydytään suureeseen $\langle v \rangle(s,t)$. Havaintojen perusteella nopeusjakautumat ovat luonteeltaan



Kuva 3.4.8. (a) Suureen $v/\langle v \rangle$ tasa-arvokäyriä uoman poikkileikkauksen alueella. (b) Nopeusjakautuma pystysuunnassa.

jotain kuvan 3.4.8 esittämän tapaista.

Yleisen yksidimensioisen virtauksen otaksumien

(2) ja (4) lisäksi otetaan jo käyttöön O(3) sekä oletetaan vielä: vapaa pinta on kussakin poikkileikkauksessa vaakasuorassa. Tämä ei pidä havaintojen mukaan paikkaansa, jos esimerkiksi uoman kaarevuus vaakatasossa on suuri.

Koska uoman seinämien geometriaa pidetään annettuna ja seinämiä tässä kiinteinä (Eroosio ja sedimentaatio muuttavat geometriaa.), pinta-ala A on äskeisen oletuksen jälkeen kussakin poikkileikkauksessa syvyyden (engl. depth of flow) D funktio eli

$$A = A(s, D). \qquad (3.4.36)$$

Tässä muuttuja s viittaa siihen mahdollisuuteen, että uoman poikkileikkaus muuttuu geometrialtaan s:n mukana. Jos geometria ei muutu, yhteys (3.4.36) on tyyppiä $A = A(D)$. On huomattava, että taas $D = D(s,t)$, joten joka tapauksessa A on edelleen riippumattomien muuttujien s ja t funktio. Termin syvyys D sijasta olisi tässä tarkemmin ottaen ehkä parempi käyttää nimitystä kokonaissyvyys; vrt. kuva 3.4.7 ja 2.2.1.

Katsotaan nyt, mitä eri muotoja yleinen differentiaaliyhtälö (3.4.33) eli toistettuna yhtälö

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho Q) = 0 \qquad (3.4.37)$$

saa tässä käyttöön otettujen merkintöjen johdosta. Ensinnäkin rajoittumalla vakiotiheysmerteen viitaukseen $\partial\rho/\partial t = \partial\rho/\partial s = 0$ ja saadaan yhtälö (jaetaan ρ:lla)

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0} \qquad (3.4.38)$$

eli koska $Q = \langle v \rangle A$,

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + A\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial s} + \langle v \rangle \frac{\partial A}{\partial s} = 0.} \qquad (3.4.39)$$

*) Osittaisderivaatta

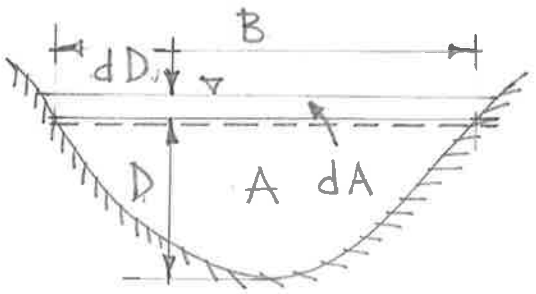
$$\frac{\partial A}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial D}\right)_s \frac{\partial D}{\partial t} \qquad (3.4.40)$$

ja osittaisderivaatta

$$\frac{\partial A}{\partial s} = \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_D + \left(\frac{\partial A}{\partial D}\right)_s \frac{\partial D}{\partial s}. \qquad (3.4.41)$$

Tässä on vastaavia merkintöjä kuin kohdassa 1.3 osoittamaan, mitä muuttujia pidetään kulloinkin riippumattomina funktiossa $A(s,D) = A(s, D(s,t))$. Kaavat (3.4.40) ja (3.4.41) on saatu ketjuderivoimalla.

Derivaatan $\left(\frac{\partial A}{\partial D}\right)_s$ merkitys saadaan selville kuvan 3.4.9 avulla. Derivaatta tarkoittaa poikkileikkauspinta-alan kasvunopeutta syvyyden D muuttumisen suhteen, kun s on vakio. Kuvan perusteella syvyyden differentiaalia dD vastaa pinta-alan lisäys $dA = B\,dD$ ja siis



Kuva 3.4.9

$$\left(\frac{\partial A}{\partial D}\right)_s = B, \qquad (3.4.42)$$

jossa $B(s,D)$ on uoman leveys (engl. breadth) vapaan pinnan kohdalla.

Derivaatta $\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_D$ tarkoittaa poikkileikkauspinta-alan kasvunopeutta s:n muuttu-

misen suhteen, kun D pidetään vakiona. Tämä derivaatta häviää poikkileikkausgeometrialtaan
*1 muuttumattomassa uomassa.

Yhtälö (3.4.39) saa kaavoja (3.4.40)...(3.4.42) apuna käyttäen nyt muodon

$$B\frac{\partial D}{\partial t} + A\frac{\partial \langle v\rangle}{\partial s} + \langle v\rangle\left[B\frac{\partial D}{\partial s} + \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_D\right] = 0. \qquad (3.4.43)$$

Kun tämä jaetaan vielä leveydellä B, saadaan yhtälö

$$\boxed{\frac{\partial D}{\partial t} + D_h\frac{\partial \langle v\rangle}{\partial s} + \langle v\rangle\left[\frac{\partial D}{\partial s} + \frac{1}{B}\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_D\right] = 0,} \qquad (3.4.44)$$

jossa

$$\boxed{D_h = \frac{A}{B}} \qquad (3.4.45)$$

on poikkileikkauksen ns. <u>hydraulinen syvyys</u> (engl. <u>hydraulic depth</u>) ($[D_h] = m$).

Yhtälö (3.4.44) on melko yleisessä muodossa oleva avouomavirtaukseen liittyvä massan säilymisen periaatteesta johdettu osittaisdifferentiaaliyhtälö, jossa s ja t ovat riippumattomia muuttujia ja D ja $\langle v\rangle$ tuntemattomia.

<u>Pysyvässä virtauksessa</u> $\partial D/\partial t = 0$ ja saadaan yhtälö

$$D_h\frac{d\langle v\rangle}{ds} + \langle v\rangle\left[\frac{dD}{ds} + \frac{1}{B}\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_D\right] = 0, \qquad (3.4.46)$$

joka on siis vain yhtälöstä (3.4.33) vakiotiheysnesteen ja pysyvän virtauksen tapauksessa syntyvän yhtälön $dQ/ds = 0$ vielä B:llä jakamalla saatu monimutkaisen asun ottanut versio.

Avouomavirtauksen yksinkertainen mutta samalla tärkeä perustapaus on ns. tasainen virtaus, jossa $\langle v \rangle$ ja D ovat sekä paikan että ajan suhteen vakioita. Tämä vaatii käytännössä, että uoma on prismaattinen eli akseli on suora ja poikkileikkausgeometria on muuttumaton. Vapaalla pinnalla on tällöin sama kaltevuus kuin uoman pohjalla. On helppo todeta, että tasaisessa virtauksessa yhtälö (3.4.44) toteutuu automaattisesti.

Määritellään vielä jatkoa varten kolme avouomavirtauksessa tavanomaista suuretta. Ns. märkä piiri (engl. wetted perimeter) l_w ($[l_w] = m$) on poikkileikkauspinnan reunaviivan sen osan pituus, joka yhtyy uoman seinämään (kuva 3.4.7 (b)). Suure

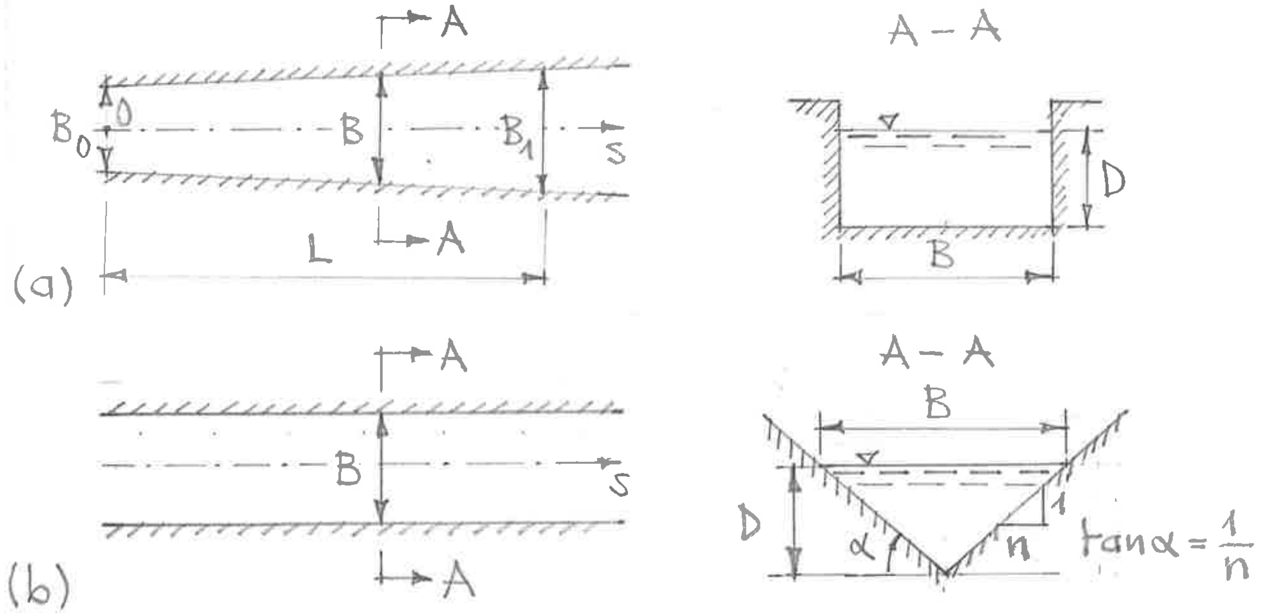
$$\boxed{R_h = \frac{A}{l_w}} \tag{3.4.47}$$

on ns. hydraulinen säde (engl. hydraulic radius) ($[R_h] = m$). Nämä suureet tulevat käyttöön kinetiikassa. Usein käytetään lisäksi käsitettä hydraulinen halkaisija (engl. hydraulic diameter)

$$\boxed{d_h = \frac{4A}{l_w}} = 4R_h. \tag{3.4.48}$$

Näitä suureita käsitellään myös putkivirtauksessa ja ympyräpoikkileikkauspinnalle (säde $= R$, halkaisija $d = R/2$, $A = \pi R^2$, $l_w = 2\pi R$) $d_h = d$, mutta $R_h = R/2$.

Esimerkki 3.4.2. Suorakaide- ja kolmiopoikkileikkaus. Johdetaan yhtälön (3.4.44) saama muoto (1) kuvan (a) esittämän suorakaidepoikkileikkauksen tapauksessa ja (2) kuvan (b) esittämän kolmiopoikkileikkauksen tapauksessa.



(1) Kuvan (a) esittämien merkintöjen avulla saadaan

$$\left.\begin{aligned} B &= B_0 + \frac{s}{L}(B_1 - B_0), \\ A &= BD = \left[B_0 + \frac{s}{L}(B_1 - B_0)\right]D, \\ D_h &= A/B = D. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Derivaatta

$$\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_D = \frac{B_1 - B_0}{L} D. \tag{b}$$

Yhtälö (3.4.44) on siis

$$\frac{\partial D}{\partial t} + D\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial s} + \langle v \rangle \left[\frac{\partial D}{\partial s} + \frac{1}{B_0 + \frac{s}{L}(B_1 - B_0)} \frac{B_1 - B_0}{L} D\right] = 0. \tag{c}$$

Jos $B_1 = B_0$ eli jos B on vakio, tämä yksinkertaistuu muotoon

$$\frac{\partial D}{\partial t} + D\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial s} + \langle v\rangle\frac{\partial D}{\partial s} \tag{d}$$

eli

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(\langle v\rangle D) = 0. \tag{e}$$

Pysyvässä virtauksessa saadaan täten

$$\frac{d}{ds}(\langle v\rangle D) = 0 \tag{f}$$

eli

$$\langle v\rangle D = \text{vakio}. \tag{g}$$

Sisuus $\langle v\rangle D$ on yhtä kuin Q/B.

Kuvan (a) perusteella suorakaidepoikkileikkauksella märkä piiri

$$l_w = B + 2D \tag{h}$$

ja hydraulinen säde

$$R_h = \frac{BD}{B+2D}. \tag{i}$$

Tämä lähestyy arvoa D leveän uoman tapauksessa, jolloin $B \gg D$.

(2) Kuvan (b) esittämien merkintöjen avulla saadaan

$$\left.\begin{aligned} B &= 2nD, \\ A &= BD/2 = nD^2, \\ D_h &= A/B = D/2. \end{aligned}\right\} \tag{j}$$

Derivaatta

$$\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_D = 0. \tag{k}$$

Yhtälö (3.4.44) on siis

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{D}{2}\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial s} + \langle v \rangle \frac{\partial D}{\partial s} = 0. \qquad (l)$$

Pysyvässä virtauksessa saadaan yhtälö

$$\frac{D}{2}\frac{d\langle v \rangle}{ds} + \langle v \rangle \frac{dD}{ds} = 0. \qquad (m)$$

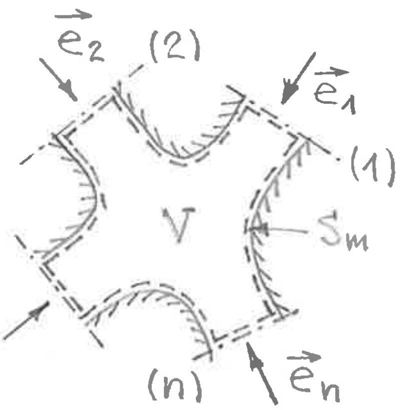
Märkä piiri

$$l_w = 2\sqrt{1+n^2}\,D \qquad (n)$$

ja hydraulinen säde

$$R_h = \frac{n}{2\sqrt{1+n^2}}\,D. \qquad (o)$$

Solmukohta. Tarkastellaan kuvan 3.4.10 esittämää periaatteessa n:n lähes yksidimensioisen virtauksen yhtymäkohtaa eli ns. solmukohtaa (engl. node, junction). Määritellään tässä virtaama kussakin leikkauksessa positiiviseksi, kun virtaus tapahtuu kuvan yksikkövektoreiden suuntaan eli solmukohtaan päin.



Kuva 3.4.10

Yleinen yhtälö (3.4.3) saa siten sovellettuna kuvan esittämään kontrollialueeseen ensin muodon (vrt. kaava (3.4.7))

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_m} \rho v_n dS - \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} \rho v_e dA = 0, \qquad (3.4.49)$$

jossa esiintyvien tunnusten merkitys on aikaisemman perusteella ilmeinen. Tavallisesti jätetään vielä lisäksi yhtälön kaksi ensimmäistä termiä pois ajatellen tavallaan, että poikkileikkaukset on viety teoreettiseen pistemäiseen solmukohtaan saakka, jolloin tilavuus V ja vaippapinta S_m häviävät. Tilavuusintegraali häviää joka tapauksessa pysyvässä virtauksessa sekä vakiotiheysnesteelle. Pintaintegraali vaippapinnan yli häviää taas ainakin jäykkien seinämien yhteydessä. Käyttämällä apuna merkintää (3.4.10) saadaan siis merkkiä vaihtamalla yhtälö $\sum \langle \rho v_e \rangle_i A_i = 0$ tai lyhyemmin

$$\boxed{\sum w_i = 0} \tag{3.4.50}$$

eli <u>solmukohtaan saapuvien massavirtojen summa on nolla</u>. Jos tiheys voidaan olettaa vakioksi kussakin poikkileikkauksessa, saadaan $\sum \rho_i \langle v_e \rangle_i A_i = 0$ eli

$$\sum \rho_i Q_i = 0 \tag{3.4.51}$$

Tästä seuraa <u>vakiotiheysnesteelle</u> yhtälö

$$\boxed{\sum Q_i = 0} \tag{3.4.52}$$

eli <u>solmukohtaan saapuvien virtaamien summa on nolla</u>.

Kaavat (3.4.50)...(3.4.52) ovat analogisia sähköopissa esiintyvän ns. Kirchhoffin I lain kanssa tai myös rakenteiden mekaniikassa esimerkiksi ristikon nurkan tasapainoyhtälöiden kanssa.

3.4.2 Paikallinen muoto

Kun yhtälön (3.4.2) vasempaan puoleen sovelletaankin Reynoldsin lauseen muotoa (3.3.62), saadaan yhtälö

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0 , \qquad (3.4.53)$$

jonka tulee olla voimassa kirjoitettuna myös mille hyvänsä alueen V osa-alueelle ΔV. Tämän perusteella saadaan — vastaavalla ajattelulla kuin kohdassa 2.1 — alueen jokaisessa pisteessä pätevä yhtälö

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 .} \qquad (3.4.54)$$

Tämä on massan säilymisen periaatteen paikallinen muoto eli ns. jatkuvuusyhtälö (engl. equation of continuity). Tätä huonohkoa nimitystä käytetään yleensä sen lyhyyden vuoksi myös äärellisten muotojen yhteydessä.

Jatkuvuusyhtälö on karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0 . \qquad (3.4.55)$$

Tästä saadaan vielä kehittämällä

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.4.56)$$

ja soveltamalla kaavaa (3.3.14)

$$\frac{d \rho}{d t} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \qquad (3.4.57)$$

eli yleisemmin

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0} \tag{3.4.58}$$

Termi $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ on ns. suhteellinen tilavuudenmuutosnopeus eli <u>dilataationopeus</u> (engl. rate of dilatation, dilatation = laajeneminen). Dilataationopeus esiintyy usein kaavoissa jatkossa. Sen eri esitysmuotoja ovat mm.

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = d_x + d_y + d_z} \tag{3.4.59}$$

kuten voidaan havaita kaavojen (3.4.58), (3.4.57) ja (3.3.41) avulla. Nimeen liittyvä fysikaalinen tulkinta saadaan esimerkiksi yhtälöstä (1.3.11) jakamalla se puolittain ajan differentiaalilla dt.

<u>Pysyvässä</u> virtauksessa $\partial\rho/\partial t = 0$ ja yhtälöstä (3.4.54) tulee

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0} \tag{3.4.60}$$

tai

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \tag{3.4.61}$$

<u>Kokoonpuristumattoman</u> nesteen — kullekin nestealkiolle pätee ρ = vakio, $d\rho/dt = 0$ — virtauksessa yhtälöstä (3.4.58) saadaan tulos

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0} \tag{3.4.62}$$

tai

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad (3.4.63)$$

Näitä yhtälöitä nimitetään usein paitsi jatkuvuusyhtälöksi myös kokoonpuristumattomuusehdoksi. Yhtälöt pätevät luonnollisesti myös vakiotiheysnesteelle, joka on kokoonpuristumattoman nesteen erikoistapaus.

* Sylinterikoordinaatistossa mielivaltaisen vektorifunktion $\vec{F}$ divergenssi (14)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r f_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial f_z}{\partial z}, \qquad (3.4.64)$$

joten esimerkiksi kaavojen (3.4.55) ja (3.4.61) vastineet ovat

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\varrho r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}(\varrho v_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_z) = 0 \qquad (3.4.65)$$

ja

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \qquad (3.4.66)$$

*

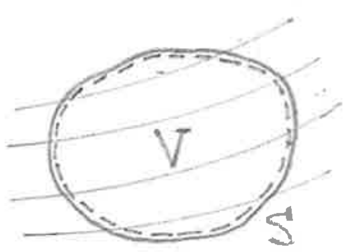
Jatkuvuusyhtälö on helppo johtaa karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa myös käyttäen differentiaaligeometrista tarkastelutapaa.

Turbulenssin vaikutusta jatkuvuusyhtälöihin käsitellään esimerkissä 3.5.3.

Taulukko 3.4.1 Massan säilymisen periaatteen eri muotoja.

Äärellinen muoto

Yleinen tapaus



Yleinen muoto

$$\int \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV + \int \varrho v_n dS = 0. \quad (1)$$

Pysyvä virtaus

$$\int \varrho v_n dS = 0. \quad (2)$$

Vakiotiheysneste

$$\int v_n dS = 0. \quad (3)$$

Massan säilymisen periaate: Kappaleen massa $m = \text{vakio}$. Syntyviä yhtälöitä nimitetään usein jatkuvuusyhtälöiksi.

Otaksumaluettelo

O(1) : $v_n = 0$ S_m:llä.

O(2) : $\varrho = \text{vakio}$ A:lla, jolloin

$$\int \varrho f dA = \varrho \int f dA \text{ eli } \langle \varrho f \rangle = \varrho \langle f \rangle. \quad (4)$$

O(3): Yhdensuuntaisvirtaus A:lla, jolloin

$$\vec{v} = v\vec{e} \text{ eli } v_e = v, \; v_t = 0. \quad (5)$$

O(4): Virtausakselin kaarevuus on pieni, jolloin

$$\int f dV \approx \int_1^2 \langle f \rangle A ds, \quad (6)$$

$$\int f dS \approx \int_1^2 \left(\frac{f}{\cos\gamma} dl \right) ds + \langle f \rangle_1 A_1 + \langle f \rangle_2 A_2, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \int f dV \approx \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t} (\langle f \rangle A) ds - \langle f v_e \rangle_1 A_1 + \langle f v_e \rangle_2 A_2. \quad (8)$$

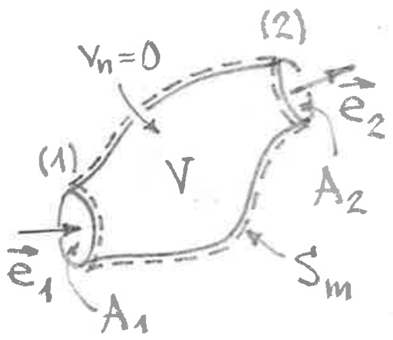
Pinta-alakeskiarvo

$$\langle f \rangle = \frac{1}{A} \int f dA,$$

$$\int f dA = \langle f \rangle A.$$

Reynoldsin lauseessa (8) ei oteta huomioon mahdollista "suotovirtausta".

Standardikontrollialue, [O(1)]



Yleinen muoto

$$\int \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV - w_1 + w_2 = 0. \quad (9)$$

Pysyvä virtaus

$$w_1 = w_2 = w = \text{vakio}. \quad (10)$$

Vakiotiheysneste

$$Q_1 = Q_2 = Q = \text{vakio}. \quad (11)$$

Massavirta

$$w = \int \varrho v_e dA = \langle \varrho v_e \rangle A.$$

Virtaama

$$Q = \int v_e dA = \langle v_e \rangle A.$$

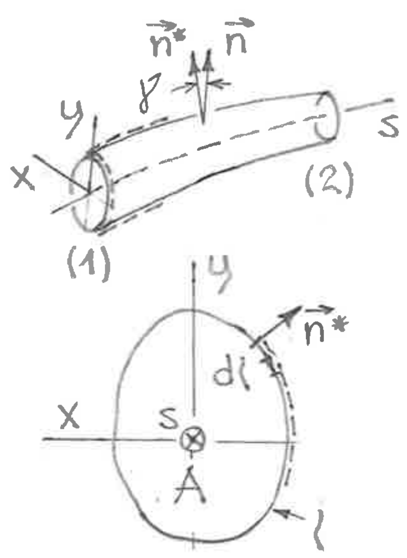
$w = \varrho Q$, [O(2)]

$w = \langle \varrho v \rangle A$, [O(3)]

$w = \varrho \langle v \rangle A$, [O(2), O(3)]

$\langle v \rangle = \frac{Q}{A}$. [O(3)]

Yleinen yksidimensioinen virtaus, [O(2), O(4)]



Yleinen muoto

$$\int_1^2 \frac{\partial}{\partial t} (\varrho A) ds - \varrho_1 Q_1 + \varrho_2 Q_2 = 0. \quad (12)$$

Pysyvä virtaus

$$\varrho_1 Q_1 = \varrho_2 Q_2 = \varrho Q = \text{vakio}. \quad (13)$$

Vakiotiheysneste

$$\int_1^2 \frac{\partial A}{\partial t} ds - Q_1 + Q_2 = 0. \quad (14)$$

Pysyvä virtaus

$$Q_1 = Q_2 = Q = \text{vakio}. \quad (15)$$

Vektori $\vec{n}^*$ on poikkileikkaustasossa oleva reunakäyrän ulkoinen yksikkönormaalivektori.

$$\cos\gamma = \vec{n}^* \cdot \vec{n}.$$

Prismaattisessa tapauksessa $\gamma = 0$.

Pysyvä virtaus tai jäykkä seinämä:

$$A(s,t) = A(s).$$

Taulukko 3.4.1 Jatkoa

Yleinen yksidimensioinen virtaus, [O(2), O(4)], jatkoa

Differentiaaliyhtälömuoto

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)+\frac{\partial}{\partial s}(\rho Q)=0. \qquad (16)$$

Pysyvä virtaus

$$\frac{d}{ds}(\rho Q)=0 \text{ eli } \rho Q=\text{vakio}. \qquad (17)$$

Vakiotiheysneste

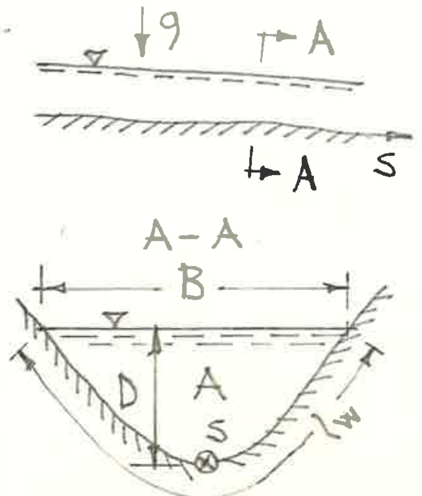
$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial s}=0. \qquad (18)$$

Pysyvä virtaus

$$\frac{dQ}{ds}=0 \text{ eli } Q=\text{vakio}. \qquad (19)$$

Nämä huomautukset koskevat jo avouomavirtausta! Otaksuma (3) ei ole tässä oleellinen. Jos se puuttuu, $v \to v_e$.
Otaksutaan, että vapaa pinta on kussakin poikkileikkauksessa vaakasuorassa.
Poikkileikkaus geometrialtaan muuttumattomassa uomassa $A(s,D)=A(D)$.
Hydraulinen syvyys $D_h=A/B$.
Hydraulinen säde $R_h=A/l_w$.
Hydraulinen halkaisija $d_h=4A/l_w=4R_h$.

Avouomavirtaus, [O(2), O(3), O(4)]



Vakiotiheysnesteen differentiaaliyhtälömuoto

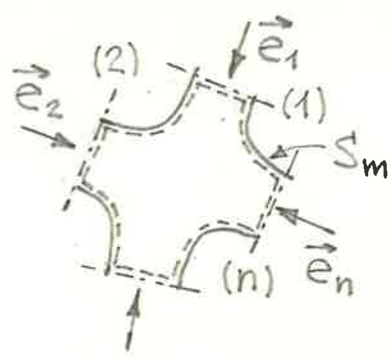
$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial s}=0, \qquad (20)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t}+D_h\frac{\partial \langle v\rangle}{\partial s}+\langle v\rangle\left[\frac{\partial D}{\partial s}+\frac{1}{B}\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_D\right]=0. \qquad (21)$$

Pysyvä virtaus

$$D_h\frac{d\langle v\rangle}{ds}+\langle v\rangle\left[\frac{dD}{ds}+\frac{1}{B}\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_D\right]=0. \qquad (22)$$

Solmukohta



Yleinen muoto

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t}dV+\int_{S_m}\rho v_n dS-\sum w_i=0. \qquad (23)$$

Tavanomainen muoto

$$\sum w_i=0. \qquad (24)$$

Vakiotiheysneste

$$\sum Q_i=0. \qquad (25)$$

Kaavoissa (24) ja (25) otaksutaan yleisessä tapauksessa tavallaan, että S_m ja V häviävät.

Paikallinen muoto

Yleinen muoto	Suorak. kartees. koord.	
$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})=0,$	$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0,$	(26)
$\frac{d\rho}{dt}+\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0,$	$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0.$	(27)
Pysyvä virtaus $\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})=0,$	$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0.$	(28)
Kokoonpuristumaton neste $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0,$	$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.$	(29)

Dilataationopeus

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=d_x+d_y+d_z.$$

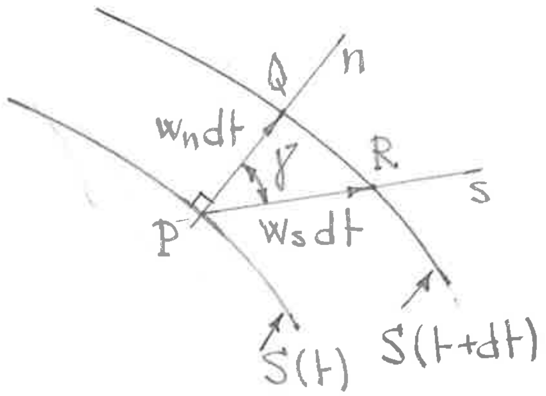
Vakiotiheysneste = homogeeninen kokoonpuristumaton neste.

3.5 Sekalaista

* 3.5.1 Pinnan liike

<u>Yleistä.</u> Kolmessa dimensiossa olevan tietyn pinnan $S(t)$ yhtälö olkoon

$$f(x,y,z,t)=0. \quad (3.5.1)$$



Kuva 3.5.1 Pinnan liike.

Jos aika t on mukana argumenttiluettelossa, pinnan asema muuttuu ajan muuttuessa ja voidaan puhua pinnan siirtymänopeudesta tai lyhyemmin vain pinnan nopeudesta. Tällöin on kuitenkin pidettävä tarkasti mielessä, onko kysymyksessä ns. <u>ainepinta</u> eli materiaalipinta (engl. material surface) vai sen vastakohtana ilman kontinuumin mukana oloa määritelty pinta; sanotaan tätä lyhyesti vain pinnaksi. <u>Ainepinta tarkoittaa koko ajan samojen kontinuumipartikkelien muodostamaa pintaa</u>. Täten jos ainepinta on esimerkiksi tietyllä hetkellä valitun kappaleen reunapinta, ainepinta on siis jatkuvasti ko. reunapinta; vrt. kuva 3.3.10 ja 1.3.6.

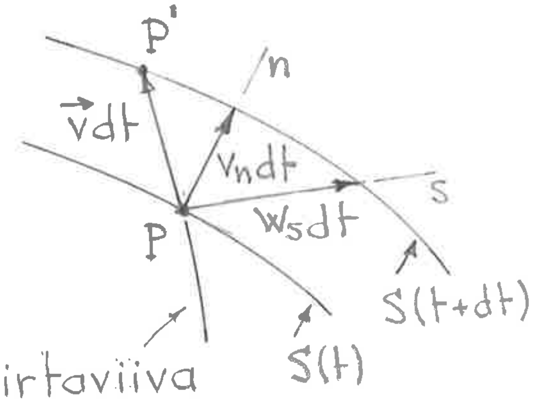
Ainepinnan siirtymänopeuden määrittely ei tuota vaikeuksia; nopeus tietyssä pinnan pisteessä tietyllä hetkellä olkoon tässä pisteessä sijaitsevan partikkelin nopeus $\vec{v}$. Mutta mikä on pelkästään matemaattisesti määritellyn pinnan nopeus, kun pinta ei muodostukaan partikkeleista? Tässä käsittely täytynee hoitaa kuvan 3.5.1 osoittamalla tavalla. Asetetaan hetkellä t pinnalla olevan tietyn pisteen P kautta kulkevia suoria, kuten Ps ja Pn. Kun aika muuttuu, pinta leikkaa näitä suoria pisteissä Q ja R ja voidaan määritellä <u>pinnan siirtymisnopeus tiettyyn suuntaan</u> vastaavasti algebrallisten janan pituuksien PQ ja PR muutosnopeuksina

$$w_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{PQ}{\Delta t}, \quad w_s = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{PR}{\Delta t}. \qquad (3.5.2)$$

Täten pelkän pinnan yhteydessä ei ole mielekästä puhua nopeudesta vektorina $\vec{w}$ vaan ainoastaan nopeudesta tiettyyn suuntaan. Normaalin suunta on luonnollisin, joten tavallisesti toimitaan juuri suureen w_n avulla. Kuvasta 3.5.1 nähdään, että

$$w_s = \frac{w_n}{\cos\gamma}. \qquad (3.5.3)$$

Kuvan 3.5.2 perusteella havaitaan, että ainepinnan liikkeessä ko. pinnan siirtymisnopeus normaalin suunnassa w_n on yhtä suuri kuin nopeuden $\vec{v}$ normaalin suuntainen komponentti $\vec{n}\cdot\vec{v} = v_n$ eli



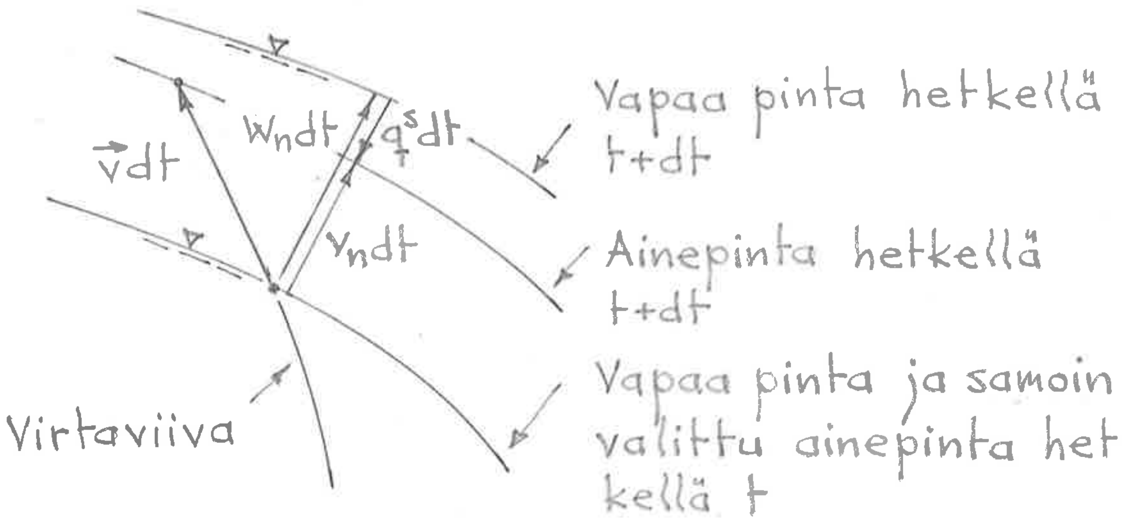
Kuva 3.5.2 Ainepinnan liike.

$$w_n = v_n. \qquad (3.5.4)$$

Sen sijaan pinnan siirtymisnopeus suuntaan s ei ole vektorin $\vec{v}$ komponentti tälle suunnalle vaan on käytettävä kaavaa (3.5.3).

Edellä esitettyjä käsitteitä tarvitaan mm. ns. <u>huokoisen seinämän</u> (engl. porous wall) ja nesteen vapaan pinnan käsittelyssä, kun pintaan voi sataa vettä tai siitä voi tapahtua haihtumista. Huokoinen seinämä tarkoittaa nimensä mukaisesti huokosia sisältävää kiinteästä aineesta muodostunutta seinämää, jonka läpi tapahtuu nesteen virtausta; ns. suotovirtausta (engl. seepage). Tavallisin esimerkki tästä on veden virtaus maaperästä vesistöön. Huokoisen seinämän tapauksessa kohdassa 1.1 esitetty reunaehto — nesteen ja kiinteästä aineesta olevan seinämän vastinpartikkeleilla on sama nopeus — ei enää päde makroskooppisesti tarkasteltuna.

Kuvassa 3.5.3 on tarkasteltu esimerkkinä



Kuva 3.5.3 Vapaan pinnan liike.

vapaan pinnan liikettä tapauksessa, jossa pintaan kertyy nestettä siten, että tilavuusvirran tiheys on q^s ($[q^s]=(m^3/s)/m^2$); toisin sanoen nestekerros paksunee nopeudella q^s. Indeksi s viittaa sanaan seepage, mutta tässä

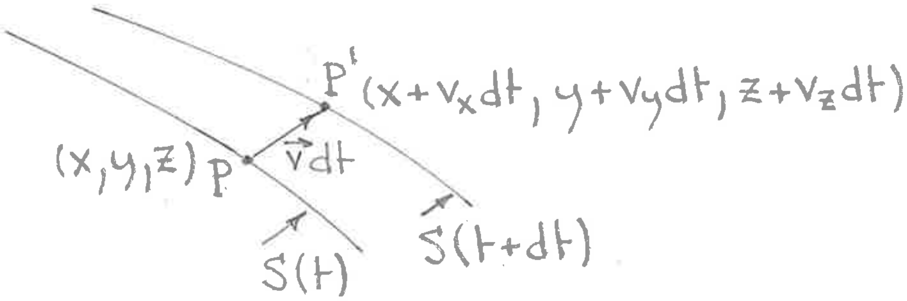
q^s johtuu positiivisena sateesta ja negatiivisena haihtumisesta. Kuva 3.5.3 voisi esittää yhtä hyvin esimerkiksi muotoaan muuttavan huokoisen seinämän tapausta (vrt. kuva L.2.3), kun vain korvataan sana vapaa pinta sanalla seinämän reunapinta. Yleisesti pätee

$$\boxed{w_n = v_n + q^s,} \tag{3.5.5}$$

jossa siis w_n on kyseessä olevan pinnan siirtymisnopeus pinnan normaalin suunnassa, v_n on vastaavan ainepinnan nopeuden normaalin suuntainen komponentti ja q^s pintaan saapuvan tilavuusvirran tiheys. Usein termi q^s jää pois ja saadaan yksinkertaisempi tulos

$$w_n = v_n . \tag{3.5.6}$$

Ainepinnan kinematiikkaa. Olkoon ainepinnan



Kuva 3.5.4 Ainepinnan liike.

yhtälö muotoa (3.5.1) eli vielä

$$f(x,y,z,t) = 0 . \tag{3.5.7}$$

Pisteessä P, jonka koordinaatit ovat x, y, z hetkellä t oleva partikkeli on hetkellä $t+dt$ pisteessä P', jonka koordinaatit ovat $x+v_x dt$, $y+v_y dt$, $z+v_z dt$ (kuva 3.5.4). Koska pisteet

P ja P' ovat siis hetkillä t ja $t+dt$ kyseessä olevalla ainepinnalla, yhtälön (3.5.7) tulee toteutua eli

$$f_1 \equiv f(x,y,z,t) = 0 \qquad (3.5.8)$$

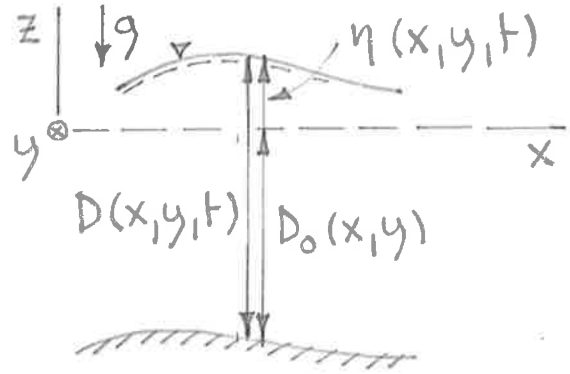
$$\begin{aligned} f_2 &\equiv f(x+v_x dt,\, y+v_y dt,\, z+v_z dt,\, t+dt) \\ &= f(x,y,z,t) + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}v_x dt + \frac{\partial f}{\partial y}v_y dt + \frac{\partial f}{\partial z}v_z dt \\ &= f_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v_x\frac{\partial f}{\partial x} + v_y\frac{\partial f}{\partial y} + v_z\frac{\partial f}{\partial z}\right)dt \\ &= 0 + \frac{df}{dt}dt = \frac{df}{dt}dt = 0. \end{aligned} \qquad (3.5.9)$$

Täten ainepinnan yhtälön (3.5.7) vasemman puolen tulee toteuttaa koko ajan yhtälö

$$\boxed{\frac{df}{dt} = 0,} \qquad (3.5.10)$$

jossa derivaatta on siis kaavan (3.3.11) tai (3.3.14) mukainen ainederivaatta.

Esimerkki 3.5.1. Pinnan aaltoilu. Kuva (a) esittää nesteen aaltoiluun liittyvää asetelmaa.



(a)

Taso $z=0$ yhtyy vapaaseen pintaan, kun neste on lepotilassa. Aallon korkeusasema on $\eta(x,y,t)$, pohjan syvyys on $D_0(x,y)$ ja nesteen kokonaissyvyys $D = D_0 + \eta$. Määritetään pinnalla ja pohjalla vallitsevat kinemaattiset ehdot.

Oletetaan, että termi q^s on tässä vapaalla pinnalla nolla (ei sadetta eikä haihtumista), jolloin vapaa pinta on koko ajan ainepinta. Kirjoittamalla vapaan pinnan yhtälö

$$z = \eta(x,y,t) \tag{a}$$

muotoon $z-\eta=0$ ja vertaamalla tätä yhtälöön (3.5.7) nähdään, että tässä

$$f = z-\eta(x,y,t). \tag{b}$$

Täten ehto (3.5.10) antaa yhtälön

$$-\frac{\partial\eta}{\partial t} - v_x\frac{\partial\eta}{\partial x} - v_y\frac{\partial\eta}{\partial y} + v_z\frac{\partial z}{\partial z} = 0 \tag{c}$$

eli

$$v_z = \frac{\partial\eta}{\partial t} + v_x\frac{\partial\eta}{\partial x} + v_y\frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad \text{kun } z=\eta. \tag{d}$$

Oletetaan samoin, että termi q^s häviää pohjalla (ei suotovirtausta). Pohjan muodostama pinta on tällöin koko ajan ainepinta tehtiinpä todellisen nesteen tai ideaalinesteen otaksuma. Edellisessä tapauksessa pohjaan koskettavat nestepartikkelit pysyvät paikoillaan jatkuvasti. Jälkimmäisessä tapauksessa nestepartikkelit liukuvat pitkin pohjaa. Pohjapinnan yhtälön

$$z = -D_0(x,y) \tag{e}$$

perusteella tässä

$$f = z + D_0(x,y). \tag{f}$$

Yhtälöstä (3.5.10) saadaan ehto

$$0 + v_x\frac{\partial D_0}{\partial x} + v_y\frac{\partial D_0}{\partial y} + v_z\frac{\partial z}{\partial z} = 0 \tag{g}$$

eli

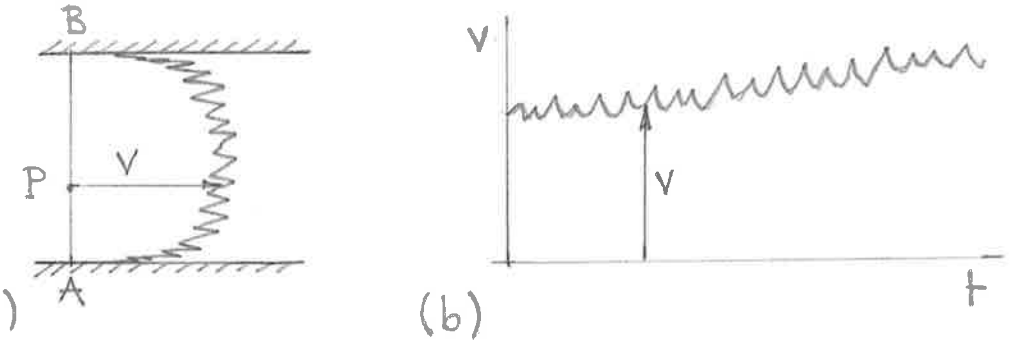
$$v_z + v_x\frac{\partial D_0}{\partial x} + v_y\frac{\partial D_0}{\partial y} = 0, \quad \text{kun } z=-D_0. \tag{h}$$

Todellisella nesteellä $v_x = v_y = v_z = 0$ pohjalla, joten ehto (h) toteutuu automaattisesti.

Ideaalinesteen tapauksessa ehto (h) on itse asiassa sama asia kuin ehto $\vec{n} \cdot \vec{v} = v_n = 0$ pohjalla eli että virtausnopeusvektorin tulee olla pohjan tangenttitason suuntainen ko. pisteessä. Usein ehtoa $v_n = 0$ sovelletaan myös todellisen nesteen mallin yhteydessä. Tämä merkitsee, että tarkastellaankin tilannetta hieman pohjapinnan yläpuolella.

3.5.2 Turbulenssi

Kuva 3.5.5 esittää kaaviollisesti kahden kiinteän seinämän välissä tapahtuvasta turbu-



Kuva 3.5.5 (a) Virtausakselin suuntaisen nopeuskomponentin v jakautuma viivalla AB tietyllä hetkellä. (b) Komponentti v pisteessä P ajan funktiona.

lenttisesta virtauksesta saatuja mittaustuloksia. Myös muut nopeuskomponentit, jännitykset ja paine käyttäytyvät vastaavasti.

Ajatellaan — siis lähinnä ajatuskoe — että kuvassa 3.5.5 esitetyt mittaukset suoritetaan lukuisasta määrästä (n kappaletta) kokeita, jotka ovat geometrialtaan, alkuehdoiltaan identtisiä ja jotka aloitetaan samanaikaisesti. Esimerkiksi nopeuskomponentille $v(\vec{r},t)$ tai yleensä mielivaltaiselle suureelle $f(\vec{r},t)$ saataisiin periaatteessa mittaustulokset

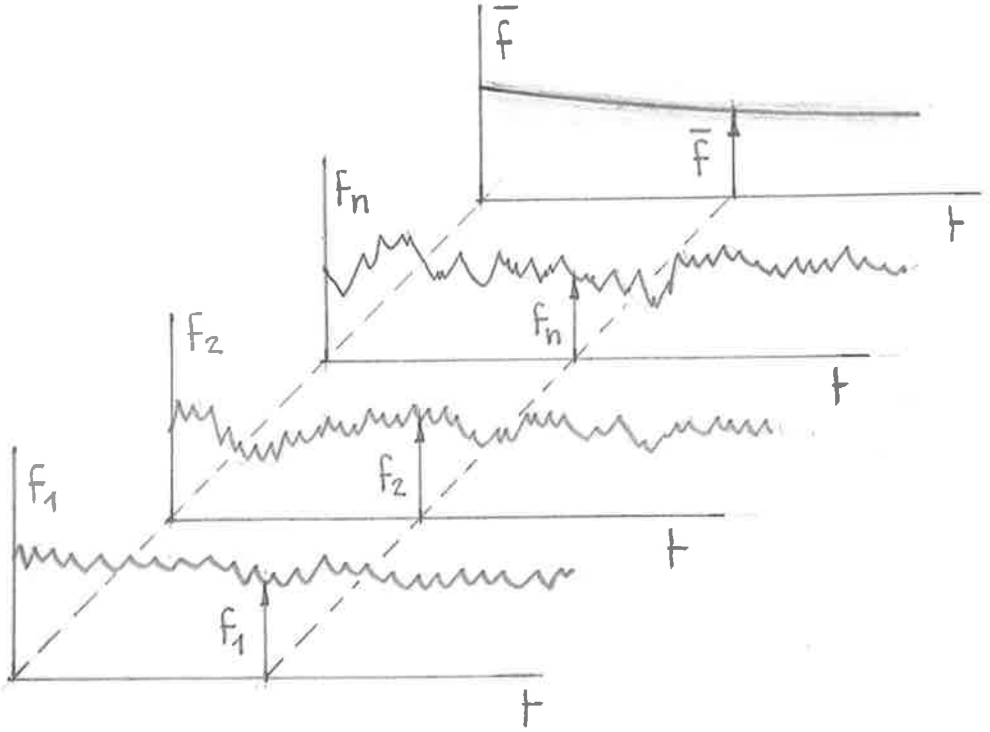
$$\left.\begin{aligned} f_1 &= f_1(\vec{r},t), \\ f_2 &= f_2(\vec{r},t), \\ &\dots \\ f_n &= f_n(\vec{r},t), \end{aligned}\right\} \qquad (3.5.11)$$

jossa indeksit viittaavat kokeen numeroon. Näiden tulosten muodostamaa joukkoa sanotaan usein ryhmäksi (engl. ensemble).

Jos funktiot (3.5.11) ovat identtisiä, kysymyksessä on laminaarinen virtaus. Jos funktiot (3.5.11) vaihtelevat kokeesta kokeeseen, kysymyksessä on turbulenttinen virtaus. Näitä toteamuksia voidaan pitää laminaarisen ja turbulenttisen virtauksen määritelminä (4).

On huomattava, ettei laminaarisen virtauksen tarvitse olla välttämättä yksinkertaista, vaan se voi muodostua hyvinkin monimutkaisista pyörteilyistä. Oleellista on, että laminaarinen virtaus on ns. determinististä (engl. deterministic) eli se määräytyy yksikäsitteisesti valitun geometrian, alkuehtojen, aineominaisuuksien jne. perusteella. Turbulenttinen virtaus on sen sijaan ns. satunnaista tai stokastista (engl. random, stochastic) eli sitä ei voida ennustaa yksikäsitteisesti; ainoastaan tiettyjä todennäköisyyksiä voidaan käsitellä.

Kuvassa 3.5.6 on esitetty vierekkäin yksinker-



Kuva 3.5.6 Ryhmäkeskiarvon muodostaminen.

taisuuden vuoksi vain kolme suureelle f jossain tietyssä pisteessä mitattua koetulosta. Kuten on jo kohdassa 1.3 todettu, pyrkimyksenä on toimia sopivasti määriteltyjen keskimääräisten arvojen ja niiden suhteen laskettujen poikkeamien avulla. Teoreettisesti tyydyttävin tapa määritellä keskimääräinen arvo on kirjoittaa

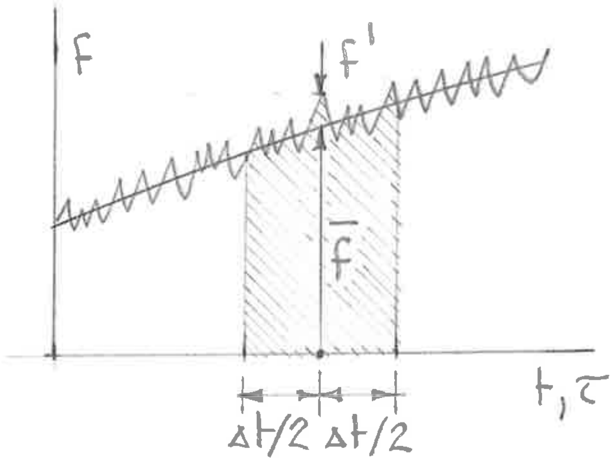
$$\bar{f} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i\,, \qquad (3.5.12)$$

jossa $\bar{f}$ on ns. ryhmäkeskiarvo (engl. ensemble mean). Siis kullakin ajan hetkellä otettaisiin tavanomainen keskiarvo ja periaatteessa tarvittaisiin ääretön määrä kokeita. Kuvaa 3.5.6 katsellen voidaan ajatella että käyrä $\bar{f} = \bar{f}(t)$ syntyy kaikkein "tummimmasta" kohdasta $t\bar{f}$-tasolla, kun vastaavat koetuloskäyrät projisioidaan sille.

Käytännössä ryhmäkeskiarvon käyttöön ei ole yleensä mahdollisuuksia. Tarvittava tieto pyritään saamaan itse yhdestä tyypillisestä koetuloksesta määrittelemällä suureen f ns. <u>aikakeskiarvo</u> (engl. time average, temporal mean value) $\bar{f}$ kaavalla

$$\boxed{\bar{f}(\vec{r},t) = \frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} f(\vec{r},\tau)\,d\tau,} \qquad (3.5.13)$$

jossa Δt on ns. <u>aikaväli</u> (engl. time interval), jonka valintaan palataan kohta. Kaavan sisältöä voidaan havainnollistaa kuvan 3.5.7 esittämällä tavalla. Keskiarvo $\bar{f}$ tietyllä arvolla t saadaan jakamalla vinoviivoitetun alueen pinta-ala aikavälillä Δt. Aikavälin Δt täytyy olla suuri verrattuna yhteen tyypilliseen satunnaisheilahdukseen kuluvaan aikaan, mutta taas toisaalta pieni verrattuna aikaan, joka vaaditaan keskimääräisen arvon muuttumiseen merkittävästi. Jos ilmiö on sellainen, että em. ehdot täyttävä aikaväli on löydettävissä, aikakeskiarvoa voidaan käyttää



Kuva 3.5.7 Aikakeskiarvon muodostaminen.

ryhmäkeskiarvon sijasta (4). Jos sopivaa aikaväliä ei ole olemassa, aikakeskiarvokäsittelellä ei ole enää merkitystä.

Stationaarisessa tapauksessa määritelmä (3.5.13) kirjoitetaan muotoon

$$\bar{f}(\vec{r}) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} f(\vec{r},\tau)\,d\tau \tag{3.5.14}$$

ja keskiarvo ei riipu siis ajasta. Käytännössä Δt rajoitetaan tietenkin johonkin sopivaan äärelliseen arvoon. Turbulenssiteoriat ovat pisimmälle kehitettyjä juuri stationaarisissa tapauksissa.

Olipa kyseessä määritelmä (3.5.12) tai (3.5.13) satunnaissuure f esitetään tämän jälkeen aina muodossa (ks. kuva 3.5.7)

$$\boxed{f = \bar{f} + f'} \tag{3.5.15}$$

Suuretta $\bar{f}$ nimitetään tässä keskiarvo-osaksi, <u>keskiarvosuureeksi</u> f (esimerkiksi keskiarvonopeuskomponentti $\bar{v}_x$) ja suuretta f' taas heilahteluosaksi, <u>heilahtelusuureeksi</u> f (esimerkiksi heilahtelunopeuskomponentti v_x') (engl. fluctuating part, deviation).

Kaavoissa (3.5.13) ja (3.5.14) on käytetty integroimismuuttujana tunnusta τ — ns. mykkä muuttuja (engl. dummy variable) — korostamaan sitä, että integraali on periaatteessa ala- ja ylärajojensa perusteella ajan t funktio. Usein kirjallisuudessa kuitenkin esiintyy τ:n sijalla tunnus t. Samoin usein integroimisrajoiksi otetaan arvot t ja $t+\Delta t$.

Määritelmään (3.5.13) perustuen voidaan johtaa mm. seuraavat laskusäännöt:

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{(f')} \approx 0, && (1)\\
&(\overline{\overline{f}}) \approx \overline{f}, && (2)\\
&\overline{(f_1+f_2+\dots+f_n)} = \overline{f_1}+\overline{f_2}+\dots+\overline{f_n} && (3)\\
&\overline{(kf)} = k\overline{f}, \quad (k \text{ ei riipu ajasta}) && (4)\\
&\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}, \quad \dots && (5)\\
&\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial t}, && (6)\\
&\overline{(\overline{f_1}\,\overline{f_2}\cdot\dots\cdot\overline{f_n})} \approx \overline{f_1}\cdot\overline{f_2}\cdot\dots\cdot\overline{f_n}, && (7)\\
&\overline{(\overline{f_1}\cdot\overline{f_2}\cdot\dots\cdot\overline{f_n}\,g')} \approx 0, && (8)\\
&\overline{(f_1 f_2)} \approx \overline{f_1}\,\overline{f_2} + \overline{(f_1' f_2')}, && (9)\\
&\overline{(f_1 f_2 f_3)} \approx \overline{f_1}\,\overline{f_2}\,\overline{f_3} + \overline{(f_1' f_2' f_3')} + \\
&\qquad + \overline{f_1}\,\overline{(f_2' f_3')} + \overline{f_2}\,\overline{(f_3' f_1')} + \overline{f_3}\,\overline{(f_1' f_2')}, && (10)\\
&\overline{\left(\int f\,dV\right)} = \int \overline{f}\,dV, \quad (V \text{ on kiinteä}) && (11)\\
&\overline{\left(\int f\,dS\right)} = \int \overline{f}\,dS. \quad (S \text{ on kiinteä}). && (12)
\end{aligned}\right\}(3.5.16)$$

Edellä $f_1, f_2, \dots, f_n$ ja g ovat mielivaltaisia satunnaisfunktioita. Sulkumerkkejä on käytetty korostamaan aikakeskiarvon ottamisjärjestystä. Jatkossa sulkuja ei käytetä. Samoin jatkossa oletetaan, että likimääräismerkillä varustetut yhtälöt pätevät tarkasti. Näin on sitä tarkemmin, mitä hitaammin keskiarvosuureet muuttuvat ajan suhteen. Stationaarisessa tapauksessa kaavat ovat tarkasti voimassa.

Esimerkki 3.5.2. Laskukaavoja. Johdetaan kaavakokoelman (3.5.16) kaavat (1), (5), (6) ja (9). Kaavojen (1) ja (9) tapauksessa otaksutaan stationaarinen tapaus: $\bar{f}$ = vakio t:n (ja τ:n) suhteen.

(1) Soveltamalla kaavaa (3.5.13) funktioon $f' = f - \bar{f}$ saadaan

$$\overline{f'} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int (f-\bar{f})\,d\tau = \frac{1}{\Delta t}\int f\,d\tau - \frac{1}{\Delta t}\int \bar{f}\,d\tau$$
$$= \bar{f} - \frac{1}{\Delta t}\bar{f}\int d\tau = \bar{f} - \frac{1}{\Delta t}\bar{f}\Delta t = \bar{f} - \bar{f} = 0. \qquad \text{(a)}$$

(2) Soveltamalla kaavaa (3.5.13) funktioon $\partial f/\partial x$ saadaan

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int \frac{\partial f}{\partial x}\,d\tau. \qquad \text{(b)}$$

Toisaalta matematiikassa on osoitettu, että määrätyn integraalin derivoiminen integrandissa esiintyvän parametrin (tässä x) suhteen saadaan suorittaa seuraavasti:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta t}\int f\,d\tau\right) = \frac{1}{\Delta t}\int \frac{\partial f}{\partial x}\,d\tau. \qquad \text{(c)}$$

Kaavojen (b) ja (c) vertailu osoittaa kaavan (5) pätevän myös epästationaarisessa tapauksessa.

* (3) Soveltamalla kaavaa (3.5.13) funktioon $\partial f/\partial t$ saadaan ($t \to \tau$ integraalissa)

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int \frac{\partial f(\vec{r},\tau)}{\partial \tau}\,d\tau$$
$$= \frac{1}{\Delta t}\Big|_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} f(\vec{r},\tau) = \frac{1}{\Delta t}\left[f(\vec{r},t+\Delta t/2) - f(\vec{r},t-\Delta t/2)\right]. \qquad \text{(d)}$$

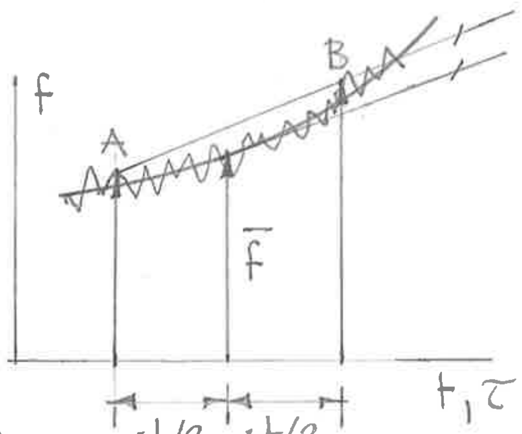
Toisaalta Leibnitzin sääntöä soveltamalla saadaan

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} f(\vec{r},\tau)\,d\tau\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[\int \frac{\partial f(\vec{r},\tau)}{\partial t}\,d\tau + f\Big|_{\tau=t+\Delta t/2}\frac{\partial(t+\Delta t/2)}{\partial t} - f\Big|_{\tau=t-\Delta t/2}\frac{\partial(t-\Delta t/2)}{\partial t}\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[0 + f(\vec{r},t+\Delta t/2)\cdot 1 - f(\vec{r},t-\Delta t/2)\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[f(\vec{r},t+\Delta t/2) - f(\vec{r},t-\Delta t/2)\right]. \qquad \text{(e)}$$



(a)

Tässä on siis sovellettu kaavaa (3.3.55) asettaen $x \to \tau$, $d/dt \to \partial/\partial t$. Kaava (c) pätee siis yleisesti. Kuvasta (a) näkyy kaavan (e) geometrinen merkitys: Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora on aina keskiarvofunktion $\bar{f}$ kuvaajalle asetetun tangentin suuntainen.

(4) Soveltamalla kaavaa (3.5.13) funktioon $f_1 f_2$ saadaan

$$\overline{f_1 f_2} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int f_1 f_2\,d\tau = \frac{1}{\Delta t}\int(\bar{f}_1 + f_1')(\bar{f}_2 + f_2')\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\int \bar{f}_1\bar{f}_2\,d\tau + \frac{1}{\Delta t}\int \bar{f}_1 f_2'\,d\tau + \frac{1}{\Delta t}\int f_1'\bar{f}_2\,d\tau + \frac{1}{\Delta t}\int f_1' f_2'\,d\tau$$

$$= \bar{f}_1\bar{f}_2\frac{1}{\Delta t}\int d\tau + \bar{f}_1\frac{1}{\Delta t}\int f_2'\,d\tau + \bar{f}_2\frac{1}{\Delta t}\int f_1'\,d\tau + \frac{1}{\Delta t}\int f_1' f_2'\,d\tau$$

$$= \bar{f}_1\bar{f}_2 + \bar{f}_1\cancel{\overline{f_2'}} + \bar{f}_2\cancel{\overline{f_1'}} + \overline{f_1' f_2'} = \bar{f}_1\bar{f}_2 + \overline{f_1' f_2'}, \qquad \text{(f)}$$

joka osoittaa kaavan (9) oikeaksi.

Aikakeskiarvokäsitettä sovelletaan jatkossa seuraavaa ajattelutapaa käyttäen. Yleiset nestemekaniikan yhtälöt ovat voimassa myös turbulenttisessa virtauksessa sellaisinaan. Käytännössä ei ole kuitenkaan mitään mahdollisuuksia ratkaista turbulenttista virtausta jokaista yksityiskohtaa myöten. Yleensä vain juuri keskiarvokäyttäytyminen kiinnostaa. Ottamalla yleisten yhtälöiden molempien puolien aikakeskiarvot saadaan edelleen yhtälöitä. Näissä yhtälöissä esiintyy haluttujen keskiarvosuureiden lisäksi yleensä myös — valitettavasti — heilahtelusuureiden tiettyjä yhdistelmiä, joita ei voida jättää huomiotta. Jotta syntyvien yhtälöiden avulla voitaisiin ratkaista keskiarvosuureet, heilahtelusuureista syntyvät lisätuntemattomat täytyy ensin voida arvioida kirjoittamalla sopivia lisäyhtälöitä. Tämä on erittäin vaikea tehtävä, jonka ainakin osittaiseksi ratkaisemiseksi tehdään paljon kokeellista ja teoreettista tutkimustyötä.

Periaatteessa kaikki nestemekaniikan suureet kuten $\vec{v}$, p, ρ, μ, u jne. käyttäytyvät turbulenttisessa virtauksessa satunnaisesti. Jatkossa tullaan kuitenkin käsittelemään yksinkertaisuuden vuoksi lähinnä vain vakiotiheysnesteen (tällöin $\bar{\rho} = \rho =$ vakio, $\rho' = 0$) turbulenttista virtausta.

Esimerkki 3.5.3. Massan säilyminen. Johdetaan vakiotiheysnestettä koskevien yhtälöiden (3.4.5) ja (3.4.63) keskiarvomuodot.

(1) Yhtälö (3.4.5) on

$$\int v_n dS = 0, \qquad (a)$$

jossa turbulenttisessa tapauksessa $v_n = \overline{v}_n + v_n'$.
Otetaan yhtälön (a) molempien puolten aikakeskiarvot:

$$\overline{\int v_n dS} = \overline{0},$$

$$\int \overline{v}_n dS = 0. \qquad (b)$$

On siis sovellettu kaavaa (12), (3.5.16).

(2) Yhtälö (3.4.63) on

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \qquad (c)$$

jossa siis

$$v_x = \overline{v}_x + v_x', \quad v_y = \overline{v}_y + v_y', \quad v_z = \overline{v}_z + v_z'. \qquad (d)$$

Otetaan yhtälön (c) molempien puolten aikakeskiarvot:

$$\overline{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}} = \overline{0},$$

$$\overline{\frac{\partial v_x}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0,$$

$$\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}_z}{\partial z} = 0. \qquad (e)$$

On sovellettu kaavoja (3), (5), (3.5.16).

Keskiarvonopeuksia koskevat yhtälöt (b) ja (e) ovat siis täsmälleen samoja kuin hetkellisiä nopeuksia koskevat yhtälöt (a) ja (c). Heilahtelunopeuksia sisältäviä termejä ei siis ilmesty mukaan tässä tapauksessa, joten turbulenssin käsittely ei aiheuta mitään vaikeuksia.

Heilahtelusuureita ilmestyy vasta silloin, kun yhtälöissä esiintyy kahden tai useamman satunnaissuureen tai niiden derivaattojen tuloja. Jos tarkastellaan esimerkiksi täydellistä jatkuvuusyhtälöä (3.4.55):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0, \qquad (F)$$

jossa nyt myös $\rho = \bar{\rho} + \rho'$, saadaan

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}} = \overline{0},$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho v_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho v_y})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho v_z})}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\,\bar{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\,\bar{v}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho}\,\bar{v}_z)}{\partial z} +$$

$$+ \frac{\partial(\overline{\rho' v_x'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho' v_y'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho' v_z'})}{\partial z} = 0. \qquad (g)$$

Tässä on sovellettu jo kaavaa (9), (3.5.16). Yhtälö (g) sisältää siis myös heilahtelutermejä.

4 KINETIIKKA

4.1 Yleistä

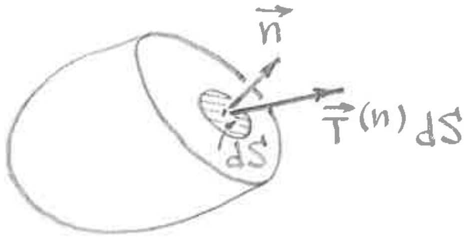
Kinetiikassa käsitellään yleisistä aksioomista (1.2.3) ... (1.2.6) saatuja yhtälöitä täydennettyinä kinematiikan antamilla yhtälöillä sekä konstitutiivisilla yhteyksillä.

4.2 Jännitys

Jännitys on yleisenä käsitteenä tensoriarvoinen paikan ja ajan funktio, jonka komponentit saavat aina kussakin koordinaatistossa tietyt arvot. Tässä tullaan toimimaan lähinnä karteesisen suorakulmaisen koordinaatiston ja siinä esiintyvien jännityskomponenttien avulla. Samoin kohdassa 3.3.5 käsitelty muodonmuutosnopeus on yleisenä käsitteenä tensori, jonka karteesiset suorakulmaiset komponentit ovat [D]-matriisin alkiot d_x, $1/2 \cdot g_{yz}$ jne.; [D] on muodonmuutosnopeustensorin matriisiesitys.

Lagrangen esitystavassa joudutaan toimimaan suurten siirtymien teorian yhteydessä monimutkaisilla jännityskäsitteillä kuten esimerkiksi Piola-Kirchhoffin 2. lajin jännitys. Eulerin esitystavassa toimitaan (tässä jatkossa esiintyvään) paljon yksinkertaisemman suureen, ns. Eulerin jännityksen avulla. Pelkällä nimityksellä jännitys tarkoitetaankin yleensä ja jatkossa juuri Eulerin jännitystä. Tavanomaisessa pienten siirtymien teoriaa soveltavassa rakenteiden mekaniikassa tai lujuusopissa toimitaan myös Eulerin jännityksen avulla. Tällä perusteella jännitykseen liittyviä käsitteitä pidetään tässä pitkälti tunnettuina ja tietyt asiat jätetään todistamatta.

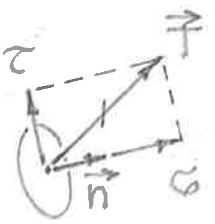
Jännitysvektori $\vec{T}(x,y,z,t)$, joka antaa tietyn pisteen kautta asetettuun pinta-alkioon dS vaikuttavan voiman $\vec{T}dS$, riippuu paitsi ko. pisteen koordinaateista ja mahdollisesti ajasta myös pinta-alkion suunnasta eli siis pinta-alkion ulkoisesta yksikkönormaalivektorista $\vec{n}$ (kuva 4.2.1).



Kuva 4.2.1 Vektori $\vec{T}$ riippuu vektorista $\vec{n}$.

Tätä riippuvuutta kuvataan usein kirjoittamalla jännitysvektorin tunnus muotoon $\vec{T}^{(n)}$. Englanninkielisessä kirjallisuudessa suureelle $\vec{T}$ käytetään nimityksen stress vector sijasta monasti nimitystä traction (= veto, vetäminen) etenkin silloin, kun tarkastellaan kappaleen varsinaista reunapintaa eikä vain jotain kuviteltua leikkausta. Traction-sanan suomenkielinen vastine voisi olla termi traktio eli pintavoima/pinta-ala.

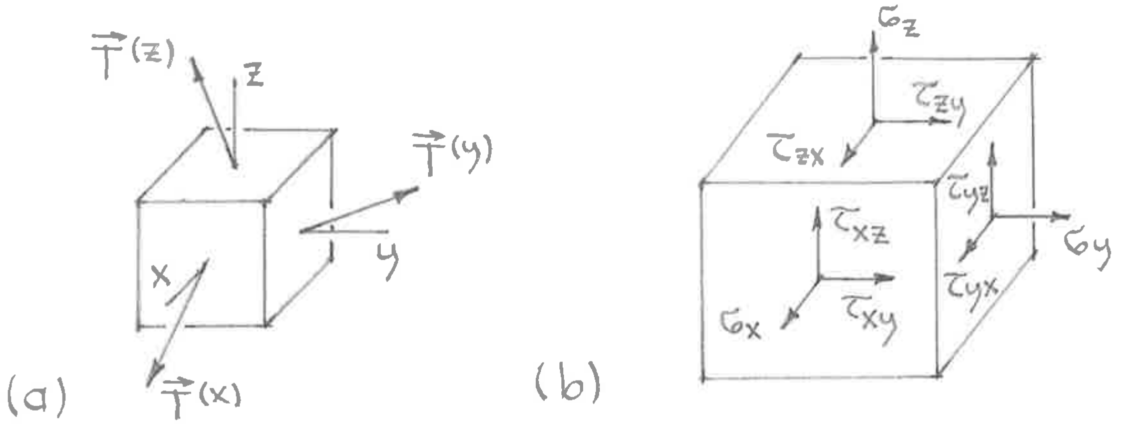
Kuvassa 4.2.2 on esitetty jännitysvektorin $\vec{T}$ jako normaalijännitykseen σ ja leikkausjännitykseen τ. Jos käsitellään vastaavia vektorikomponentteja $\vec{\sigma}$ ja $\vec{\tau}$, saadaan



Kuva 4.2.2 Normaalijännitys σ ja leikkausjännitys τ.

$$\vec{T} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}. \qquad (4.2.1)$$

Kuva 4.2.3 liittyy jännitysten esittämiseen kar-



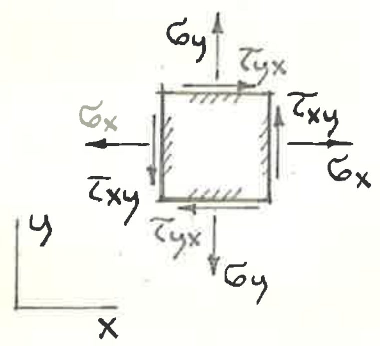
Kuva 4.2.3 (a) Kolmeen pinta-alkion suuntaan liittyvät jännitysvektorit. (b) Jännityskomponentit.

teesisessa suorakulmaisessa xyz-koordinaatistossa. Kuvan (a) merkinnät $\vec{T}^{(x)}$, $\vec{T}^{(y)}$ ja $\vec{T}^{(z)}$ tarkoittavat jännitysvektoreita tietyssä pisteessä, kun pinta-alkion normaali $\vec{n}$ yhtyy x-, y- ja z-akselien positiivisiin suuntiin. Kuvan esittämä suorakulmainen särmiö on siis ajateltava äärettömän pieneksi. Kuvan (b) merkintöjä käyttäen näiden jännitysvektoreiden esitys $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$-kannassa on

$$\left.\begin{aligned} \vec{T}^{(x)} &= \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy}\vec{j} + \tau_{xz}\vec{k}, \\ \vec{T}^{(y)} &= \tau_{yx}\vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_{yz}\vec{k}, \\ \vec{T}^{(z)} &= \tau_{zx}\vec{i} + \tau_{zy}\vec{j} + \sigma_z \vec{k}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.2)$$

Suureita σ_x, τ_{xy} jne. nimitetään jännitystensorin komponenteiksi tai lyhyemmin jännityskomponenteiksi (engl. stress component). Kuten edellä, σ:t ovat ns. normaalijännityksiä ja τ:t leikkausjännityskomponentteja. Jännityskomponentit määritellään (yleensä) positiivisiksi, kun ne vaikuttavat kuvassa (b) esitettyihin koordinaattiakselien positiivisiin suuntiin. Särmiön vastakkaisilla tahkoilla – ei esitetty kuvassa –

joiden ulkoiset normaalit osoittavat koordinaattiakselien negatiivisiin suuntiin, jännityskomponenttien positiiviset suunnat ovat vastakkaiset kuvassa esitetyille suunnille. Kuva 4.2.4 osoittaa tätä kaksidimensioisessa tapauksessa. Huomautettakoon, ettei ole tapana operoida suureiden σ_{-x}, τ_{-x-y} jne. avulla.

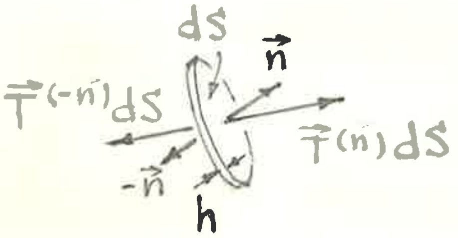


Kuva 4.2.4 Kaksidimensioinen tapaus.

Edelliseen liittyy läheisesti tulos

$$\boxed{\vec{T}^{(-n)} = -\vec{T}^{(n)}}, \qquad (4.2.3)$$

jonka mukaan jännitysvektori vaihtaa suuntansa, kun ko. pisteeseen liittyvän pinta-alkion ulkoinen normaali vaihtaa suuntansa. Kaava saadaan soveltamalla liikemäärän taseen periaatetta kuvan 4.2.5 esittämään ohueeseen ainelinskaan antaen paksuuden h lähestyä nollaa.



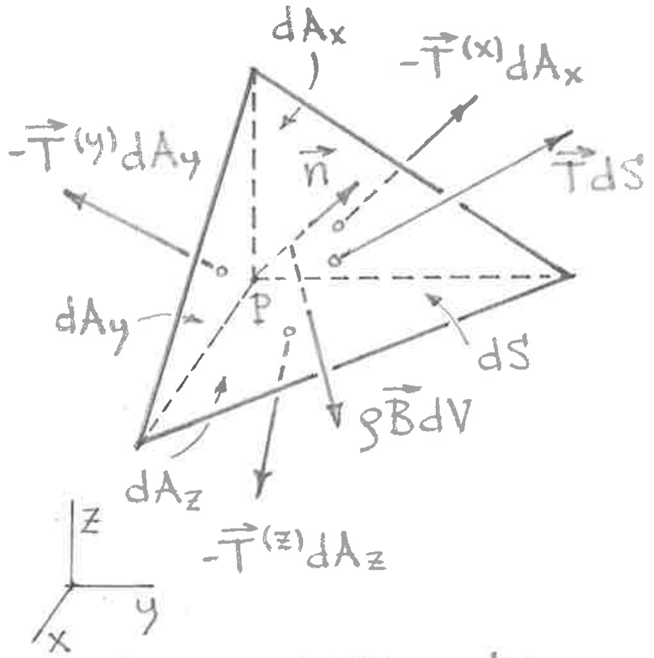
Kuva 4.2.5 Jännitysvektorin suunnan muuttuminen.

Soveltamalla samoin liikemäärän taseen periaatetta kuvan 4.2.6 esittämään äärettömän pieneen tetraedriin saadaan vektoriyhtälö

$$\boxed{\vec{T} = n_x \vec{T}^{(x)} + n_y \vec{T}^{(y)} + n_z \vec{T}^{(z)}} \qquad (4.2.4)$$

eli ottaen huomioon esitykset (4.2.2) skalaariyhtälöt

$$\left.\begin{aligned} T_x &= n_x\sigma_x + n_y\tau_{yx} + n_z\tau_{zx}, \\ T_y &= n_x\tau_{xy} + n_y\sigma_y + n_z\tau_{zy}, \\ T_z &= n_x\tau_{xz} + n_y\tau_{yz} + n_z\sigma_z. \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.5)$$



Kuva 4.2.6 Differentiaalinen tetraedrialkio.

On siis merkitty

$$\vec{T} = T_x\vec{i} + T_y\vec{j} + T_z\vec{k} \quad (4.2.6)$$

ja

$$\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}. \quad (4.2.7)$$

Kaava (4.2.4) tai kaavat (4.2.5) ilmaisevat ns. traktio-jännityskomponentti-yhteyden. Jos siis tietyssä pisteessä tunnetaan jännityskomponentit σ_x, τ_{xy} jne., mielivaltaiseen suuntaan ko. pisteen kautta asetettuun pinta-alkioon liittyvä jännitysvektori voidaan aina laskea näiden kaavojen avulla. Usein kaavoja sovelletaan käänteisesti kappaleen reunalla: Traktio on annettu, jolloin kaavat antavat tietyt reunalla vallitsevia jännityskomponentteja koskevat reunaehdot. Jos pintajännityksen vaikutus tulee ottaa huomioon, kaavoja on täydennettävä; ei käsitellä tässä.

Soveltamalla vielä kulmaliikemäärän taseen periaatetta kuvan 4.2.3 esittämään differentiaaliseen suorakulmaiseen särmiöön saadaan lopuksi ns. Cauchyn II liikelaki (Cauchy v. 1827) eli ns. parittaisten leikkausjännityskomponenttien yhtäsuuruutta koskevat yhtälöt

$$\boxed{\tau_{yz}=\tau_{zy}, \quad \tau_{zx}=\tau_{xz}, \quad \tau_{xy}=\tau_{yx}.} \tag{4.2.8}$$

Yhteenvetona edellä esitetystä voidaan siis todeta, että ns. jännitystilan tietyssä pisteessä määrittävät kuusi riippumatonta suuretta: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ja esimerkiksi τ_{yz}, τ_{zx} ja τ_{xy}. Kappaleessa vallitseva ns. jännitystilakenttä taas määräytyy ko. suureiden avulla, kun ne ajatellaan paikan ja ajan funktioiksi.

Deviaatiojännitys. Kirjoitetaan normaalijännityskomponentit muotoon

$$\boxed{\sigma_x=-p+\sigma_x^*, \quad \sigma_y=-p+\sigma_y^*, \quad \sigma_z=-p+\sigma_z^*,} \tag{4.2.9}$$

jossa suure

$$\boxed{p=-\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)} \tag{4.2.10}$$

on ns. keskimääräinen normaalijännitys miinusmerkkisenä eli ns. paine. (Paine määritellään nestemekaniikassa joskus edellisestä poikkeavalla tavalla.) Suureita

$$\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx} \tag{4.2.11}$$

nimitetään deviaatiojännityskomponenteiksi (engl. deviatoric stress component; deviate = poiketa).

Laskemalla yhtälöt (4.2.9) puolittain yhteen saadaan yleinen deviaationormaalijännityskomponentteja koskeva tulos

$$\sigma_x^* + \sigma_y^* + \sigma_z^* = 0 \,. \qquad (4.2.12)$$

Deviaatiojännityskomponenttien hävitessä

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p \,, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0 \qquad (4.2.13)$$

ja kaavat (4.2.5) antavat tulokset

$$T_x = -n_x p \,, \quad T_y = -n_y p \,, \quad T_z = -n_z p \qquad (4.2.14)$$

eli jo aikaisemmin nestestatiikassa esiintyneet kaavat (2.1.4).

Jännitystilaa (4.2.13), jossa deviaatiojännityskomponentit häviävät, nimitetään isotrooppiseksi, pallomaiseksi tai joskus hydrostaattiseksi jännitystilaksi; viimeinen nimitys ei ole suositeltava. Isotrooppisessa tapauksessa jännitysvektori on siis aina kohtisuorassa pinta-alkiotaan vastaan ja sen suuruus tietyssä pisteessä ei riipu pinta-alkion suunnasta. Nesteen määritelmän perusteella jännitystila on täten aina isotrooppinen jatkuvassa lepotilassa olevassa mielivaltaisessa nesteessä sekä lisäksi idealinesteen virtauksessa. Todellisen nesteen virtauksessa syntyy kitkan johdosta nollasta eroavia deviaatiojännityskomponentteja.

Newtonin neste. Newtonin nesteen konstitutiivisiksi yhtälöiksi otetaan tavallisesti tiettyjen otaksumien perusteella (ks. esimerkiksi Lähteet (17), (24)) kaavat

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^* &= 2\mu d_x - \frac{2}{3}\mu(d_x+d_y+d_z), & \tau_{yz} &= \mu g_{yz}, \\ \sigma_y^* &= 2\mu d_y - \frac{2}{3}\mu(d_x+d_y+d_z), & \tau_{zx} &= \mu g_{zx}, \\ \sigma_z^* &= 2\mu d_z - \frac{2}{3}\mu(d_x+d_y+d_z), & \tau_{xy} &= \mu g_{xy}. \end{aligned}\right\} \quad (4.2.15)$$

Kaavojen sisältö kulkee nimellä <u>Stokesin kitkalaki</u> (engl. Stokes' viscosity law). Kaavat (1.1.2) ja (1.3.34) ovat kitkalain erikoistapauksia. Paine lasketaan tilanyhtälön avulla.

<u>Kokoonpuristumattomalla</u> nesteellä dilataatiomopeus (ks. kaava (3.4.59)) $d_x+d_y+d_z = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y + \partial V_z/\partial z = -1/\varrho \cdot d\varrho/dt$ häviää ja kitkalaki saa yksinkertaisemman muodon

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^* &= 2\mu d_x, & \tau_{yz} &= \mu g_{yz}, \\ &\ldots & &\ldots \end{aligned}\right\} \quad (4.2.16)$$

Paine ei määräydy enää tilanyhtälöstä, koska se on nyt rajoitevoiman tyyppinen suure. Lausekkeiden (4.2.15) ja (4.2.16) mahdään totenttavan yhtälön (4.2.12).

Stokesin kitkalaki on analoginen isotrooppista kimmoista ainetta koskevan ns. yleistetyn Hooken lain kanssa, joka voidaan kirjoittaa mm. muotoon

$$\left.\begin{aligned} \sigma_a^* &= 2G\varepsilon_a - \frac{2}{3}G(\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c), & \tau_{bc} &= G\gamma_{bc}, \\ &\ldots & &\ldots \end{aligned}\right\} \quad (4.2.17)$$

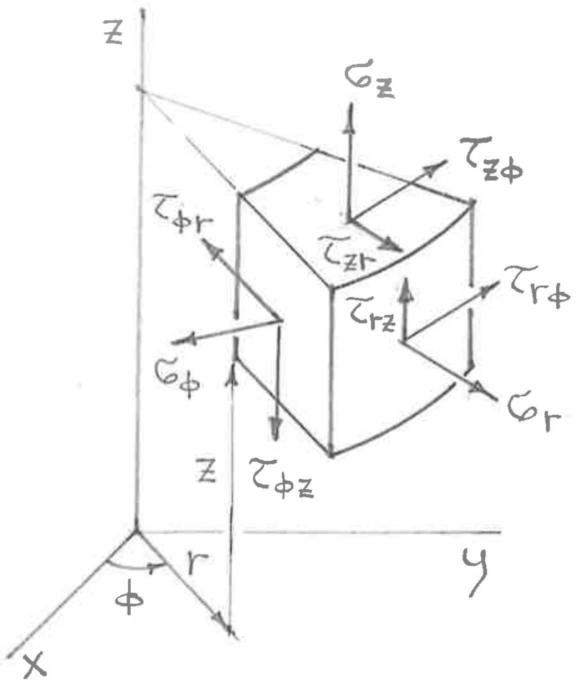
$$p \equiv -\frac{1}{3}(\sigma_a+\sigma_b+\sigma_c) = -K(\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c), \qquad (4.2.18)$$

jossa G on ns. liukukerroin ja K ns. puristuvuuskerroin.

Nesteiden yhteydessä muodonmuutosnopeuskomponentit eivät ole sinänsä yhtä tärkeitä suureita kuin muodonmuutoskomponentit kiinteillä aineilla. Tämän vuoksi Stokesin kitkalaki esitetäänkin tavallisesti suoraan nopeuskomponenttien avulla Lausutussa muodossa.

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x^* &= 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}, & \tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right),\\ \sigma_y^* &= 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}, & \tau_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right),\\ \sigma_z^* &= 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}, & \tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right). \end{aligned}} \qquad (4.2.19)$$

* Sylinterikoordinaatisto. Kuvasta 4.2.7 selviää sylinterikoordinaatistossa käytettyjen jännityskomponenttien σ_r, $\tau_{\phi z}$ jne. merkitys. Katso myös esimerkiksi Lähde (21).



Kuva 4.2.7

Voidaan osoittaa, että kaavan (4.2.10) määrittelemä paine tietyssä pisteessä on ns. invarianttisumme, jonka arvo ei muutu valittiinpa toisiaan vastaan kohtisuorassa olevat suunnat x, y ja z miten hyvänsä. Täten tässä paine

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_r+\sigma_\phi+\sigma_z). \qquad (4.2.20)$$

Kaavojen (4.2.8) vastineet ovat

$$\tau_{\phi z} = \tau_{z\phi}, \quad \tau_{zr} = \tau_{rz}, \quad \tau_{r\phi} = \tau_{\phi r}. \tag{4.2.21}$$

Stokesin kitkalaki saa muodon

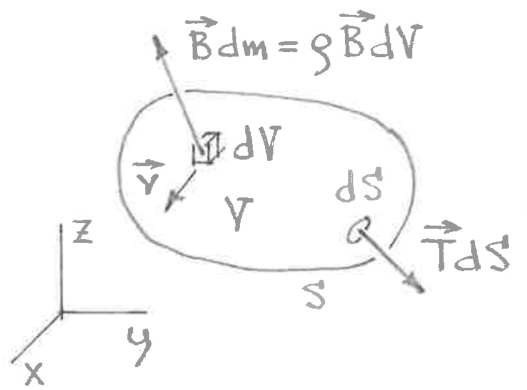
$$\left.\begin{aligned} \sigma_r^* &= 2\mu d_r - \tfrac{2}{3}\mu(d_r+d_\phi+d_z), \quad \tau_{\phi z} = \mu g_{\phi z}, \\ \sigma_\phi^* &= 2\mu d_\phi - \tfrac{2}{3}\mu(d_r+d_\phi+d_z), \quad \tau_{zr} = \mu g_{zr}, \\ \sigma_z^* &= 2\mu d_z - \tfrac{2}{3}\mu(d_r+d_\phi+d_z), \quad \tau_{r\phi} = \mu g_{r\phi}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2.22}$$

4.3 Liikemäärän tase

4.3.1 Äärellinen muoto

Yleinen tapaus. Liikemäärän taseen periaate on vielä toistettuna

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}. \tag{4.3.1}$$



Kuva 4.3.1 Kontinuumikappale.

Samoin toistaen kohtaa 2.1 kappaleeseen (kuva 4.3.1) vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti $\vec{F}$ koostuu kappalevoimien resultantista $\vec{F}^B$ ja pintavoimien resultantista $\vec{F}^S$

eli

$$\vec{F} = \vec{F}^B + \vec{F}^S, \tag{4.3.2}$$

jossa

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}^B &= \int \varrho \vec{B}\, dV \\ &= \int \varrho B_x dV\, \vec{i} + \int \varrho B_y dV\, \vec{j} + \int \varrho B_z dV\, \vec{k}, \end{aligned}\right\} \tag{4.3.3}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}^s &= \int \vec{T}\,dS, \\ &= \int T_x dS\,\vec{i} + \int T_y dS\,\vec{j} + \int T_z dS\,\vec{k}.\end{aligned}\right\} \qquad (4.3.4)$$

Kappaleen <u>liikemäärä</u>

$$\left.\begin{aligned}\vec{p} &= \int \varrho \vec{v}\,dV, \\ &= \int \varrho v_x dV\,\vec{i} + \int \varrho v_y dV\,\vec{j} + \int \varrho v_z dV\,\vec{k}.\end{aligned}\right\} \qquad (4.3.5)$$

Liikemäärän aineaderivaatta saadaan Reynoldsin Lausetta (3.3.60) soveltamalla ($f \hat{=} \varrho\vec{v}$)

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}\int \varrho\vec{v}\,dV = \int \frac{\partial(\varrho\vec{v})}{\partial t}\,dV + \int \varrho\vec{v}\,v_n\,dS. \qquad (4.3.6)$$

Termi $\int \varrho\vec{v}\,v_n\,dS$ on ns. <u>liikemäärävirta</u> (engl. momentum flow rate) (kgm/s^2) kontrollipinnan läpi alueesta ulos.

Täten <u>liikemäärän taseen periaatteen äärellisessä muodossa</u> saadaan yhtälö

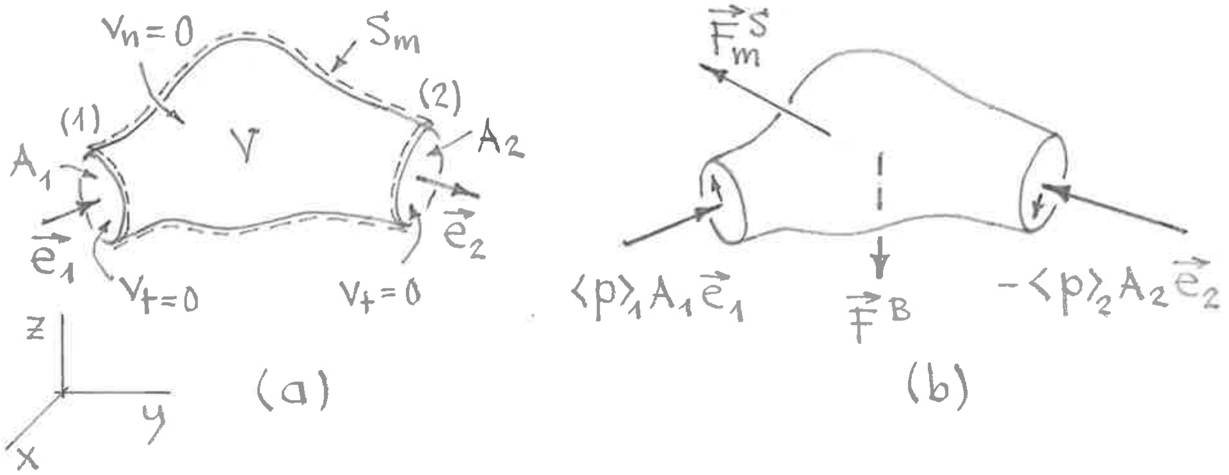
$$\boxed{\vec{F} = \int \frac{\partial(\varrho\vec{v})}{\partial t}\,dV + \int \varrho\vec{v}\,v_n\,dS} \qquad (4.3.7)$$

eli

$$\left.\begin{aligned}F_x &= \int \frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial t}\,dV + \int \varrho v_x v_n\,dS, \\ F_y &= \int \frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial t}\,dV + \int \varrho v_y v_n\,dS, \\ F_z &= \int \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial t}\,dV + \int \varrho v_z v_n\,dS.\end{aligned}\right\} \qquad (4.3.8)$$

Toistettakoon vielä, että $\vec{F}$ <u>tarkoittaa siis kontrollialueessa ko. hetkellä olevaan systeemiin eli kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien resultanttia</u>, jonka selvittämiseksi on jälleen aina syytä käyttää vapaakappalekuviota.

Standardikontrollialue, [O(1), O(2), O(3)]. Tässä tehdään kohdassa 3.4.1 standardikontrollialueeseen liittyvän otaksuman (1) eli $v_n = 0$ vaippapinnalla S_m lisäksi vielä otaksumat (2) ja (3) poikkileikkausten 1 ja 2 kohdalla, sillä ilman näitä lisäotaksumia ei saada paljoakaan aikaan.



Kuva 4.3.2 (a) Standardikontrollialue ja (b) siinä olevan kappaleen vapaakappalekuvio.

Yleinen yhtälö (4.3.7) muuntuu seuraavasti:

$$\vec{F} = \int \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} dV + \int \rho \vec{v} v_n dS,$$

$$\vec{F} = \int \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} dV + \cancel{\int_{S_m} \rho \vec{v} v_n dS} + \int_{A_1} \rho \vec{v} v_n dA + \int_{A_2} \rho \vec{v} v_n dA,$$

$$\vec{F} = \int \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} dV - \rho_1 \int_{A_1} v\vec{e} v dA + \rho_2 \int_{A_2} v\vec{e} v dA,$$

$$\vec{F} = \int \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} dV - \rho_1 \int_{A_1} v^2 dA \, \vec{e}_1 + \rho_2 \int_{A_2} v^2 dA \, \vec{e}_2, \qquad (4.3.9)$$

jossa on siis käytetty hyväksi kaikkia otaksumia (1), (2) ja (3); katso myös kuva 4.3.2(a).

Termi $\varrho\int v^2 dA\vec{e}$ esittää poikkileikkauksen läpi kulkevaa liikemäärävirtaa. On tapana määritellä ns. <u>liikemäärän korjauskerroin</u> (engl. momentum correction factor) β ($[\beta]=-$) kaavalla

$$\beta=\frac{\langle v^2\rangle}{\langle v\rangle^2}=\frac{\frac{1}{A}\int v^2 dA}{\left(\frac{1}{A}\int v\,dA\right)^2}=\frac{\int v^2 dA}{A\langle v\rangle^2}. \quad [0(2),0(3)] \quad (4.3.10)$$

Tämän merkinnän avulla liikemäärävirta

$$\varrho\int v^2 dA\vec{e}=\varrho\beta A\langle v\rangle^2\vec{e}=\beta\varrho A\langle v\rangle\langle v\rangle\vec{e},$$

$$=\beta\varrho Q\langle v\rangle\vec{e}=\beta w\langle v\rangle\vec{e}; \quad [0(2),0(3)] \quad (4.3.11)$$

katso kaavat (3.4.20) ja (3.4.21). Jos nopeusjakautuma poikkileikkauksessa on vakio, kerroin $\beta=1$. Laminaarisessa putkivirtauksessa $\beta=4/3$, kun putken poikkileikkaus on ympyrä. Turbulenttisessa virtauksessa nopeus on jakautunut melko tasaisesti ja kerroin β saattaa olla pienempi kuin 1,05; usein otetaan $\beta\approx 1$.

Kaava (4.3.9) tulee siis olemaan

$$\boxed{\vec{F}=\int\frac{\partial(\varrho\vec{v})}{\partial t}dV - \beta_1\varrho_1 Q_1\langle v\rangle_1\vec{e}_1+\beta_2\varrho_2 Q_2\langle v\rangle_2\vec{e}_2.} \quad [0(1),0(2),0(3)] \quad (4.3.12)$$

Tavallisin sovellutustilanne on <u>pysyvä virtaus</u>, jolloin tilavuusintegraali häviää ja kaavan (3.4.24) perusteella massavirta

$$\varrho_1 Q_1=\varrho_2 Q_2\equiv\varrho Q=w=\text{vakio} \quad (4.3.13)$$

ja saadaan yhtälö

$$\boxed{\vec{F} = \varrho Q\,(\beta_2\langle v\rangle_2\vec{e}_2 - \beta_1\langle v\rangle_1\vec{e}_1).}\quad [0(1),0(2),0(3)] \qquad (4.3.14)$$

Vastaavat skalaarikomponenttiyhtälöt ovat

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \varrho Q\,(\beta_2\langle v\rangle_2 l_2 - \beta_1\langle v\rangle_1 l_1),\\ F_y &= \varrho Q\,(\beta_2\langle v\rangle_2 m_2 - \beta_1\langle v\rangle_1 m_1),\\ F_z &= \varrho Q\,(\beta_2\langle v\rangle_2 n_2 - \beta_1\langle v\rangle_1 n_1), \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.15)$$

jossa l, m ja n ovat vektorin $\vec{e}$ komponentit eli $\vec{e} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$.

Resultantti $\vec{F}$ koostuu kuvassa 4.3.2 (b) esitetyistä voimista. Kohdassa 4.3.2 yhdensuuntaisvirtauksen yhteydessä saatujen tulosten perusteella otaksumasta (3) seuraa, että poikkileikkauksissa vaikuttava normaalijännitys $\sigma = -p$, koska deviaationormaalijännitys σ^* häviää. Täten normaalijännityksistä poikkileikkauspintoihin vaikuttavat resultantit ovat vastaavasti

$$\left.\begin{aligned} \int_{A_1} p\vec{e}\,dA &= \int_{A_1} p\,dA\,\vec{e}_1 = \langle p\rangle_1 A_1\vec{e}_1,\\ -\int_{A_2} p\vec{e}\,dA &= -\int_{A_2} p\,dA\,\vec{e}_2 = -\langle p\rangle_2 A_2\vec{e}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.16)$$

Lisäksi otaksumasta (3) seuraa, että painejakautuma poikkileikkauksessa on hydrostaattinen, joten taas esimerkin 2.2.1 tulosten perusteella voidaan kirjoittaa

$$\langle p\rangle = p_c, \qquad (4.3.17)$$

jossa p_c on paineen arvo poikkileikkauspinnan pintakeskiön c kohdalla.

Leikkausjännityksistä poikkileikkauspintoihin kertyvät voimat ovat tavallisesti pienehköjä ja ne otaksutaan yleensä nolliksi. Näin käy symmetriasyistä tarkasti mm. putkivirtauksessa, kun poikkileikkaus on ympyrä.

Kappalevoimien resultantti $\vec{F}^B$ johtuu tavallisesti painovoimasta ja on siis helppo laskea tarkasti. Vaippaan vaikuttavien pintavoimien resultantti F_m^S voi olla vaikea arvioida. Joissakin tehtävissä se onkin tuntematon, joka ratkaistaan juuri yhtälön (4.3.14) avulla.

Esimerkki 4.3.1. Ympyräpoikkileikkaus. Lasketaan liikemäärän korjauskerroin β esimerkissä 3.4.1 esitetyn (1) laminaarisen nopeusjakautuman

$$v(r) = \left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]v_{max} \tag{a}$$

ja (2) turbulenttisen nopeusjakautuman

$$v(r) = \left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/n} v_{max} \quad (n=7) \tag{b}$$

tapauksissa.

(1) Laminaarisessa virtauksessa

$$\int_A v^2 dA = \int_0^R v^2(r)\, 2\pi r\, dr = 2\pi \int_0^R \left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2 r\, dr \cdot v_{max}^2$$

$$= 2\pi \int_0^R \left(r - 2\frac{r^3}{R^2} + \frac{r^5}{R^4}\right) dr \cdot v_{max}^2$$

$$= 2\pi \Big|_0^R \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}\frac{r^4}{R^2} + \frac{1}{6}\frac{r^6}{R^2}\right) v_{max}^2$$

$$= 2\pi R^2 \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) v_{max}^2 = \frac{1}{3}\pi R^2 v_{max}^2 . \tag{c}$$

Esimerkin 3.4.1 perusteella $\langle v\rangle = \frac{1}{2}v_{max}$, joten kaavasta (4.3.10) saadaan

$$\beta = \frac{\int v^2 dA}{A\langle v\rangle^2} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 v_{max}^2}{\pi R^2 \cdot \frac{1}{4} v_{max}^2} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33. \qquad (d)$$

(2) Turbulenttisessa virtauksessa

$$\int_A v^2 dA = \int_0^R v^2(r)\, 2\pi r\, dr = 2\pi \int_0^R \left(1-\frac{r}{R}\right)^{2/n} r\, dr \cdot v_{max}^2. \qquad (e)$$

*↓ Ottamalla käyttöön apumuuttujan $t = \left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/n}$, saadaan

$$r = R(1-t^n), \quad dr = -Rnt^{n-1} \qquad (f)$$

ja integraaliksi tulee

$$\int_A v^2 dA = 2n\pi R^2 \int_1^0 \left(t^{2n+1} - t^{n+1}\right) dt \cdot v_{max}^2$$

$$= 2n\pi R^2 \Big|_1^0 \left(\frac{1}{2n+2} t^{2n+2} - \frac{1}{n+2} t^{n+2}\right) v_{max}^2$$

$$= 14\pi R^2 \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{9}\right) v_{max}^2 = \frac{49}{72}\pi R^2 v_{max}^2. \qquad (g)$$

*↑

Esimerkin 3.4.1 perusteella $\langle v\rangle = 49/60 \cdot v_{max}$, joten

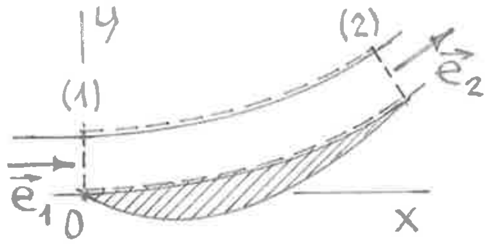
$$\beta = \frac{\int v^2 dA}{A\langle v\rangle^2} = \frac{\frac{49}{72}\pi R^2 v_{max}^2}{\pi R^2 \cdot \frac{49^2}{60^2} v_{max}^2} = \frac{150}{147} \approx 1{,}02. \qquad (h)$$

Esimerkki 4.3.2. Nestesuihku. Kuvan (a) esittämä nestesuihku osuu siipeen, jonka tulo- ja jättöreunan välinen kulma on α. Määritetään voima, jolla

(a)

neste vaikuttaa siipeen, (1) kun siipi on kiinteä, (2) kun siipi liikkuu vakionopeudella u oikealle. Oletetaan vakiotiheysneste, pysyvä virtaama Q ja keskimääräinen nopeus $v \equiv \langle v \rangle$ kiinteän suuttimen suhteen.

(1) Kuvassa (b) näkyy valittu kontrollialue ja koordinaatisto. Ajatellaan kyseessä olevan tasovirtaus xy-tasossa. Oletetaan miltei tasainen nopeusjakautuma ja otetaan siis



(b)

$$\beta_1 = \beta_2 = 1 . \tag{a}$$

Lisäksi kuvan (b) merkintöjen perusteella

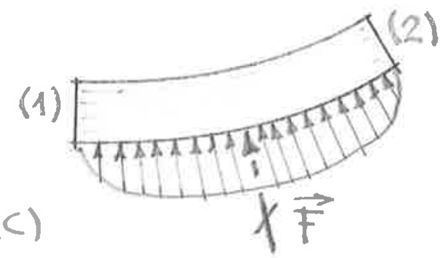
$$l_1 = 1 , \quad m_1 = 0 , \quad l_2 = \cos\alpha , \quad m_2 = \sin\alpha \tag{b}$$

ja kaavat (4.3.15) antavat

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \rho Q \left(\langle v \rangle_2 \cos\alpha - \langle v \rangle_1 \right) , \\ F_y &= \rho Q \langle v \rangle_2 \sin\alpha . \end{aligned} \right\} \tag{c}$$

Nopeus $\langle v \rangle_1 = v$, mutta nopeus $\langle v \rangle_2$ on tuntematon. Jos oletetaan kitkaton virtaus ja jätetään painovoiman vaikutus vähäisenä huomiotta, voidaan osoittaa myöhemmin johdettavan Bernoullin yhtälön avulla, että myös $\langle v \rangle_2 = v$. Tätä arvoa käytetään jatkossa.

Kuvan (c) esittämä vapaakappalekuvio on piirretty jättäen tasaisesti otaksutusta ilmanpaineesta johtuvat pintavoimat pois, koska niistä umpinaisen pinnan yli



(c)

integroitu resultantti ja momentti häviävät; ts. käsitellään mittapainetta, jossa referenssipaineeksi on otettu paikallinen ilmanpaine. Absoluuttinen paine on poikkileikkausten 1 ja 2 ylä- ja alapinnalla sama kuin ilmanpaine ja otaksumalla paine likimain vakioksi nähdään mittapaineen häviävän myös poikkileikkausten alueella. Täten vain siiven ja nesteen kosketuspinnalla esiintyy nollasta eroavaa mittapainetta, josta kertyy resultantti $\vec{F}$, jos vielä jätetään painovoiman osuus pienenä terminä pois. Nesteestä siipeen vaikuttava voima $\vec{R} = -\vec{F}$ ja sen komponentit ovat siis

$$\left.\begin{aligned} R_x &= -F_x = \rho Q v (1-\cos\alpha), \\ R_y &= -F_y = -\rho Q v \sin\alpha . \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

Valitsemalla esimerkiksi numeroarvot

$$\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3} = 10^3\ \mathrm{kg/m^3},$$
$$A = 10\ \mathrm{cm^2} = 10^{-3}\ \mathrm{m^2},$$
$$v = 10\ \mathrm{m/s},$$
$$\alpha = 180^\circ,$$

saadaan virtaama

$$Q = vA = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2} = 10^{-2}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s}}$$

ja komponentit

$$R_x = 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s}} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,(1-(-1)) = 200\,\frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{s}} = 200\,\mathrm{N},$$

$$R_y = 0 .$$

(2) Kun siipi liikkuu vakionopeudella u oikealle, kiinnitetään xy-koordinaatisto ja kontrollialue kuvan (b) esittämällä tavalla siipeen ja

annetaan niiden liikkua siiven mukana. Mitataan tapahtumia xy-koordinaatiston kannalta. Koska koordinaatisto liikkuu vakionopeudella ilman rotaatiota, kysymyksessä on edelleen inertiaalikoordinaatisto eikä kaavan (2.1.49) mukaisia näennäisvoimatermejä tarvitse ottaa käyttöön.

Virtaus on jälleen pysyvää ja voidaan soveltaa kaavoja (4.3.15). Nyt kuitenkin nopeudet

$$\langle v_r \rangle_1 = \langle v_r \rangle_2 = v - u \tag{e}$$

ja virtaama

$$Q = (v-u)A \tag{f}$$

joten

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \varrho (v-u) A \left[(v-u)\cos\alpha - (v-u) \right], \\ F_y &= \varrho (v-u) A (v-u) \sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{g}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \varrho A (v-u)^2 (1-\cos\alpha), \\ R_y &= -\varrho A (v-u)^2 \sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

Tarkastellaan vielä siipeen vaikuttavan voiman tehoa

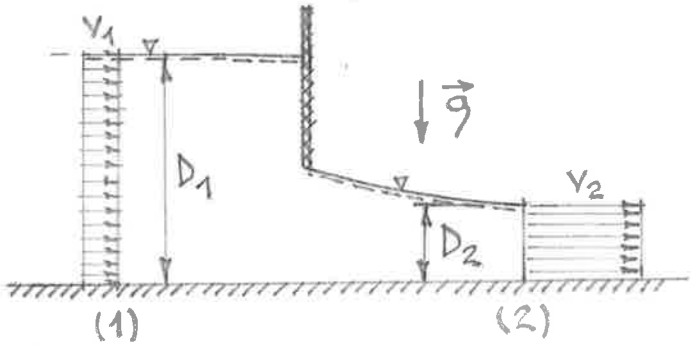
$$P = R_x u = \varrho A (v-u)^2 u (1-\cos\alpha) \tag{i}$$

kiinteän koordinaatiston suhteen. Jotta teho saisi maksimiarvon on ensinnäkin valittava $\alpha = 180°$, jolloin

$$P = 2\varrho A (v-u)^2 u. \tag{j}$$

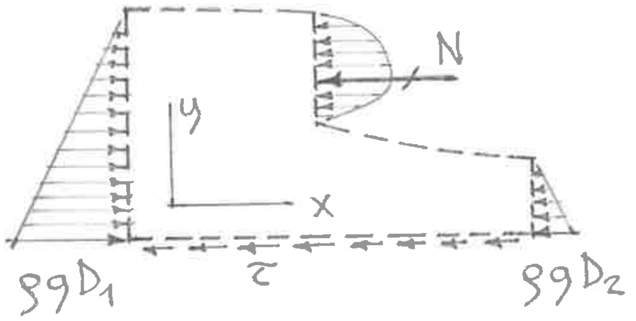
Nestesuihkun tulee siis palata suoraan taaksepäin. Kun ϱ, A ja V ovat annetut, voidaan derivoimalla lisäksi todeta, että maksimiteho saavutetaan, kun siiven nopeus $u = V/3$. Tällöin nesteen suhteellinen nopeus tuloreunalla on $2/3 \cdot V$ ja nesteelle jää vielä nopeus $V/3$ taaksepäin sen poistuessa jättöreunalta. Voisi ajatella, että paras teho saavutetaan, kun $u = V/2$, jolloin nesteen loppunopeus on nolla ja sen liike-energia on tullut kokonaan käytetyksi. Näin ei kuitenkaan ole, koska silloin siiven kautta kulkee vähemmän nestettä aikaa kohti kuin tapauksessa $u = V/3$. Tilanne muuttuu, kun tarkastellaan lähekkäin toisiaan seuraavia siipiä — kuten esimerkiksi Pelton-turbiinin juoksupyörällä sijaitsevia siipiä — jolloin paras teho saavutetaan arvolla $u = V/2$ (ks. Lähde D (4 s. 284)).

Esimerkki 4.3.3. Luukkupato. Arvioidaan kuvan (a) esittämän luukkupadon luukkuun vaikuttava vaakavoima, kun luukun leveys on B. Oletetaan pyörteetön tasovirtaus ja että virtaus on leikkausten 1 ja 2 kohdalla likimain yhdensuuntaisvirtausta, jossa nopeus on jakautunut tasaisesti poikkileikkauksen alueella.



(a)

Kuvassa (b) on esitetty valitussa kontrollialuessa olevaan kappaleeseen vaikuttavat vaakavoimat. Leikkauksina 1 ja 2 on otaksuttu s. 4.14 esitetyistä syistä johtuen hydrostaattinen painejakautuma. (Toimitaan mittapaineen avulla.)

(b) 

Näin ollen (ks. kaavat (4.3.16) ja (4.3.17))

$$\left.\begin{aligned} \langle p\rangle_1 &= p_{c_1} = \tfrac{1}{2}\rho g D_1 , \quad A_1 = B D_1 , \\ \langle p\rangle_2 &= p_{c_2} = \tfrac{1}{2}\rho g D_2 , \quad A_2 = B D_2 \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

ja poikkileikkauspintoihin vaikuttavat vaakavoimat ovat itseisarvoiltaan $1/2 \cdot \rho g B D_1^2$ ja $1/2 \cdot \rho g B D_2^2$. Lunkun pinnalla vaikuttavasta tuntemattomasta painejakautumasta kertyvä vaakavoima olkoon N, jolloin lunkkuun vaikuttava vastakkaissuuntainen voima R on itseisarvoltaan yhtäsuuri. Otaksumalla vaakasuuntaiset kitkavoimat vähäisiksi ensimmäinen yhtälö (4.3.15) antaa ($\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\langle v\rangle_1 \equiv v_1$, $\langle v\rangle_2 \equiv v_2$, $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$)

$$\tfrac{1}{2}\rho g B D_1^2 - \tfrac{1}{2}\rho g B D_2^2 - N = \rho Q (v_2 - v_1) \qquad (b)$$

josta seuraa

$$R = N = \tfrac{1}{2}\rho g B (D_1^2 - D_2^2) - \rho Q (v_2 - v_1). \qquad (c)$$

Otetaan numeroarvot

$$\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3} = 10^3\ \mathrm{kg/m^3},$$

$$v_1 = 1{,}5\ \mathrm{m/s}, \quad D_1 = 3\ \mathrm{m}, \quad D_2 = 1\ \mathrm{m}, \quad B = 2\ \mathrm{m}.$$

Tällöin virtaama

$$Q = v_1 A_1 = 1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 6\ \mathrm{m}^2 = 9\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

ja jatkuvuusyhtälön (3.4.26) perusteella

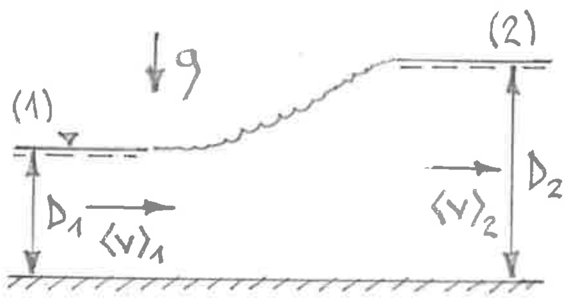
$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{D_1}{D_2} v_1 = \frac{3}{1} 1{,}5 \frac{m}{s} = 4{,}5 \frac{m}{s}.$$

Lunkkiin vaikuttava voima

$$R = \frac{1}{2} 10^3 \frac{kg}{m^3} 9{,}81 \frac{m}{s^2} 2m \cdot 8m^2 - 10^3 \frac{kg}{m^3} 9 \frac{m^3}{s} 3 \frac{m}{s}$$

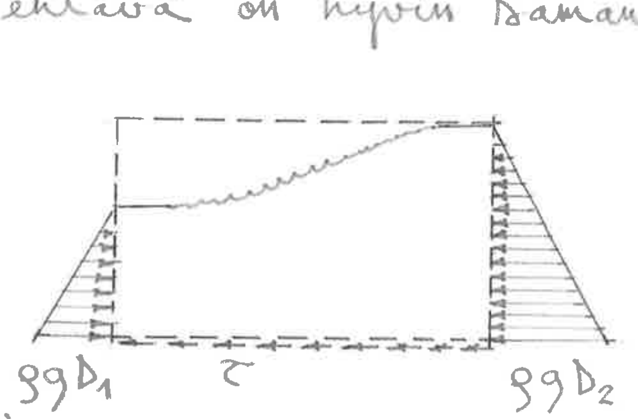
$$= (78'480 - 27'000) \frac{kg \cdot m}{s^2} \approx 51'500\ N.$$

Esimerkki 4.3.4. Vesikynnys. Sopivien olosuhteiden vallitessa avouomavirtaus voi muuttua virtausnopeudeltaan ja syvyydeltään lyhyellä matkalla ns. vesikynnyksenä (engl. hydraulic jump) (kuva (a)). Määritetään D_2 suureiden D_1 ja $\langle v \rangle_1$ funktiona. Oletetaan suorakaideepoikkileikkaus (leveys B), pysyvä virtaus ja että kyseessä on leikkausten 1 ja 2 kohdilla likimain yhdensuuntaisvirtaus, jossa nopeus on jakautunut likimain tasaisesti.



(a)

Tehtävä on hyvin samanlainen kuin edellisessä esimerkissä. Kuvan (b) vapaakappalekuviossa on esitetty vaakasuunnassa vaikuttavat ulkoiset voimat. Olettamalla jälleen vaakasuuntaiset kitkavoimat vähäisiksi ensimmäinen



(b)

yhtälö (4.3.15) antaa ($\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$)

$$\frac{1}{2}\rho g B D_1^2 - \frac{1}{2}\rho g B D_2^2 = \rho Q\left(\langle v\rangle_2 - \langle v\rangle_1\right). \qquad (a)$$

lisäksi

$$Q = B D_1 \langle v\rangle_1 = B D_2 \langle v\rangle_2 , \qquad (b)$$

joten

$$\langle v\rangle_2 = \frac{D_1}{D_2}\langle v\rangle_1 . \qquad (c)$$

Sijoittamalla Q:n ja $\langle v\rangle_2$:n lausekkeet yhtälöön (a) saadaan vielä sieventämällä tulos

$$\frac{1}{2} g \left(D_1^2 - D_2^2\right) D_2 = \langle v\rangle_1^2 D_1 \left(D_1 - D_2\right). \qquad (d)$$

Eräs tämän yhtälön ratkaisu on selvästikin $D_1 = D_2$, joka ei tässä kiinnosta, koska se ei kuvaa vesikynnystä. Kun $D_1 \neq D_2$, yhtälö voidaan supistaa termillä $D_1 - D_2$ ja saadaan D_2:n suhteen toisen asteen yhtälö

$$\frac{1}{2} g \left(D_1 + D_2\right) D_2 = \langle v\rangle_1^2 D_1 ,$$

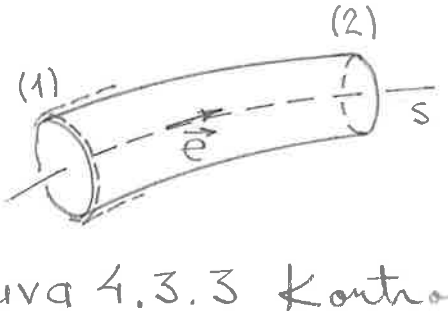
$$D_2^2 + D_1 D_2 - \frac{2 D_1 \langle v\rangle_1^2}{g} = 0 , \qquad (e)$$

joka antaa ratkaisun

$$D_2 = -\frac{D_1}{2} \overset{+}{(-)} \sqrt{\frac{D_1^2}{4} + \frac{2 D_1 \langle v\rangle_1^2}{g}} . \qquad (f)$$

Miinusmerkki ei tule kysymykseen, koska se antaisi negatiivisen syvyyden arvon.

Yleinen yksidimensioinen virtaus, [O(2), O(3), O(4)].



Sovelletaan yksidimensioista Reynoldsin lausetta (3.4.29) yleiseen yhtälöön (4.3.1) ($v_e \to v$, $f \,\hat{=}\, \rho\vec{v}$):

Kuva 4.3.3 Kontrollialue.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\int \varrho \vec{v}\, dV$$

$$\approx \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}(\langle \varrho \vec{v}\rangle A)\, ds - \langle \varrho \vec{v} v\rangle_1 A_1 + \langle \varrho \vec{v} v\rangle_2 A_2$$

$$= \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}(\varrho \langle v\vec{e}\rangle A)\, ds - \varrho_1 \langle v\vec{e} v\rangle_1 A_1 + \varrho_2 \langle v\vec{e} v\rangle_2 A_2$$

$$= \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}(\varrho \langle v\rangle A)\vec{e}\, ds - \varrho_1 \langle v^2\rangle_1 A_1 \vec{e}_1 + \varrho_2 \langle v^2\rangle_2 A_2 \vec{e}_2$$

eli (4.3.18)

$$\boxed{\vec{F} = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}(\varrho Q)\vec{e}\, ds + - \beta_1 \varrho_1 Q_1 \langle v\rangle_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \varrho_2 Q_2 \langle v\rangle_2 \vec{e}_2 .} \qquad (4.3.19)$$

[O(2), O(3), O(4)]

Johdon eri vaiheet ovat melko ilmeiset; on mm. käytetty hyväksi tietoa, että $\vec{e}$ (kuva 4.3.3) on vain s:n mutta ei t:n funktio sekä määritelmää (4.3.10). Pysyvän virtauksen tapauksessa kaavat (4.3.19) ja (4.3.12) yhtyvät.

*↓ Yhtälöä (4.3.19) vastaavan differentiaaliyhtälömuodon johtamiseksi sovelletaan samaa tekniikkaa kuin kohdassa 3.4.1, jolloin saadaan ensin tulos

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta s} = \frac{\partial}{\partial t}(\varrho Q)\vec{e} + \frac{\partial}{\partial s}(\beta \varrho Q \langle v\rangle \vec{e})$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\varrho Q)\vec{e} + \frac{\partial}{\partial s}(\beta \varrho Q \langle v\rangle)\vec{e} +$$

$$+ \beta \varrho Q \langle v\rangle \frac{1}{R_c}\vec{e}_n , \qquad (4.3.20)$$

jossa R_c on akselin kaarevuussäde ja $\vec{e}_n$ on tässä päänormaalin suuntainen yksikkövektori. On siis sovellettu kaavaa D (2.2.39). Pyritään johtamaan virtaussummassa nesteen liikettä kuvaava yhtälö, joten otetaan yhtälön (4.3.20) skalaarikomponentti $\vec{e}$:n suunnalle eli kerrotaan yhtälön molemmat puolet skalaarisesti $\vec{e}$:llä:

$$\boxed{\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F_e}{\Delta s} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho Q) + \frac{\partial}{\partial s}(\beta \rho Q \langle v \rangle).} \qquad (4.3.21)$$

Tässä ΔF_e tarkoittaa pituuden Δs omaavan kontrollialueen sisällä olevaan nestekappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien resultantin komponenttia $\vec{e}$:n suunnalle. Tämä termi täytyy käsitellä tapaus kerrallaan.

Putkivirtaus, [O(2), O(3), O(4), O(5')]. Kirjataan jatkoa silmälläpitäen seuraavat otaksumat:

O(5): $\boxed{\vec{B} \text{ on konservatiivinen,}}$

jolloin kaavan (2.1.28) mukaisesti

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}\Omega \qquad (4.3.22)$$

sekä erikoistapaus

O(5'): $\boxed{\vec{B} = \vec{g},}$

jolloin kaavojen (2.1.33) ja (2.1.34) mukaisesti

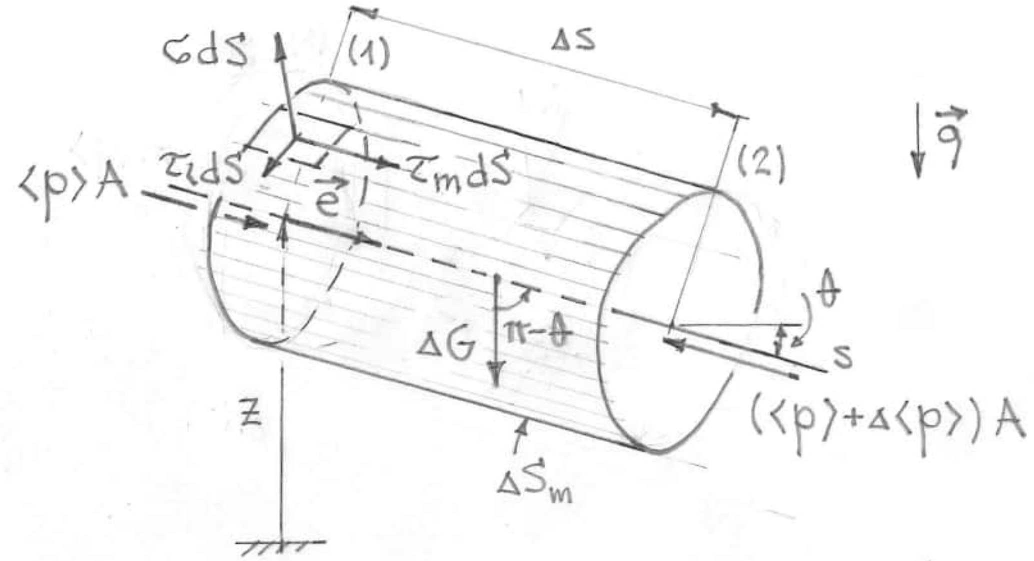
$$\Omega = gh, \qquad (4.3.23)$$

$$\vec{B} = -g\vec{\nabla}h. \qquad (4.3.24)$$

Vakiopainovoimakentän otaksuma (5') on käytännössä yleensä aina voimassa.

*Tarkastellaan nyt differentiaaliyhtälön (4.3.21) vasemman puolen saamaa muotoa kuvan 4.3.4 esittämän vapaakappalekuvion avulla.

Yksinkertaisuuden vuoksi on otettu prismaattinen



Kuva 4.3.4 Vapaakappalekuvio.

tapaus. Kappaleen tilavuus $\Delta V = A\Delta s$, joten painovoiman osuus $\Delta F^B = \Delta G \approx \rho A \Delta s g$ ja siis akselin suuntainen komponentti

$$\Delta F_e^B = \Delta G \sin\theta \approx \rho g A \sin\theta \cdot \Delta s, \tag{4.3.25}$$

jossa θ on akselin kaltevuuskulma vaakatason suhteen otettuna positiiviseksi, kun korkeusasema $z(s)$ pienenee s:n kasvaessa. Nähdään helposti lisäksi, että

$$\sin\theta = -\frac{dz}{ds}, \tag{4.3.26}$$

joka tulos voidaan sijoittaa haluttaessa lausekkeeseen (4.3.25).

Poikkileikkauspintoihin vaikuttavasta paineesta kertyy akselin suuntainen komponentti

$$\begin{aligned}\Delta F_e^p &= \langle p\rangle A - (\langle p\rangle + \Delta\langle p\rangle)A = -\Delta\langle p\rangle A \\ &= -\frac{\Delta\langle p\rangle}{\Delta s} A \cdot \Delta s. \end{aligned} \tag{4.3.27}$$

Vaipalla olevaan suorakulmaiseen pinta-alkioon

dS, jonka sivujen pituudet ovat yleisessä tapauksessa dl ja $dl' = ds/\cos\gamma$, vaikuttava jännitysvektori $\vec{T}$ voidaan esittää kantavektoreiden $\vec{e}_l$, $\vec{e}_m$ ja $\vec{n}$ avulla (ks. tarkemmin kuva L.2.2) muodossa

$$\vec{T} = \tau_l \vec{e}_l + \tau_m \vec{e}_m + \sigma \vec{n}. \qquad (4.3.28)$$

Nyt tarkasteltavassa prismaattisessa tapauksessa $\gamma = 0$, $\cos\gamma = 1$, $dl = ds$, $\vec{e}_m = \vec{e}$ ja

$$\vec{T} = \tau_l \vec{e}_l + \tau_m \vec{e} + \sigma \vec{n}. \qquad (4.3.29)$$

Täten vaippapinnalla vaikuttavista jännityksistä kertyvä akselin suuntainen voima

$$(\Delta F_m^S)_e = \int_{\Delta S_m} \vec{T}\, dS \cdot \vec{e} = \int_{\Delta S_m} \vec{T} \cdot \vec{e}\, dS$$

$$= \int_{\Delta S_m} (\cancel{\tau_l \vec{e}_l \cdot \vec{e}} + \tau_m \vec{e} \cdot \vec{e} + \cancel{\sigma \vec{n} \cdot \vec{e}})\, dS$$

$$= \int_{\Delta S_m} \tau_m\, dS = \int_1^2 \left(\int \tau_m\, dl \right) ds = -\int_1^2 \tau_w l_w\, ds$$

$$= -l_w \int_1^2 \tau_w\, ds \approx -\tau_w l_w \Delta s. \qquad (4.3.30)$$

Tässä suuretta

$$\tau_w = -\frac{1}{l_w} \int \tau_m\, dl \qquad (4.3.31)$$

nimitetään <u>keskimääräiseksi seinämäleikkausjännitykseksi</u>. Suure l_w on märkä piiri, joka on putkivirtauksessa sama kuin poikkileikkauksen reunakäyrän piiri eli pituus. Kaavaan (4.3.31) on otettu miinusmerkki siksi, että jos virtaus tapahtuu s-akselin positiiviseen suuntaan, τ_w tulee tällöin positiiviseksi.

Kaavoissa (4.3.25) ja (4.3.30) esiintyvät likimääräismerkit johtuvat siitä, että ρ ja τ_w tarkoittavat poikkileikkauksen 1 kohdalla vallitsevia arvoja eivätkä välillä Δs olevia keskiarvoja, kuten tulisi tarkasti olla. Näiden likimääräistyksien vaikutus häviää kuitenkin lopuksi.

Yhteensä akselin suunnassa vaikuttavien voimien resultantti on siis

$$\Delta F_e = \Delta F_e^B + \Delta F_e^p + (\Delta F_m^S)_e$$

$$\approx \left(\rho g A \sin\theta - \frac{\Delta\langle p\rangle}{\Delta s} A - \tau_w l_w\right)\Delta s \qquad (4.3.32)$$

ja raja-arvo

$$\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta F_e}{\Delta s} = \rho g A \sin\theta - \frac{\partial\langle p\rangle}{\partial s} A - \tau_w l_w . \qquad (4.3.33)$$

Koska tässä tarkasteltiin suureen $\langle p\rangle$ muuttumista s:n suhteen tietyllä hetkellä, termin $\Delta\langle p\rangle/\Delta s$ raja-arvoa on merkittävä tunnuksella $\partial\langle p\rangle/\partial s$.

Sijoittamalla lauseke (4.3.33) yhtälöön (4.3.21) sekä järjestelemällä hieman termejä saadaan differentiaaliyhtälö — ns. <u>putkivirtauksen liikeyhtälö</u> —

$$\boxed{\frac{1}{A}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho Q) + \frac{\partial}{\partial s}(\beta\rho Q\langle v\rangle)\right] + \frac{\partial\langle p\rangle}{\partial s} + \rho g\frac{dz}{ds} + \frac{4\tau_w}{d_h} = 0.} \qquad (4.3.34)$$

*

[0(2), 0(3), 0(4), 0(5')]

Vaikka yhtälön johto suoritettiin prismaattisessa tapauksessa, yhtälöä voidaan soveltaa tietyllä tarkkuudella myös tapauksissa, joissa $A = A(s,t)$. Johto täytyisi suorittaa kirjoittamalla poikkileikkauspintaan 2 vaikuttava voima muodossa $(\langle p\rangle + \Delta\langle p\rangle)(A+\Delta A)$ ja lausekkeen (4.3.29) sijasta tulisi lähteä lausekkeesta (4.3.28) asettaen samalla $\sigma \approx -p$.

Yhtälöstä (4.3.34) saadaan suuri määrä eri versioita. Tavallisin tapaus on vakiotiheysneste ja jäykkä seinämä (eli 0(1)) joista seuraa $A = A(s)$, $\partial A/\partial t = 0$ ja täten taulukon 3.4.1 kaavan (18) perusteella

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \qquad (4.3.35)$$

eli $Q = \langle v\rangle A$ on vakio s:n suhteen. Liikeyhtälö saadaan muotoon

$$\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t} + \langle v\rangle\frac{\partial(\beta\langle v\rangle)}{\partial s} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + \frac{4}{\varrho}\frac{\tau_w}{d_h} = 0, \qquad (4.3.36)$$

$[0(2), 0(3), 0(4), 0(5')]$

Jotta päästäisiin eteenpäin, on keskimääräiselle seinämäleikkausjännitykselle esitettävä jokin konstitutiivinen yhteys. Tavallisesti kirjoitetaan

$$\boxed{\tau_w = f\varrho\frac{\langle v\rangle^2}{8},} \qquad (4.3.37)$$

jossa f on dimensioton suure, ns. kitkahäviökerroin (engl. friction coefficient, friction factor, resistance coefficient). (Tämän kaavan termiä f nimitetään tavallisesti Moodyn kertoimeksi tai myös Darcy-Weisbach-kertoimeksi. Joskus taas käytetään esitysmuotoa $\tau_w = f'\rho\langle v\rangle^2/2$, missä f' on ns. Fanningin kerroin ja siis $f = 4f'$.) Kaavaa (4.3.37) ei pidä käsittää miksikään luonnonlaiksi vaan pikemminkin kertoimen f määritelmäksi. Newtonilaisella vakiotiheysnesteellä f riippuu prismaattisessa putkessa Reynoldsin luvusta, poikkileikkauspinnan muodosta ja seinämän karheudesta. Kertoimesta f on olemassa parhaat tiedot ympyräpoikkileikkauksen tapauksessa. f saadaan määritettyä analyyttisesti vain laminaarisessa tapauksessa; ks. esimerkit 4.3.9 ja 4.3.10. Kertoimeen f palataan tarkemmin kohdassa 4.5.2.

Kaavaa (4.3.37) on tarkasti ottaen täydennettävä sanomalla, että leikkausjännityksen suunta on vastakkainen kuin virtaussuunta. Jos virtaussuunta on etukäteen tuntematon, kaava on syytä esittää muodossa

$$\tau_w = f\rho\frac{|\langle v\rangle|\langle v\rangle}{8}, \qquad (4.3.38)$$

joka pitää huolen τ_w:n oikeasta merkistä.

Yhtälöstä (4.3.36) saadaan tavanomainen käytännön sovellutuskaava asettamalla $\beta = 1$ (Näin on likimain turbulenttisessa virtauksessa. Lisäksi, jos A riippuu vain lievästi s:stä, $\langle v\rangle = Q/A$ on myös vakio s:n suhteen ja jos β riippuu vain lievästi s:stä, termi $\partial(\beta\langle v\rangle)/\partial s$ häviää.) ja ottamalla huomioon kaava (4.3.38) saadaan

$$\boxed{\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t}+\langle v\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial s}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial s}+g\frac{dz}{ds}+\frac{f}{2d_h}|\langle v\rangle|\langle v\rangle=0.} \qquad (4.3.39)$$

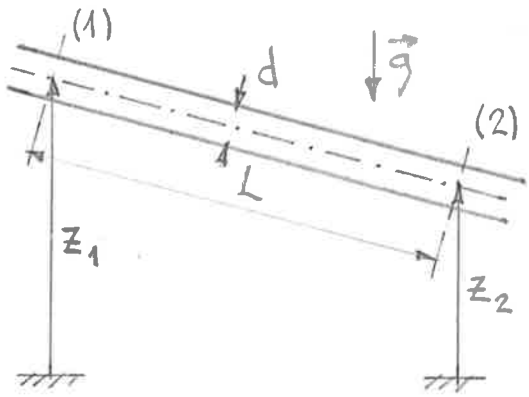
[0(2), 0(3), 0(4), 0(5')]

Tämä yhtälö on laajassa käytössä epästationaarisia putkivirtauksia analysoitaessa (25). Kitkahäviökerroin on saatu yleensä stationaaristen kokeiden perusteella, mutta samaa arvoa käytetään tavallisesti myös epästationaarisissa tapauksissa, vaikka tämä ei ole välttämättä oikein. Usein käytetään vielä kaavan (3.4.34) mukaista merkintää ja kirjoitetaan

$$\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t}+\langle v\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial s}\equiv\frac{d\langle v\rangle}{dt}, \qquad (4.3.40)$$

joka tulos voidaan sijoittaa yhtälöön (4.3.39). Integroimalla yhtälöä s:n suhteen voidaan johtaa eräs yleistetyn Bernoullin muoto. Tätä samoin kuin muitakin putkivirtauksen sovellutuksia käsitellään lisää kohdassa 4.5.2.

Esimerkki 4.3.5. Vakiotiheyksisen pysyvä virtaus suorassa vakioympyräpoikkileikkauksen omaavassa putkessa. Johdetaan poikkileikkauksissa 1 ja 2 vallitsevien paineiden $\langle p\rangle_1$ ja $\langle p\rangle_2$ välinen paine-eron (kuva (a))



(a)

$$\Delta'\langle p\rangle\equiv\langle p\rangle_1-\langle p\rangle_2 \qquad (a)$$

lauseke.

Tässä on käytetty merkintää Δ' erotukseksi tavanomaisesta muutoksen tunnuksesta Δ; siis esimerkiksi $\Delta\langle p\rangle = \langle p\rangle_2 - \langle p\rangle_1$.

Otsikossa mainittujen otaksumien johdosta keskinopeus $\langle v\rangle$ on jatkuvuusyhtälön perusteella vakio sekä s:n että t:n suhteen. Liikeyhtälö (4.3.39) saa muodon (jaetaan vielä g:llä ja merkitään $\langle p\rangle = p_c \equiv p$ eli p merkitsee painetta juuri poikkileikkauksen keskipisteen kohdalla ja otaksutaan virtauksen suunta samaksi kuin suunta $1 \to 2$.)

$$\frac{1}{\varrho g}\frac{dp}{ds} + \frac{dz}{ds} + \frac{f}{2gd}\langle v\rangle^2 = 0. \qquad \text{(b)}$$

Integroimalla tämä yhtälö puolittain välin (s_1, s_2) yli s:n suhteen saadaan yhtälö

$$\frac{1}{\varrho g}\Big|_1^2 p + \Big|_1^2 z + \frac{f}{2gd}\langle v\rangle^2 \Big|_1^2 s = 0,$$

$$\frac{1}{\varrho g}(p_2 - p_1) + z_2 - z_1 + \frac{f}{2gd}\langle v\rangle^2 L = 0, \qquad \text{(c)}$$

jossa $L = \Delta s = s_2 - s_1$. Paine-eroksi $\Delta' p = p_1 - p_2$ tulee

$$\Delta' p = \varrho g (z_2 - z_1) + \Delta' p_\ell, \qquad \text{(d)}$$

jossa

$$\Delta' p_\ell = f \frac{L}{d}\frac{\varrho \langle v\rangle^2}{2}. \qquad \text{(e)}$$

Suuretta $\Delta' p_\ell$ voidaan nimittää painehäviöksi (engl. pressure loss), koska se selvästikin kuvaa paine-eroa, joka syntyy kitkan johdosta. Jos kitkaa ei olisi, kaavasta (d) nähdään, että paine-ero olisi sama kuin staattisessa tapauksessa.

Yhtälö (c) kirjoitetaan usein myös muodossa

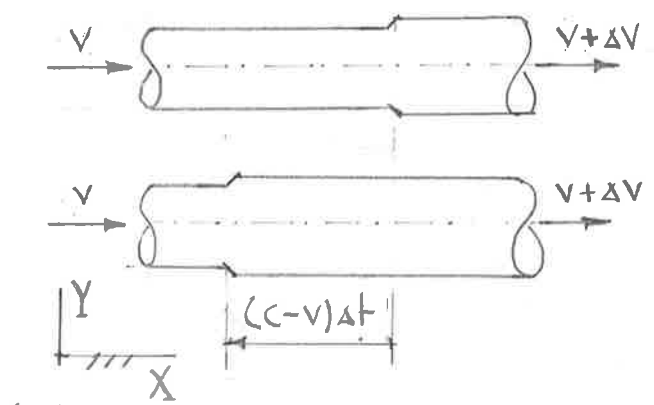
$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_{\ell 1} \qquad (f)$$

jossa termi

$$h_\ell = \frac{\Delta' p_\ell}{\rho g} = f\,\frac{L}{d}\,\frac{\langle v\rangle^2}{2g} \qquad (g)$$

on ns. korkeushäviö (engl. head loss). Nimitys johtuu siitä, että yhtälön (f) eri termeillä on pituuden dimensio ja termejä kuvataan tavallisesti pystysuunnassa mitattuina korkeuksina; ks. tarkemmin kohdat 4.3.2 ja 4.5.2.

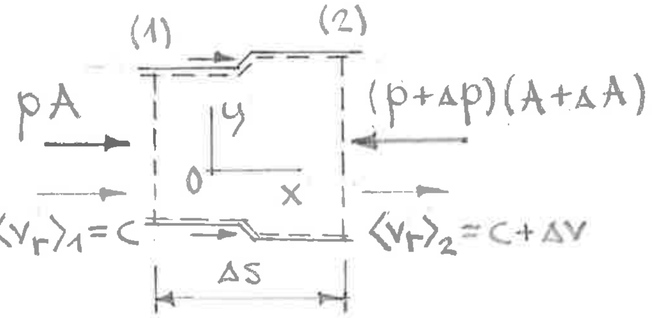
Esimerkki 4.3.6. Paineaaltojen etenemisnopeus.



(a)

Tarkastellaan kuvan (a) esittämää tapausta, jossa neste virtaa suorassa, ominaisuuksiltaan muuttumattomassa putkessa vakiokeskinopeudella v ($\equiv \langle v\rangle$) vasemmalta oikealta kiinteän XY-koordinaatiston suhteen. Putken oikeassa päässä syntyy äkillinen häiriö; esimerkiksi venttiiliä suljetaan nopeasti tietty määrä, jonka johdosta nopeus, paine, tiheys ja poikkileikkauspinta-ala muuttuvat määrillä Δv, Δp, $\Delta \varrho$ ja ΔA ja nämä muutokset alkavat edetä nesteen suhteen nopeudella c vasemmalle. Johdetaan c:n lauseke.

Differentiaaliyhtälömuotoa ei voida soveltaa, koska se edellyttäisi ko. funktioilta riittävää jatkuvuutta, joten tässä on lähdettävä liikkeelle yleisestä muodosta (4.3.7). Käsittelyä voidaan kuitenkin helpottaa vastaavaan tapaan kuin esimerkissä 4.3.2. Häiriön absoluuttinen nopeus on siis $c-v$ vasemmalle ja kun valitaan kuvassa (b) esitetty kontrollialue, jonka ja siihen kiinnitetyn



(b)

xy-koordinaatiston annetaan liikkua samoin tasaisella nopeudella $c-v$ vasemmalle eli koordinaatiston origon absoluuttinen nopeus $\vec{v}_0 = -(c-v)\vec{i} = (v-c)\vec{i}$. Nesteen absoluuttinen nopeus leikkauksissa 1 ja 2 on $\vec{v}_1 = v\vec{i}$ ja $\vec{v}_2 = (v+\Delta v)\vec{i}$. Suhteellisen liikkeen kaava D (2.3.30) on tässä $\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_0$, joten suhteellinen virtausnopeus leikkauksissa 1 ja 2 on

$$\left.\begin{aligned} \langle\vec{v}_r\rangle_1 &= v\vec{i} - (v-c)\vec{i} = c\vec{i}, \\ \langle\vec{v}_r\rangle_2 &= (v+\Delta v)\vec{i} - (v-c)\vec{i} = (c+\Delta v)\vec{i}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Koska kyseessä on edelleen inertiaalikoordinaatisto, näennäisvoimia ei synny. Virtaus on pysyvää valitun kontrollialueen kannalta ja täyttää kaavan (4.3.14) johdon aset-

* tämät vaatimukset. Sovelletaan ensimmäistä kaavaa (4.3.15) (otetaan $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $p \equiv \langle p \rangle$)

$$pA - (p+\Delta p)(A+\cancel{\Delta A}) = \varrho c A (c + \Delta v - c),$$

$$-\Delta p A = \varrho c \Delta v A \tag{b}$$

Kuvan (b) esittämässä vapaakappalekuviossa ei ole otettu huomioon vaippapintaan vaikuttavia leikkausjännityksiä, koska niiden vaikutus on vähäinen kontrollialueen lyhyen pituuden vuoksi. Samoin yhtälössä (b) ei ole otettu huomioon vaipan paksunnoksen kohdalla normaalijännitysten aiheuttamaa vaakavoimaa, koska paksunnos on käytännössä hyvin pieni.

Jatkuvuusyhtälö (3.4.24) eli $w =$ vakio on tässä otaksumien (2) ja (3) jälkeen $\varrho Q = \varrho \langle v \rangle A =$ vakio eli

$$\varrho c A = (\varrho + \Delta\varrho)(c + \Delta v)(A + \Delta A),$$

$$0 = \varrho c \Delta A + \varrho \Delta v (A + \cancel{\Delta A}) + \Delta\varrho (c + \Delta v)(A + \cancel{\Delta A}) \tag{c}$$

Koska käytännössä $\Delta A \ll A$, kaavoissa (b) ja (c) on jätetty ΔA A:n rinnalla "sopivasti" pois, jolloin yhtälöistä (b) ja (c) saadaan

$$\Delta v = -\frac{\Delta p}{\varrho c}, \tag{d}$$

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = -\frac{\Delta v A + c \Delta A}{(c + \Delta v) A}. \tag{e}$$

Koska nesteen tiheyden muutokset otetaan huomioon, otetaan myös käyttöön yhtälö (1.3.14) pieniä tiheyden äärellisiä muutoksia koskevana:

$$\Delta p = \frac{K \Delta \varrho}{\varrho} . \qquad (f)$$

Näistä yhtälöistä saadaan aluksi

$$\frac{\Delta p}{K} = \frac{\frac{\Delta p}{\varrho c} A - c \Delta A}{\left(c - \frac{\Delta p}{\varrho c}\right) A} = \frac{\Delta p A - \varrho c^2 \Delta A}{(\varrho c^2 - \Delta p) A} \qquad (g)$$

josta seuraa

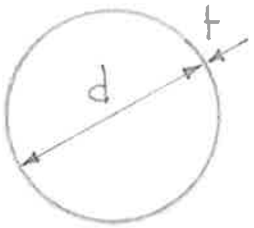
$$\varrho c^2 = \frac{\Delta p \left(1 + \cancel{\frac{\Delta p}{K}}\right)}{\frac{\Delta p}{K} + \frac{\Delta A}{A}} = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta p}{K} + \frac{\Delta A}{A}} . \qquad (h)$$

Paineen muutos Δp on yleensä pieni verrattuna varsinaisen nesteen puristuvuuskertoimeen K, jonka johdosta $\Delta p / K$ on jätetty ykkösen rinnalla pois. Samoin voidaan tehdä kaasujen yhteydessä, jos rajoitutaan pienten painehäiriöiden – äänen kulku – liikkeeseen. Jos seinämät voidaan otaksua äärettömän jäykiksi (tämä on kaasuilla normaalitilanne), $\Delta A = 0$ ja saadaan kaavan (1.3.20) mukainen tulos

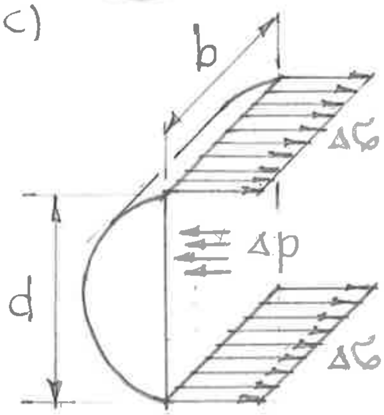
$$c = \sqrt{\frac{K}{\varrho}} \qquad (i)$$

eli häiriö etenee äänen nopeudella.

Jos seinämä on joustava, häiriöiden etenemisnopeus pienenee arvoon (i) verrattuna. Pinta-alan muutoksen ΔA määrittäminen paineen muutoksen Δp johdosta on rakenteiden mekaniikkaan kuuluva tehtävä. Tulos riippuu putken materiaalista, muodosta (teräsputki, kalliotunneli jne.) sekä vielä putken pituussuuntaisesta tuennasta. Tarkastellaan hieman yksinkertaisinta mahdollista tapausta, jossa on kysymys kimmoisesta materiaalista (kimmokerroin = E) olevasta ohutseinäisestä putkesta (paksuus = t), jonka poikkileikkaus on ympyrä (halkaisija = d) (kuva (c)).



(c)



(d)

Kuvassa (d) on esitetty vapaakappalekuvio putken osalle, jonka pituus on b ja joka on saatu ajattelemalla putki ja sen sisältämä neste halkaistuksi ja tarkastelemalla toista puoliskoa. Tavallisesti jätetään laajenemiseen liittyvät hitausvoimat pois käsittelystä, jolloin saadaan staattinen tapaus. Paineen muutokseen Δp liittyvä putken kehän suuntaisen jännityksen muutos $\Delta\sigma$ on jakautunut kimmoteorian perusteella miltei tasaisesti seinämän paksuudelle, joten saadaan tasapainoyhtälö

$$\Delta\sigma \cdot 2bt - \Delta p \cdot bd = 0,$$

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}\frac{d}{t}\Delta p. \qquad (j)$$

Jos otaksutaan tapaus, jossa putken siirtymistä putken akselin suunnassa ei ole mitenkään estetty, putken akselin suuntaiset normaalijännitykset häviävät ja kehän suuntainen venymän muutos $\Delta\varepsilon = \Delta\sigma/E$. Tästä seuraa kehän pituuden muutos $\Delta\varepsilon \cdot \pi d$ eli saadaan yhtälö

$$\pi(d+\Delta d) - \pi d = \Delta\varepsilon \cdot \pi d, \qquad (k)$$

joten $\Delta d = \Delta\varepsilon \cdot d$. Pinta-alan muutos on likimain yhtä kuin kehän pituus πd kertaa säteen muutos $\Delta d/2$:

$$\Delta A \approx \pi d \frac{\Delta d}{2} = \pi d \frac{\Delta\varepsilon \cdot d}{2} = \frac{1}{2}\pi d^2 \cdot \Delta\varepsilon = 2A\,\Delta\varepsilon$$

$$= 2A\frac{\Delta\sigma}{E} = 2A\cdot\frac{1}{2}\frac{d}{tE}\Delta p = A\frac{d}{tE}\Delta p. \qquad (l)$$

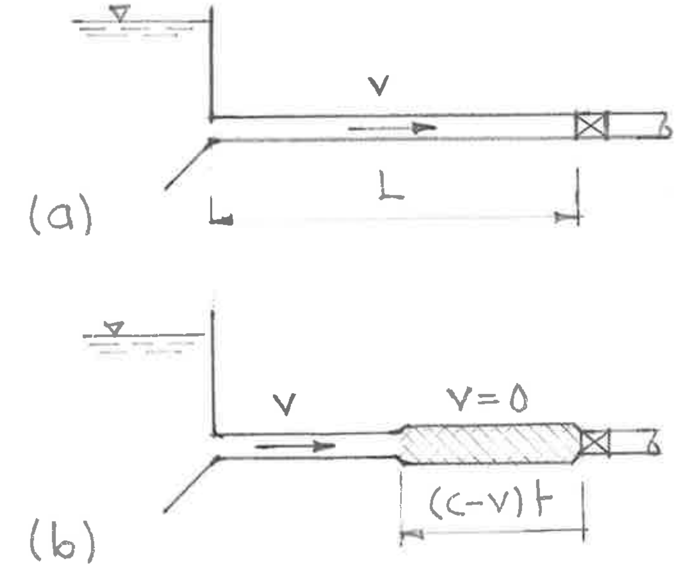
Kun tämä tulos sijoitetaan kaavaan (h), saadaan etenemisnopeuden lauseke

$$c = \frac{\sqrt{K/\rho}}{\left[1+\frac{K d}{E t}\right]^{1/2}}. \qquad (m)$$

*

Epästationaarisia putkivirtauksia käsitellään periaatteessa kahdella eri tavalla tilanteesta riippuen (25). Yksinkertaisempi tapa, ns. jäykän mallin teoria (engl. rigid water column theory, surge theory) pitää ko. nestettä täysin kokoonpuristumattomana ja samoin putkien seinämiä täysin jäykkinä. Monimutkaisempi tapa, ns. joustavan mallin teoria (engl. elastic theory, water hammer theory) ottaa huomioon sekä ko. nesteen kokoonpuristuvuuden että putkien seinämien muodonmuutokset. Jälkimmäistä teoriaa joudutaan soveltamaan tapauksissa, joissa virtausnopeuksien ja paineiden ajalliset muutokset ovat suhteellisen nopeita, jotta yleensä päästäisiin realistisiin tuloksiin.

Tarkastellaan tähän liittyen kuvan 4.3.5 esittämää tapausta, jossa neste virtaa vakiokeskinopeudella $V \equiv \langle v \rangle$ suoraa vakiopoikkileikkauksen omaavaa putkea pitkin. Jos kuvan (a) esittämä venttiili suljetaan hetkellä $t=0$ periaatteessa äärettömän nopeasti, venttiilin kohdalla olevan nesteen nopeus putoaa nollaan ja hetkellä $t<L/(c-v)$ syntyy kuvassa (b) näkyvä nopeusjakautuma; ks. esimerkki 4.3.6. Häiriön etenemisnopeus c tulee teoriassa äärettömän



Kuva 4.3.5 Vesi-isku.

suureksi, jos käytetään jäykän mallin teoriaa (ks. kaava (m), esimerkki 4.3.6, aseta $K\to\infty$, suhde $K/E=$ vakio.) Toisin sanoen koko pituuden L omaava vesipatsas pysähtyy äärettömän nopeasti eli systeemin massakeskiön kiihtyvyys tulee äärettömäksi, joten massakeskiön liikelain perusteella venttiilin kohdalle syntyy äärettömän suuri paine. Tilanne on epärealistisuudessaan analoginen jäykkien kappaleiden sysäyksen kanssa; vrt. kohta D 7.9. Vaikkei venttiiliä voidakaan sulkea käytännössä äärettömän nopeasti, niin joka tapauksessa tämän tyyppisissä tapauksissa on sovellettava joustavan mallin teoriaa. Kuvan 4.3.5 esittämän tapaisista ilmiöistä käytetään nimitystä paineysäys tai vesi-isku. Käytännössä nesteen virtausnopeus v on paineaaltojen etenemisnopeuteen c verrattuna yleensä mitättömän pieni ja termi $c-v$ voidaan korvata termillä c.

Johdetaan vielä joustavan mallin teoriaan liittyvät yhtälöt. Liikeyhtälönä pidetään edelleen riittävällä tarkkuudella yhtälöä (4.3.39), vaikka se johdettiinkin vakiotiheysnesteen ja jäykän seinämän tapauksessa, sillä tavanomaisten putkimateriaalien ja nesteiden yhteydessä käytännössä esiintyvät suhteelliset ϱ:n ja A:n muutokset ovat yleensä alle 0,5 % (25).

Sen sijaan jatkuvuusyhtälöä on kehitettävä edelleen. Lähdetään yhtälöstä (3.4.33) kirjoittamalla:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho A)+\frac{\partial}{\partial s}(\varrho\langle v\rangle A)=0,$$

$$\varrho\frac{\partial A}{\partial t}+A\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\langle v\rangle A\frac{\partial\varrho}{\partial s}+\varrho\frac{\partial(\langle v\rangle A)}{\partial s}=0,$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\cancel{\langle v\rangle\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial s}}+\frac{1}{\bar{A}}\frac{\partial(\langle v\rangle\bar{A})}{\partial s}\approx 0. \qquad (4.3.41)$$

Tässä yläviivat viittaavat alkutilan suureisiin. On tehty tavanomainen otaksuma, että s:n suhteen lasketuissa derivaatoissa saadaan tehdä approksimaatio $\varrho\approx\bar{\varrho}=$vakio, $A\approx\bar{A}$.

Barotrooppisella homogeenisella nesteellä saadaan kaavasta (1.3.14)

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial t}=\frac{1}{K}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial t} \qquad (4.3.42)$$

Kimmoisen seinämän tapauksessa putken poikkileikkauspinta-alan pieni muutos ΔA on suoraan verrannollinen vastaavassa kohdassa tapahtuneeseen paineen muutokseen $\Delta\langle p\rangle$ eli

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{k}\Delta\langle p\rangle, \qquad (4.3.43)$$

jossa k on putken ominaisuuksista ja pituussuuntaisesta tuennasta riippuva kerroin. Jakamalla tämä yhtälö puolittain ajan muutoksella Δt ja antamalla $\Delta t \to 0$ saadaan yhtälö

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{k}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial t}. \qquad (4.3.44)$$

Kun lausekkeet (4.3.42) ja (4.3.44) sijoitetaan yhtälöön (4.3.41), saadaan

$$\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{k}\right)\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial t} + \frac{1}{\bar{A}}\frac{\partial(\langle v\rangle\bar{A})}{\partial s} = 0. \qquad (4.3.45)$$

Vertaamalla esimerkin 4.3.6 kaavaa (h) kaavaan (4.3.43) havaitaan, että jatkuvuusyhtälöstä tulee lopuksi

*1

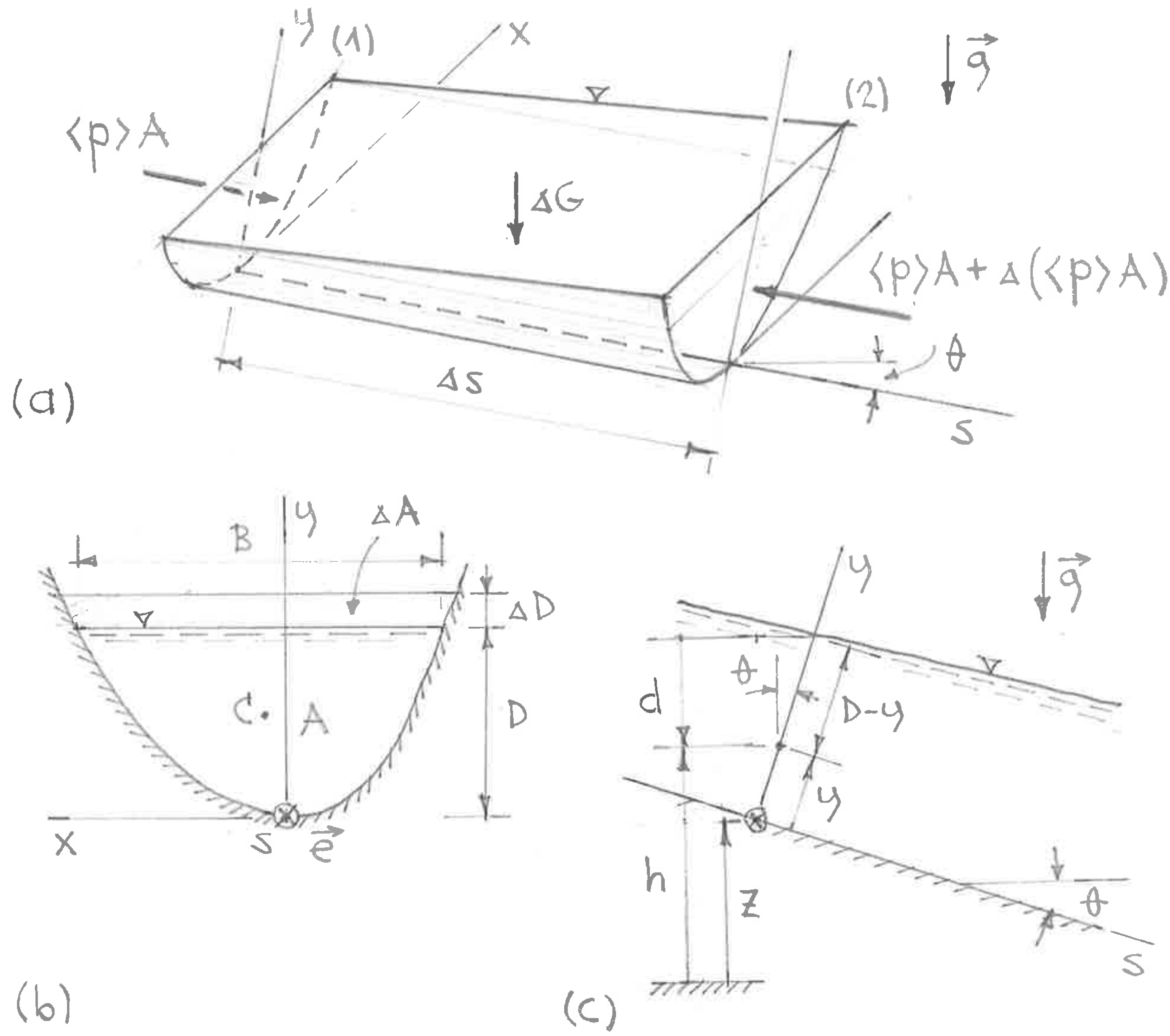
$$\boxed{\frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}(\langle v\rangle A) = 0.} \qquad (4.3.46)$$

Yläviivat on jätetty pois, joten A viittaa tässä alkutilassa tunnettuun poikkileikkauspinta-alaan.

Joustavan mallin teoria perustuu osittaisdifferentiaaliyhtälöiden (4.3.39) ja (4.3.46) käsittelyyn, joka täytyy suorittaa numeerisesti tietokoneen avulla. Jäykän mallin teoriassa $c = \infty$ ja jatkuvuusyhtälö palautuu muotoon

$$\frac{\partial}{\partial s}(\langle v\rangle A) = 0. \qquad (4.3.47)$$

Avouomavirtaus, [O(2), O(3), O(4), O(5')]. Käytetään samoja merkintöjä kuin kohdassa 3.4.1. Tarkastellaan yhtälön (4.3.21) vasemman puolen $\lim_{\Delta s \to 0} \Delta F_e / \Delta s$ laskemista kuvan 4.3.6 (a) esittämän



Kuva 4.3.6 (a) Vapaakappalekuvio. (b) Uoman poikkileikkaus. (c) Uoma sivulta katsottuna.

vapaakappalekuvion avulla. Yksinkertaisuuden vuoksi on otettu tapaus, jossa uoma on geometrialtaan muuttumaton. Johto on periaatteessa vastaava kuin putkivirtauksen yhteydessä. Poikkileikkauspinta A voi kuitenkin nyt muuttua kun syvyys D muuttuu s:n suhteen. Termiksi

(4.3.27) saadaan nyt ensin

$$\Delta F_e^p = -\Delta(\langle p\rangle A) = -\Delta(p_c A) = -\Delta(\varrho g d_c A)$$
$$= -\varrho g \Delta[(D-y_c)\cos\theta \cdot A] = -\varrho g \cos\theta \cdot \Delta(DA - y_c A)$$
$$= -\varrho g \cos\theta \cdot \Delta(DA - S). \tag{4.3.48}$$

Tässä on otettu huomioon, että paine jakautuu aikaisemmin esitetyistä syistä johtuen hydrostaattisesti kussakin poikkileikkauksessa eli

$$p = \varrho g d = \varrho g (D-y)\cos\theta, \tag{4.3.49}$$

kun käytetään kuvassa 3.4.6 (c) näkyviä merkintöjä. Tunnus C viittaa poikkileikkauspinnan pintakeskiöön ja $S = y_c A$ on pinnan ns. lineaarinen momentti eli staattinen momentti $\int y\, dA = \int_0^D B(y) y\, dy$ x-akselin suhteen. On lisäksi otaksuttu, että kaltevuuskulma θ on välillä Δs riittävällä tarkkuudella vakio. Nyt

$$\Delta(DA - S) = -(DA-S) + [(D+\Delta D)(A+\Delta A) - (S+\Delta S)]$$
$$= \Delta D \cdot A + D \cdot \Delta A + \cancel{\Delta D \cdot \Delta A} - \Delta S$$
$$\approx \Delta D \cdot A + D \cdot \Delta A - D \cdot \Delta A$$
$$\approx A \frac{\Delta D}{\Delta s} \Delta s. \tag{4.3.50}$$

Tässä on jätetty kahden pienen suureen tulo vähäisenä ilman virheitä rajalla pois sekä lisäksi on käytetty hyväksi kuvan 3.4.6 (b) perusteella ymmärrettäviä yhteyksiä $\Delta A \approx B \cdot \Delta D$, $\Delta S \approx D \cdot B \cdot \Delta D \approx D \cdot \Delta A$, joten lopuksi

$$\Delta F_e^p \approx -\varrho g \cos\theta \cdot A \frac{\Delta D}{\Delta s} \Delta s. \tag{4.3.51}$$

*⌐ Osuuksille ΔF_e^B ja $(\Delta F_m^S)_e$ saadaan suoraan approksimaatiot (4.3.25) ja (4.3.30). Osalle ΔS_m vaikuttavia voimia ei ole piirretty näkyviin kuvaan 4.3.6 (a). Tässä on toimittu ilmanpaine vertailupaineena olevan mittapaineen avulla, joten $\vec{T}$ on nolla vapaan pinnan alueella (paitsi, jos tuulesta johtuvat leikkausvoimat tulee ottaa huomioon). Seinämän alueella termit $\tau_i \vec{e}_i$ ja $\sigma \vec{n}$ ovat edelleen kohtisuorassa akselia vastaan, joten ne eivät anna osuuksia liikeyhtälöön.

Täten yhteensä

$$\Delta F_e = \Delta F_e^B + \Delta F_e^p + (\Delta F_m^S)_e$$

$$\approx \left(\rho g A \sin\theta - \rho g \cos\theta \cdot A \frac{\Delta D}{\Delta s} - \tau_w l_w\right)\Delta s \quad (4.3.52)$$

ja raja-arvo

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F_e}{\Delta s} = \rho g A \sin\theta - \rho g \cos\theta \cdot A \frac{\partial D}{\partial s} - \tau_w l_w. \quad (4.3.53)$$

Sijoittamalla lauseke (4.3.53) yhtälöön (4.3.21) sekä järjestelemällä hieman termejä saadaan differentiaaliyhtälö – ns. avouomavirtauksen liikeyhtälö vakiotiheysnesteelle

[O(2), O(3), O(4), O(5')]

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{A}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q + \frac{\partial}{\partial s}(\beta Q\langle v\rangle)\right] + \\ &+ g\cos\theta \frac{\partial D}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + \frac{4\tau_w}{\rho d_h} = 0. \end{aligned}} \quad (4.3.54)$$

Kehitetään tätä eteenpäin. Yhtälön vasemman puolen hakasulkulauseke

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\langle v\rangle A) + \frac{\partial}{\partial s}(\beta A\langle v\rangle^2)\right] =$$

$$\langle v\rangle\frac{\partial A}{\partial t} + \beta\langle v\rangle\frac{\partial(A\langle v\rangle)}{\partial s} + A\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t} + A\langle v\rangle\frac{\partial(\beta\langle v\rangle)}{\partial s} =$$

$$\langle v\rangle\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \beta\frac{\partial Q}{\partial s}\right) + A\left(\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t} + \langle v\rangle\frac{\partial(\beta\langle v\rangle)}{\partial s}\right) \approx$$

$$A\left(\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t} + \langle v\rangle\frac{\partial(\beta\langle v\rangle)}{\partial s}\right). \qquad (4.3.55)$$

On sovellettu tulon derivoimissääntöä ja otaksuttu, että $\beta \approx 1$ lausekkeessa $\partial A/\partial t + \beta\partial Q/\partial s$, jolloin se häviää jatkuvuusyhtälön (3.4.38) perusteella. Liikeyhtälö on nyt (vrt. putkivirtauksen yhtälö (4.3.36)

$$\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t} + \langle v\rangle\frac{\partial(\beta\langle v\rangle)}{\partial s} +$$

$$+ g\cos\theta\frac{\partial D}{\partial s} + g\frac{dz}{ds} + \frac{4\tau_w}{\rho d_h} = 0. \qquad (4.3.56)$$

Käytännössä kaltevuuskulma θ on yleensä hyvin pieni, joten voidaan asettaa $\cos\theta \approx 1$. (Lisäksi syvyys D voidaan mitata tällöin riittävällä tarkkuudella pystysuorassa suunnassa.) Kun otetaan käyttöön konstitutiivinen yhteys (4.3.38) ja otaksutaan, että $\beta = 1$, saadaan tavanomainen avouomavirtauksen liikeyhtälö

$$\boxed{\frac{\partial D}{\partial s} + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t} + \langle v\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial s}\right) + \frac{dz}{ds} + S_f = 0,} \qquad (4.3.57)$$

[O(2), O(3), O(4), O(5')]

jossa lyhennysmerkintä S_f – ns. <u>kitkakaltevuus</u> (engl. <u>friction slope</u>) – tarkoittaa suuretta

$$S_f = \frac{f}{2gd_h}|\langle v\rangle|\langle v\rangle. \qquad (4.3.58)$$

Avouomavirtauksen analysointi perustuu osittais-differentiaaliyhtälöiden (4.3.57) ja (3.4.44) käsittelyyn, joka täytyy suorittaa numeerisesti tietokoneen avulla. Tuntemattomina ovat funktiot $D(s,t)$ ja $\langle v \rangle(s,t)$. Pysyvässä virtauksessa yhtälöt tulevat paljon yksinkertaisimmiksi ja tuntemattomina ovat funktiot $D(s)$ ja $\langle v \rangle(s)$.

Seinämäleikkausjännitys käsitellään alan kirjallisuudessa usein Moodyn kitkahäviökertoimen sijasta erityyppisillä kaavoilla; mainittakoon Chezyn ja Manningin kaavat (11).

Avouomavirtauksen tyyppi riippuu ns. Frouden luvusta (engl. Froude number) Fr, joka on yleisesti

$$\boxed{Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}},} \qquad (4.3.59)$$

jossa v on karakteristinen virtausnopeus, L karakteristinen pituus ja g painovoiman kiihtyvyys. Avouomavirtauksen Frouden luku määritellään tavallisesti kaavalla

$$\boxed{Fr = \frac{\langle v \rangle}{\sqrt{gD_h}},} \qquad (4.3.60)$$

eli otetaan $v =$ keskinopeus $\langle v \rangle$ ja $L =$ hydraulinen syvyys D_h. Avouomavirtauksen sanotaan olevan verkasvirtausta (engl. tranquil flow, subcritical flow) tai kiitovirtausta (engl. rapid flow, supercritical flow) sen mukaan, onko $F_r < 1$ vai > 1. Tavallisimmin luonnossa on kiihtyvä virtaus (?). Voidaan osoittaa (ks. esimerkki 4.3.8), että termi $\sqrt{gD_h}$ kuvaa pienten häiriöiden etenemisnopeutta c veteen suhteen avouomassa. Kiitovirtauksessa $F_r = \langle v\rangle / c > 1$ eli $\langle v\rangle > c$, mikä merkitsee, että häiriöt eivät pysty etenemään absoluuttisesti mitattuna vastavirtaan päin. Verkasvirtauksessa häiriöt etenevät myös vastavirtaan. Tämä ero käyttäytymisessä tulee näkyviin myös ko. differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmissä.

Edellä on koko ajan otaksuttu, että painejakautuma kussakin poikkileikkauksessa on hydrostaattinen. Jos uoman pohjan kaarevuus pystytasossa on riittävän suuri, tätä otaksumaa on tarkennettava (26).

Esimerkki 4.3.7. Johdetaan pysyvän avouomavirtauksen vallitsevat yhtälöt yksinkertaisuuden vuoksi tapauksessa, jossa uoman geometria on s:n suhteen muuttumaton.

Jatkuvuusyhtälö (3.4.46) on nyt

$$D_h \frac{d\langle v\rangle}{ds} + \langle v\rangle \frac{dD}{ds} = 0 . \qquad (a)$$

Liikeyhtälö (4.3.57) on pysyvässä virtauksessa

$$\frac{dD}{ds} + \frac{1}{g}\langle v\rangle \frac{d\langle v\rangle}{ds} + \frac{dz}{ds} + S_f = 0 . \qquad (b)$$

Ratkaistaan $d\langle v\rangle/ds$ edellisestä yhtälöstä ja sijoitetaan se jälkimmäiseen:

$$\frac{dD}{ds} + \frac{1}{g}\langle v\rangle\left(-\frac{1}{D_h}\langle v\rangle\frac{dD}{ds}\right) + \frac{dz}{ds} + S_f = 0,$$

$$\left(1 - \frac{\langle v\rangle^2}{g D_h}\right)\frac{dD}{ds} + \frac{dz}{ds} + S_f = 0,$$

$$(1 - Fr^2)\frac{dD}{ds} + \frac{dz}{ds} + S_f = 0. \qquad (c)$$

Derivaatan dD/ds kertoimen $(1-Fr^2)$ merkin määrää riippuvan siitä, onko kyseessä virtaus vai kiitovirtaus. Rajatapauksessa $Fr = 1$, termiä dD/ds ei voida ratkaista yhtälöstä (c).

Jos virtaamaa Q = vakio pidetään annettuna

$$Fr^2 = \left(\frac{Q}{A}\right)^2 \frac{1}{g D_h} = \frac{Q^2}{A^2}\frac{B}{gA} = \frac{Q^2 B}{g A^3} \qquad (d)$$

ja yhtälö (c) voidaan esittää muodossa

$$\frac{dD}{ds} = -\frac{\frac{dz}{ds} + S_f}{1 - \frac{Q^2 B}{g A^3}}. \qquad (e)$$

Tätä voidaan sitten integroida numeerisesti askel askeleelta, kun D on annettu tietyllä s:n arvolla ($A = A(D)$, $B = B(D)$, $S_f = S_f(\langle v\rangle) = S_f(Q/A) = S_f(D)$ yhtälön oikealla puolella.), jonka tuloksena saadaan lopuksi vapaan pinnan asema $D(s)$.

Tarkastellaan vielä tasaista virtausta. Se on määritelty s. 3.65. Yhtälö (a) toteutuu itsestään ja yhtälö (b) saa muodon

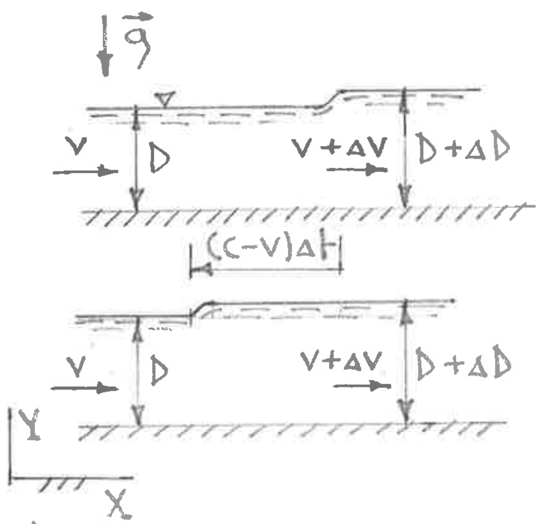
$$\frac{dz}{ds} + S_f = 0, \qquad (f)$$

$$-\sin\theta + \frac{f}{2g\,d_h}\langle v\rangle^2 = 0, \qquad (g)$$

josta saadaan nopeudeksi

$$\langle v\rangle = \left(\frac{2g\,d_h \sin\theta}{f}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (h)$$

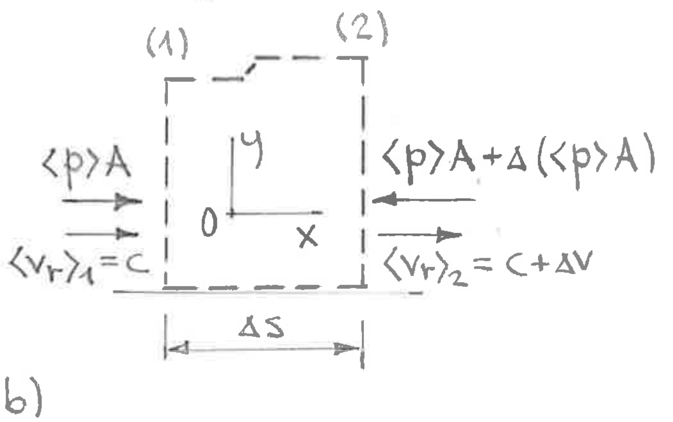
Esimerkki 4.3.8. Pienen häiriön etenemisnopeus.



(a)

Tarkastellaan kuvan (a) esittämää tapausta, jossa neste virtaa suorassa, geometrialtaan muuttumattomassa avouomassa vakiokeskinopeudella V ($\equiv\langle v\rangle$) vasemmalta oikealle kiinteän XY-koordinaatiston suhteen. Uoman oikeassa päässä synnytetään äkillinen häiriö; esimerkiksi patoluukun asemaa muutetaan nopeasti tietty määrä, jonka johdosta nopeus ja syvyys muuttuvat määrillä ΔV ja ΔD ja nämä muutokset alkavat edetä nesteen suhteen nopeudella c vasemmalle. Johdetaan c:n lauseke.

Käsittely käy vastaavasti kuin esimerkissä 4.3.6. Kuvassa (b) esitetty kontrollialue liikkuu tasaisella nopeudella $c-V$ vasemmalle. Ulkoisten voimien resultantiksi x-akselin suunnassa saadaan suoraan kaavan (4.3.51) perusteella



(b)

4.50

$$F_x = -\Delta(\langle p \rangle A) = -\rho g A \Delta D. \tag{a}$$

Soveltamalla ensimmäistä kaavaa (4.3.15) (otetaan $\beta_1 = \beta_2 = 1$) saadaan

$$-\rho g A \Delta D = \rho c A (c + \Delta v - c),$$

$$-g \Delta D = c \Delta v. \tag{b}$$

Jatkuvuusyhtälö (3.4.25) antaa

$$c A = (c + \Delta v)(A + \Delta A),$$

$$c A = c A + c \Delta A + \Delta v A + \cancel{\Delta v \Delta A},$$

$$0 = c B \cdot \Delta D + \Delta v A. \tag{c}$$

Ratkaisemalla yhtälöstä (c) Δv ja sijoittamalla se yhtälöön (b) saadaan

$$-g \Delta D = c\left(-c \frac{B \Delta D}{A}\right),$$

$$g = c^2 \frac{B}{A} \tag{d}$$

eli

$$c = \sqrt{g \frac{A}{B}} = \sqrt{g D_h}. \tag{e}$$

4.3.2 Paikallinen muoto

Cauchyn liikeyhtälöt. Liikemäärän taseen periaate $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ on Lausekkeiden (4.3.2)...(4.3.5) avulla esitettynä

$$\int \varrho \vec{B} dV + \int \vec{T} dS = \frac{d}{dt} \int \varrho \vec{v} dV. \qquad (4.3.61)$$

Pintaintegraali:

$$\int \vec{T} dS = \int (n_x \vec{T}^{(x)} + n_y \vec{T}^{(y)} + n_z \vec{T}^{(z)}) dS$$
$$= \int \left(\frac{\partial \vec{T}^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{T}^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{T}^{(z)}}{\partial z} \right) dV. \qquad (4.3.62)$$

On sovellettu kaavoja (4.2.4) ja (L.1.4). Kun taas yhtälön (4.3.61) oikeaan puoleen sovelletaan Reynoldsin Lausetta (3.3.64), saadaan yhtälö

$$\int \left(\varrho \vec{B} + \frac{\partial \vec{T}^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{T}^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{T}^{(z)}}{\partial z} \right) dV = \int \varrho \frac{d\vec{v}}{dt} dV.$$

Näin ollen liikemäärän taseen paikalliseksi muodoksi tulee

$$\boxed{\varrho \vec{B} + \frac{\partial \vec{T}^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{T}^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{T}^{(z)}}{\partial z} = \varrho \vec{a}.} \qquad (4.3.63)$$

Tämä on ns. Cauchyn liikeyhtälö — tarkemmin Cauchyn I liikelaki — (Cauchy v. 1827), joka pätee siis mielivaltaiselle kontinuumille. Vastaavat komponenttiyhtälöt ovat (ks. kaavat (4.2.2))

$$\boxed{\begin{aligned} &\varrho B_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \varrho a_x, \\ &\varrho B_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \varrho a_y, \\ &\varrho B_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \varrho a_z. \end{aligned}} \qquad (4.3.64)$$

Nämä yhtälöt esiintyvät saman näköisinä myös pienten siirtymien teorian mukaisessa rakenteiden mekaniikassa. Vastaavissa kiihtyvyyden lausekkeissa on kuitenkin selvä ero; Eulerin esityksessä käytetään kaavoja (3.3.21) tai (3.3.23).

Cauchyn liikeyhtälö voidaan johtaa havainnollisemmin soveltamalla liikemäärän taseen periaatetta suoraan differentiaaliseen aine-alkioon vastaavaan tapaan kuin mestestatiikassa kohdassa 2.1; tasapainoyhtälöt (2.1.12) ja (2.1.13) ovat luonnollisesti Cauchyn liike-yhtälöiden (4.3.63) ja (4.3.64) erikoistapauksia. Taulukossa 4.3.1 on verrattu tämän ajattelutavan mukaisia termejä vastaaviin partikkelisysteemin suureisiin.

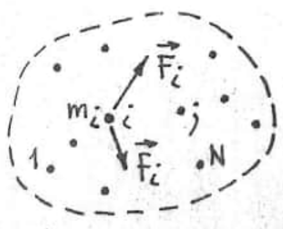
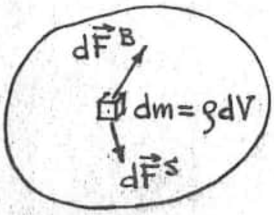
*⊤ Cauchyn liikeyhtälön täysin yleinen muoto on

$$\varrho \vec{B} + \vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} = \varrho \vec{a}, \qquad (4.3.65)$$

jossa termi $\vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma}$ on jännitystensorin $\tilde{\sigma}$ divergenssi.

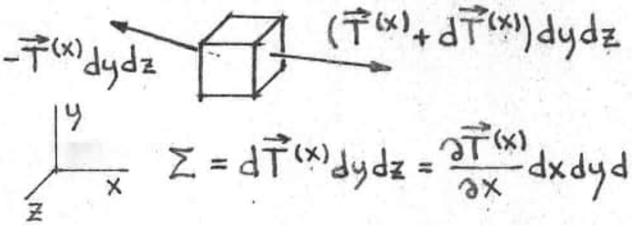
Sylinterikoordinaatistossa Cauchyn liike-

* Taulukko 4.3.1 Cauchyn liikeyhtälön johtaminen

Partikkelisysteemi	Kontinuumi
	
$\vec F_i = \vec B m_i$ (1)	$d\vec F^B = \rho \vec B dV$ (1')
$\vec f_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec f_{ij}$ (2)	$d\vec F^S = \vec f dV$ (2')
Liikeyhtälö:	Liikeyhtälö/dV:
$\vec F_i + \vec f_i = m_i \vec a_i$ (3)	$\rho \vec B + \vec f = \rho \vec a$ (3')

Suureen $\vec f$ lauseke $\vec f = \dfrac{\partial \vec T^{(x)}}{\partial x} + \dfrac{\partial \vec T^{(y)}}{\partial y} + \dfrac{\partial \vec T^{(z)}}{\partial z}$ (4')

saadaan tarkastelemalla kuvan esittämällä tavalla differentiaalisen aine-alkion tahkoihin vaikuttavia voimia.



$$\Sigma = d\vec T^{(x)} dydz = \frac{\partial \vec T^{(x)}}{\partial x} dxdydz = \frac{\partial \vec T^{(x)}}{\partial x} dV$$

yhtälön komponenttimuodot tulevat olemaan (20)

$$\left.\begin{aligned}
&\rho B_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = \rho a_r, \\
&\rho B_\phi + \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{z\phi}}{\partial z} + 2\frac{\tau_{r\phi}}{r} = \rho a_\phi, \\
&\rho B_z + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho a_z .
\end{aligned}\right\} \quad (4.3.66)$$

Kiihtyvyyskomponenttien a_r, a_ϕ ja a_z Lausekkeet saadaan kaavoista (3.3.25).

*

Cauchyn liikeyhtälöitä nimitetään usein lyhyesti vain <u>liikeyhtälöiksi</u> tai <u>liikemääräyhtälöiksi</u>.

Navier-Stokesin yhtälöt. Otaksumalla Stokesin kitkalakia noudattava neste ja sijoittamalla lausekkeet (4.2.9), (4.2.19) ja (3.3.23) Cauchyn liikeyhtälöihin (4.3.64) saadaan nestemekaniikan tärkeimmät kaavat, ns. Navier-Stokesin yhtälöt (Navier v. 1822, Stokes v. 1845). Kirjoitetaan ne tässä näkyviin yksinkertaisuuden vuoksi vain tapauksessa, jossa viskositeetti μ voidaan otaksua vakioksi. Suorittamalla sijoitukset saadaan lopuksi

$$\boxed{\begin{aligned}
\varrho \frac{dv_x}{dt} &= \varrho B_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}),\\
\varrho \frac{dv_y}{dt} &= \varrho B_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}),\\
\varrho \frac{dv_z}{dt} &= \varrho B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial z}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}).
\end{aligned}} \qquad (4.3.67)$$

Vastaavan vektoriyhtälön nähdään olevan

$$\boxed{\varrho \frac{d\vec{v}}{dt} = \varrho \vec{B} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\mu}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}),} \qquad (4.3.68)$$

jossa Laplacen operaattori

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (4.3.69)$$

Kokoonpuristumattoman nesteen tapauksessa dilataationopeus $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ häviää ja kaavat yksinkertaistuvat hieman.

Navier-Stokesin yhtälöissä esiintyy viisi tuntematonta paikan ja ajan funktiota: v_x, v_y, v_z, p ja ϱ. Navier-Stokesin yhtälöitä on kolme; jatkuvuusyhtälö ja barotrooppinen tilanyhtälö antavat kaksi tarvittavaa lisäyhtälöä tuntemattomien määrittämiseksi. Jos joudutaan käyttämään yleisempää tilanyhtälöä, lämpötila T tulee undeksi lisätuntemattomaksi, jota vastaten on otettava käyttöön energian taseen periaatteesta johdettu ns. energiayhtälö. Vakiotiheysnesteellä tuntemattomia ovat vain v_x, v_y, v_z, p ja ratkaisuun tarvitaan periaatteessa Navier-Stokesin yhtälöiden lisäksi vain kokoonpuristumattomuusehto $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$. Käytännössä Navier-Stokesin yhtälöiden analyyttinen ratkaisu tunnetaan hyvin harvoissa tapauksissa; niiden määrä on alle kymmenen, kun lasketaan mukaan fysikaalisesti kiinnostavat epälineaariset tapaukset (23).

* <u>Turbulenssin vaikutus.</u> Turbulenttisen virtauksen tarkastelussa on edullista muuntaa Cauchyn liikeyhtälön (4.3.63) kiihtyvyystermi $\varrho\vec{a}$ hieman toiseen muotoon. Jos yhtälön (4.3.61) oikeaan puoleen sovelletaankin Reynoldsin lauseen muotoa (3.3.62), saadaan $(F \hat{=} \varrho\vec{v})$

$$\frac{d}{dt}\int \varrho\vec{v}\,dV = \int\Big[\frac{\partial(\varrho\vec{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho\vec{v}v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\vec{v}v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho\vec{v}v_z)}{\partial z}\Big]dV. \tag{4.3.70}$$

Sijoittamalla tähän vielä lauseke $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$

komponenttiyhtälöt (4.3.64) saadaan muotoon

$$\left.\begin{aligned}
&\rho B_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \\
&\qquad \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z}, \\
&\rho B_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \\
&\qquad \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial z}, \\
&\rho B_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \\
&\qquad \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad (4.3.71)$$

Tämä termien ρa_x, ρa_y, ρa_z muuntaminen olisi voitu suorittaa myös käyttämällä jatkuvuusyhtälöä apuna.

Pyritään keskiarvosuureiden lausekkeisiin liikeyhtälöihin ja otetaan siis yhtälöiden (4.3.71) molemmista puolista aikakeskiarvot. Jotta käsittely tulisi kohtuullisen yksinkertaiseksi, rajoitutaan vakiotiheyksisen tapaukseen. Satunnaissuureiksi jäävät jännityskomponentit, nopeuskomponentit ja vielä mahdollisesti kenttävoiman intensiteetti; tavallisesti kuitenkin kyseessä on deterministinen suure kuten painovoima. Kaavakokoelman (3.5.16) sääntöjä soveltamalla saadaan helposti tulos

$$\rho \bar{B}_x + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{v}_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_x \bar{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_y \bar{v}_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_z \bar{v}_x)}{\partial z} +$$

$$+\frac{\partial(\rho\overline{v_x'v_x'})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\overline{v_y'v_x'})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\overline{v_z'v_x'})}{\partial z},$$

$$\ldots \qquad (4.3.72)$$

Koska tiheys ρ on vakio, se voitaisiin pitää myös derivointimerkkien ulkopuolella. Havaitaan, että liikeyhtälöihin ilmestyi myös heilahtelutermien yhdistelmiä $\overline{v_x'v_x'}$, $\overline{v_y'v_x'}$ jne. On tapana käyttää <u>lyhennysmerkintöjä</u>

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_x^t &= -\rho\overline{v_x'v_x'}, & \tau_{yz}^t &= \tau_{zy}^t = -\rho\overline{v_y'v_z'} = -\rho\overline{v_z'v_y'},\\ \sigma_y^t &= -\rho\overline{v_y'v_y'}, & \tau_{zx}^t &= \tau_{xz}^t = -\rho\overline{v_z'v_x'} = -\rho\overline{v_x'v_z'},\\ \sigma_z^t &= -\rho\overline{v_z'v_z'} & \tau_{xy}^t &= \tau_{yx}^t = -\rho\overline{v_x'v_y'} = -\rho\overline{v_y'v_x'}.\end{aligned}} \qquad (4.3.73)$$

Termeillä on jännityksen dimensio ja suureita (4.3.73) nimitetäänkin näennäisjännityksiksi, turbulenttisiksi lisäjännityksiksi tai tavallisimmin <u>Reynoldsin jännityksiksi</u>.

Kohdassa 3.5.2 osoitettiin (esimerkki 3.5.3, kaava(e)), että vakiotiheysmerteen virtauksessa kokoonpuristumattomuusehto oli myös keskiarvonopeuksia koskevana muotoa

$$\boxed{\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial z}=0.} \qquad (4.3.74)$$

Tämän perusteella yhtälön (4.3.72) oikean puolen ensimmäinen rivi

$$\rho\left[\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{v}_x\bar{v}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{v}_y\bar{v}_x)}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{v}_z\bar{v}_x)}{\partial z}\right]$$

$$=\rho\left[\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial t}+\bar{v}_x\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial z}+\bar{v}_x\left(\cancel{\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial z}}\right)\right]$$

$$= \rho \frac{d\bar{v}_x}{dt} = \rho \bar{a}_x, \qquad (4.3.75)$$

jossa siis merkintä $\bar{a}_x$ tarkoittaa keskiarvonopeuskentän avulla laskettua kiihtyvyyttä. Kun otetaan huomioon kaava (4.3.75) ja lyhennysmerkinnät (4.3.73), yhtälöt (4.3.72) saadaan muotoon

$$\rho \bar{B}_x + \frac{\partial(\bar{\sigma}_x + \sigma_x^t)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{yx} + \tau_{yx}^t)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{zx} + \tau_{zx}^t)}{\partial z} = \rho \bar{a}_x,$$

$$\cdots \qquad (4.3.76)$$

Nämä ovat vakiotiheysmerteen turbulenttisen virtauksen keskiarvosuureille kirjoitetut Cauchyn liikeyhtälön komponenttiyhtälöt karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa esitettyinä. Yleisen esityksen (4.3.65) vastineeksi tulee

$$\rho \vec{\bar{B}} + \vec{\nabla} \cdot (\tilde{\bar{\sigma}} + \tilde{\sigma}^t) = \rho \vec{\bar{a}}, \qquad (4.3.77)$$

jossa $\tilde{\sigma}^t$ on Reynoldsin jännityksiä vastaava jännitystensori. Täten muodollisesti saadaan aivan samannäköiset liikeyhtälöt kuin ennenkin; keskiarvojännityksiä on ainoastaan täydennettävä Reynoldsin jännityksillä (3.4.73). Ne edustavat kuitenkin yleisessä tapauksessa kuutta lisätuntematonta, joiden käsittely on pidemmälle menevän turbulenssiteorian ydinkohtia.

Siirrytään tämän jälkeen tarkastelemaan Newtonin nestettä eli siis Stokesin kitkalakia noudattavaa nestettä vakiotiheystapauksessa. Oletetaan lisäksi, että viskositeetti on myös vakio eikä ole siis satunnaissuure. (Jos esimerkiksi lämpötila T heilahtelisi voimakkaasti, viskositeetti $\mu = \mu(T)$ voisi käyttäytyä samoin.)

Ottamalla konstitutiivisten yhteyksien (4.2.19) aikakeskiarvot saadaan täten

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\sigma}_x^* = 2\mu\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}, \quad \bar{\tau}_{yz} = \mu\left(\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial z}+\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial y}\right),\\ &\ldots \qquad\qquad \ldots\end{aligned}\right\} \tag{4.3.78}$$

Koska $\sigma_x = -p+\sigma_x^*, \ldots,$ niin saadaan vielä

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\sigma}_x = -\bar{p}+\bar{\sigma}_x^*,\\ &\ldots\end{aligned}\right\} \tag{4.3.79}$$

Kun yhteydet (4.3.78) ja (4.3.79) sijoitetaan yhtälöihin (4.3.), saadaan lopuksi ns. <u>Reynoldsin liikeyhtälöt</u>

$$\boxed{\begin{aligned}
\rho\frac{d\bar{v}_x}{dt} &= \rho\bar{B}_x - \frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial z^2}\right)+\\
&\qquad + \frac{\partial\sigma_x^t}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}^t}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}^t}{\partial z},\\
\rho\frac{d\bar{v}_y}{dt} &= \rho\bar{B}_y - \frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2\bar{v}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_y}{\partial z^2}\right)+\\
&\qquad + \frac{\partial\tau_{xy}^t}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y^t}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}^t}{\partial z},\\
\rho\frac{d\bar{v}_z}{dt} &= \rho\bar{B}_z - \frac{\partial\bar{p}}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2\bar{v}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_z}{\partial z^2}\right)+\\
&\qquad + \frac{\partial\tau_{xz}^t}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}^t}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z^t}{\partial z}.
\end{aligned}} \tag{4.3.80}$$

Ne on kirjoitettu tässä siis kun ρ ja μ ovat vakioita. Vastaava yleinen koordinaatistosta riippumaton muoto on

$$\rho\vec{\bar{a}} = \rho\vec{\bar{B}} - \vec{\nabla}\bar{p} + \mu\nabla^2\vec{\bar{v}} + \vec{\nabla}\cdot\tilde{\tau}^t. \tag{4.3.81}$$

Täten muodollisesti saadaan jälleen aivan

Navier-Stokes-tyyppiset yhtälöt; Reynoldsin jännitykset (4.3.73) ovat vain lisänä.

Boussinesq (v. 1877) ehdotti, että Reynoldsin jännityksille kirjoitettaisiin esitys

$$\left.\begin{aligned} \tau_{yz}^{t} &= \eta\left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z}+\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y}\right), \\ &\dots \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.82)$$

jossa η on ns. pyörreviskositeetti (ks. kaavaan 4.3.35 liittyvä teksti). Näin saataisiin täysin Navier-Stokes-tyyppiset yhtälöt, joissa vain todellinen viskositeetti μ olisi korvattu termillä $\mu+\eta$. Kaavojen (4.3.82) esittäminen siis merkitsee, että se, mitä emme kunnolla tiedä, on kätketty kertoimeen η. Monasti valitaan vielä eri jännityskomponenteille eri pyörreviskositeetit, koska vain yhden arvon käyttö yksinkertaistaisi ilmeisestikin kaavojen (4.3.73) esittämän kuuden tuntemattoman funktion käyttäytymistä aivan liikaa.

Tunnetuin Reynoldsin jännitysten arvioimiseen liittyvä käsite on ns. sekoittumispituus- (engl. mixing length) otaksuma (Prandtl v. 1933). Tätä käytetään seinämien läheisyydessä tapahtuvan turbulenttisen virtauksen käsittelyssä.

Kun virtausta mitataan hyvän erotuskyvyn omaavalla laitteella, havaitaan, että myös laminaariselta näyttävässä virtauksessa esiintyy pientä heilahtelua, joka kasvaa Reynoldsin luvun kasvaessa. Tarkasti ottaen täytyy siis olla käytettävissä jokin heilahtelun suuruutta kuvaava mitta, jonka avulla virtaus kussakin pisteessä voidaan luokitella joko laminaariseksi tai turbulenttiseksi. Ominaisliike-energia $1/2 \cdot v^2 dm/dm = 1/2 \cdot v^2$ sopii tähän tarkoitukseen. Ominaisliike-energian aikakeskiarvo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\overline{v^2} &= \frac{1}{2}\overline{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = \frac{1}{2}(\overline{v_x v_x} + \overline{v_y v_y} + \overline{v_z v_z}) \\
&= \frac{1}{2}(\bar{v}_x \bar{v}_x + \bar{v}_y \bar{v}_y + \bar{v}_z \bar{v}_z + \overline{v_x' v_x'} + \overline{v_y' v_y'} + \overline{v_z' v_z'}) \\
&= \frac{1}{2}(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 + \overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}) \\
&= \frac{1}{2}\bar{v}^2 + \frac{1}{2}(\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}). \qquad (4.3.83)
\end{aligned}$$

Havaitaan, että ominaisliike-energian keskiarvo $1/2 \cdot \overline{v^2}$ on yhtä kuin keskiarvonopeuden avulla laskettu ominaisliike-energia $1/2 \cdot \bar{v}^2$ plus heilahtelunopeuksista kertyvä positiivinen lisätermi. (Positiivisen suureen kuten $v_x'^2 = v_x' v_x'$ aikakeskiarvo on positiivinen. Tämän perusteella Reynoldsin jännitysten normaalikomponentit σ_x^t, σ_y^t ja σ_z^t ovat siis negatiivisia.) Kaavan (4.3.83) esittämä tulos on analoginen kaavan (a) esimerkki D 6.3.4 kanssa.

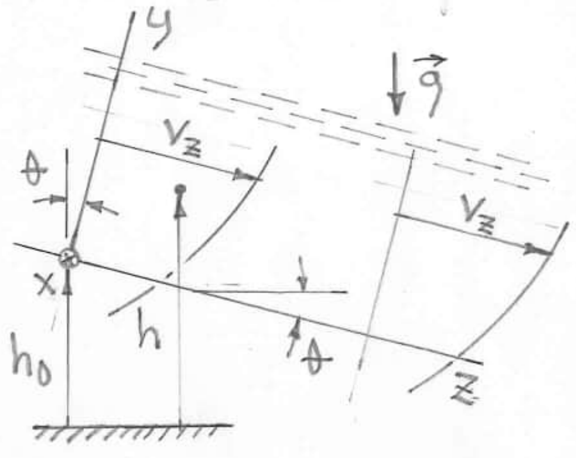
Virtauksen ns. turbulenssiaste (engl. degree, level, intensity of turbulence) määritellään lausekkeena

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{|\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}|}{v} = \frac{\sqrt{\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}}}{\sqrt{3(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2)}}. \qquad (4.3.84)$$

Tämän arvoa $\approx 0{,}0001$ voidaan pitää käytännössä rajana, jonka alapuolella virtaus on laminaarista (4).

Suora yhdensuuntaisvirtaus. Otsikon esittämässä tapauksessa virtaviivat ovat siis yh-

yhdensuuntaisia suoria. Lisäksi otaksutaan vakiotiheysmenettelyä ja vakiopainovoimakenttä. Tästä yksinkertaisesta tapauksesta saadaan esille eräitä havainnollisia etenkin yksidimensioisen virtauksen käsittelyssä tarpeellisia tuloksia.



Kuva 4.3.7

Otetaan z-akseli (kuva 4.3.7) virtaviivojen suuntaiseksi, jolloin siis ensin (Poiketaan tilapäisesti edellä käytetyistä merkinnöistä $s \to z$, $z \to h_0$)

$$v_x = 0\,,\quad v_y = 0\,,\quad v_z = v_z(x, y, z, t)\,. \tag{4.3.85}$$

Kokoonpuristumattomuusehto (3.4.63) yksinkertaistuu muotoon

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\,, \tag{4.3.86}$$

jonka perusteella v_z ei riipu muuttujasta z:

$$v_z = v_z(x, y, t)\,. \tag{4.3.87}$$

Täten nopeusjakautuma on virtaussuuntaa vastaan kohtisuorilla poikkileikkaustasoilla eri kohdissa samalla ajan hetkellä muuttumaton (kuva 4.3.7).

Katsotaan sitten Navier-Stokesin liikeyhtälöitä (4.3.67). Kiihtyvyyskomponentit (3.3.23) ovat

$$\frac{dv_x}{dt} = 0\,,\quad \frac{dv_y}{dt} = 0\,,\quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t}\,. \tag{4.3.88}$$

ja liikeyhtälöt ovat siis

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \varrho B_x - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ 0 &= \varrho B_y - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \varrho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \varrho B_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right). \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.89)$$

Kahden ensimmäisen yhtälön nähdään olevan täsmälleen samoja kuin nestestatiikassa (vrt. kaavat (2.1.13)), jonka johdosta syntyvällä painejakautumalla on osittain tuttuja piirteitä.

Kuvan 4.3.7 esittämässä tapauksessa mielivaltaisen nestealkion korkeusasema

$$h(y,z) = h_0 + y\cos\theta - z\sin\theta \qquad (4.3.90)$$

ja kenttävoiman intensiteetin komponenteiksi saadaan kaavoja (2.1.35) soveltamalla

$$\left.\begin{aligned} B_x &= g_x = -g\frac{\partial h}{\partial x} = 0, \\ B_y &= g_y = -g\frac{\partial h}{\partial y} = -g\cos\theta, \\ B_z &= g_z = -g\frac{\partial h}{\partial z} = g\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.91)$$

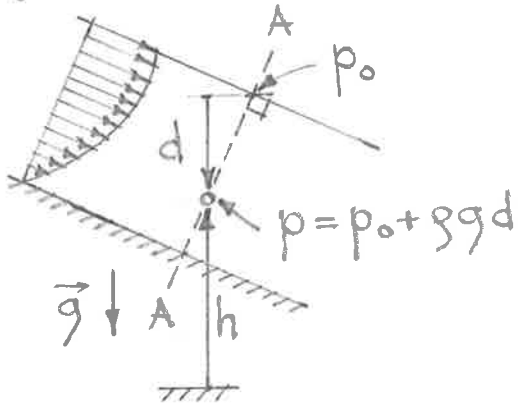
Nämä lopputulokset nähdään oikeiksi suoraan kuvaa 4.3.7 tarkastelemalla. Ensimmäiset kaksi yhtälöä (4.3.89) saadaan nyt muotoihin (ϱ ja g ovat vakioita)

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\varrho g h + p) = 0, \quad -\frac{\partial}{\partial y}(\varrho g h + p) = 0, \qquad (4.3.92)$$

joiden perusteella suluissa oleva summa $\varrho g h + p$ tai vielä tiheydellä ϱ jaettu summa

$$\frac{p}{\varrho} + gh = C \qquad (4.3.93)$$

on kullakin poikkileikkaustasolla vakio, jonka arvo voi kylläkin vaihdella eri tasoilla. Vertaamalla tulosta kaavaan (2.2.1) todetaan, että kaikilla virtaussuuntaa vastaan kohtisuorilla <u>poikkileikkaustasoilla vallitsee hydrostaattinen painejakautuma</u>.



Kuva 4.3.8

Jos esimerkiksi sovelletaan kaavaa (2.2.5), jossa p_0 on poikkileikkauksen tietyssä pisteessä vallitseva paine, syvyys d on tällöin mitattava kuvan 4.3.7 esittämällä tavalla.

Virtausta vastaava jännityskenttä saadaan Stokesin kitkalain (4.2.19) avulla:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -p + 2\mu \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial x}} = -p, \\
\sigma_y &= -p + 2\mu \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} = -p, \\
\sigma_z &= -p + 2\mu \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = -p, \\
\tau_{yz} &= \mu \left(\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial z}} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial v_z}{\partial y} \\
\tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial z}} \right) = \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \\
\tau_{xy} &= \mu \left(\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial x}} \right) = 0 \quad .
\end{aligned}\right\} \qquad (4.3.94)$$

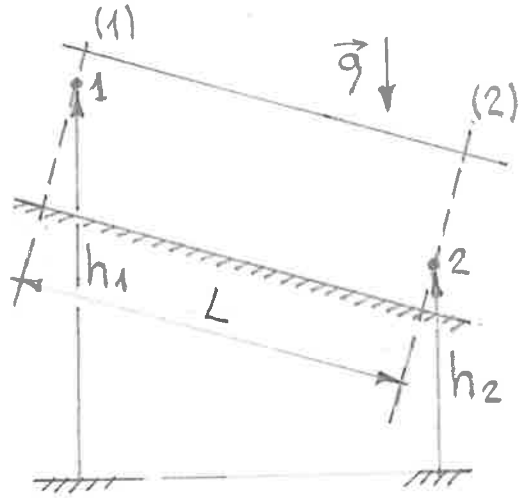
Täten deviaationormaalijännityskomponentit häviävät x, y- ja z-akselien suunnissa ja siis erityisesti virtaussuuntaa vastaan kohtisuorilla <u>poikkileikkaustasoilla normaalijännityskomponentti $\sigma = -p$.</u>

Edellä esitetyt kaksi alleviivattua tulosta ovat usein käytössä periaatteiden äärellisten muotojen sovellutuksissa; etenkin tämä koskee yleistetyn Bernoullin yhtälön johtoa. Niitä voidaan soveltaa riittävällä tarkkuudella myös turbulenttisen virtauksen yhteydessä; ks. Lähde (27, s. 82).

Tarkastellaan sitten viimeistä liikeyhtälöä (4.3.89) yksinkertaisuuden vuoksi vain stationaarisessa tapauksessa, jolloin se on muotoa

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \sin\theta + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}\right). \qquad (4.3.95)$$

Oikea puoli ei riipu lainkaan muuttujasta z eli se on vakio z:n suhteen ja <u>paineen täytyy siis olla korkeintaan lineaarinen z:n funktio</u>. Lähtemällä tälläisestä paineen lausekkeesta ja ottamalla vielä tulos (4.3.93) huomioon saadaan lopuksi kuvassa 4.3.9 esitettyjen kahden pisteen paine-erolle $\Delta p = p_1 - p_2$ lauseke



Kuva 4.3.9

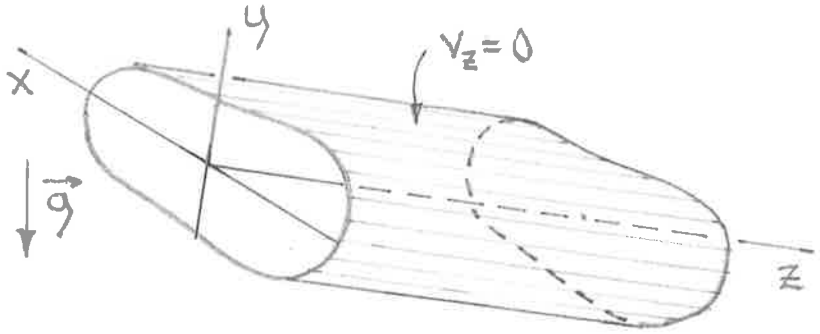
$$\Delta p = \rho g (h_2 - h_1) + -\mu L\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}\right). \qquad (4.3.96)$$

Oikean puolen ensimmäinen termi esittää hydrostaattista paine-eroa, joka esiintyisi lepotilassa olevassa nesteessä ($v_z \equiv 0$). Jälkimmäinen termi esittää näin ollen itse liikkeen vaatimaa kitkasta johtuvaa ns. painehäviötä

$$\Delta' p_1 = -\mu L\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}\right) \qquad (4.3.97)$$

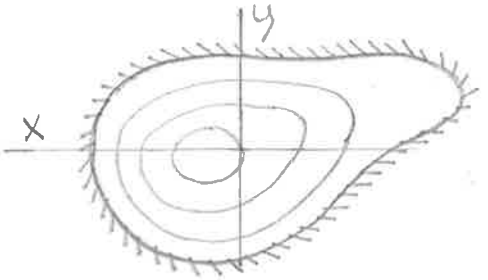
jonka nähdään olevan suoraan verrannollinen suureisiin μ, L ja v_z vrt. esimerkki 4.3.5.

Tarkastellaan viimeiseksi edellisten tulosten erikoistapauksena putkivirtausta poikkileikkaukseltaan muuttumattomassa suorassa putkessa



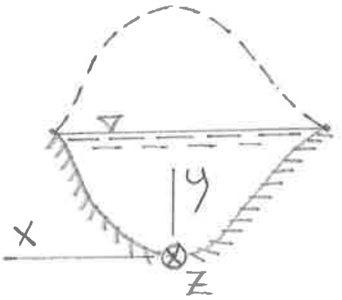
Kuva 4.3.10

(kuva 4.3.10). Kun kyseessä on pysyvä virtaus pitkässä putkessa, putken päistä virtaukseen syntyvät häiriöt eivät enää vaikuta virtaukseen, joka on yhdensuuntaisvirtausta, sillä Navier-Stokesin yhtälöt toteutuvat tällä valinnalla täsmällisesti, kunhan vain löydetään funktio $v_z(x,y)$ siten, että yhtälö (4.3.95) toteutuu. Lisäksi v_z:n tulee hävitä putken poikkileikkauksen reunalla; todellisen nesteen nopeus häviää kiinteällä seinämällä. Funktio v_z ratkaistaan yhtälöstä (4.3.97) pitäen suureita $\Delta' p_1$, μ ja L annettuina. Kysymyksessä on Poissonin yhtälö, jonka ratkaisemiseksi on olemassa tehokkaita numeerisia menetelmiä. Ratkaisun tyypin ymmärtämistä voi helpottaa, kun muistetaan, että probleema on matemaattisesti sama kuin poikkileikkauksen reunan varaan pingoitetun kalvon poikittaissiirtymän määrittäminen tasaisen poikittaiskuormituksen johdosta. Täten nopeus on karkeasti sanoen suurimmillaan pisteissä, jotka ovat mahdollisimman kaukana alueen reunasta. Kuva 4.3.11 esittää kaaviollisesti tiettyyn poikkileikkausmuotoon mahdollisesti liittyviä nopeuden v_z tasa-arvokäyriä.



Kuva 4.3.11

Tasainen avouomavirtaus voidaan ajatella myös putkivirtauksen osaksi muodostamalla kuviteltu putki kuvan 4.3.12 esittämällä tavalla peilaamalla uoman reuna vapaan pinnan suhteen lisäreunaksi. Vapaalla pinnalla tulee olla



Kuva 4.3.12

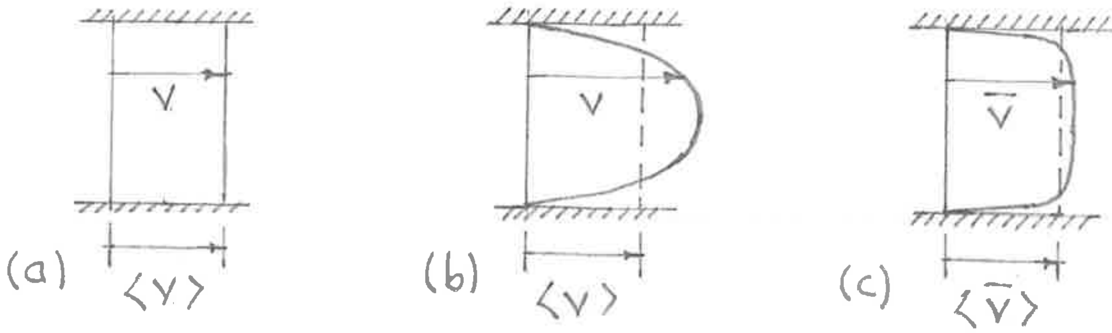
$$\tau_{yx} = 0\,, \quad \tau_{yz} = 0\,, \tag{4.3.98}$$

kun mahdollisesta tuulesta aiheutuva pintakitka jätetään huomiotta. Kaavojen (4.3.94) perusteella ensimmäinen yhtälö toteutuu automaattisesti ja toinen saa muodon

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = 0\,, \tag{4.3.99}$$

joka toteutuu symmetriasyistä kuvitellussa putkivirtauksessa.

Turbulenttinen putkivirtaus ei ole keskiarvonopeuden kannalta enää yksisuuntaisvirtausta paitsi ympyräpoikkileikkauksen tapauksessa. Reynoldsin jännitysten aiheuttamat paine-erot synnyttävät poikkileikkaustasojen suuntaisia virtauksia, ns. sekundäärivirtaus. Virtausnopeus jakautuu turbulentissa virtauksessa huomattavasti tasaisemmin kuin laminaarisessa virtauksessa. Itse asiassa turbulent-

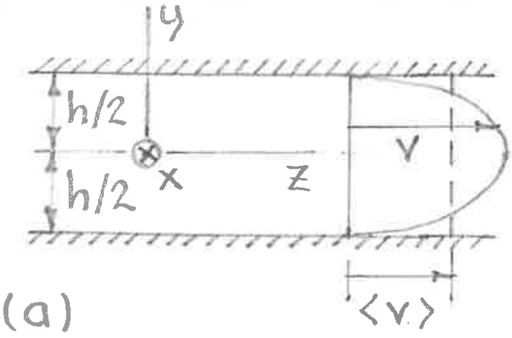


Kuva 4.3.13 Nopeusjakautuma (a) ideaalinesteen virtauksessa, (b) todellisen nesteen laminaarisessa (c) turbulenttisessa virtauksessa.

tinen nopeusjakautuma on hyvin lähellä ideaalinesteen yhtälöiden avulla saatavaa täysin tasaista nopeusjakautumaa (kuva 4.3.13).

Osittaisdifferentiaaliyhtälö (4.3.97) on ratkaistavissa analyyttisesti joidenkin yksinkertaisten poikkileikkausmuotojen yhteydessä, joista käsitellään tässä kaksi tapausta.

Esimerkki 4.3.9. Tasovirtaus kahden yhdensuuntaisen levyn välissä.



Kuvan (a) esittämässä tapauksessa v_z (merkitään $= v$) riippuu vain muuttujasta y. Parabolinen avausyrite

$$v = \frac{3}{2}\langle v\rangle\left[1-\left(\frac{y}{h/2}\right)^2\right] \qquad \text{(a)}$$

toteuttaa reunaehdot $v(-h/2)=0$, $v(h/2)=0$ ja antaa

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}=\frac{d^2 v}{dy^2}=\frac{3}{2}\langle v\rangle\left(-\frac{2}{h^2/4}\right)=-\frac{12}{h^2}\langle v\rangle, \qquad \text{(b)}$$

joka on vakio kuten pitääkin. Kaavan (4.3.97) perusteella painehäviö

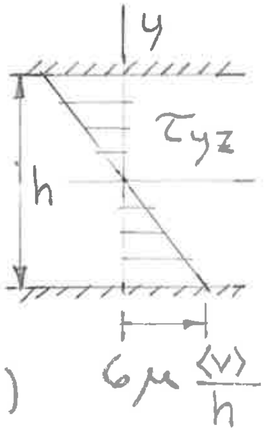
$$\Delta p_l = -\mu L\left(-\frac{12}{h^2}\langle v\rangle\right) = \frac{12\mu L}{h^2}\langle v\rangle. \qquad (c)$$

Leikkausjännitys τ_{yz} on (ks. kaavat (4.3.94))

$$\tau_{yz} = \mu\frac{\partial v_z}{\partial y} = \mu\frac{dv}{dy} = \mu\cdot\frac{3}{2}\langle v\rangle\left(-\frac{2y}{h^2/4}\right)$$

$$= -6\mu\frac{y}{h/2}\frac{\langle v\rangle}{h}. \qquad (d)$$

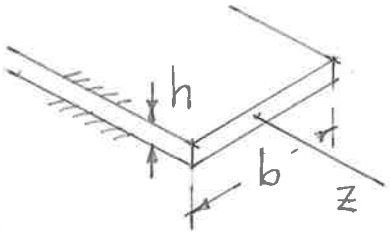
Täten leikkausjännitys on jakautunut lineaarisesti y-akselin suunnassa ja saa itseisarvoltaan maksimiarvon $6\mu\langle v\rangle/h$ seinämien kohdalla. (kuva (b)).



(b)

Johdetaan kitkahäviökertoimen lauseke. Määritelmän (4.3.37) perusteella

$$f = \frac{\tau_w}{\rho\langle v\rangle^2/8}. \qquad (e)$$



(c)

Tarkastellaan kuvan (c) esittämää kaistaa, jonka leveys on b. Poikkileikkaukselle saadaan arvot

$$A = bh, \quad l_w = 2b, \quad d_h = \frac{4A}{l_w} = \frac{4bh}{2b} = 2h. \qquad (f)$$

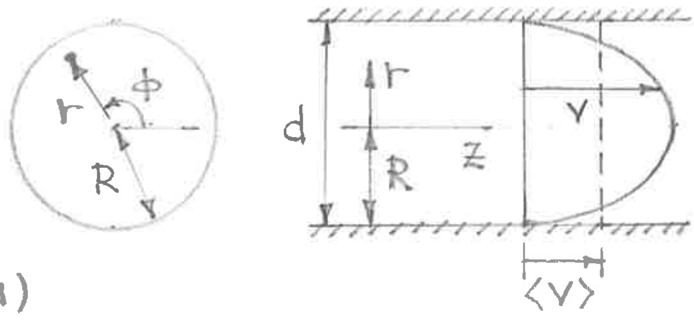
Tässä ei oteta huomioon kaistan päiden osuutta märän piirin laskemisessa, koska kyseessä on periaatteessa äärettömän leveä tapaus, jolloin reunojen vaikutus häviää. Seinämäleikkausjännitys $\tau_w = 6\mu\langle v\rangle/h$ ja kaavasta (e) saadaan

$$f = \frac{6\mu\langle v\rangle/h}{\rho\langle v\rangle^2/8} = 96\frac{\mu}{\rho\cdot 2h\langle v\rangle} = 96\frac{\mu}{\rho d_h\langle v\rangle} = \frac{96}{Re}, \qquad (g)$$

jossa Reynoldsin luvun (1.1.4) karakteristiseksi pituudeksi on otettu hydraulinen halkaisija d_h ja karakteristiseksi nopeudeksi on otettu keskinopeus.

---

* Esimerkki 4.3.10. Ympyräpoikkileikkaus. Käytetään sylinterikoordinaatteja (kuva (a)). Symmetriasyistä $v_r = v_\phi = 0$ ja akselin suuntainen nopeuskomponentti v_z (merkitään v) on pelkästään säteen r funktio: $v = v(r)$.



(a)

Kaavoista (3.3.52) saadaan ainoaksi nollasta eroavaksi muodonmuutosnopeuskomponentiksi

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{dv}{dr} \tag{a}$$

ja taas kaavoista (4.2.22) seuraa ainoaksi nollasta eroavaksi deviaatiojännityskomponentiksi termi

$$\tau_{rz} = \mu \gamma_{rz} = \mu \frac{dv}{dr}. \tag{b}$$

Viimeinen Cauchyn liikeyhtälöistä (4.3.66) saa pysyvässä virtauksessa muodon

$$\rho g \cos\theta - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{d\tau_{rz}}{dr} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \tag{c}$$

josta tulee lausekkeen (b) sijoituksen jälkeen yhtälö (Navier-Stokesin yhtälö)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \cos\theta + \mu \left(\frac{1}{r}\frac{dv}{dr} + \frac{d^2 v}{dr^2} \right). \tag{d}$$

Tämä on yhtälön (4.3.95) vastine ja täten kaavan (4.3.97) vastineeksi saadaan nyt

$$\Delta' p_l = -\mu L \left(\frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + \frac{d^2 v}{dr^2} \right). \qquad (e)$$

Itse asiassa tämä tulos olisi saatu suoraan kirjoittamalla kaava (4.3.97) muotoon $\Delta' p_l = -\mu L \nabla^2 v$ ja etsimällä Laplace-operaattorin lauseke sylinterikoordinaatistossa pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa.

Jälleen parabolinen hyvin arvattu yrite

$$v = 2\langle v\rangle \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \qquad (f)$$

toteuttaa reunaehdon $v(R) = 0$ ja antaa

$$\frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + \frac{d^2 v}{dr^2} = 2\langle v\rangle \left[\frac{1}{r} \left(-\frac{2r}{R^2} \right) - \frac{2}{R^2} \right] = -\frac{8}{R^2} \langle v\rangle, \qquad (g)$$

joka on vakio kuten pitääkin olla. Painehäviö

$$\Delta' p_l = -\mu L \left(-\frac{8}{R^2} \langle v\rangle \right) = \frac{8\mu L}{R^2} \langle v\rangle. \qquad (h)$$

Leikkausjännitys

$$\tau_{rz} = \mu \frac{dv}{dr} = \mu \cdot 2\langle v\rangle \left(-\frac{2r}{R^2} \right) = -4\mu \frac{r}{R} \frac{\langle v\rangle}{R} \qquad (i)$$

riippuu lineaarisesti säteestä r. Sen itseisarvo on seinämän kohdalla $4\mu\langle v\rangle/R$, joka on siis seinämäleikkausjännityksen τ_w arvo. Kitkahäviökerroin saadaan

$$f = \frac{\tau_w}{\varrho\langle v\rangle^2/8} = \frac{4\mu\langle v\rangle/R}{\varrho\langle v\rangle^2/8} = 32 \frac{\mu}{\varrho R\langle v\rangle^2}$$

$$= 64 \frac{\mu}{\varrho d\langle v\rangle^2} = \frac{64}{Re}, \qquad (j)$$

jossa Reynoldsin luvun karakteristiseksi pituudeksi on otettu halkaisija d (on tässä sama kuin d_h) ja karakteristiseksi nopeudeksi keskinopeus $\langle v\rangle$.

Eulerin liikeyhtälöt. Tarkastellaan kitkattomaksi otaksuttua virtausta eli ns. ideaalinesteen virtausta. Vallitsevat liikeyhtälöt saadaan joko Navier-Stokesin yhtälöistä asettamalla viskositeetti μ nollaksi tai sitten suoraan Cauchyn yhtälöistä asettamalla $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$, jolloin saadaan ns. Eulerin liikeyhtälö (Euler v. 1755)

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{B} - \vec{\nabla} p} \tag{4.3.100}$$

eli komponenttiyhtälöt

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= \rho B_x - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= \rho B_y - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= \rho B_z - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3.101}$$

Klassillinen hydromekaniikka käsittelee näitä yhtälöitä ja aiheesta on julkaistu valtava määrä kirjallisuutta. Tulosten käyttökelpoisuus rajoittuu kuitenkin vain sellaisiin tilanteisiin, joissa todellinen virtaus muistuttaa kitkatonta virtausta; siis lähinnä rajakerrosvirtauksen ulkopuolinen alue.

*↓ Ns isotrooppisessa turbulenssissa Reynoldsin jännitykset ovat muotoa (27)

$$\sigma_x^t = \sigma_y^t = \sigma_z^t, \quad \tau_{yz}^t = \tau_{zx}^t = \tau_{xy}^t = 0. \tag{4.3.102}$$

Tällöin Reynoldsin jännityksiin liittyvä paine

$$p^t \equiv -\frac{1}{3}(\sigma_x^t + \sigma_y^t + \sigma_z^t) = -\sigma_x^t = -\sigma_y^t = -\sigma_z^t. \tag{4.3.103}$$

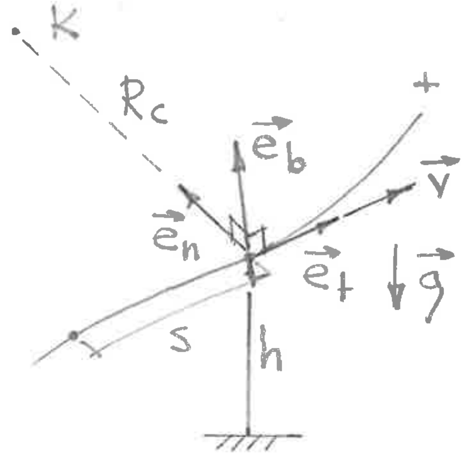
Suurilla Reynoldsin luvun arvoilla keskiarvonopeuksiin liittyvät keskiarvojännitykset (4.3.78) ovat usein hyvin pieniä Reynoldsin jännityksiin verrattuna. Jos niiden osuus jätetään pois, Reynoldsin yhtälöstä (4.3.81) tulee isotrooppisessa turbulenssissa yhtälö

$$\rho \frac{d\bar{\vec{v}}}{dt} = \rho \bar{\vec{B}} - \vec{\nabla}(\bar{p} + p^t), \qquad (4.3.104)$$

joka on tyypiltään vastaava kuin Eulerin yhtälö (4.3.100). Koska turbulenssi on rajakerroksen ulkopuolella usein verraten lähellä isotrooppista tapausta, yhtälö (4.3.104) selittää osittain, miksi keskiarvovirtaus on rajakerroksen ulkopuolella käsiteltävissä
* ideaalinesteen virtauksena.

Yhtälöiden (4.3.101) vastineet on helppo kirjoittaa eri koordinaattijärjestelmissä projisioimalla yhtälön (4.3.100) molemmat puolet eri koordinaattiakselien suunnille ja muistamalla että p:n gradientin $\vec{\nabla} p$ komponentti tietylle suunnalle on yhtä kuin p:n derivaatta ko. suuntaan.

<u>Ratakoordinaatteja</u> käyttäen saadaan virtaussuunnaltaan pysyvässä tai pysyvässä virtauksessa kaavojen (3.3.31) perusteella yhtälöt (kuva 4.3.14)



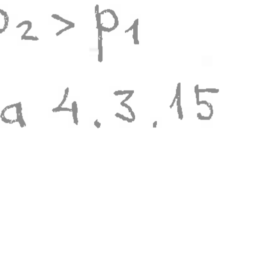
Kuva 4.3.14

$$\left.\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}\right) = \rho B_s - \frac{\partial p}{\partial s}, \\ &\rho \frac{v^2}{R_c} = \rho B_n - \frac{\partial p}{\partial n}, \\ &0 = \rho B_b - \frac{\partial p}{\partial b}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.105)$$

joissa käytettyjen tunnusten merkitys on ilmeinen. Jos käsitellään vain painovoimakenttää ja jaetaan yhtälöt puolittain tiheydellä ϱ saadaan tavanomaiset ratakoordinaateissa lausutut Eulerin yhtälöt ($B_s = -g\partial h/\partial s$, $B_n = -g\partial h/\partial n$, $B_b = -g\partial h/\partial b$, sillä konservatiivisen ominaiskappalevoiman (2.1.28) komponentti tiettyyn suuntaan s on $-\vec{\nabla}\Omega\cdot\vec{e}_s = -\partial\Omega/\partial s$)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s} &= -g\frac{\partial h}{\partial s} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s}, \\ \frac{v^2}{R_c} &= -g\frac{\partial h}{\partial n} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n}, \\ 0 &= -g\frac{\partial h}{\partial b} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.106)$$

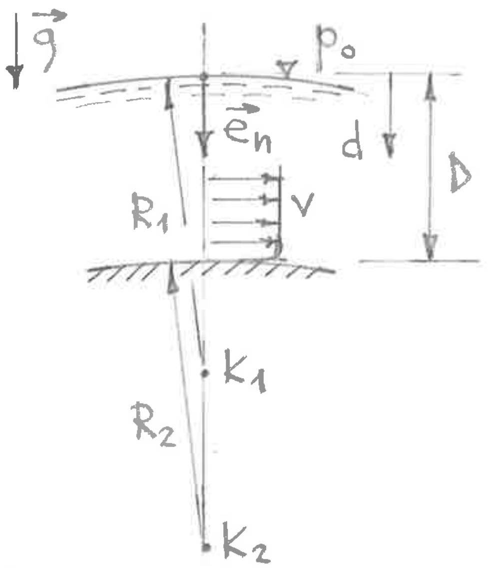
Keskimmäisen kaavan perusteella huomataan, että liikkeen johdosta paine kasvaa säteettäisessä suunnassa virtaviivojen koveralta kuperalle puolelle kuljettaessa (kuva 4.3.15). Jos virtaviivat ovat yhdensuuntaisia suoria (ja painovoimaa ei oteta huomioon), paine on siis kohtisuoraan virtaviivoja vastaan kuljettaessa vakio.



$p_2 > p_1$

Kuva 4.3.15

Esimerkki 4.3.11. Käyräviivainen avouomavirtaus. Arvioidaan uoman ja vapaan pinnan kaarevuuden vaikutusta painejakautumaan kuvan (a) esittämässä tapauksessa. Oletetaan vakiotiheysneste, pysyvä virtaus, vakio-nopeusjakautuma poikkileikkauksessa ja että



(a)

virtaviivojen kaarevuus muuttuu lineaarisesti syvyyden d funktiona vapaalla pinnalla olevasta arvosta $1/R_1$ pohjassa olevaan arvoon $1/R_2$:

$$\frac{1}{R_c} = \left(1-\frac{d}{D}\right)\frac{1}{R_1} + \frac{d}{D}\frac{1}{R_2}. \qquad (a)$$

Keskimmäinen kaava (4.3.106) saa muodon

$(n \hat{=} d,\ h \hat{=} -d)$

$$\frac{v^2}{R_c} = g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial d},$$

$$\frac{\partial p}{\partial d} = \rho g - \rho v^2\left[\left(1-\frac{d}{D}\right)\frac{1}{R_1} + \frac{d}{D}\frac{1}{R_2}\right]. \qquad (b)$$

Integroidaan tämä puolittain d:n suhteen 0:sta d:hen

$$\Big|_0^d p = \Big|_0^d \rho g d - \rho v^2 \Big|_0^d \left[\left(d - \frac{1}{2}\frac{d^2}{D}\right)\frac{1}{R_1} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{D}\frac{1}{R_2}\right],$$

$$p - p_0 = \rho g d - \rho v^2 d\left[\left(1-\frac{1}{2}\frac{d}{D}\right)\frac{1}{R_1} + \frac{1}{2}\frac{d}{D}\frac{1}{R_2}\right],$$

$$p_g = \rho g d - \rho v^2\left[\frac{d}{R_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{R_2} - \frac{d}{R_1}\right)\frac{d}{D}\right]. \qquad (c)$$

Hydrostaattiseen painejakautumaan tulee siis korjaustermi, jonka arvo pohjassa on

$$-\rho v^2\left[\frac{D}{R_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{D}{R_2} - \frac{D}{R_1}\right)\frac{D}{D}\right] = -\frac{1}{2}\rho v^2\left(\frac{D}{R_1} + \frac{D}{R_2}\right). \qquad (d)$$

Koska avouomavirtaus on oleellisesti kitkallista virtausta, kyseessä on vain suuruusluokka-arvio. Jos otetaan numeroarvot

$$\varrho = 1000\ kg/m^3,\quad v = 2 m/s,\quad D = 2 m,$$
$$R_1 = 4 m,\quad R_2 = 2 m,$$

hydrostaattisesta painejakautumasta tulee pohjalla paineen arvo

$$p = \varrho g D = 1000 \frac{kg}{m^3}\, 9{,}81 \frac{m}{s^2}\, 2m = 19'620\ Pa$$
$$= 0{,}196\ bar.$$

Korjaustermin arvo on pohjalla

$$\Delta p = -\frac{1}{2}\varrho v^2\left(\frac{D}{R_1}+\frac{D}{R_2}\right) = -\frac{1}{2}\, 1000 \frac{kg}{m^3}\, 4\frac{m^2}{s^2}\left(\frac{1}{2}+1\right)$$
$$= -3000\ Pa = -0{,}030\ bar.$$

Täten korjaustermin suhteellinen arvo

$$\frac{\Delta p}{p}\, 100 = -\frac{0{,}030}{0{,}196} \cdot 100 = -15\%$$

Bernoullin yhtälö. Kirjallisuudessa esiintyy suuri määrä enemmän tai vähemmän samannäköisiä kaavoja, jotka kaikki kulkevat Bernoullin yhtälön nimellä. Tavallisimmin ne koskevat kitkatonta virtausta, mutta eräs versio – ks. kohta 4.5.2 – liittyy myös kitkalliseen tapaukseen. Lähteen (28) mukaan D. Bernoulli (1700–82) ei tuntenut nimeään kantavaa yhtälöä.

Lähdetään (9) kitkattoman nesteen liikeyhtälöstä (4.3.100) ja sijoitetaan siihen kiihtyvyyden Lausekke (3.3.49) sekä jaetaan yhtälö vielä puolittain tiheydellä ϱ:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{B} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p. \qquad (4.3.107)$$

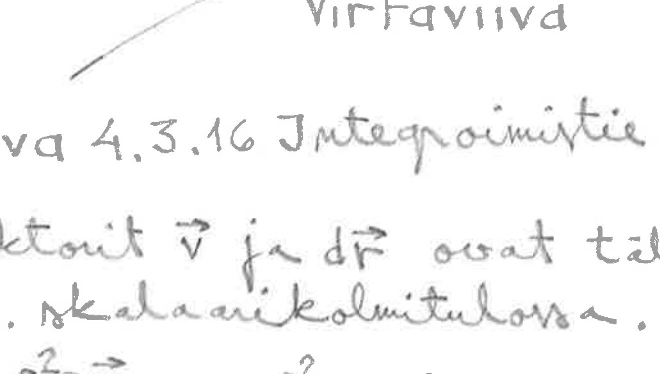
Oletetaan lisäksi, että (b) voimakenttä on <u>konservatiivinen</u> ja että kysymyksessä on (c) <u>barotrooppinen homogeeninen</u> neste, jolloin (ks. kaavat (2.1.28) ja (2.1.41))

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}\Omega\,, \quad \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}\Psi \qquad (4.3.108)$$

ja liikeyhtälö saa muodon

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2\vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \Psi + \Omega\right) = \vec{0}. \qquad (4.3.109)$$

Haluttu yhteys syntyy ottamalla yhtälön kummankin puolen skalaariset viivaintegraalit tietyllä hetkellä — aika siis "jäädytetään" integrointia suoritettaessa — pitkin tiettyä nesteessä olevaa tietä, jolloin saadaan edelleen yhtälö, jonka oikea ja siis myös vasen puoli on nolla. Tie valitaan kulkemaan pitkin jotain virtaviivaa mielivaltaisesta pisteestä 1 toiseen mielivaltaiseen pisteeseen 2 (kuva 4.3.16). Tämä valinta tehdään, koska silloin päästään eroon kulmanopeusvektorin $\vec{\omega}$ sisältävästä termistä $2\vec{\omega}\times\vec{v}\cdot d\vec{r}$; vektorit $\vec{v}$ ja $d\vec{r}$ ovat tällöin yhdensuuntaisia ko. skalaarikolmitulossa. Saadaan siis yhtälö



Kuva 4.3.16 Integroimistie.

$$\int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \Psi + \Omega\right)\cdot d\vec{r} = 0. \qquad (4.3.110)$$

Koska mielivaltaiselle funktiolle $f(x,y,z,t)$ pätee

$$\int_1^2 \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right)$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)$$

$$= \int_1^2 df = \Big|_1^2 f = f_2 - f_1, \qquad (4.3.111)$$

yhtälö saa muodon

$$\boxed{\frac{v_1^2}{2} + \Psi_1 + \Omega_1 = \frac{v_2^2}{2} + \Psi_2 + \Omega_2 + \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\,ds.} \qquad (4.3.112)$$

Tulos on eräs Bernoullin yhtälö (muoto 1). Se koskee siis tietyllä hetkellä kahdessa samalla virtaviivalla olevassa pisteessä laskettuja suureiden v, Ψ ja Ω arvoja, kun oletukset (a), (b) ja (c) ovat voimassa. Tässä vektori $\vec{e}$ on suunnattu kuvan 4.3.16 esittämällä tavalla, jolloin $\vec{v} = v\vec{e}$, $d\vec{r} = ds\,\vec{e}$ ja $\partial\vec{v}/\partial t \cdot d\vec{r} = \partial v/\partial t \cdot ds$.

Tämä Bernoullin yhtälö näkyy usein myös muodossa

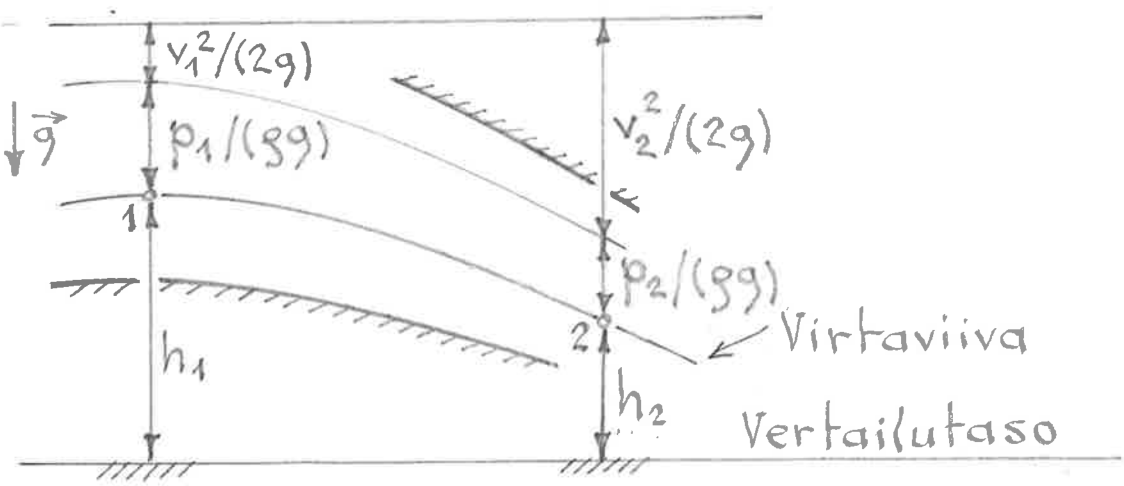
$$\frac{v^2}{2} + \Psi + \Omega + \int \frac{\partial v}{\partial t}\,ds = C = \text{vakio tietyllä virtaviivalla tietyllä hetkellä}. \qquad (4.3.113)$$

Kaava saadaan yhtälöstä (4.3.112) ajattelemalla piste 1 kiinnitetyksi ja poistamalla mielivaltaisen pisteen 2 tunnus.

Tavallisin sovellutuskaava syntyy otaksumalla yhtälössä (4.3.112) lisäksi (d) pysyvä virtaus ($\partial v/\partial t = 0$), (e) vakiopainovoimakenttä ($\Omega = gh$) ja (f) vakiotiheysneste ($\Psi = p/\varrho$) ja jakamalla vielä yhtälö puolittain painovoiman kiihtyvyydellä g:

$$\boxed{\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\varrho g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\varrho g} + h_2.} \qquad (4.3.114)$$

Yhtälön termeillä on pituuden laatu. Tähän liittyen näitä termejä on tapana havainnollistaa kuvan 4.3.17 tapaisella esityksellä; lisänä tavanomaisia nimityksiä, jotka vaih-



h = asemakorkeus (engl. elevation head, geometrical head)

$p/(\varrho g)$ = painekorkeus (engl. pressure head)

$v^2/(2g)$ = nopeuskorkeus (engl. velocity head)

$p/(\varrho g) + h$ = pietsometrinen korkeus (engl. piezometric head)

$v^2/(2g) + p/(\varrho g) + h$ = kokonaiskorkeus (engl. total head)

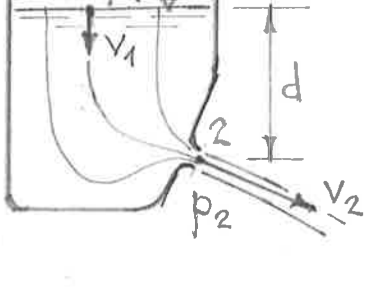
Kuva 4.3.17 Bernoullin yhtälön termejä.

televat melko paljon eri lähteissä. Yhtälö (4.3.114) voidaan siis ilmaista sanomalla, että kokonaiskorkeus on tietyllä virtaviivalla vakio.

Yhtälö (4.3.112) voidaan johtaa myös suorittamalla integrointi pitkin tiettyä pyörreviivaa. Pyörreviiva (engl. vortex line) on viiva, jonka kuhunkin pisteeseen kuuluva kulmanopeusvektori sivuaa tätä viivaa. (Vastaavasti kuin määriteltiin virtaputki ja virtasäie voidaan myös määritellä pyörreputki ja pyörresäie.) Kun nimittäin suoritetaan integrointi pitkin pyörreviivaa, skalaarikolmitulo $2\vec{\omega}\times\vec{v}\cdot d\vec{r}$ häviää jälleen, koska vektorit $\vec{\omega}$ ja $d\vec{r}$ ovat yhdensuuntaiset.

Olipa Bernoullin yhtälö kirjoitettu koskemaan tiettyä virtaviivaa tai pyörreviivaa niin sen soveltamisessa tarvitaan siis periaatteessa tieto nopeuskentästä, jotta virtaviivat ja pyörreviivat olisivat selvillä. Täten Bernoullin yhtälön soveltaminen vaatii kohtuullisen hyvän arvauksen nopeuskentästä. Todellisessa virtauksessa Bernoullin yhtälöön syntyy kitkasta johtuva lisätermi (ks. kohta 4.5.2), joka on yleensä vaikea arvioida.

Esimerkki 4.3.12. Purkautuminen aukosta. Kuvan (a) esittämässä säiliössä oleva neste purkautuu säiliön seinämässä olevan pienen aukon (poikkileikkauspinta-ala = A) kautta ulos. Määritetään vastaava



(a)

virtaama Q. Oletetaan vakiotiheyksisen kitkattoman virtaus.

Vapaa pinta laskeutuu hitaasti alaspäin, joten sillä olevien partikkelien nopeusvektorit osoittavat suunnilleen alaspäin. Vapaalta pinnalta lähtevät virtaviivat kulkevat kaikki lopuksi aukon kautta. (Tarkastellaan vastaotaksumana pinnalta lähtevää virtasäiettä, joka päätyisi seinämään, jolla todellisen nesteen nopeus häviää ja sovelletaan jatkuvuusyhtälöä, jolloin nopeus häviäisi kaikkialla virtasäikeessä. Ideaalinesteen mallissa seinämät ovat virtaputken seinämiä.)
Sovelletaan Bernoullin yhtälöä (4.3.114) kuvassa esitetyille pisteille 1 ja 2. Yhtälössä tulisi esiintyä vielä termi $\int_1^2 \partial v/\partial t\, ds/g$, koska kyseessä on tarkasti ottaen epästationaarinen virtaus, mutta kun aukon pinta-ala A on pieni säiliön poikkileikkauspinta-alaan A_s verrattuna, vapaa pinta laskee hitaasti ja kyseessä on likimain stationaarinen tapaus.
Saadaan yhtälö

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2,$$

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2(p_1-p_2)}{\rho} + 2g(h_1-h_2),$$

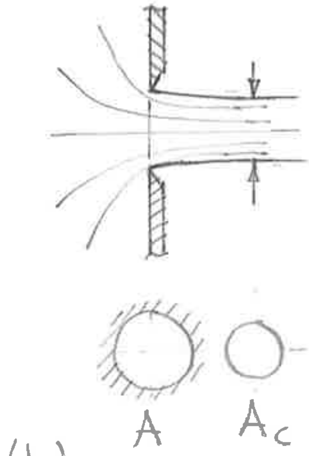
$$v_2 = \left[v_1^2 + 2(p_1-p_2)/\rho + 2gd\right]^{1/2} \qquad \text{(a)}$$

jatkuvuusyhtälön perusteella $v_1 = v_2(A/A_s)$, jos oletetaan, että nopeus on tasaisesti jakautunut vapaalla pinnalla ja aukossa. Yleensä asetetaan $v_1 \approx 0$, kun $A \ll A_s$. Jos purkautuva nestesuihku on aukon kohdalla likimain yhdensuuntaisvirtausta, p_2 on yhtä-kuin ulkoilman paine p_o. Jos säiliö on avoin, on samoin $p_1 = p_o$. Tällöin siis

$$v_2 = \sqrt{2gd}. \qquad (b)$$

Tämä on ns. <u>Torricellin kaava</u>. Käytännössä kitkan vaikutus pienentää hiemaan tätä arvoa.

Edellä oli otaksuttu, että aukko on juohevasti muotoiltu, jolloin suihku on tyypiltään yhdensuuntaisvirtausta heti aukon kohdalla. Käytännössä suihku kuroutuu aukon jälkeen ja on sovellettava poikkileikkauspinta-alaa A_c, joka on määritettävä kokeellisesti. Virtaama voidaan esittää joka tapauksessa muodossa

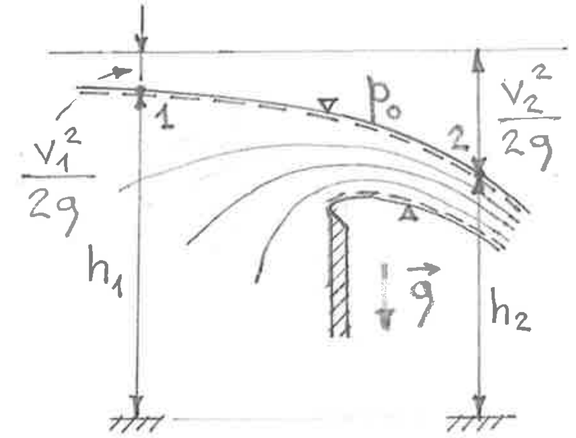


(b)

$$Q = \mu A \sqrt{2gd}, \qquad (c)$$

jossa kerroin μ, ns. <u>ulosvirtauskerroin</u>, sisältää sekä kitkan että kuroutumisen vaikutuksen. Kuvan (b) esittämässä aukkotyypissä $\mu \approx 0{,}6$.

<u>Esimerkki 4.3.13.</u> Vapaa pinta. Kuva (a) esittää virtausta teräväreunaisen ylisyöksypadon kohdalla. Pisteessä 1 vapaalla pinnalla on mitattu virtausnopeuden arvo v_1. Vapaan pinnan muoto tunnetaan samoin mit-



(a)

taustan perusteella. Mikä on virtausnopeuden arvo mielivaltaisessa vapaalla pinnalla olevassa pisteessä 2?

Oletetaan vakiotiheysneste ja pysyvä tasovirtaus. Stationaarisessa tapauksessa vapaan pinnan tiettyyn pisteeseen liittyvän virtausnopeusvektorin on oltava aina pinnan tangenttitason suuntainen (kuva (b)), sillä muulloin pinnan muodostavilla nestealkioilla olisi tietty normaalinopeus eikä pinta siis pysyisi paikoillaan.

(b)

Tämän perusteella tietyn vapaan pinnan pisteen kautta kulkeva virtaviiva kulkee jatkuvasti pitkin vapaata pintaa ja erityisesti kuvan (a) tapauksessa pisteet 1 ja 2 ovat siis samalla virtaviivalla. Oletetaan, että virtaus tapahtuu kitkattomasti ja sovelletaan Bernoullin yhtälöä (4.3.114):

$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + h_2, \tag{a}$$

josta saadaan

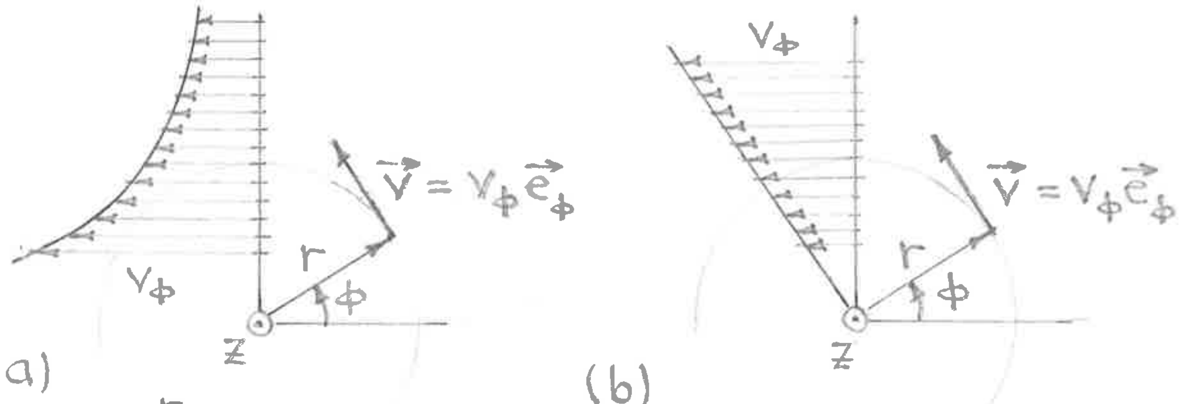
$$v_2 = \left[v_1^2 + 2g(h_1 - h_2)\right]^{1/2}. \tag{b}$$

Edellä on toimittu ilmanpaine referenssiarvona otetun mittapaineen avulla, jolloin painekorkeustermit häviävät. Yhtä hyvin voidaan käyttää myös absoluuttista painetta p_0, sillä vastaavat painekorkeudet kumoavat toisensa yhtä suurina termeinä.

Pyörteetön virtaus. Virtausta sanotaan pyörteettömäksi, jos kulmanopeusvektori

$$\boxed{\vec{\omega} \equiv \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{0}} \qquad (4.3.115)$$

tietyssä alueessa (ks. kohta 3.3.5). Jos $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ virtauksen sanotaan vastaavasti olevan pyörteellistä. Termiä pyörteetön ei tule ottaa kovin kuvaannollisesti. Tähän liittyvät kuvassa 4.3.18 esitetyt esimerkit. Kummassakin



(a) $v_\phi = \frac{r_0}{r} v_0$, $\vec{\omega} = \vec{0}$

(b) $v_\phi = \frac{r}{r_0} v_0$, $\vec{\omega} = \frac{v_0}{r_0}\vec{e}_z$

Kuva 4.3.18 Esimerkki (a) pyörteettömästä ja (b) pyörteellisestä virtauksesta.

tapauksessa on kyse tasovirtauksesta, jossa partikkelit ovat tasaisessa ympyräliikkeessä z-akselin ympäri. Ainoa nollasta eroava sylinterikoordinaatiston nopeuskomponentti v_ϕ riippuu vain muuttujasta r: $v_\phi = v_\phi(r)$. Kaavojen (3.3.51) perusteella ainoa nollasta eroava $\vec{\omega}$:n komponentti on tässä

$$\omega_z = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{d(r v_\phi)}{dr} \qquad (4.3.116)$$

ja suorittamalla laskelmat saadaan kuvassa näkyvät tulokset. Suureet r_0 ja v_0 ovat mielivaltaisia pituuden ja nopeuden referenssiarvoja. Maallikko kuvaisi ilmeisestikin kumpaakin virtausta z-akselin ympäri tapahtuvana pyörteenä. Jälkimmäinen tapaus vastaa jäykän kappaleen rotaatiota z-akselin ympäri kulmanopeudella $v_0/r_0 \cdot \vec{e}_z$. Karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa pyörteettömyys merkitsee, että yhtälöt

$$\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=0\,,\quad \frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0 \qquad (4.3.117)$$

toteutuvat (ks. kaavat (3.3.37)).

Kitkallinen virtaus ei ole yleensä pyörteetöntä. On kuitenkin olemassa merkillinen lause, ns. Kelvinin tai Thomsonin sirkulaation pysyvyyslause (engl. Thomson's theorem on the permanence of circulation; Thomson v. 1868 tai Lordi Kelvin), jota ei käsitellä eikä johdeta tässä (ks. lähde (141)). Lauseesta seuraa mm., että edellisen kohdan oletuksien (a), (b) ja (c) vallitessa virtaus säilyy jatkuvasti pyörteettömänä, jos se on ollut jollakin hetkellä pyörteetöntä. Tämän tuloksen tärkein sovellutus on tapaus, jossa neste on lähtenyt liikkeelle täydellisestä lepotilasta. Lepotilassahan $\vec{v}\equiv\vec{0}$ ja kulmanopeusvektori häviää varmasti, joten syntyvä liike on edellytysten (a), (b) ja (c) vallitessa pyörteetöntä. Myös tapauksessa $\vec{v}$ = vakio eli suorassa yhdensuuntaivutuksessa, jossa vauhti on sama kaikkialla, $\vec{\omega} = \vec{0}$. Esimerkiksi siipiprofiileja analysoidaan usein juuri siten, että ne kohtaavat tällaisen virtauksen, jolloin virtaus säilyy siipiprofiilin ympärilläkin pyörteettömänä paitsi rajakerroksen sisällä, jossa pyörteisyys on voimakasta.

Kun puhutaan yleisesti <u>ideaalinesteen virtauksesta</u> eikä mitään tarkempaa sanota, tällä tarkoitetaan tavallisesti vakiotiheysnesteen kitkatonta ja pyörteetöntä virtausta. Vallitsevat yhtälöt ovat <u>kokoonpuristumattomuusehto</u>

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad (4.3.118)$$

sekä <u>pyörteettömyysehdot</u> (4.3.117). Yhtälöt ovat mekaniikan kannalta poikkeuksellisesti lineaarisia, joka helpottaa ratkaisuyrityksiä huomattavasti. Tuntemattomia on kolme, v_x, v_y, v_z ja yhtälöitä neljä. Tämä selittyy sillä, että yhtälöt (4.3.117) eivät ole riippumattomia; esimerkiksi eliminoimalla v_z kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä derivointien avulla päädytäänkin muuttujan z suhteen derivoituun kolmanteen yhtälöön.

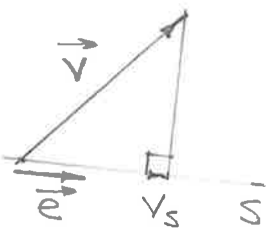
<u>Nopeuspotentiaali.</u> Käytännössä ei kuitenkaan pyritä ratkaisemaan suoraan tuntemattomia v_x, v_y ja v_z, vaan yleensä otetaan käyttöön tietty apumuuttuja, ns. <u>nopeuspotentiaali</u> (engl. velocity potential) $\phi(x,y,z,t)$ siten, että

$$\boxed{\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi} \qquad (4.3.119)$$

eli

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}. \qquad (4.3.120)$$

Nopeusvektorin komponentti tiettyyn suuntaan s (kuva 4.3.19) on $v_s = \vec{v} \cdot \vec{e}$. Toisaalta funktion ϕ differentiaali muutoksen $d\vec{s} = ds\vec{e} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ johdosta on



Kuva 4.3.19

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \\ &= \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{s} = \vec{\nabla}\phi \cdot ds\vec{e} \\ &= -\vec{v} \cdot \vec{e}\, ds = -v_s\, ds. \qquad (4.3.121) \end{aligned}$$

Täten

$$\boxed{v_s = -\frac{\partial \phi}{\partial s}} \qquad (4.3.122)$$

eli nopeuden skalaarikomponentti tiettyyn suuntaan on yhtä suuri kuin nopeuspotentiaalin miinusmerkkinen derivaatta tähän suuntaan. Kaavat (4.3.120) ovat tämän tuloksen erikoistapauksia.

Usein miinusmerkkiä ei sisällytetä näihin määritelmiin. Sijoittamalla lauseke (4.3.119) yhtälön (4.3.115) vasemmalle puolelle tai sijoittamalla samoin lausekkeet (4.3.120) yhtälöiden (4.3.117) vasemmille puolille havaitaan, että yhtälöt toteutuvat. Täten nopeuspotentiaalin käyttö takaa automaattisesti pyörteettömyysehdon toteutumisen — pyörteetöntä virtausta nimitetäänkin monasti potentiaalivirtaukseksi —, ja jäljelle jää vain kokoonpuristumattomuusehto (4.3.118), joka tulee muotoon

$$\boxed{\nabla^2\phi = 0} \qquad (4.3.123)$$

eli

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0. \qquad (4.3.124)$$

Funktio ϕ ratkaistaan tästä tutusta Laplacen differentiaaliyhtälöstä tiettyjen reunaehtojen alaisena yleensä jotain numeerista menetelmää käyttäen, jonka jälkeen nopeus saadaan helposti kaavan (4.3.119) avulla.

Kun paineen arvo tunnetaan yhdessä alueen pisteessä, paine kaikkialla muualla saadaan Bernoullin yhtälön (muoto 2) avulla, joka johdetaan seuraavassa.

Tehdään samat otaksumat kuin muotoa 1 lettaessa: (a) kitkaton virtaus (b) konservatiivinen voimakenttä, (c) barotrooppinen homogeeninen neste plus lisäksi tässä (d) pyörteetön virtaus. Lähdetään liikeyhtälöstä (4.3.109):

$$-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi + 2\cancel{\vec{\omega}}\times\vec{v} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}+\Psi+\Omega\right)=\vec{0}, \qquad (4.3.125)$$

jossa on otettu huomioon otaksuma (d). Derivointi ajan ja paikan suhteen ovat vaihdannaisia operaatioita ja siis

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial\phi}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

$$= \vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \qquad (4.3.126)$$

joten liikeyhtälö saadaan muotoon

$$\vec{\nabla}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \Psi + \Omega\right) = \vec{0}. \qquad (4.3.127)$$

Kun nyt otetaan yhtälön kummankin puolen skalaariset viivaintegraalit pisteestä 1 pisteeseen 2 pitkin <u>mielivaltaista</u> reitissä olevaa tietä, saadaan <u>Bernoullin yhtälö</u> (muoto 2) (yhtälön termit $v^2/2$ voidaan tarvittaessa korvata merkinnöillä $(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\phi)/2$.)

$$\boxed{-\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1 + \frac{v_1^2}{2} + \Psi_1 + \Omega_1 = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_2 + \frac{v_2^2}{2} + \Psi_2 + \Omega_2.} \qquad (4.3.128)$$

Se koskee siis tietyllä hetkellä kahdessa alueen mielivaltaisessa pisteessä laskettuja suureiden $\partial\phi/\partial t$, v, Ψ ja Ω arvoja, kun oletukset (a), (c) ja (g) ovat voimassa.

Yhtälö kirjoitetaan usein myös muodossa

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \Psi + \Omega = C = \text{vakio koko alueessa tietyllä hetkellä}. \qquad (4.3.129)$$

Kaava saadaan suoraan yhtälöstä (4.3.127) jonka mukaan sulkeissa olevan lausekkeen täytyy olla paikan suhteen **vakio**. Stationaarisessa tapauksessa $\partial\phi/\partial t = 0$ ja C on vakio myös ajan suhteen.

Tavallisin sovellutuskaava syntyy jälleen otaksumalla lisäksi (d) pysyvä virtaus, (e) vakiopainovoimakenttä ja (f) vakiotiheysneste ja jakamalla yhtälö puolittain painovoiman kiihtyvyydellä g:

$$\boxed{\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+h_1=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+h_2.} \qquad (4.3.130)$$

Kaavan termejä voidaan taas havainnollistaa kuvan 4.3.17 avulla; ainoa ero on vain siinä, että pisteiden 1 ja 2 ei tarvitse enää sijaita samalla virtaviivalla.

Virtafunktio. Tasovirtauksessa ja pyörähdyssymmetrisessä virtauksessa erittäin hyödyllinen toinen yleinen apumuuttuja on ns. virtafunktio (engl. stream function) ψ. Karteesisessa suorakulmaisessa xy-koordinaatistossa $\psi(x,y,t)$ määritellään kaavoilla

$$\boxed{v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x},} \qquad (4.3.131)$$

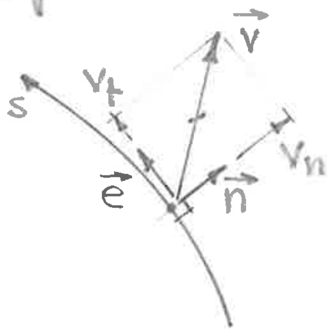
joiden sijoitus kokoonpuristumattomuusyhtälöön

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \qquad (4.3.132)$$

osoittaa, että virtafunktion käyttö takaa automaattisesti kokoonpuristumattomuusehdon toteutumisen. Kokoonpuristumattomuus on nestemekaniikassa paljon yleisempi ja realistisempi otaksuma kuin pyörteettömyys, joten virtafunktio on tässä suhteessa tärkeämpi apuväline kuin nopeuspotentiaali.

Toisaalta virtafunktio ei yleisty yksinkertaisella tavalla kolmeen dimensioon. Määritelmissä (4.3.131) valitaan kirjallisuudessa plus- ja miinusmerkkien paikat usein käänteisesti.

Virtafunktiolla on se havainnollinen merkitys, että sen tasa-arvokäyrät ovat samalla virtaviivoja. Tarkastellaan tämän todistamiseksi



Kuva 4.3.20

kuvaa 4.3.20. Olkoon s suunnattu käyrä, jonka tiettyyn pisteeseen asetetaan positiiviseen suuntaan osoittava yksikkötangenttivektori $\vec{e}$ sekä tästä myötäpäivään 90° kääntymällä yksikkönormaalivektori $\vec{n}$. Kun merkitään $\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j}$, niin kuvan perusteella $\vec{e} = -n_y\vec{i} + n_x\vec{j}$.

Funktion Ψ differentiaali muutoksen

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} \\ &= ds\,\vec{e} = -n_y ds\,\vec{i} + n_x ds\,\vec{j} \end{aligned} \qquad (4.3.133)$$

johdosta on

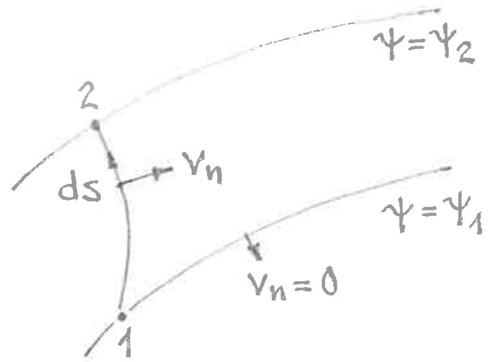
$$\begin{aligned} d\Psi &= \frac{\partial\Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y}dy = -v_y dx + v_x dy = v_y n_y ds + v_x n_x ds \\ &= (v_x n_x + v_y n_y)ds = \vec{v}\cdot\vec{n}\,ds = v_n ds, \end{aligned} \qquad (4.3.134)$$

joten

$$\boxed{v_n = \frac{\partial\Psi}{\partial s}} \qquad (4.3.135)$$

eli nopeuden skalaarikomponentti tiettyyn suuntaan on yhtä suuri kuin virtafunktion derivaatta tästä suunnasta 90° vastapäivään kierettyyn suuntaan. Kaavat (4.3.131) ovat tämän tuloksen erikoistapauksia.

Olkoon sitten funktiolla ψ pisteessä 1 arvo ψ_1 (kuva 4.3.21). Funktion ψ arvo mielivaltaisessa toisessa pisteessä 2



Kuva 4.3.21

$$\psi_2 = \psi_1 + \int_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial s} ds$$

$$= \psi_1 + \int_1^2 v_n ds . \qquad (4.3.136)$$

Jos integroimistieksi otetaan itse virtaviiva, nopeuskomponentti v_n on nolla virtaviivan määritelmän perusteella ja siis virtaviivalla ψ on vakio kuten piti todistaakin. Kun integrointi suoritetaan virtaviivalta eroavaan pisteeseen 2, summa

$$\boxed{\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 v_n ds} \qquad (4.3.137)$$

ilmaisee virtaviivojen $\psi=\psi_2$ ja $\psi=\psi_1$ välistä kulkevan virtaaman z-akselin suuntaista leveyttä kohti.

On helppo todeta, että virtafunktion ja nopeuspotentiaalin tasa-arvokäyrät leikkaavat toisensa kohtisuoraan.

Kitkattoman kokoonpuristumattoman pyörteettömän tasovirtauksen käsittely tulee virtafunktion avulla hyvin samantapaiseksi kuin nopeuspotentiaalia käytettäessä. Pyörteettömyysehdoista (4.3.117) jää jäljelle vain viimeinen:

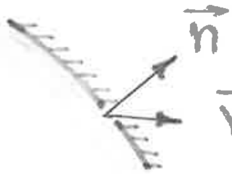
$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 , \qquad (4.3.138)$$

josta tulee siis kaksidimensioinen Laplacen yhtälö

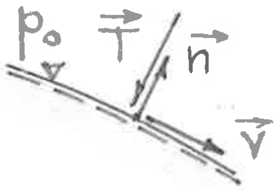
$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0.} \qquad (4.3.139)$$

Nopeuspotentiaalilla ja virtafunktiolla on käyttöä myös suotovirtauksen yhteydessä.

* <u>Reunaehdot.</u> Tämä kohta ei liity suoranaisesti liikemäärän taseen periaatteeseen. Nestemekaniikan tehtävissä esiintyvät ns. <u>reunaehdot</u> (engl. boundary condition) — ts. tarkasteltavan alueen reunapinnalla tunnetuista suureista saatavat yhtälöt — voivat koskea yleisesti joko <u>virtausnopeutta</u> tai <u>traktiota</u> tai vielä niiden tiettyjen komponenttien



(a) $\vec{v}=\vec{0}$ eli $\left.\begin{aligned} v_x&=0\\ v_y&=0\\ v_z&=0\end{aligned}\right\}$

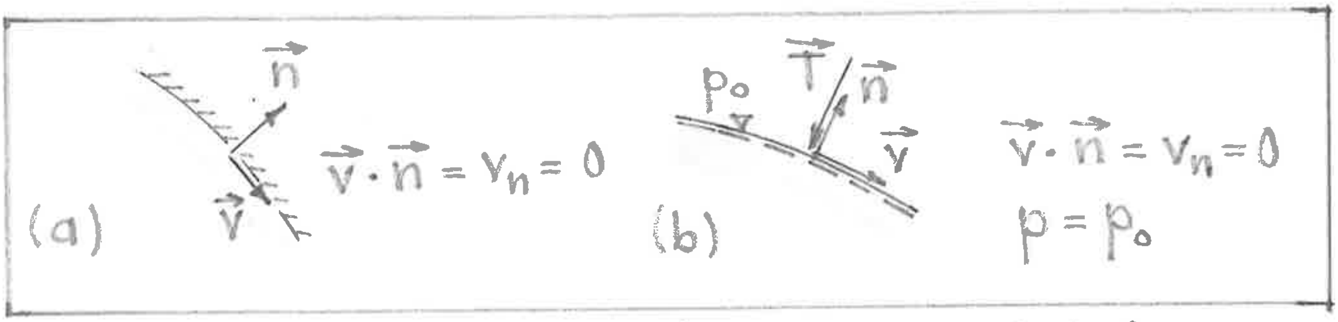


(b) $\vec{v}\cdot\vec{n}=v_n=0$

$\vec{T}=-p_0\vec{n}$ eli $\left.\begin{aligned} n_x(-p+\sigma_x^*)+n_y\tau_{yx}+n_z\tau_{zx}&=-n_x p_0\\ n_x\tau_{xy}+n_y(-p+\sigma_y^*)+n_z\tau_{zy}&=-n_y p_0\\ n_x\tau_{xz}+n_y\tau_{yz}+n_z(-p+\sigma_z^*)&=-n_z p_0\end{aligned}\right\}$

Kuva 4.3.22 Todellisen nesteen reunaehdot (a) kiinteän seinämän ja (b) stationaarisen vapaan pinnan tapauksessa.

yhdistelmää. Esimerkiksi Navier-Stokesin yhtälöiden yhteydessä tavallisia reunaehtoja ovat kuvassa 4.3.22 näkyvät tapaukset. Sijoittamalla traktioreunaehtoihin vielä deviatiojännityskomponenttien Stokesin kitkalain mukaiset lausekkeet näihinkin ehtoihin ilmestyy virtausnopeus. Kuva 4.3.23 esittää taas vastaavia reunaehtoja kitkattoman virtauksen yhteydessä. Ehtojen lukumäärä on alentunut kahdella. Tämä seikka on yhteydessä



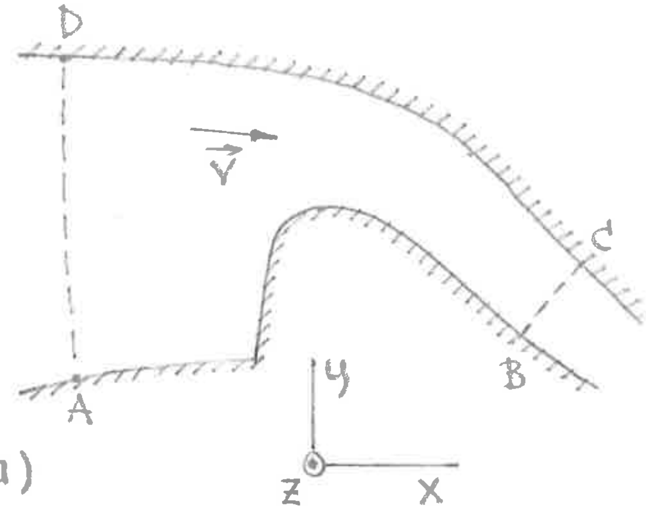
Kuva 4.3.23 Ideaalinesteen reunaehdot (a) kiinteän seinämän ja (b) stationaarisen vapaan pinnan tapauksessa.

vallitsevien differentiaaliyhtälöiden kertalukuun: Navier-Stokesin yhtälöt ovat paikkakoordinaattien suhteen toista ja Eulerin yhtälöt ensimmäistä kertalukua.

Epästationaarisissa probleemoissa tarvitaan vielä reunaehtojen lisäksi ns. <u>alkuehdot</u> (engl. initial conditions), ts. tiedot systeemin tilasta hetkellä, jona ko. ilmiötä ruvetaan tarkastelemaan. Alkuehtoina voi olla mm. nopeuskenttä hetkellä $t = 0$.

---

* <u>Esimerkki 4.3.14.</u> Nopeuspotentiaalin käyttö.



(a)

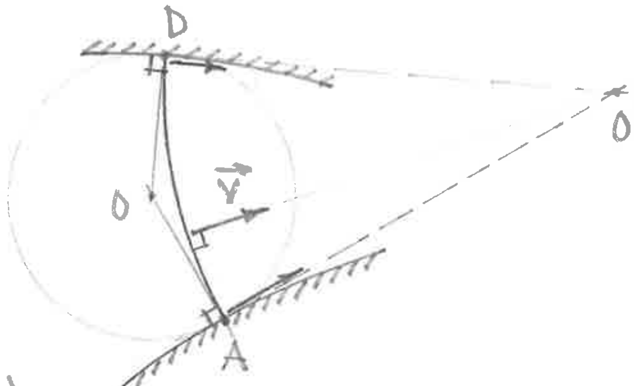
Kuva (a) esittää seinämien AB ja CD rajoittamaa z-akselin suunnassa muuttumatonta aluetta, jossa virtauksen otaksutaan olevan xy-tasossa tapahtuvaa kitkattoman vakiotiheysnesteen pyörteetöntä tasovirtausta. Tarkastellaan virtauksen määrittämistehtävää nopeuspotentiaalia käytettäessä.

Tehtävänä olisi siis määrittää funktio $\phi(x,y)$ — myös riippuvuus ajasta saisi olla mukana, sillä tämä ei muuttaisi käsittelyä — sopivasti valitussa xy-tason alueessa. Juuri alueen valinta onkin nestemekaniikan tehtävissä usein esiintyvä vaikea ongelma, sillä alueen reunalla täytyy otaksua "hyvää makua" käyttäen tiettyjä suureita tunnetuiksi, jotta ylipäänsä ratkaisu olisi saatavissa; vrt. kohta D 4.4.2 s. 164.

Tässä tapauksessa seinämät AB ja CD muodostavat erään selvän reunan osan, jolla nopeuskomponentti reunan normaalin suunnassa häviää ja saadaan siis reunaehdot

$$v_n = 0 \text{ reunalla AB ja CD.} \qquad \text{(a)}$$

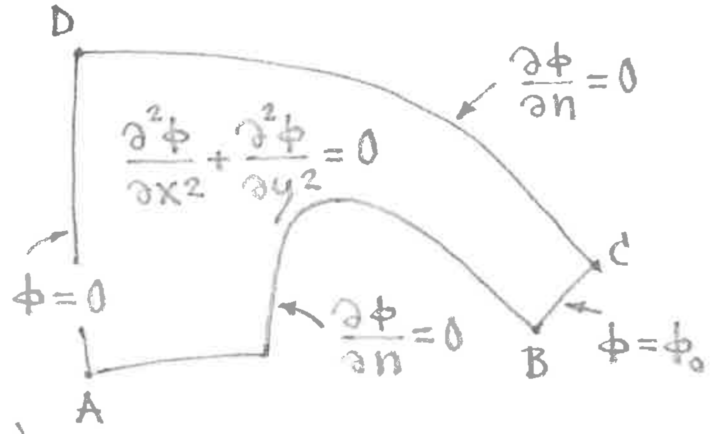
Reunaviivojen BC ja DA valinta on epämääräisempää. Eräs mahdollisuus on otaksua, että kohdilla, joilla seinämät ovat jonkin matkaa likimain yhdensuuntaisia, virtauskin on likimain yhdensuuntaisvirtausta. Kuva (b) esittää tähän liittyvää periaatteessa mahdollista konstruktiota. Valitaan toiselta reunalta piste A. Piirretään pisteen A kautta reunan normaali. Piirretään pisteen A kautta kulkevia yhä suurempisäteisiä ympyröitä, joiden keskipiste on normaalilla, kunnes saadaan ympyrä, joka sivuaa toista reunaa ja saadaan piste D. Alueen rajaksi otetaan O'-keskeinen ympyränkaari DA. Oletetaan, että tällä reunan osalla virtausnopeusvektorien vaikutussuorat kulkevat aina pisteen O' kautta. Tällöin tangentiaalinopeus v_t häviää. Tämä pitää täsmällisesti paikkansa pisteissä A ja D, koska kiinteät seinämät ovat ideaalivirtauksessa yleensä virtaputkia ja tässä reunat siis virtaviivoja. Näin on saatu likimääräiset reunaehdot



(b)

$$v_t = 0 \text{ reunalla BC ja DA.} \qquad \text{(b)}$$

Reunaehdot täytyy vielä lausua nopeuspotentiaalin ϕ avulla. Kaavan (4.3.122) perusteella reunaehdot (a) merkitsevät, että nopeuspotentiaalin derivaatan normaalin n suuntaan eli ns. normaaliderivaatan $\partial\phi/\partial n$ tulee hävitä. Reunaehdot (b) taas merkitsevät, että nopeuspotentiaalin derivaatan reunan tangentin suunnassa tulee hävitä eli nopeuspotentiaalin tulee siis olla vakio osilla DA ja BC. Tiettyyn nopeuspotentiaalin lausekkeeseen voidaan lisätä tai vähentää mielivaltainen vakio ilman, että derivoimalla saatu nopeus (4.3.119) muuttuu; vrt. vertailupisteen valinta potentiaalienergian käsitteen yhteydessä. Tällä perusteella voidaan ϕ:lle ottaa vaikka esimerkiksi arvo nolla osalla DA. Osalla BC ϕ:lle otetaan mielivaltainen vakioarvo ϕ_0. Syntyvän reuna-arvotehtävän matemaattinen asetelma näkyy kuvassa (c). Ratkaisun löydyttyä — tavallisimmin elementti- tai differenssimenetelmällä — voidaan laskea virtaama leikkauksen BC läpi lausekkeesta



(c)

$$Q_0 = b\int_B^C v_n\, ds = -b\int_B^C \frac{\partial\phi}{\partial n}\, ds, \qquad \text{(f)}$$

jossa b on alueen leveys z-akselin suunnassa. Jos tehtävässä oli alunperin annettu virtaamaksi arvo Q, on vain kerrottava ensin saatu nopeuskenttä luvulla Q/Q_0. Tämä perustuu kuvan (c) tehtävän lineaarisuuteen; ratkaisu riippuu lineaarisesti arvosta ϕ_0. Jos paine tunnetaan esimerkiksi pisteessä D, Bernoullin yhtälön (4.3.130) vasen puoli voidaan laskea ($D \triangleq 1$) ja tämän jälkeen paine kaikkialla alueessa mm. mahdollisen kavitaatiovaaran selvittämiseksi.

Jos kuvan (a) seinämä CD korvataan vapaalla pinnalla, tehtävä vaikeutuu oleellisesti. Vapaan pinnan asema on lisätuntematon, joka pyritään sovittamaan iteratiivisesti paikoilleen käyttäen ehtona tietoa, että Bernoullin yhtälöstä laskettu paine tulee yhtyä vapaalla pinnalla ulkoiseen ilmanpaineeseen.

* Esimerkki 4.3.15. Virtafunktion käyttö. Tarkastellaan esimerkkiä 4.3.14 uudestaan nyt vain virtafunktioon liittyvien reunaehtojen kannalta.

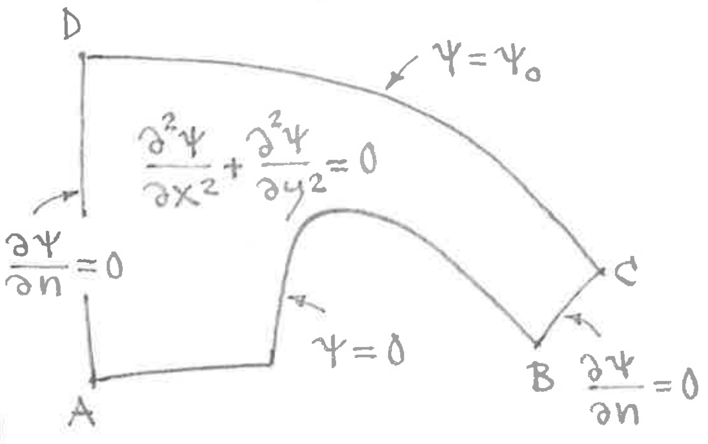
Reunaehdot

$v_t = 0$ reunalla BC ja DA (a)

merkitsevät kaavan (4.3.137) perusteella, että normaaliderivaatan $\partial\psi/\partial n$ tulee hävitä. Reunaehdot

$v_n = 0$ reunalla AB ja CD (b)

merkitsevät vastaavasti, että virtafunktion derivaatan reunan tangentin suunnassa tulee hävitä eli virtafunktion tulee olla vakio osilla AB ja CD. Esimerkiksi osalle AB ψ:n arvoksi voidaan ottaa vaikka nolla. Jos virtaama Q on annettu, voidaan kaavan (4.3.61) tulkinnan perusteella ottaa ψ:n arvoksi reunalla CD $\psi_0 = Q/b$.



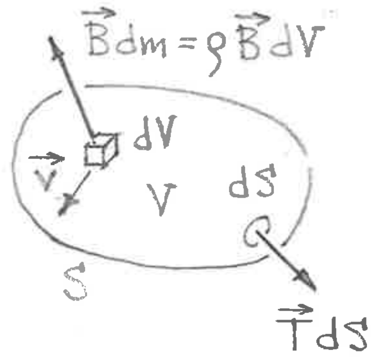
(a)

Kuva (a) esittää syntyvän reuna-arvotehtävän asetelman.

Taulukko 4.3.2 Liikemäärän taseen periaatteen eri muotoja.

Äärellinen muoto

Yleinen tapaus



Yleinen muoto

$$\vec F = \int \frac{\partial(\rho \vec v)}{\partial t} dV + \int \rho \vec v v_n dS. \qquad (1)$$

Pysyvä virtaus

$$\vec F = \int \rho \vec v v_n dS. \qquad (2)$$

Vakiotiheysneste

$$\vec F = \rho\left(\int \frac{\partial \vec v}{\partial t} dV + \int \vec v v_n dS\right). \qquad (3)$$

Pysyvä virtaus

$$\vec F = \rho \int \vec v v_n dS. \qquad (4)$$

Liikemäärän taseen periaate:

$$\vec F = \dot{\vec p}.$$

Ulkoisten voimien resultantti

$$\vec F = \vec F^B + \vec F^S,$$
$$\vec F^B = \int \rho \vec B dV,$$
$$\vec F^S = \int \vec T dS.$$

Liikemäärä

$$\vec p = \int \rho \vec v dV.$$

Otaksumaluettelo

O(5): $\vec B$ on konservatiivinen, jolloin

$$\vec B = -\nabla \Omega. \qquad (5)$$

O(5'): $\vec B = \vec g$, jolloin

$$\Omega = gh, \quad \vec B = -g\nabla h. \qquad (6)$$

Otaksumista (3) ja (5') seuraa vakiotiheysnesteen tapauksessa, että poikkileikkauksessa vaikuttava normaalijännitys

$$\sigma = -p \qquad (7)$$

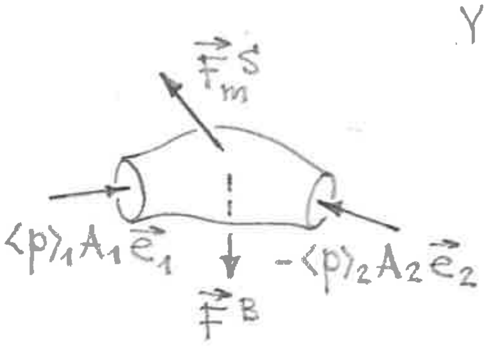
ja että poikkileikkauksessa vallitseva painejakautuma on hydrostaattinen, jolloin

$$\frac{p}{\rho} + gh = \text{vakio kussakin poikkileikkauksessa}, \qquad (8)$$

$$\langle p \rangle = p_c. \qquad (9)$$

Tuloksia (7), (8) ja (9) käytetään hyväksi likimääräisinä myös kokoonpuristuvassa virtauksessa. Indeksi c viittaa pintakeskiöön.

Standardikontrollialue, [O(1), O(2), O(3)]



Yleinen muoto

$$\vec F = \int \frac{\partial(\rho \vec v)}{\partial t} dV + -\beta_1 \rho_1 Q_1 \langle v\rangle_1 \vec e_1 + \beta_2 \rho_2 Q_2 \langle v\rangle_2 \vec e_2. \qquad (10)$$

Pysyvä virtaus

$$\vec F = \rho Q(\beta_2 \langle v\rangle_2 \vec e_2 - \beta_1 \langle v\rangle_1 \vec e_1). \qquad (11)$$

Liikemäärän korjaustekijä

$$\beta = \frac{\langle v^2\rangle}{\langle v\rangle^2} = \frac{\int v^2 dA}{A\langle v\rangle^2}.$$

Liikemäärävirta

$$\rho \int v^2 dA\, \vec e = \beta \rho Q \langle v\rangle \vec e.$$

Yleinen yksidimensioinen virtaus, [O(2), O(3), O(4)]

Yleinen muoto

$$\vec F = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}(\rho Q)\vec e ds + -\beta_1 \rho_1 Q_1 \langle v\rangle_1 \vec e_1 + \beta_2 \rho_2 Q_2 \langle v\rangle_2 \vec e_2. \qquad (12)$$

Differentiaaliyhtälömuoto

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F_e}{\Delta s} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho Q) + \frac{\partial}{\partial s}(\beta \rho Q \langle v\rangle). \qquad (13)$$

Yksikkövektori

$$\vec e = \vec e(s).$$

ΔF_e on Δs-pituisen kontrollialueen sisällä olevaan kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien resultantin komponentti vektorin

Taulukko 4.3.2 Jatkoa

<table>
<tr><th colspan="2">Äärellinen muoto</th></tr>
<tr><td>

Yleinen yksidimensioinen virtaus, [O(2),O(3),O(4)], jatkoa

Pysyvä virtaus

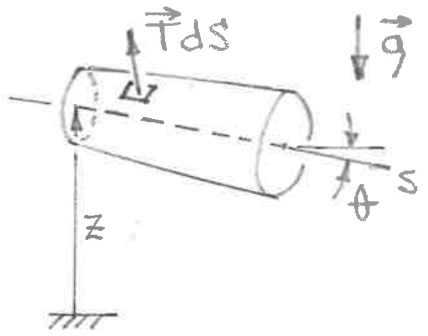
$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta F_e}{\Delta s} = \rho Q \frac{d}{ds}(\beta\langle v\rangle). \qquad (14)$$

</td><td>

$\vec{e}$ suunnalle.

</td></tr>
<tr><td>

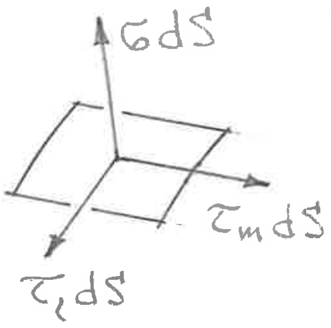
Putkivirtaus, [O(2),O(3),O(4),O(5')]



Liikeyhtälö

$$\frac{1}{A}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho Q)+\frac{\partial}{\partial s}(\beta\rho Q\langle v\rangle)\right]+ \frac{\partial\langle p\rangle}{\partial s}+\rho g\frac{dz}{ds}+\frac{4\tau_w}{d_h}=0. \qquad (15)$$

Vakiotiheysneste ja jäykkä seinämä



$$\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t}+\langle v\rangle\frac{\partial(\beta\langle v\rangle)}{\partial s}+ \frac{1}{\rho}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial s}+g\frac{dz}{ds}+\frac{4\tau_w}{\rho d_h}=0. \qquad (16)$$

Tavanomainen käyttökaava ($\beta=1$, $\tau_w = f\rho|\langle v\rangle|\langle v\rangle/8$)

$$\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t}+\langle v\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial s}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial s}+ g\frac{dz}{ds}+\frac{f}{2d_h}|\langle v\rangle|\langle v\rangle=0. \qquad (17)$$

Joustavan mallin teoriassa jatkuvuusyhtälö saa muodon

$$\frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial t}+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}(\langle v\rangle A)=0. \qquad (18)$$

</td><td>

Akselin kaltevuuskulma on θ, joten $\sin\theta=-\frac{dz}{ds}$.

Jännitys $\vec{T}=\tau_l\vec{e}_l+\tau_m\vec{e}_m+\sigma\vec{n}$.

Keskimääräinen seinämäleikkausjännitys $\tau_w=-\frac{1}{l_w}\int\tau_m dl$.

Konstitutiivisessa kaavassa $\tau_w=f\rho\frac{|\langle v\rangle|\langle v\rangle}{8}$ suure f on ns. kitkahäviökerroin.

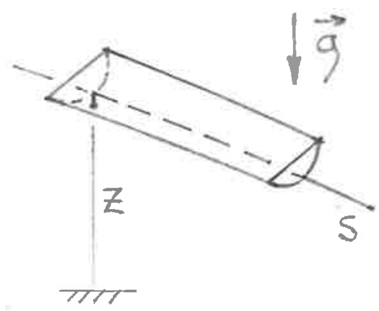
Yhtälöä (17) sovelletaan myös joustavan mallin teoriassa.

Termi c on paineaaltojen etenemisnopeus putkessa.

</td></tr>
<tr><td>

Avouomavirtaus, [O(2),O(3),O(4),O(5')]

Vakiotiheysnesteen liikeyhtälö



$$\frac{1}{A}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q+\frac{\partial}{\partial s}(\beta Q\langle v\rangle)\right]+ g\cos\theta\frac{\partial D}{\partial s}+g\frac{dz}{ds}+\frac{4\tau_w}{\rho d_h}=0 \qquad (19)$$

Tavanomainen käyttökaava ($\beta=1$, $\tau_w=f\rho|\langle v\rangle|\langle v\rangle/8$, $\cos\theta\approx 1$)

$$\frac{\partial D}{\partial s}+\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t}+\langle v\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial s}\right)+ \frac{dz}{ds}+S_f=0. \qquad (20)$$

Pysyvä virtaus

$$\frac{dD}{ds}+\frac{1}{g}\langle v\rangle\frac{d\langle v\rangle}{ds}+\frac{dz}{ds}+S_f=0. \qquad (21)$$

</td><td>

Termi $S_f=\frac{f}{2gd_h}|\langle v\rangle|\langle v\rangle$ on ns. kitkakaltevuus.

Avouomavirtauksen Frouden luku $Fr=\frac{\langle v\rangle}{\sqrt{gD_h}}$.

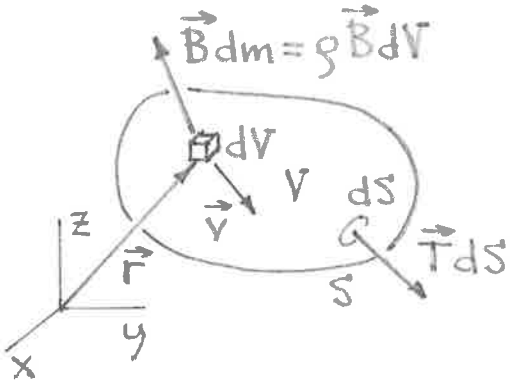
Verkasvirtaus, kun $Fr<1$.

Kiitovirtaus, kun $Fr>1$.

</td></tr>
</table>

* 4.4 Kulmaliikemäärän tase

Kulmaliikemäärän taseen periaatteessa (1.2.4) peruspisteenä voi olla kiinteä piste tai kappaleen massakeskiö, joista vain edellisellä on yleensä käyttöä kontinuumimekaniikassa. Kun peruspisteeksi otetaan koordinaatiston origo (kuva 4.4.1), yhtälö



Kuva 4.4.1 Kontinuumikappale.

$\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ tulee muotoon

$$\boxed{\int \varrho\vec{r}\times\vec{B}dV + \int \vec{r}\times\vec{T}dS = \frac{d}{dt}\int \varrho\vec{r}\times\vec{v}dV} \qquad (4.4.1)$$

Tästä saadaan sitten Reynoldsin lausetta soveltamalla ja tietyntyyppinen kontrollialue valitsemalla erilaisia versioita vastaavaan tapaan kuin lineaarisen liikemäärän periaatteen yhteydessä kohdassa 4.3.1. Tavallisimmat sovellutukset koskevat virtausta pumpuissa ja turbiineissa ja joudutaan yleensä valitsemaan inertiaalikoordinaatiston suhteen rotaatiossa oleva kontrollialue; ei jatketa tässä käsittelyä.

Vastaavasti johtamalla yhtälöstä (4.4.1) Reynoldsin ja Gaussin lauseiden avulla paikallinen muoto saadaan lopuksi parittaisten leikkausjännitysten yhtäsuuruutta koskevat kaavat (4.2.8).

4.5 Mekaanisen energian tase

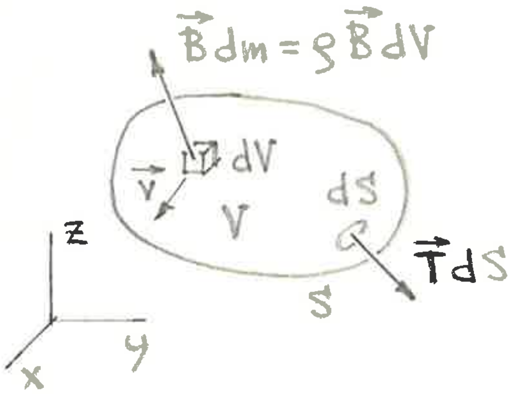
4.5.1 Yleistä

Tarkastellaan, minkälaisen muodon partikkelimekaniikassa johdettu ns. energian periaate (ks. kaava D (6.3.31))

$$\boxed{P = \dot{T}} \qquad (4.5.1)$$

saa kontinuumimekaniikassa. Kaava johdetaan manipuloimalla Cauchyn liikeyhtälöä, joten kysymyksessä ei ole uusi aksiooma. Kaavaa tullaan nimittämään tässä mekaanisen energian taseen periaatteeksi, jotta sen ero varsinaisen aksiooman (1.2.6) kanssa korostuisi. Kaavan erikoistapauksena saadaan ns. yleistetty Bernoullin yhtälö, jolla on tärkeä merkitys käytännössä.

Kappaleen liike-energia



$$\left.\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\int \rho v^2 dV, \\ &= \tfrac{1}{2}\int \rho \vec{v}\cdot\vec{v}\, dV, \\ &= \tfrac{1}{2}\int \rho (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\, dV \end{aligned}\right\} \quad (4.5.2)$$

Kuva 4.5.1 Kontinuumikappale.

Summa P on kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten ja sisäisten voimien yhteinen teho:

$$\boxed{P = P_{ext} + P_{int}.} \qquad (4.5.3)$$

Ulkoisten voimien teho P_{ext} koostuu (kuva 4.5.1) kappalevoimien tehosta P^B_{ext} ja pintavoimien tehosta P^S_{ext}:

$$\boxed{P_{ext} = P^B_{ext} + P^S_{ext},} \tag{4.5.4}$$

jossa

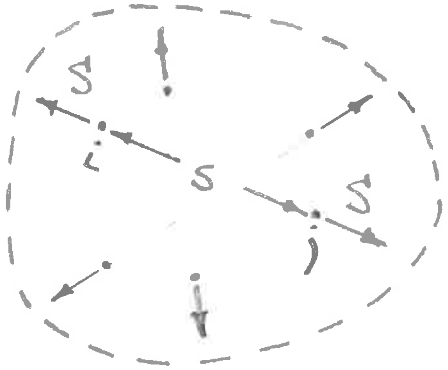
$$\left.\begin{aligned} P^B_{ext} &= \int \varrho \vec{B}\cdot\vec{v}\,dV, \\ &= \int \varrho (B_x v_x + B_y v_y + B_z v_z)\,dV \end{aligned}\right\} \tag{4.5.5}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} P^S_{ext} &= \int \vec{T}\cdot\vec{v}\,dS, \\ &= \int (T_x v_x + T_y v_y + T_z v_z)\,dS. \end{aligned}\right\} \tag{4.5.6}$$

Sisäisten voimien tehon P_{int} lauseke ei ole sitävastoin heti nähtävissä kontinuumin tapauksessa. Partikkelisysteemillä sen lausekkeeksi saatiin lopuksi (vrt. kaava D(6.3.13); $f \hat{=} S$, $\varrho \hat{=} s$)

$$P_{int} = \sum_{i<j} S\dot{s}, \tag{4.5.7}$$



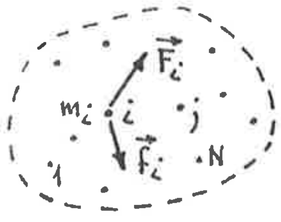
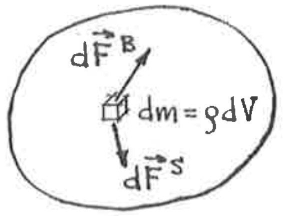
Kuva 4.5.2 Partikkelisysteemi.

jossa summa otetaan systeemin kaikkien partikkeliparien yli; kuvaan 4.5.2 on piirretty näkyviin selvyyden vuoksi vain osa pareittaisista voimista S.

Kontinuumin sisäisten (makroskooppisten) voimien tehon lauseke saadaan esille johtamalla kaava (4.5.1) vastaavasti kuin partikkelisysteemin yhteydessä. Johto on

* Taulukko 4.5.1 Mekaanisen energian taseen periaatteen johtaminen

* Taulukko 4.5.1 Mekaanisen energian taseen periaatteen johtaminen

Partikkelisysteemi	Kontinuumi
 $\vec{F}_i = \vec{B} m_i$ (1) $\vec{f}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \vec{f}_{ij}$ (2) Liikeyhtälö: $\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i$ (3)	 $d\vec{F}^B = \varrho \vec{B} dV$ (1') $d\vec{F}^S = \vec{f} dV$ (2') Liikeyhtälö/dV: $\varrho\vec{B} + \vec{f} = \varrho\vec{a}$ (3')
Kerrotaan kunkin partikkelin i liikeyhtälö (3) puolittain skalaarisesti partikkelin nopeudella $\vec{v}_i$ ja lasketaan kaikki näin saadut yhtälöt puolittain yhteen: $\sum \vec{F}_i\cdot\vec{v}_i + \sum \vec{f}_i\cdot\vec{v}_i = \sum m_i \vec{a}_i\cdot\vec{v}_i$ $= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum m_i \vec{v}_i\cdot\vec{v}_i.$ (4)	Kerrotaan kunkin kontinuumialkion liikeyhtälö (3') puolittain skalaarisesti alkion nopeudella $\vec{v}$ ja integroidaan näin saatu yhtälö puolittain yli kappaleen tilavuuden: $\int \varrho\vec{B}\cdot\vec{v}dV + \int \vec{f}\cdot\vec{v}dV = \int \varrho\vec{a}\cdot\vec{v}dV$ $= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int \varrho\vec{v}\cdot\vec{v}dV.$ (4')
Tämä tulos on mekaanisen energian taseen periaate $\boxed{P = P_{ext} + P_{int} = \dot{T}.}$ (5) Termi $P_{int} = \sum \vec{f}_i\cdot\vec{v}_i$ saadaan differentiaaligeometrista tarkastelua soveltamalla käyttökelpoisempaan muotoon $\boxed{P_{int} = \sum_{ij} S\dot{s}}$ (7)	Tämä tulos on myös mekaanisen energian taseen periaate $\boxed{P = P^B_{ext} + \int \vec{f}\cdot\vec{v}dS = \dot{T}}$ (5') mutta siinä ei näy selvästi jako $P = P_{ext} + P_{int}$. Termi $\int \vec{f}\cdot\vec{v}dV$ saadaan Gaussin lausetta soveltamalla käyttökelpoisempaan muotoon $\int \vec{f}\cdot\vec{v}dS = P^S_{ext} - \int \{\sigma\}^T\{d\}dV,$ (6') joten kontinuumilla $\boxed{P_{int} = -\int \{\sigma\}^T\{d\}dV.}$ (7')

esitetty taulukossa 4.5.1, jossa on vielä kerattu vertailun vuoksi partikkelisysteemin yhteydessä tarvittavat vastaavat vaiheet. Kaavan (4') oikea puoli on saatu Reynoldsin lauseen muodon (3.3.64) avulla ($f \triangleq \vec{v}\cdot\vec{v}$):

$$\begin{aligned}\dot{T} &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int \rho\vec{v}\cdot\vec{v}\,dV = \frac{1}{2}\int \rho\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})\,dV \\ &= \frac{1}{2}\int \rho(\vec{a}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{a}) = \int \rho\vec{a}\cdot\vec{v}\,dV.\end{aligned} \tag{4.5.8}$$

Termin $\int \vec{f}\cdot\vec{v}\,dV$ muuntaminen vaatii pitkähkön käsittelyn, joka on esitetty Liitteessä L.3. Saadaan lopputulos

$$\int \vec{f}\cdot\vec{v}\,dV = P^{S}_{ext} - \int \{\sigma\}^{T}\{d\}\,dV, \tag{4.5.9}$$

jonka sijoitus yhtälöön (5') ja vertailu yhtälön (5) kanssa antaa tulkinnan: kontinuumin sisäisten voimien tehon lauseke

$$\boxed{P_{int} = -\int \{\sigma\}^{T}\{d\}\,dV.} \tag{4.5.10}$$

Integrandia $\{\sigma\}^{T}\{d\}$ — sisäisten voimien miinusmerkkinen teho tilavuutta kohti — nimitetään tässä jännitystehon tiheydeksi (engl. stress power density). Ottamalla huomioon lyhennysmerkinnät

$$\left.\begin{aligned}\{\sigma\}^{T} &= [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}], \\ \{d\}^{T} &= [d_x, d_y, d_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}], \\ \{\sigma^*\}^{T} &= [\sigma^*_x, \sigma^*_y, \sigma^*_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}]\end{aligned}\right\} \tag{4.5.11}$$

sille saadaan mm. lausekkeet (vrt. esimerkki D 6.3.3, kaava (m))

$$\{\sigma\}^T\{d\} = \sigma_x d_x + \sigma_y d_y + \sigma_z d_z + $$
$$+ \tau_{yz} g_{yz} + \tau_{zx} g_{zx} + \tau_{xy} g_{xy}, \qquad (4.5.12)$$
$$= (-p+\sigma_x^*) d_x + (-p+\sigma_y^*) d_y + (-p+\sigma_z^*) d_z +$$
$$+ \tau_{yz} g_{yz} + \tau_{zx} g_{zx} + \tau_{xy} g_{xy},$$
$$= -p(d_x + d_y + d_z) + \sigma_x^* d_x + \sigma_y^* d_y + \sigma_z^* d_z +$$
$$+ \tau_{yz} g_{yz} + \tau_{zx} g_{zx} + \tau_{xy} g_{xy},$$
$$= -p\, \vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \{\sigma^*\}^T\{d\}. \qquad (4.5.13)$$

Tarkastellaan jännitystehon tiheyden lauseketta vielä tarkemmin tietyissä erikoistapauksissa:

(1) Ideaalinesteellä $\{\sigma^*\} = \{0\}$, joten

$$\{\sigma\}^T\{d\} = -p\, \vec{\nabla}\cdot\vec{v}. \qquad (4.5.14)$$

(2) Kokoonpuristumattomalla ideaalinesteellä on lisäksi $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$ ja siis

$$\{\sigma\}^T\{d\} = 0 \qquad (4.5.15)$$

eli sisäisten voimien teho häviää kokonaan.

(3) Newtonin nesteen tapauksessa saadaan sijoittamalla Stokesin kitkalain (4.2.15) mukaiset deviaatiojännityskomponenttien lausekkeet kaavaan (4.5.13) lopuksi tulos

$$\{\sigma\}^T\{d\} = -p\, \vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \mu\, \Phi, \qquad (4.5.16)$$

jossa suureen Φ, ns. dissipaatiofunktio (engl. dissipation function) ($[\Phi] = s^{-2}$) lauseke on (ks. L.4)

$$\Phi = 2\left(d_x^2 + d_y^2 + d_y^2\right) + g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2 + \qquad\qquad$$
$$- \frac{2}{3}\left(d_x + d_y + d_z\right)^2, \tag{4.5.17}$$
$$= 2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] +$$
$$+ \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 +$$
$$- \frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2. \tag{4.5.18}$$

(4) <u>Kokoonpuristumattomalla Newtonin nesteellä</u>

$$\{\sigma\}^T\{d\} = \mu\Phi, \tag{4.5.19}$$

jossa vielä dissipaatiofunktion lausekkeista (4.5.17) ja (4.5.18) häviää dilataationopeuteen liittyvä termi.

<u>Mekaanisen energian taseen periaate kontinuumille</u> saadaan nyt kirjoitettua kaavojen (4.5.4) ja (4.5.10) avulla täysin <u>yleisessä muodossa</u>

$$\boxed{P_{ext}^{B} + P_{ext}^{S} = \dot{T} + \int \{\sigma\}^T\{d\}\,dV} \tag{4.5.20}$$

sekä vielä erityisesti <u>Newtonin nestettä</u> koskevassa muodossa

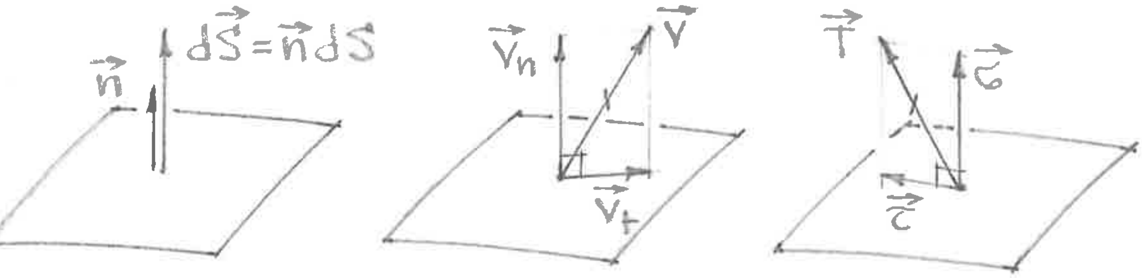
$$\boxed{P_{ext}^{B} + P_{ext}^{S} = \dot{T} - \int p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,dV + \int \mu\Phi\,dV,} \tag{4.5.21}$$

Ideaalinesteen tapaus saadaan ottamalla $\mu = 0$ ja kokoonpuristumattoman nesteen tapaus ottamalla $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$.

Nimitys dissipaatiofunktio selittyy seuraavasti.

Suureen Φ lausekkeen termejä järjestelemällä voidaan osoittaa (ks. L.4), että Φ on aina ei-negatiivinen. Kokoonpuristumattoman nesteen tapauksessa tämä näkyy suoraan kaavasta (4.5.17) ja tällöin vielä Φ on nolla vain, kun kaikki muodonmuutosnopeuskomponentit häviävät eli kun neste liikkuu kuten jäykkä kappale. Muulloin Φ on positiivinen. Koska todellisella nesteellä viskositeetti μ on samoin positiivinen, integraali $\int \mu\Phi dV$ on aina ei-negatiivinen ja normaalissa liikkeessä siis vielä positiivinen. (Jos $\mu =$ vakio, $\int \mu\Phi dV = \mu\int\Phi dV$). Integraali esittää nesteen sisäisen kitkan vaikutusta, joka pienentää jatkuvasti kappaleen mekaanista energiaa $E = T + V^*$. On kysymys ns. _palautumattomasta prosessista_ (engl. irreversible process). Jos virtauskenttä vaihdetaan vastakkaiseksi — siis $v_x \to -v_x$, $v_y \to -v_y$, $v_z \to -v_z$ — muiden suureiden pysyessä muuttumattomina, termien P^B_{ext}, P^S_{ext}, $\int p\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,dV$ nähdään vaihtavan merkkinsä, mutta _dissipaatiotermi_ $\int \mu\Phi dV$ ei muuta arvoaan. Dissipaatiotermiä nimitetään usein myös häviötermiksi tai _häviöksi_ (engl. loss). Dissipaatiossa kappaleen mekaanista energiaa muuttuu sisäenergiaksi, lämpötila kohoaa ja energiaa siirtyy lämpönä ympäristöön. Dissipaatio on yleensä tietyn tuloksen saavuttamisen kannalta haitallinen ilmiö; esimerkiksi tietyn pumpun tehon tarve alenisi, jos yhtälössä (4.5.21) voitaisiin asettaa $\mu = 0$.

Kehitetään yhtälöä (4.5.21) edelleen eteenpäin. Pintavoimien tehon lauseke (4.5.6) voidaan saattaa jatkossa hyödylliseen havainnolliseen muotoon. Kuvassa 4.5.3 esitettyjen



Kuva 4.5.3 Nopeus- ja jännitysvektorin normaali- ja tangentiaalivektorikomponentit.

merkintöjen perusteella

$$P_{ext}^{S} = \int \vec{T}\cdot\vec{v}\,dS = \int (\vec{\sigma}+\vec{\tau})\cdot(\vec{v}_n+\vec{v}_t)\,dS$$

$$= \int (\vec{\sigma}\cdot\vec{v}_n + \cancel{\vec{\sigma}\cdot\vec{v}_t} + \cancel{\vec{\tau}\cdot\vec{v}_n} + \vec{\tau}\cdot\vec{v}_t)\,dS \qquad (4.5.22)$$

eli

$$\boxed{P_{ext}^{S} = P_{ext}^{\sigma} + P_{ext}^{\tau},} \qquad (4.5.23)$$

jossa on käytetty merkintöjä

$$P_{ext}^{\sigma} = \int \vec{\sigma}\cdot\vec{v}_n\,dS = \int \sigma v_n\,dS, \qquad (4.5.24)$$

$$P_{ext}^{\tau} = \int \vec{\tau}\cdot\vec{v}_t\,dS \qquad (4.5.25)$$

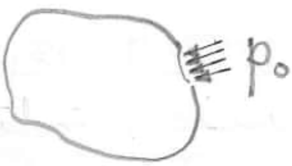
Normaalijännityskomponentti:

$$\sigma = -p + \sigma^*, \qquad (4.5.26)$$

jossa σ^* on siis kitkan eli viskoosisuuden aiheuttama deviaationormaalijännityskomponentti. Se jätetään usein paineen rinnalla huomiotta kaavassa (4.5.26), jolloin saadaan likikaava

$$P^{\sigma}_{ext} = -\int p v_n \, dS \qquad (4.5.27)$$

<u>Esimerkki 4.5.1.</u> Tasainen paine. Johdetaan kappaleen pintaan vaikuttavan tasaisen paineen p_0 (kuva (a)) synnyttämän tehon lauseke



(a)

Teho P on kaavan (4.5.24) perusteella tässä

$$P = \int \sigma v_n \, dS = -\int p_0 v_n \, dS = -p_0 \int v_n \, dS. \qquad (a)$$

Termille $\int v_n \, dS$ saadaan tulkinta seuraavasti. Kappaleen tilavuuden V lauseke on

$$V = \int dV. \qquad (b)$$

Sovelletaan tähän Reynoldsin lausetta (3.3.60) ($f \hat{=} 1$), jolloin saadaan

$$\dot{V} = \int v_n \, dS. \qquad (c)$$

Täten tasaisen paineen teho

$$P = -p_0 \dot{V} \qquad (d)$$

eli teho on yhtä suuri kuin paine kertaa kappaleen tilavuuden muutosnopeus miinusmerkkisenä. Vastaavasti paineen tekemä differentiaalinen työ

$$dW = -p_0 \, dV. \qquad (e)$$

Tämä tuloshan on tuttu lämpöopista kaasujen muutoksien tarkasteluista. Vakiotiheyskentällä termi $\int v_n \, dS$ häviää yhtälön (3.4.5) perusteella. <u>Täten vakiotiheyskentän</u>

virtausten yhteydessä voidaan toimia absoluuttisen paineen sijasta pelkästään mittapaineen avulla tekemättä virhettä tekotermien laskemisessa. Tämä tulos syntyy siis kirjoittamalla $p = p_0 + p_g$, jossa $p_g = p - p_0$ on mittapaine ja p_0 on valittu vakiovertailupaine.

4.5.2 Yleistetty Bernoullin yhtälö

Yleinen tapaus. Lähtökohdaksi otetaan yhtälö (4.5.21) täydennettynä kaavalla (4.5.23) eli saadaan

$$P^{B}_{ext} + P^{G}_{ext} + P^{\tau}_{ext} = \dot{T} - \int p\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,dV + \int \mu\Phi\,dV. \quad (4.5.28)$$

Tehdään oletus (5) eli että kyseessä on konservatiivinen voimakenttä, jolloin ulkoisten voimien potentiaalienergia on kaavan (2.1.32) mukaan

$$V^{*} = \int \rho\Omega\,dV. \quad [0(5)] \quad (4.5.29)$$

Kappalevoimien differentiaalinen työ $dW^{B}_{ext} = -dV^{*}$ (vrt. kaava D (5.2.11)) ja ajan differentiaalilla dt jakamalla saadaan tulos

$$\boxed{P^{B}_{ext} = -\dot{V}^{*}} \quad [0(5)] \quad (4.5.30)$$

Käytännössä vakiopainovoimakentän tapaus on kaikkein tavallisin, jolloin kaavan (2.1.33) mukaisesti saadaan

$$V^{*} = \int \rho g h\,dV. \quad [0(5')] \quad (4.5.31)$$

yhtälö (4.5.28) tulee kaavan (4.5.30) perusteella muotoon

$$P^{\sigma}_{ext} + P^{\tau}_{ext} = \frac{d}{dt}\int \varrho\left(\frac{1}{2}v^2 + \Omega\right)dV - \int p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,dV +$$

$$+\int \mu \Phi\, dV. \quad [O(5)] \quad (4.5.32)$$

* Barotrooppisen homogeenisen nesteen tapauksessa termiä $-\int p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,dV$ voidaan työstää edelleen. Saadaan

$$-\int p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,dV = -\int p\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dV =$$

$$-\int\left[\frac{\partial(pv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(pv_y)}{\partial y} + \frac{\partial(pv_z)}{\partial z}\right]dV + \int\left(v_x\frac{\partial p}{\partial x} + v_y\frac{\partial p}{\partial y} + v_z\frac{\partial p}{\partial z}\right)dV =$$

$$-\int(n_x p v_x + n_y p v_y + n_z p v_z)\,dS + \int\left(\frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t}\right)dV =$$

$$-\int p v_n\,dS + \int \frac{dp}{dt}dV - \int\frac{\partial p}{\partial t}dV. \quad (4.5.33)$$

Toisaalta

$$\frac{d}{dt}\int \varrho\Psi\,dV = \int\varrho\frac{d\Psi}{dt}dV = \int\varrho\frac{d\Psi}{dp}\frac{dp}{dt}dV =$$

$$= \int\varrho\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dt}dV = \int\frac{dp}{dt}dV. \quad (4.5.34)$$

Näin ollen termi

$$-\int p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,dV = \frac{d}{dt}\int\varrho\Psi\,dV - \int\frac{\partial p}{\partial t}dV - \int p v_n\,dS. \quad (4.5.35)$$

Kun tämä tulos sijoitetaan yhtälöön (4.5.32) ja otetaan huomioon Lausekkeet (4.5.24) ja (4.5.26), saadaan yhtälö

$$P^{\tau}_{ext} + \int \sigma^* v_n\,dS = \frac{d}{dt}\int\varrho\left(\frac{1}{2}v^2 + \Psi + \Omega\right)dV +$$

$$-\int\frac{\partial p}{\partial t}dV + \int\mu\Phi\,dV. \quad [O(5)] \quad (4.5.36)$$

*

Siirrytään käsittelemään jatkossa yksinkertaisuuden vuoksi vain vakiopainovoimakentässä olevaa vakiotiheysnestettä, jolloin $\Omega = gh$ ja $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$ ja yhtälö (4.5.32) yksinkertaistuu muotoon

$$P^{\sigma}_{ext} + P^{\tau}_{ext} = \frac{d}{dt}\int \varrho\left(\tfrac{1}{2}v^2 + gh\right)dV + \int \mu\Phi\, dV. \quad [0(5')] \quad (4.5.37)$$

Lisäksi voidaan tarvittaessa käyttää hyväksi tulosta $\partial\varrho/\partial t = 0$ sekä siirtää ϱ integraalien ulkopuolelle.

Soveltamalla Reynoldsin lausetta (3.3.60) yhtälön (4.5.37) oikean puolen ensimmäiseen termiin saadaan

$$P^{\sigma}_{ext} + P^{\tau}_{ext} = \int \frac{\partial}{\partial t}\left[\varrho\left(\tfrac{1}{2}v^2 + gh\right)dV + \right.$$

$$\left. + \int \varrho\left(\tfrac{1}{2}v^2 + gh\right)v_n\, dS + \int \mu\Phi\, dV. \quad (4.5.38)$$

eli

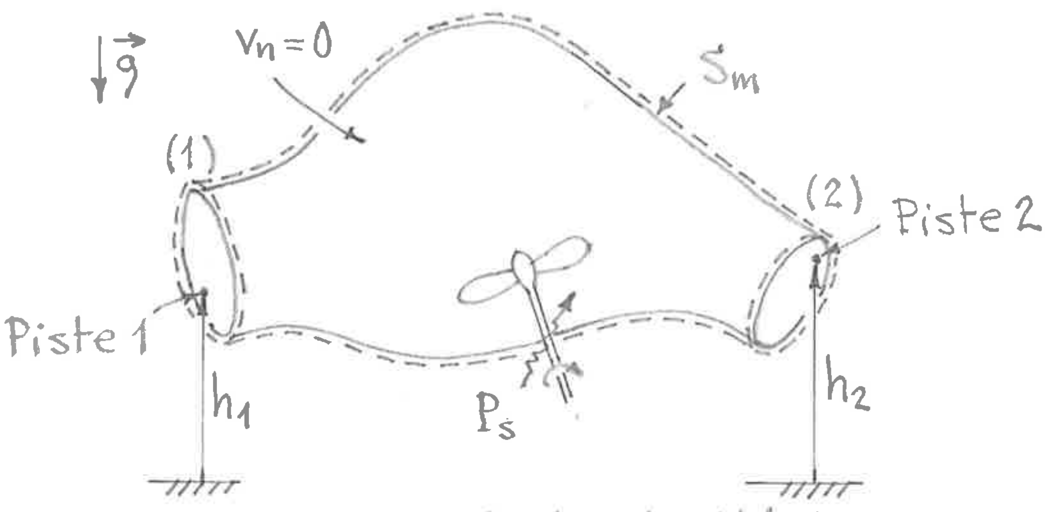
$$P^{\sigma}_{ext} + P^{\tau}_{ext} = \frac{1}{2}\int \varrho \frac{\partial v^2}{\partial t} dV + \int \varrho\left(\tfrac{1}{2}v^2 + gh\right)v_n\, dS +$$

$$+ \int \mu\Phi\, dV. \quad [0(5')] \quad (4.5.39)$$

Johdossa on käytetty hyväksi sitä, että suureet ϱ, g ja h eivät riipu ajasta. Tiheys ϱ saa olla yhtälössä (4.5.39) myös integraalien ulkopuolella.

<u>Standardikontrollialue</u>, [0(1), 0(2), 0(3), 0(5')]. Otaksuma (2) seuraa automaattisesti vakio-

tiheysmerteen mallista. Tarkastellaan jälleen jo



Kuva 4.5.4 Standardikontrollialue.

kohdissa 3.4.1 ja 4.3.1 esitetyn tyyppistä kontrollialuetta (kuva 4.5.4), mutta nyt lisäksi kontrollipinnan vaipan läpi voi kulkea turbiinin tai pumpun akseli, jota seikkaa kuvataan usein kuvassa esitetyn symbolisen potkurin avulla.

Kaavojen (3.4.6) ja (3.4.9) avulla yhtälö (4.5.39) saa ensin muodon

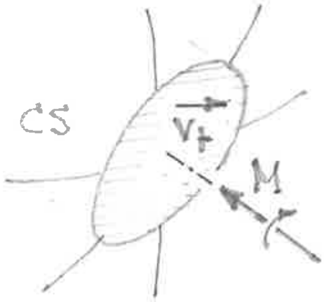
$$P^{\sigma}_{ext} + P^{\tau}_{ext} = \frac{1}{2}\int \rho \frac{\partial v^2}{\partial t} dV - \int_{A_1} \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + gh\right) v\, dA +$$

$$+ \int_{A_2} \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + gh\right) v\, dA + \int \mu \Phi\, dV. \qquad (4.5.40)$$

Vaipan yli otettu pintaintegraali häviää siis otaksuman (1) perusteella.

Tarkastellaan sitten termejä P^{σ}_{ext} ja P^{τ}_{ext} kaavojen (4.5.24) ja (4.5.25) avulla. Ne häviävät aina vaipalla, jos se yhtyy <u>kiinteään seinämään</u>. Tällöin nimittäin todellisella nesteellä $v_n = 0$

ja $v_t = 0$ sekä taas ideaalinesteellä $v_n = 0$ ja $\tau = 0$. Sen sijaan sillä kontrollipinnan alueella, joka muodostuu mahdollisen turbiinin tai pumpun akselin ajatellusta leikkauspinnasta (kuva 4.5.5), nopeuskomponentti v_t — ja jos kontrollipinta leikkaa akselin vinosti myös nopeuskomponentti v_n — on nollasta eroava akselin pyöriessä. Akselin leikkauksen kautta tapahtuvaa systeemin saamaa tehoa tullaan merkitsemään tässä tunnuksella



Kuva 4.5.5 Kontrollipinta akselin kohdalla.

$$P_s \tag{4.5.41}$$

ja sitä tullaan nimittämään <u>akselitehoksi</u> (engl. <u>shaft power</u>). Yleisemmin tähän termiin lasketaan myös mukaan mahdolliset muut kiinteästä aineesta olevien kontrollipinnan leikkaavien osien antamat tehot (vrt. kuva 3.3.12). Termi P_s saadaan edelleen periaatteessa lausekkeiden (4.5.24) ja (4.5.25) avulla, joissa vain nyt $\vec{\sigma}$ ja $\vec{\tau}$ ovat kiinteässä aineessa vallitsevia jännityksiä. Pyörivän akselin tapauksessa tulee

$$P_s = M\omega, \tag{4.5.42}$$

jossa M on ko. leikkauksessa vallitseva vääntömomentti ja ω akselin kulmanopeus. Turbiinilla P_s on negatiivinen ja pumpulla positiivinen.

Jäljellä on vielä termien P^{σ}_{ext} ja P^{τ}_{ext} tarkastelu poikkileikkauksissa 1 ja 2. Oletuksen (3) perusteella ensinnäkin $v_t = 0$ ja siis P^{τ}_{ext} häviää. Lisäksi kaavojen (4.3.94) perusteella $\sigma = -p$ eli deviaationormaalijännityskomponentti σ^* häviää. Täten edellä esitettyjen tulosten avulla pintavoimien yhteinen teho

$$P^{\sigma}_{ext} + P^{\tau}_{ext} = -\int_{A_1} p v_n dA - \int_{A_2} p v_n dA + P_s$$

$$= \int_{A_1} p v dA - \int_{A_2} p v dA + P_s. \qquad (4.5.43)$$

Sijoittamalla tämä lauseke yhtälöön (4.5.40) ja järjestelemällä hieman termejä saadaan tulos

$$\frac{1}{2}\int_{A_1} \rho v^3 dA + \int_{A_1} (p + \rho g h) v dA =$$

$$\frac{1}{2}\int_{A_2} \rho v^3 dA + \int_{A_2} (p + \rho g h) v dA =$$

$$+ \frac{1}{2}\int \rho \frac{\partial v^2}{\partial t} dV - P_s + \int \mu \Phi dV. \qquad (4.5.44)$$

Vielä kaavan (4.3.93) perusteella termi $p + \rho g h$ on vakio poikkileikkauksen alueella, joten se voidaan siirtää integraalimerkin ulkopuolelle.

Termi $1/2 \rho \int v^3 dA$ esittää poikkileikkauksen läpi kulkevaa <u>liike-energiavirtaa</u> (engl. kinetic energy flow rate) (W). On tapana määritellä ns. <u>liike-energian korjaustekijä</u>

(engl. kinetic energy correction factor) α kaavalla

$$\alpha = \frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle^3} = \frac{\frac{1}{A}\int v^3 dA}{\left(\frac{1}{A}\int v dA\right)^3} = \frac{\int v^3 dA}{A\langle v\rangle^3}. \quad [0(2), 0(3)] \qquad (4.5.45)$$

Tämän merkinnän avulla liike-energiavirta

$$\frac{1}{2}\varrho\int v^3 dA = \frac{1}{2}\varrho\alpha A\langle v\rangle^3 = \frac{1}{2}\alpha\varrho A\langle v\rangle\langle v\rangle^2$$
$$= \frac{1}{2}\alpha\varrho Q\langle v\rangle^2 = \frac{1}{2}\alpha w\langle v\rangle^2. \quad [0(2), 0(3)] \qquad (4.5.46)$$

Jos nopeusjakautuma poikkileikkauksessa on tasainen, kerroin $\alpha = 1$. Laminaarisessa putkivirtauksessa $\alpha = 2$, kun putken poikkileikkaus on ympyrä. Turbulenttisessa virtauksessa $\alpha \approx 1{,}07$; usein otetaan $\alpha = 1$.

Ottamalla edellä esitetty lisätulos ($p + \varrho g h =$ vakio) sekä merkintä (4.5.45) huomioon ja jakamalla yhtälö (4.5.44) vielä puolittain termillä $\varrho g Q = \varrho g \int v dA = \varrho g\langle v\rangle A$, joka on tässä sama vakio kummankin poikkileikkauksen kohdalla kaavan (3.4.25) johdosta, saadaan lopputulos

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha_1\frac{\langle v\rangle_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\varrho g} + h_1 = \quad [0(1), 0(2), 0(3), 0(5')] \\ &\alpha_2\frac{\langle v\rangle_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\varrho g} + h_2 + \frac{\int\frac{\partial v^2}{\partial t}dV}{2gQ} - \frac{P_s}{\varrho g Q} + h_l, \end{aligned}} \qquad (4.5.47)$$

jossa lyhennysmerkintä h_l, ns. <u>korkeushäviö</u> (engl. <u>h</u>ead <u>l</u>oss), on siis termi

$$\boxed{h_l = \frac{\int\mu\Phi dV}{\varrho g Q}.} \qquad (4.5.48)$$

Yhtälöä (4.5.47) nimitetään tässä yleistetyksi Bernoullin yhtälöksi (engl. generalized Bernoulli equation, engineering Bernoulli equation) tai Bernoullin yhtälöksi (muoto 3). Se koskee siis kahdessa valitun kontrollialueen poikkileikkauksissa sijaitsevissa pisteissä (ks. kuva 4.5.4) laskettuja suureiden p ja h arvoja ja ko. poikkileikkauksissa vallitsevia virtauksen keskinopeuksia.

Epästationaarisessa tapauksessa esiintyvä termi $\partial v^2/\partial t$ on yleensä vaikea arvioida, joten yhtälöä sovelletaankin tavallisesti vain pysyvän virtauksen yhteydessä. Pumpun tai turbiinin johdosta syntyvän termin P_s esiintyessä virtaus ei ole yleensä tarkkaan otettuna koskaan aivan stationaarista mutta usein kylläkin jaksollista. Jos tällöin käsitellään yhden tai useamman jaksonajan yli otettuja aikakeskiarvoja, integraali $\int \partial v^2/\partial t \, dV$ häviää ja yhtälöä voidaan soveltaa kuten stationaarisessa tapauksessa.

Yhtälön johto oli tietyistä yksinkertaistuksista huolimatta melko raskas. Eri otaksumien merkitykset johdon yhteydessä on kuitenkin syytä pitää mielessä, sillä käytännön hydrauliikka perustuu hyvin voimakkaasti yleistetyn Bernoullin yhtälön soveltamiseen. Soveltaminen taas on oleellisesti kiinni korkeushäviötermistä h_l. Kaava (4.5.48) osoittaa, että myös tämä termi on aina ei-negatiivinen (virtaus määriteltiin tapahtuvaksi suuntaan 1→2, jolloin Q on positiivinen) ja käytännössä positiivinen. Jos tarkka nopeusjakautuma tunnettaisiin, dissipaatiofunktio voitaisiin laskea kaavasta (4.5.18) ja h_l saataisiin selville integroimalla. Käytännössä näin ei kuitenkaan ole, vaan sen sijaan h_l joudutaan arvioimaan kokeellisten ja teoreettisten tutkimusten antamien kaavojen ja diagrammien avulla, joiden käyttöä selostetaan hydrauliikan oppikirjoissa ja opintojaksoissa sekä hieman myös tässäkin jatkossa.

Yleistetty Bernoullin yhtälö johdettiin lähtemällä liikkeelle Cauchyn liikeyhtälöistä, jotka olivat taasen saatu liikemäärän taseen periaatteen paikallisena muotona. Täten on ymmärrettävää, että liikemäärän taseen periaatteen äärellisten muotojen ja yleistetyn Bernoullin yhtälön käyttö johtavat usein käytännössä samanarvoisiin kaavoihin. Joskus kuitenkin toista näistä mahdollisuuksista on helpompi soveltaa kuin toista. Valinta tapahtuu sen mukaan onko ko. tapauksessa helpompaa arvioida systeemiin vaikuttavat voimat vai dissipaatio. Esimerkiksi vesikynnyksen käsittelyssä (ks. esimerkki 4.3.4) lyhyen kontrollialueen reunalla vaikuttavien leikkausjännitysten osuus voidaan katsoa vähäiseksi ja jättää liikemäärän taseen periaatetta käytettäessä huomiotta. Vesikynnyksessä käytännössä havaittu voimakas pyörteily merkitsee sitä vastoin suurta dissipaatiota, joten termin h_l osuus olisi vaikea arvioida, jos yritettäisiin soveltaa yleistettyä Bernoullin yhtälöä.

<u>Häviötermien laskeminen.</u> Tarkastellaan yhtälöä (4.5.47) <u>stationaarisessa</u> tapauksessa ja kirjoitetaan se muotoon

$$\alpha_1 \frac{\langle v \rangle_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 = \alpha_2 \frac{\langle v \rangle_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2 - h_s + h_l , \qquad (4.5.49)$$

jossa lyhennysmerkintä

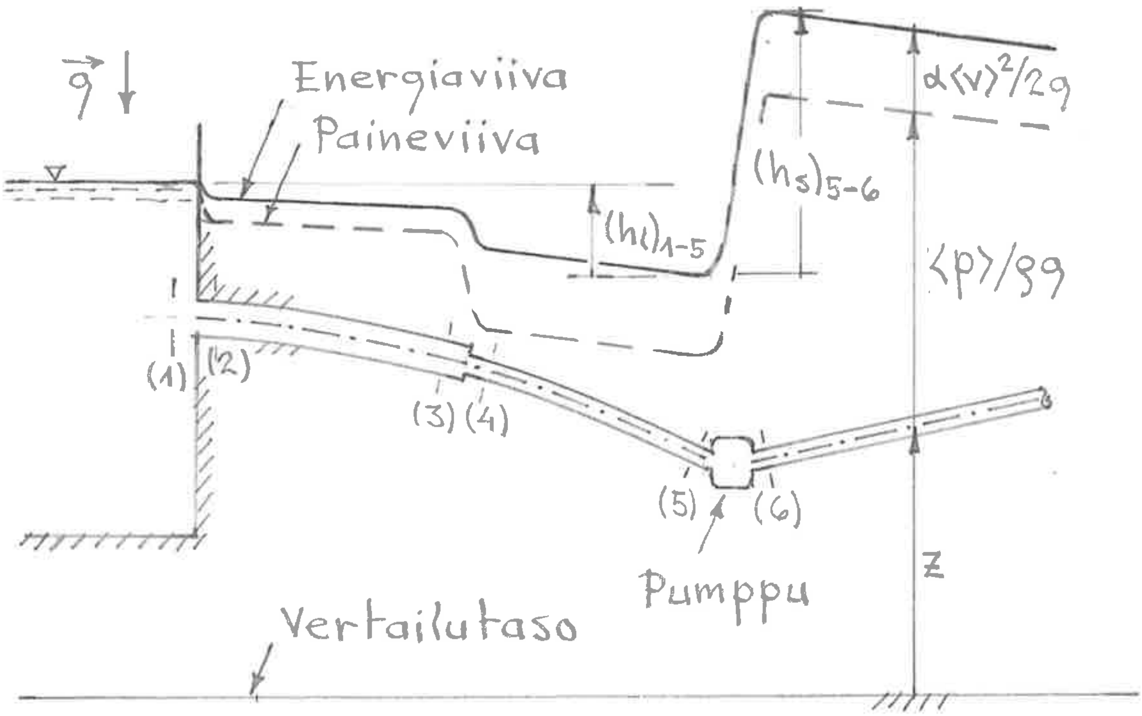
$$h_s = \frac{P_s}{\rho g Q} . \qquad (4.5.50)$$

Yhtälön eri termeillä on pituuden dimensio, joten niitä voidaan havainnollistaa samaan tapaan kuin tehtiin kuvassa 4.3.17. Kun yhtälöä sovelletaan <u>putkivirtauksessa</u>, paineen p ja korkeuden h arvot ajatellaan tavallisesti Lasketuiksi virtausakselilla, jolloin akselin korkeusasemaa tullaan merkitsemään tässä kuten edellä tunnuksella z ja yhtälö kirjoitetaan seuraavasti (merkintä p korvataan myös kuten edellä tunnuksella $\langle p \rangle$):

$$\boxed{\alpha_1 \frac{\langle v \rangle_1^2}{2g} + \frac{\langle p \rangle_1}{\rho g} + z_1 = \alpha_2 \frac{\langle v \rangle_2^2}{2g} + \frac{\langle p \rangle_2}{\rho g} + z_2 - h_s + h_l .} \qquad (4.5.51)$$

Korkeushäviön määrittämistä käsitellään kin tässä vain putkivirtauksen yhteydessä.

Tarkastellaan kuvan 4.5.6 esittämää esimerkkitapausta, joka pyrkii havainnollistamaan kaaviollisesti yhtälön (4.5.51) termejä. Todettakoon seuraavaa. Yhtälö voidaan varustaa indeksien 1 ja 2 sijasta mielivaltaisia poikkileikkauksia i ja j vastaa-



z = asemakorkeus (engl. elevation head, geometrical head)

$\langle p\rangle/(\varrho g)$ = painekorkeus (engl. pressure head, static head)

$\alpha\langle v\rangle^2/2g$ = nopeuskorkeus (engl. velocity head)

$\langle p\rangle/(\varrho g)+z$ = pietsometrinen korkeus (engl. piezometric head)

$\alpha\langle v\rangle^2/2g+\langle p\rangle/(\varrho g)+z$ = kokonaiskorkeus (engl. total head)

Energiaviiva (engl. energy line, total head line)

Paineviiva (engl. pressure line, hydraulic grade line, piezometric head line)

Vertailutaso (engl. datum)

Kuva 4.5.6 Yleistetyn Bernoullin yhtälön termejä putkivirtauksessa.

villa indekseillä i ja j ja samoin termit h_s ja h_l voidaan esittää tarvittaessa muodossa $(h_s)_{i-j}$ ja $(h_l)_{i-j}$. Energiaviiva laskeutuu aina virtaussuuntaan kuljettaessa (koska $h_l > 0$), paitsi mahdollisesti pumppujen kohdilla. Ihanteellisessa kitkattomassa virtauksessa energiaviiva olisi vaakasuorassa. Käytännössä on ollut vanha perinne, että asetetaan $\alpha = 1$ ja tästä aiheutuvat virheet otetaan huomioon korkeushäviötermissä h_l. Samoin turbulenssi tulee otetuksi automaattisesti huomioon, kun sovelletaan yhtälöä (4.5.51) ja määritetään h_l kokeellisesti.

Korkeushäviötermin h_l ajatellaan kertyvän ns. seinämäkitkahäviöistä h_f (engl. head loss caused by boundary resistance, frictional head loss) ja ns. paikallisista häviöistä h_p (engl. minor loss, loss in fittings) eli

$$\boxed{h_l = h_f + h_p\,.} \tag{4.5.52}$$

Termi h_f kertyy enemmän tai vähemmän suorista putken osista ja termi h_p kaikista virtaukseen venttiilien, mutkien, supistumien, laajentumien yms. häiriöitä aiheuttavien muutosten johdosta.

Suorassa vakiopoikkileikkauksen omaavassa putkessa seinämäkitkahäviö

$$\boxed{h_f = f\,\frac{L}{d_h}\,\frac{\langle v\rangle^2}{2g},} \tag{4.5.53}$$

jossa L on putken pituus, d_h putken hydraulinenhalkaisija ja f Moodyn kitkahäviökerroin. Bernoullin yhtälö (4.5.51) saa tässä tapauksessa muodon ($\langle v\rangle_1 = \langle v\rangle_2$)

$$\frac{\langle p\rangle_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\langle p\rangle_2}{\rho g} + z_2 + h_l \qquad (4.5.54)$$

ja vertaamalla tätä esimerkin 4.3.5 yhtälöihin (f) ja (g) havaitaan kaavan (4.5.53) oikeellisuus ainakin ympyräpoikkileikkauksen tapauksessa.

Kukin paikallinen häviö esitetään muodossa

$$\boxed{h_p = \xi \frac{\langle v\rangle^2}{2g},} \qquad (4.5.55)$$

jossa yleensä kokeellisesti saadun kertoimen ξ arvo riippuu tapauksesta. Jos poikkileikkauspinta-ala muuttuu ko. häiriön kohdalla, on erikseen mainittava kummalta puolelta häiriötä nopeus on otettava.

Yleisesti tietyltä virtausväliltä kertyvä korkeushäviö voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$h_l = \frac{1}{2g}\left(\sum f_i \frac{L_i}{(d_h)_i}\langle v\rangle_i^2 + \sum \xi_j \langle v\rangle_j^2\right), \qquad (4.5.56)$$

jossa i viittaa suoriin putkiosuuksiin ja j häiriökohtiin.

Taulukossa 4.5.2 on esitetty kitkahäviökertoimen f määrittämistä. Kaavat on kehitetty ympyräpoikkileikkaukselle, mutta niitä voidaan soveltaa myös tapauksissa, joissa poikkileikkauksen muoto ei ole liian soikea tai epäsäännöllinen. Karkeana ohjeena voidaan

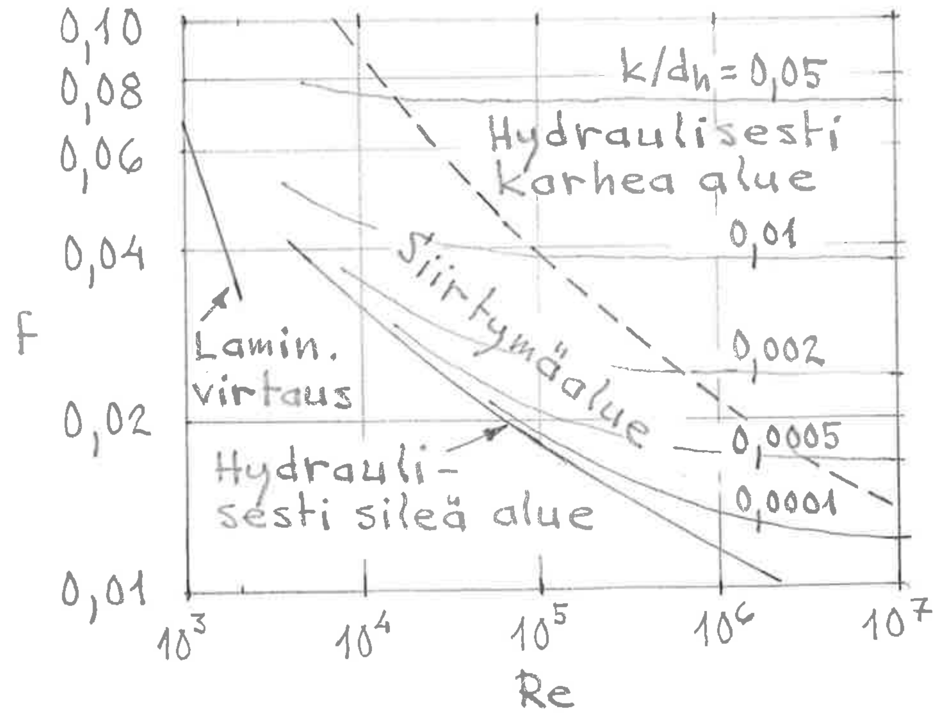
Taulukko 4.5.2 Kitkahäviökerroin f (23), (29)

Laminaarinen virtaus	$f = \dfrac{64}{Re}$ (Re < 2100) (1)
Turbulenttinen virtaus, hydraulisesti sileä alue	$f = \dfrac{0{,}316}{Re^{0{,}25}}$ $(4000 < Re < 10^5)$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{f}} = 2\log(Re\sqrt{f}) - 0{,}8$ (Re > 4000) (3)
Turbulenttinen virtaus, siirtymäalue hydraulisesti sileän ja karhean alueen välillä	$\dfrac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\dfrac{k/d_h}{3{,}7} + \dfrac{2{,}52}{Re\sqrt{f}}\right)$ (4) (Re > 4000) $= 1{,}14 - 2\log\left(\dfrac{k}{d_h} + \dfrac{9{,}35}{Re\sqrt{f}}\right)$ (4')
Turbulenttinen virtaus, hydraulisesti karhea alue	$\dfrac{1}{\sqrt{f}} = 1{,}14 - 2\log\left(\dfrac{k}{d_h}\right)$ (5) (Re > 4000) $= 1{,}14 + 2\log\left(\dfrac{d_h}{k}\right)$ (5')
Kaavoja (4) ja (4') voidaan soveltaa koko turbulenttisen virtauksen alueella. Reynoldsin luku $Re = \dfrac{\rho d_h \langle v \rangle}{\mu} = \dfrac{d_h \langle v \rangle}{\nu}$ (6)	**Joitakin ekvivalentin karheuden k arvoja** Vedetty putki (messinki, lasi) 0,0015 mm Teräs 0,05 Valurauta 0,45 Betoni 0,3...3 Niitattu teräs 0,9...9

pitää, että ehdon $\sqrt{A}/d_h \leq 2$ tulee olla voimassa (4). Tämä edellämainittu koskee turbulenttista virtausta. Laminaarisessa tapauksessa f riippuu voimakkaasti poikkileikkauksen muodosta, kuten voidaan todeta jo esimerkkien 4.3.9 ja 4.3.10 tulosten perusteella; ympyräpoikkileikkaukselle $f = 64/Re$ ja hyvin leveälle suorakaidepoikkileikkaukselle $f = 96/Re$.

Suure k ([k] = m) on ns. ekvivalentti karheus (engl. roughness), joka ottaa huomioon putken seinämässä esiintyvien pienten epäsäännöllisyyksien vaikutuksen. Karheuden vaikutusta tutki ensimmäisenä järjestelmällisesti Nikuradse (v. 1933). Hänen kokeissaan muuten sileän putken pintaan liimattiin tasarakeisia halkaisijan k omaavia hiekkajyväsiä ja suoritettiin suureen f mittauksia. Kokeet osoittivat, että f riippuu vain Reynoldsin luvusta Re ja ns. suhteellisesta karheudesta (engl. relative roughness) k/d_h. Turbulenttisessa virtauksessa voidaan erottaa kolme erityyppistä aluetta. Ns. hydraulisesti sileässä alueessa (Itse asiassa tämä on käyrä f, Re-tasossa; ks. kuva 4.5.7, jossa taulukon 4.5.2 kaavat on esitetty graafisessa muodossa pitäen suhteellista karheutta k/d_h käyräparametrina) f ei riipu suhteellisesta karheudesta ja sanotaan, että putki on hydraulisesti sileä (engl. hydraulically smooth). Ns. hydraulisesti karheassa alueessa f ei riipu Reynoldsin luvusta. Ns. siirtymäalueessa f riippuu sekä Reynoldsin luvusta että suhteellisesta karheudesta.

Näitä tuloksia selitetään seuraavasti. Turbulenttisessa virtauksessa esiintyy aina aivan seinämän läheisyydessä ohut kerros, jossa virtaus on laminaarista, ns. laminaarinen ala-



Kuva 4.5.7 Moodyn käyrästö kaaviollisesti.

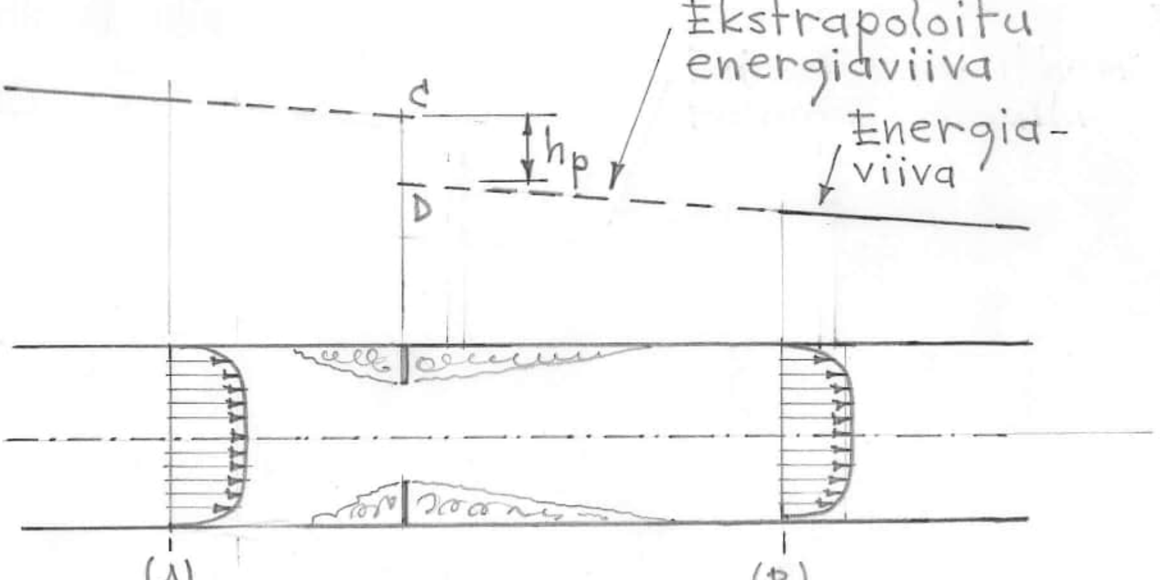
kerros (engl. Laminar sublayer), koska seinämä estää turbulenttiseen virtaukseen liittyvän heilahtelun. Jos pinnan karheus on niin pientä, että kaikki epätasaisuudet jäävät laminaarisen alakerroksen sisään, suhteellisen karheuden arvolla ei ole merkitystä ja turbulenttisen virtauksen kannalta kyseessä on samanarvoinen tilanne kuin jos putki olisi täysin sileä. Samoin laminaarisessa tapauksessa putken karheudella ei ole merkitystä. Kun Reynoldsin luku tietyllä putkella kasvaa, laminaarinen alakerros ohenee, epätasaisuudet tunkeutuvat turbulenttisen virtauksen puolelle vaikuttaen siihen ja saavutetaan siirtymäalue. Riittävän suurella Reynoldsin luvulla f tulee vakioksi ja ollaan hydraulisesti karheassa alueessa.

Taulukon 4.5.2 kaavat (3) ja (4) ovat f:n suhteen implisiittisiä ja joudutaan iteroimaan. Helpommin tulos saadaan graafisesti, jos käytettävissä on kuvan 4.5.7 kaaviollista esitystä täydellisempi Moodyn käyrästö. Laminaarisen ja turbulenttisen virtauksen välialueella $2100 < Re < 4000$ kitkahäviökertoimelle ei voida esittää mitään yksikäsitteisiä arvoja.

Käytännössä esiintyvien pintojen karheutta ei voida kuvata tarkasti vain yhden parametrin k/d_h avulla, koska kyseessä on selvästi Nikuradsen koejärjestelyä monimutkaisempi tilanne. Pintojen k-arvot määritetäänkin tavallisesti mittaamalla häviö ja vertaamalla tulosta hiekkakarkeutetulla putkella saatuun tulokseen, jolloin saadaan selville ns. ekvivalentti karheus k. Taulukossa 4.5.2 ja kuvassa 4.5.6 esitetyt tulokset eivät liitykään suoraan Nikuradsen koetuloksiin, vaan niitä on modifioitu enemmän käytäntöä vastaaviksi. Suureesta k esitetyt arviot ovat ymmärrettävästi melko epämääräisiä, mutta on huomattava, että f ei riipu kuitenkaan kovin voimakkaasti k:sta.

Kaavan (4.5.53) esittämä seinämäkitkahäviö on siis suoraan verrannollinen putken pituuteen ko. välillä. Tämä tulos selittää kuvassa 4.5.6 näkyvän energiaviivan likimain suoraviivaisen kaltevan kulun kohdissa, joissa putki on ominaisuuksiltaan muuttumaton.

Siirrytään tämän jälkeen paikallisten häviöiden (4.5.55) käsittelyyn. Tarkastellaan esimerkkinä

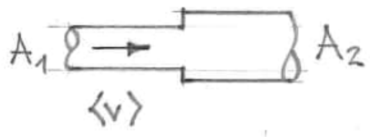
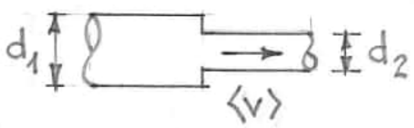


Kuva 4.5.8 Virtauksen häiriökohta.

kuvan 4.5.8 esittämän paikallisen supistuman aiheuttamaa virtaustilan häiriötä. On ilmeistä, että tietyllä välillä AB virtausta ei voida pitää riittävällä tarkkuudella yhdensuuntaisvirtauksena, joten tällä välillä yhtälön (4.5.51) termeillä ei ole täsmällistä merkitystä. Ottamalla poikkileikkaukset riittävän etäälle häiriökohdasta yhtälö on kuitenkin käytettävissä. Häviöllä $h_L = \int \mu \Phi dV/(\rho g Q)$ on ko. välillä luonnollisesti tietty yksikäsitteinen arvo, mutta sen sijaan kaavan (4.5.52) esittämä jako ei ole täysin selvä. Jos suoritetaan kuvan 4.5.8 mukainen koejärjestely, energiaviivat voidaan piirtää näkyviin mittauksista saatujen tulosten perusteella riittävän kaukana häiriöstä. Tämän jälkeen ekstrapoloidaan energiaviivat kummaltakin puolelta, kunnes ne kohtaavat häiriökohdan teoreettisen keskukohdan ja määritellään h_p pisteiden C ja D pystysuorana etäisyytenä. Tämä siis merkitsee, että seinämäkitkahäviö lasketaan suorille putken osille ajatellen virtauksen tapahtuvan häiriöttömänä aina teoreettiseen keskipisteeseen saakka. Jos häiriökohtia sijaitsee verrattain lähekkäin niin, ettei virtaus ehdi niiden välillä rauhoittua yhdensuuntaisvirtaukseksi, erillisistä kokeista mitattujen termien h_p summeeraaminen ei täten tuota enää välttämättä riittävän tarkkaa tulosta. Kuvassa 4.5.6 energia- ja paineviivojen muutokset häiriöiden kohdilla on esitetty epämääräisinä viivoina, mutta tavallisesti ne esitetään kuvan 4.5.8 mukaisesti äkillisinä hyppäyksinä.

Taulukkoon 4.5.3 on kerätty joitakin kaavan (4.5.55) kertoimen ξ – ns. häviökertoimen (engl. Loss coefficient) arvoja. Ne vaihtelevat melko

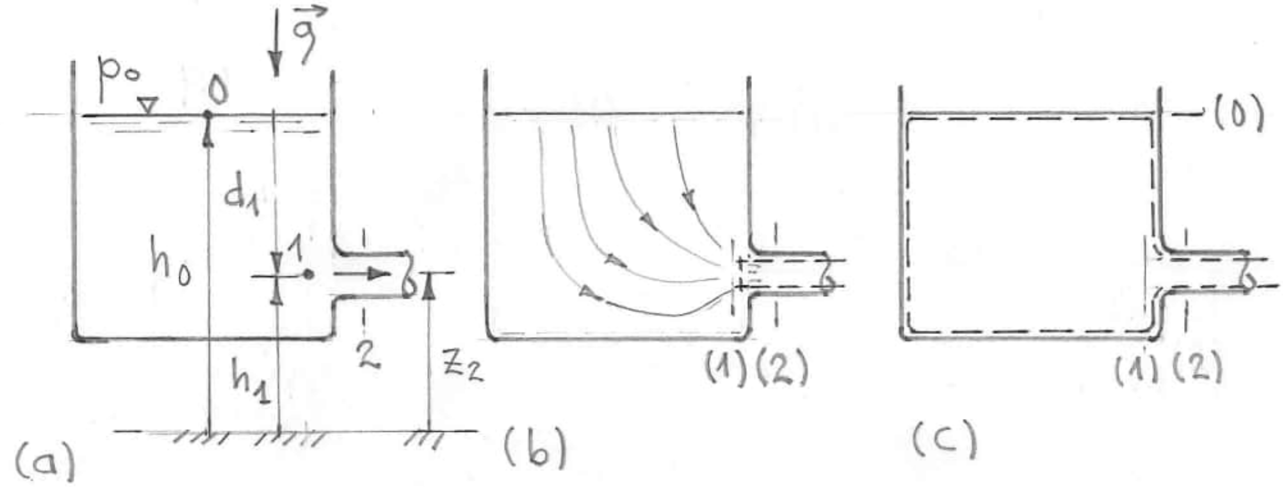
Taulukko 4.5.3 Häviökertoimen ζ arvoja (17), (30)

Äkillinen laajentuma 		$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$
Äkillinen supistuma 	d_2/d_1 0,8 0,6 0,4 0,2 0,0	ζ 0,13 0,28 0,38 0,45 0,50
Taite (90°) Sulkuventtiili (avoin) Palloventtiili (avoin)		$\zeta = 0{,}9$ $\zeta = 0{,}2$ $\zeta = 10$

paljon eri lähteissä. Kertoimien arvot riippuvat periaatteessa häiriön geometriasta, pinnan suhteellisesta karheudesta ja Reynoldsin luvusta. Käytännössä kertoimet ovat tietyllä geometrialla miltei vakioita, kun Reynoldsin luku on kohtuullisen suuri. Taulukon arvot vastaavat tätä tapausta. Todettakoon, että häiriökohtien juohevammalla muotoilulla häviöitä voidaan pienentää oleellisesti.

Putkivirtaus alkaa tavallisesti tietystä altaasta tai säiliöstä ja päättyy vastaavasti purkautumisella toiseen altaaseen tai säiliöön tai sitten suihkuna erilajiseen nesteeseen (tavallisesti vesisuihku ilmaan). Virtauksen alkuun ja loppuun liittyvät käsitteet <u>mieluhäviö</u> (engl. inlet loss) ja <u>purkautumishäviö</u> (engl. exit loss) vaativat lisäkäsittelyä.

Esimerkki 4.5.2. Virtaus säiliöstä putkeen. Tarkastellaan nielunhäviöiden käsittelyä kuvan (a) mukai-



(a) Säiliö ja siitä lähtevä putkivirtaus. (b) Eräs kontrollialueen valinta (c) Toinen kontrollialueen valinta.

sessa esimerkkitapauksessa. Kuvissa (b) ja (c) on esitetty kaksi mahdollisuutta valita yleistetyn Bernoullin yhtälön yhteydessä käytettävän kontrollialueen alkuosa. Ensimmäisessä tapauksessa kontrollialue alkaa heti ennen nielua; poikkileikkaus 1. Voisi ajatella, että kun säiliö on suuri mitoiltaan putken poikkileikkausmittaan verrattuna, neste on miltei lepotilassa ja vallitsee hydrostaattinen painejakautuma. Saataisiin $\langle p\rangle_1 \approx p_0 + \varrho g d_1$. Tämä on kuitenkin huono approksimaatio. Havainnot ovat osoittaneet, että virtaus säiliössä on tällaisessa tapauksessa miltei kitkatonta ja pyörteetöntä aina putken suuaukolle saakka. Täten säiliössä voidaan soveltaa Bernoullin yhtälöä (muotoa 1 tai 2) kahden mielivaltaisen pisteen suhteen. Esimerkiksi yhtälö (4.3.130) antaa pisteille 0 ja 1 yhteyden

$$\frac{\cancel{v_0^2}}{2g} + \frac{p_0}{\varrho g} + h_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\varrho g} + h_1, \tag{a}$$

$$p_1 = p_0 + \varrho g(h_0 - h) - \frac{v_1^2}{2g},$$

$$\langle p \rangle_1 \approx p_0 + \varrho g d_1 - \frac{v_1^2}{2g} \tag{b}$$

Tämä paineen arvo on realistisempi. On siis vielä otaksuttu, että $v_0 \approx 0$. Yleistettyä Bernoullin yhtälön kokonaiskorkeuden arvoksi saadaan leikkauksessa 1 yhtälön (a) perusteella

$$\alpha_1 \frac{\langle v \rangle_1^2}{2g} + \frac{\langle p \rangle_1}{\varrho g} + z_1 \approx \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\varrho g} + h_1 = \frac{p_0}{\varrho g} + h_0, \tag{c}$$

jossa nyt oikean puolen arvo tunnetaan. Jos toimitaan mittapaineen avulla pitäen vapaalla pinnalla olevaa painetta p_0 referenssipaineena, kokonaiskorkeus leikkauksessa 1 on yhtä kuin vapaan pinnan korkeusasema h_0. Kuvan 4.5.6 energiaviiva on piirretty juuri näin alkaen.

Putken alussa syntyvä mielukävió $h_p = \xi \langle v \rangle^2 / 2g$ ilmaisee siis häviön lyhyellä välillä $1 \to 2$; otetaan $\langle v \rangle = \langle v \rangle_2 = \langle v \rangle_1$. Hyvin muotoillussa aukossa $\xi \approx 0{,}05$, äkillisesti alkavassa aukossa $\xi \approx 0{,}5$.

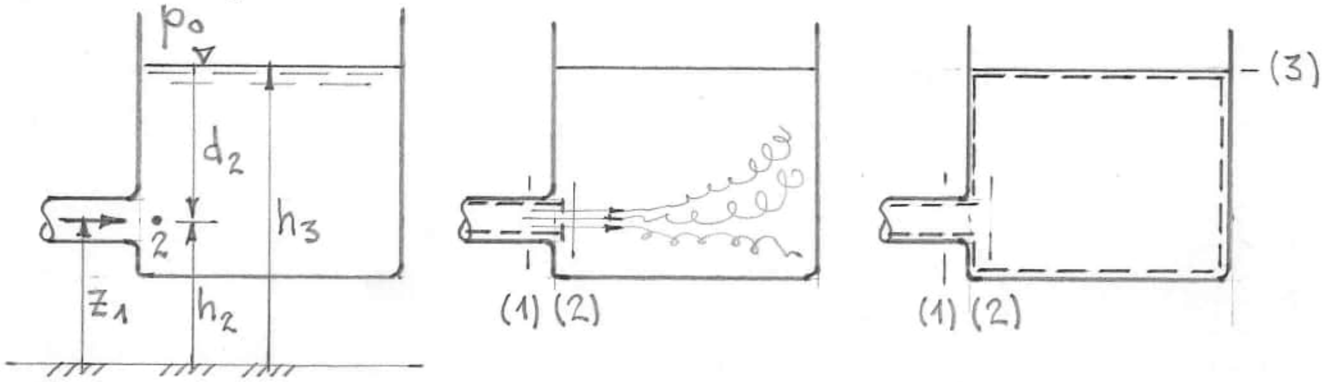
Usein yleistettyä Bernoullin yhtälöä sovelletaankin ajatellen kuvan (c) tapaan vapaa pinta ensimmäiseksi poikkileikkaukseksi. Koska sillä

$$\alpha_0 \frac{\langle v \rangle_0^2}{2g} + \frac{\langle p \rangle_0}{\varrho g} + z_0 \approx 0 + \frac{p_0}{\varrho g} + h_0 = \frac{p_0}{\varrho g} + h_0, \tag{d}$$

kokonaiskorkeus tulee samaksi kuin leikkauksessa 1. Myös muu käsittely tulee samaksi kuin edellisessä tapauksessa, koska välillä

0–1 $(h_l)_{0-1} \approx 0$ säiliössä tapahtuvan lähes kitkattoman virtauksen johdosta.

Esimerkki 4.5.3. Purkautuminen. Tarkastellaan vastaavantyyppistä tapausta kuin edellisessä



(a) (b) (c)

(a) Säiliö ja siihen saapuva putkivirtaus. (b) Eräs kontrollialueen valinta. (c) Toinen kontrollialueen valinta.

esimerkissä. Mitä ehtoja syntyy kuvan (b) esittämässä poikkileikkauksessa 2? Havainnot ovat osoittaneet, että virtauksen purkautuminen säiliöön tapahtuu suihkuna, joka vähitellen leviää ja hajoaa voimakkaasti pyörteillen. Virtauskenttää ei siis saada edellisen esimerkin kentästä vaihtamalla vain virtausnopeuden suunnat. (Tulitikku voidaan sammuttaa puhaltamalla mutta ei henkeä vetämällä (31).) Suihkussa paine on havaintojen ja myös laskelmien perusteella sama kuin paine ympäristössä suihkun reunan kohdalla. Kyseessähän on aluksi likimain yhdensuuntaisvirtaus. Poikkileikkauksen 2 yläpuolella vallitsee likimain hydrostaattinen painejakautuma — voidaan karkeasti ajatella että suihku voitaisiin korvata ympäröivällä putkella, jolloin tila sen ympärillä pysyisi samana kuin lepotilassa – ja saadaan nyt realistinen otaksuma

$$\langle p\rangle_2 \approx p_0 + \varrho g d_2 , \tag{a}$$

jota käytetään hyväksi yleistetyn Bernoullin yhtälön reunaehtona.

Ns. purkautumishäviö $h_p = \zeta \langle v\rangle^2/(2g)$, jossa otetaan tavallisesti $\zeta = 1$. On tärkeä huomata, että purkautumishäviötä ei tule ottaa mukaan, jos kontrollialue lopetetaan poikkileikkaukseen 2, sillä neste virtaa juokevana suihkuna poikkileikkausten 1 ja 2 välisen osuuden ilman oleellisia häiriöitä. (Näin ei luonnollisestikaan ole enää, jos aukon pinta-alassa on samalla muutoksia.) Nieluhäviön syntyminen selittyy sillä, että aukon kohdalla eri suunnilta saapuvien virtaviivojen täytyy muuttaa lyhyellä matkalla nopeasti suuntaansa ja tämä synnyttää pyörteilyä.

Purkautumishäviökertoimen $\zeta = 1$ valinta on tarkoitettu käytettäväksi kuvan (c) kontrollialueen yhteydessä, jolloin vapaa pinta on viimeinen poikkileikkaus. Tämä havaitaan kirjoittamalla yleistetty Bernoullin yhtälö välille 2–3:

$$\alpha_2 \frac{\langle v\rangle_2^2}{2g} + \frac{\langle p\rangle_2}{\varrho g} + z_2 = \alpha_3 \frac{\cancel{\langle v\rangle_3^2}}{2g} + \frac{\langle p\rangle_3}{\varrho g} + z_3 + (h_l)_{2-3} ,$$

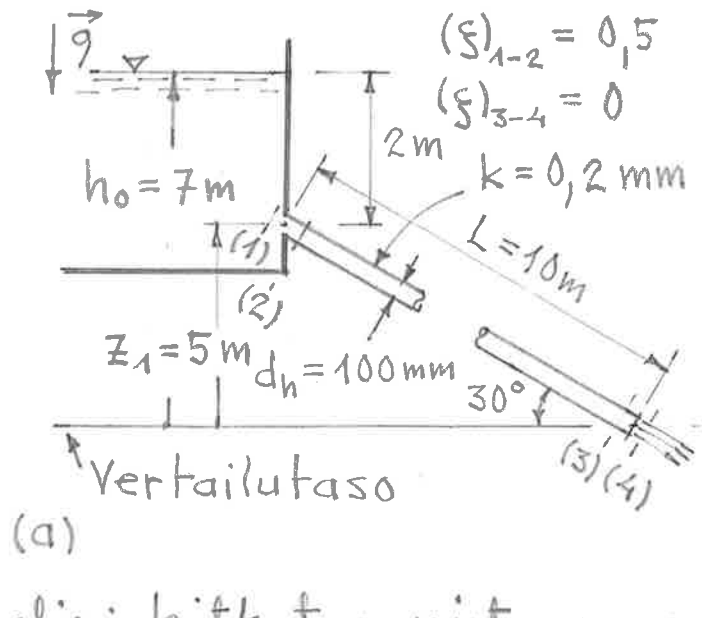
$$\alpha_2 \frac{\langle v\rangle_2^2}{2g} + \frac{p_0}{\varrho g} + d_2 + h_2 = \frac{p_0}{\varrho g} + h_2 + d_2 + (h_l)_{2-3} ,$$

$$(h_l)_{2-3} = \alpha_2 \frac{\langle v\rangle_2^2}{2g} . \tag{b}$$

On siis otaksuttu, että vapaa pinta on likimain lepotilassa! Kaavan (b) perusteella purkautumishäviökerroin $\xi = \alpha \approx 1$. Täten purkautumishäviö ei ole varsinaisessa putkessa syntyvä paikallinen häviö kuten mieluhäviö, vaan se syntyy välillä 2-3 tapahtuvasta dissipaatiosta, jossa putkesta saapuvien nestealkioiden liike-energia vähitellen häviää kokonaan kitkan johdosta muuttuen sisäenergiaksi.

Jos suihku purkautuu toisenlaiseen nesteeseen, ehdoksi suuaukon kohdalla saadaan edelleen, että paine suihkussa on sama kuin ympäristön paine, kun kyseessä on subsooninen virtaus.

Esimerkki 4.5.4. Virtaaman määrittäminen. Kuva (a) esittää tapausta, jossa vesi purkautuu suuresta altaasta suoran putken kautta suihkuna ulos. Määritetään virtaama Q.



(a)

Ratkaisu täytyy etsiä iteratiivisesti. Jos kyseessä olisi kitkaton virtaus, esimerkissä 4.3.12 esitetty Torricellin kaava (b) antaisi

$$\langle v \rangle = \sqrt{2gh_0} = \left(2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 7m\right)^{1/2} = 11{,}72\, m/s. \qquad (a)$$

Putken poikkileikkauspinta-ala

$$A = \frac{\pi d_h^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2 m^2}{4} = 0{,}00785\ m^2, \tag{b}$$

joten virtaaman arvo olisi

$$Q = \langle v \rangle A = 11{,}72 \frac{m}{s} \cdot 0{,}00785\ m^2 = 0{,}0918 \frac{m^3}{s} = 331 \frac{m^3}{h}. \tag{c}$$

Yleistetty Bernoullin yhtälö välille 1 – 4 kirjoitettuna:

$$\alpha_1 \frac{\langle v \rangle_1^2}{2g} + \frac{\langle p \rangle_1}{\rho g} + z_1 = \alpha_4 \frac{\langle v \rangle_4^2}{2g} + \frac{\langle p \rangle_4}{\rho g} + z_4 - 0 + (h_\ell)_{1-4},$$

$$h_0 = 1 \frac{\langle v \rangle^2}{2g} + \frac{0}{\rho g} + 0 + (h_p)_{1-2} + (h_f)_{2-3},$$

$$h_0 = \frac{\langle v \rangle^2}{2g} + (\zeta)_{1-2} \frac{\langle v \rangle^2}{2g} + f \frac{L}{d_h} \frac{\langle v \rangle^2}{2g}. \tag{d}$$

On toimittu mittapaineen avulla, käytetty edellisissä esimerkeissä selostettuja reunaehtoja ja asetettu $\alpha_4 = 1$. Keskinopeuden lauseke on siis

$$\langle v \rangle = \left[\frac{2 g h_0}{1 + (\zeta)_{1-2} + f \frac{L}{d}} \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{1 + (\zeta)_{1-2} + f \frac{L}{d}} \right]^{1/2} \cdot 11{,}72 \frac{m}{s}. \tag{e}$$

Usein laskelmat aloitetaan kitkahäviökertoimen f keskimääräisellä arvolla 0,03 (ks. kuva 4.5.6). Termi

$$1 + (\zeta)_{1-2} + f \frac{L}{d} = 1 + 0{,}5 + f \cdot 100 \tag{f}$$
$$= 1 + 0{,}5 + 3 = 4{,}5.$$

ja keskinopeuden arvoksi saadaan kaavasta (e) $\langle v \rangle = 5{,}52$ m/s. Vastaava Reynoldsin luku

$$Re = \frac{d_h \langle v \rangle}{\nu} = \frac{0{,}1 m\ \langle v \rangle}{1{,}30 \cdot 10^{-6} m^2/s} = 76920 \frac{s}{m} \langle v \rangle \tag{g}$$

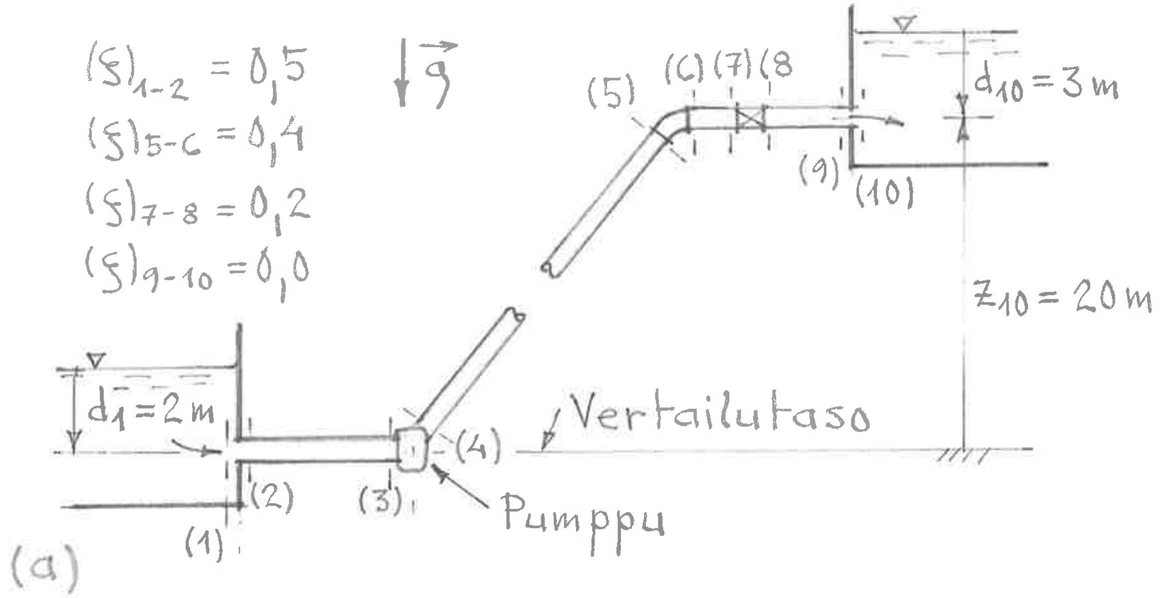
tulee olemaan $Re = 4{,}25 \cdot 10^5$. Kaavan (g) lauseke on saatu otaksumalla veden lämpötilaksi 10°C ja ottamalla ν taulukosta 1.3.1. Putken pinnan suhteellinen karheus $k/d_h = 0{,}002$. Kunnollisesta Moodyn käyrästöstä saadaan näitä arvoja vastaavaksi kitkahäviökertoimen uudeksi arvoksi $f = 0{,}024$. Sama tulos seuraa taulukon 4.5.2 kaavasta (4) aloittamalla sen oikealla puolella arvolla $f = 0{,}03$, laskemalla uusi f:n arvo $f = 0{,}0238$ jne. Iteraatio voidaan pysäyttää tässä jo toisen kierroksen jälkeen.

Termi (f) on nyt 3,9 ja keskinopeudeksi tulee $\langle v \rangle = 5{,}93$ m/s. Vastaava Reynoldsin luvun arvo on $Re = 4{,}56 \cdot 10^5$. Kitkahäviökertoimen arvo muuttuu niin vähän, ettei laskelmia ole syytä enää toistaa. Täten virtaamaksi saadaan

$$Q = \langle v \rangle A = 5{,}93 \frac{m}{s} \cdot 0{,}00785\, m^3 = 0{,}047 \frac{m^3}{s} = 168 \frac{m^3}{h}. \qquad (h)$$

Kitka pienentää siis kaavan (c) mukaista arvoa voimakkaasti. Kaavan (f) perusteella huomataan, että seinämäkitkahäviolla on tässä esimerkissä 4,8-kertainen arvo nieluhäviöön verrattuna.

Esimerkki 4.5.5. Pumpun teho. On määritettävä kuvassa (a) esitetyssä tapauksessa tarvittava pumpun teho P_s, jotta saavutettaisiin massavirta $\langle w \rangle = 20000$ kg/h. Kyseessä on vakiotiheysneste $\rho = 950$ kg/m³, $\mu = 9 \cdot 10^{-4}$ Pa·s. Virtaus alkaa ja päättyy suuriin avoimiin säiliöihin.



(a)

Kuvassa (a) esitettyjen tietojen lisäksi putkista tunnetaan taulukon (b) neljässä ensimmäisessä

Putki	L (m)	d_h (mm)	k (mm)	$A/10^{-2}$ (m^2)	$\langle v \rangle$ (m/s)	$Re/10^4$ (—)	k/d_h (—)
2–3	20	150	0,1	1,767	0,331	5,24	0,00067
4–9	500	100	0,1	0,785	0,745	7,86	0,001

(b)

sarakkeessa annetut arvot. Koska massavirta $\langle w \rangle = \varrho Q = \varrho \langle v \rangle A$ on jatkuvuusyhtälön perusteella vakio, on helppoa laskea keskinopeus

$$\langle v \rangle = \langle w \rangle / (\varrho A) \qquad \text{(a)}$$

sekä muut taulukon (b) lukuarvot. Taulukon 4.5.2 kaavasta (4) saadaan kitkahäviökertoimen arvot $(f)_{2-3} = 0{,}023$, $(f)_{4-9} = 0{,}023$.

Korkeushäviöksi koko välillä 1–10 saadaan kaavaa (4.5.55) soveltamalla

$$(h_l)_{1-10} = \frac{1}{2 \cdot 9{,}81\,m/s^2} \Big[0{,}023 \cdot \frac{20}{0{,}15} \cdot (0{,}331)^2 \frac{m^2}{s^2} +$$

$$+ 0{,}023 \cdot \frac{500}{0{,}1} \cdot (0{,}745)^2 \frac{m^2}{s^2} + 0{,}5 \cdot (0{,}331)^2 \frac{m^2}{s^2} +$$

$$+ (0{,}4+0{,}2)(0{,}745)^2 \frac{m^2}{s^2},$$

$$= 0{,}05097\,(0{,}34+63{,}83+0{,}05+0{,}33)\,m$$

$$= 3{,}29\,m. \qquad (b)$$

Tässä siis seinämäkitkahäviön osuus on paljon suurempi kuin paikallisten häviöiden.

Yleistetty Bernoullin yhtälö välille 1–10 kirjoitettuna ($\alpha = 0$, mittapaine):

$$\frac{\langle v\rangle_1^2}{2g} + \frac{\langle p\rangle_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\langle v\rangle_{10}^2}{2g} + \frac{\langle p\rangle_{10}}{\rho g} + z_{10} - (h_s)_{3-4} + (h_\ell)_{1-10},$$

$$d_1 = \frac{\langle v\rangle_{4-9}^2}{2g} + \frac{\rho g d_{10}}{\rho g} + z_{10} - (h_s)_{3-4} + (h_\ell)_{1-10}, \qquad (c)$$

josta saadaan

$$(h_s)_{3-4} = \frac{\langle v\rangle_{4-9}^2}{2g} + z_{10} + d_{10} - d_1 + (h_\ell)_{1-10}$$

$$= \frac{(0{,}745)^2}{2\cdot 9{,}81}\,m + 20\,m + 3\,m - 2\,m + 3{,}29\,m = 24{,}3\,m. \qquad (d)$$

Kaavan (4.5.50) perusteella vaadittava pumpun teho

$$P_s = \rho g Q h_s = \langle w\rangle g\, h_s$$

$$= \frac{20000\,kg}{3600\,s}\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 24{,}3\,m = 1324\,\frac{kg\,m}{s^2}\frac{m}{s}$$

$$= 1324\,\frac{Nm}{s} = 1324\,W = 1{,}32\,kW. \qquad (e)$$

Käytännössä pumpun tehon tulee olla jonkin verran tätä suurempi, koska myös välillä 3-4 syntyy häviöitä, jotka täytyisi arvioida erikseen pumpusta annettujen tietojen perusteella.

* Huomautuksia. Häviötermit on esitetty edellä siten, että niillä on pituuden dimensio ja on puhuttu korkeushäviöistä. Jos esimerkiksi yhtälö (4.5.51) kerrotaan puolittain suureella ϱg, saadaan muoto

$$\alpha_1 \varrho \frac{\langle v \rangle_1^2}{2} + \langle p \rangle_1 + \varrho g z_1 = \alpha_2 \varrho \frac{\langle v \rangle_2^2}{2} + \langle p \rangle_2 + \varrho g z_2 + \\ - P_s/Q + \Delta' p_l , \qquad (4.5.57)$$

jossa termeillä on nyt paineen dimensio ja jossa häviötermiä

$$\Delta' p_l = \varrho g h_l = \int \mu \Phi \, dV / Q \qquad (4.5.58)$$

nimitetään painehäviöksi.

Jos lähdetään liikkeellä kitkallisen virtauksen liikeyhtälöstä (4.3.68), toimitaan kuten Bernoullin yhtälön muotoa 1 johdettaessa tehden vain otaksumat (b) ja (c), saadaan yhtälön (4.3.112) vastineeksi yhtälö

$$\frac{v_1^2}{2} + \Psi_1 + \Omega_1 = \frac{v_2^2}{2} + \Psi_2 + \Omega_2 + \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \\ - \frac{1}{\varrho} \int_1^2 \left(\mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \right) \cdot d\vec{r} , \qquad (4.5.59)$$

joka olisi jälleen eräs Bernoullin yhtälö (muoto 4). Käytännössä viimeisen termin arvioiminen on vaikeaa, joten tällä muodolla on käyttöä lähinnä vain, jos viimeinen termi voidaan otaksua tietyistä syistä vähäisenä nollaksi.

Soveltamalla yksidimensioista Reynoldsin lausetta (L.2.16) yhtälön (4.5.37) oikean puolen tilavuusintegraaliin voidaan johtaa yleistä yksidimensioista virtausta ja sen erikoistapauksina putkivirtausta ja avouomavirtausta koskevia differentiaalimuotoisia mekaanisen energian taseen periaatteen eri versioita. Ne eivät kuitenkaan poikkea käytännössä jo liikemäärän taseen periaatteen avulla johdetuista tuloksista, joten kehittelyä ei jatketa tässä.

Taulukossa 4.5.4 on esitetty yhteenveto mekaanisen energian taseen periaatteen eri muodoista.

Taulukko 4.5.4 Mekaanisen energian taseen periaatteen eri muotoja.

Yleistä

Yleinen tapaus

Mekaanisen energian taseen periaate

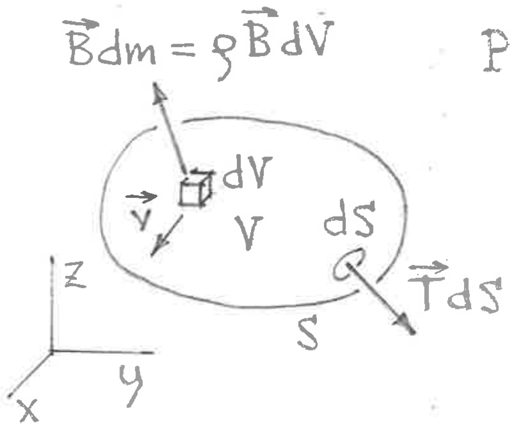
$$\mathrm{P} = \dot{\mathrm{T}} \qquad (1)$$

ei ole uusi aksiooma, sillä se saadaan manipuloimalla Cauchyn liikeyhtälöä.

Kappaleen liike-energia

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\int \rho v^2 dV = \frac{1}{2}\int \rho \vec{v}\cdot\vec{v}\, dV = \frac{1}{2}\int \rho (v_x^2+v_y^2+v_z^2)\, dV. \qquad (2)$$

Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten ja sisäisten voimien yhteinen teho



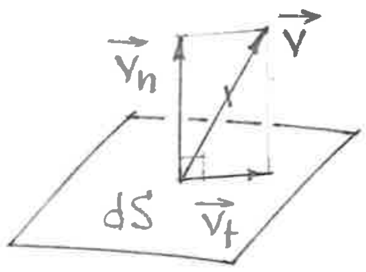
$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_{ext} + \mathrm{P}_{int}, \qquad (3)$$

$$\mathrm{P}_{ext} = \mathrm{P}^{B}_{ext} + \mathrm{P}^{S}_{ext}, \qquad (4)$$

$$\mathrm{P}^{B}_{ext} = \int \rho \vec{B}\cdot\vec{v}\, dV = \int \rho (B_x v_x + B_y v_y + B_z v_z)\, dV, \qquad (5)$$

$$\mathrm{P}^{S}_{ext} = \int \vec{T}\cdot\vec{v}\, dS = \int (T_x v_x + T_y v_y + T_z v_z)\, dS, \qquad (6)$$

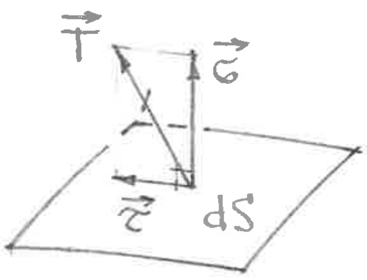
$$\mathrm{P}^{S}_{ext} = \mathrm{P}^{\sigma}_{ext} + \mathrm{P}^{\tau}_{ext}, \qquad (7)$$



$$\mathrm{P}^{\sigma}_{ext} = \int \sigma v_n\, dS \approx -\int p v_n\, dS, \qquad (8)$$

$$\mathrm{P}^{\tau}_{ext} = \int \vec{\tau}\cdot\vec{v}_t\, dS, \qquad (9)$$

$$\mathrm{P}_{int} = -\int \{\sigma\}^T\{d\}\, dV. \qquad (10)$$



Jännitystehon tiheys

$$\{\sigma\}^T\{d\} = \sigma_x d_x + \sigma_y d_y + \sigma_z d_z + \tau_{yz} g_{yz} + \tau_{zx} g_{zx} + \tau_{xy} g_{xy}, \qquad (11)$$

$$= -p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \{\sigma^*\}^T\{d\}, \qquad (12)$$

$$= -p(d_x + d_y + d_z) + \sigma^*_x d_x + \sigma^*_y d_y + \sigma^*_z d_z + \tau_{yz} g_{yz} + \tau_{zx} g_{zx} + \tau_{xy} g_{xy}, \qquad (13)$$

Newtonin nesteellä

$$\{\sigma\}^T\{d\} = -p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \mu\Phi, \qquad (14)$$

jossa dissipaatiofunktio

$$\Phi = 2(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2) + g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2 + -\frac{2}{3}(d_x + d_y + d_z)^2. \qquad (15)$$

Yleinen muoto

$$\mathrm{P}^{B}_{ext} + \mathrm{P}^{S}_{ext} = \dot{\mathrm{T}} + \int \{\sigma\}^T\{d\}\, dV. \qquad (16)$$

Newtonin nestettä koskeva muoto

$$\mathrm{P}^{B}_{ext} + \mathrm{P}^{S}_{ext} = \dot{\mathrm{T}} - \int p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\, dV + \int \mu\Phi\, dV. \qquad (17)$$

Taulukko 4.5.4 Jatkoa

Yleistetty Bernoullin yhtälö

Otaksumaluettelo

Otaksumasta (5) seuraa, että

$$P^B_{ext} = -\dot{V}^*, \qquad (18)$$

ja otaksumasta (5') seuraa, että

$$P^B_{ext} = -\frac{d}{dt}\int \rho g h. \qquad (19)$$

Potentiaalienergia

$$V^* = \int \rho \Omega \, dV.$$

Vakiopainovoimakentässä

$$V^* = \int \rho g h \, dV.$$

Yleinen tapaus

Perusmuoto

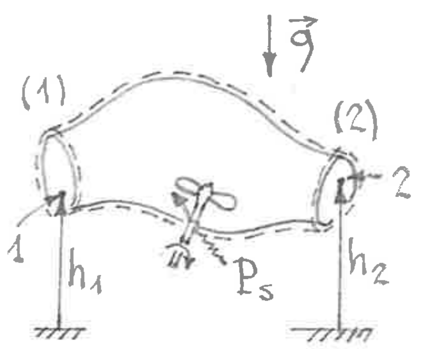
$$P^B_{ext} + P^\sigma_{ext} + P^\tau_{ext} = \dot{T} - \int p \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\, dV + \int \mu \Phi \, dV. \qquad (20)$$

Vakiotiheysneste [O(5')]

$$P^\sigma_{ext} + P^\tau_{ext} = \frac{d}{dt}\int \rho \left(\frac{1}{2}v^2 + gh\right) dV + \int \mu \Phi \, dV, \qquad (21)$$

$$P^\sigma_{ext} + P^\tau_{ext} = \frac{1}{2}\int \rho \frac{\partial v^2}{\partial t} dV + \int \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + gh\right) v_n \, dS + \int \mu \Phi \, dV. \qquad (22)$$

Standardikontrollialue, [O(1), O(2), O(3), O(5')]



Vakiotiheysneste

$$\alpha_1 \frac{\langle v\rangle_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 = \alpha_2 \frac{\langle v\rangle_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2 + \frac{\int \frac{\partial v^2}{\partial t} dV}{2gQ} - \frac{P_s}{\rho g Q} + h_l. \qquad (23)$$

Liike-energian korjauskerroin

$$\alpha = \frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle^3} = \frac{\int v^3 dA}{A\langle v\rangle^3}.$$

Liikemäärävirta

$$\frac{1}{2}\rho\int v^3 dA = \frac{1}{2}\alpha \rho Q \langle v\rangle^2.$$

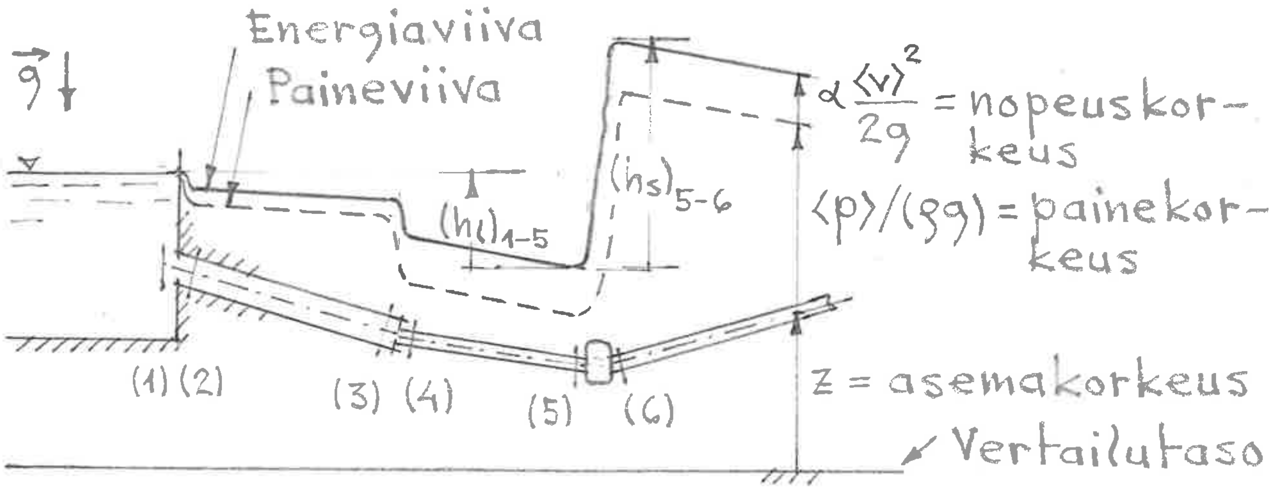
Korkeushäviö

$$h_l = \frac{\int \mu \Phi \, dV}{\rho g Q}.$$

Häviötermien laskeminen, [O(1), O(2), O(3), O(5')]

Vakiotiheysnesteen stationaarinen putkivirtaus

$$\alpha_1 \frac{\langle v\rangle_1^2}{2g} + \frac{\langle p\rangle_1}{\rho g} + z_1 = \alpha_2 \frac{\langle v\rangle_2^2}{2g} + \frac{\langle p\rangle_2}{\rho g} + z_2 - h_s + h_l. \qquad (24)$$



Termi

$$h_s = P_s/(\rho g Q).$$

Kokonaiskorkeushäviö

$$h_l = h_f + h_p.$$

Seinämäkitkahäviö

$$h_f = f \frac{L}{d_h} \frac{\langle v\rangle^2}{2g}.$$

Paikallinen häviö

$$h_p = \zeta \frac{\langle v\rangle^2}{2g}.$$

* 4.6 Energian tase

4.6.1 Äärellinen muoto

Energian taseen periaatteen (1.2.6)

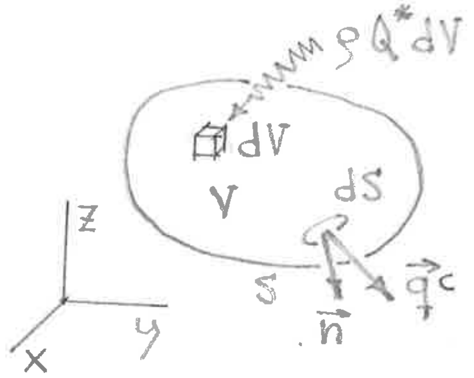
$$P_{ext} + P_Q = \dot{T} + \dot{U} \tag{4.6.1}$$

termit P_{ext} ja $\dot{T}$ ovat olleet jo esillä lausekkeissa (4.5.4)...(4.5.6) ja (4.5.2).

Kappaleen saama lämpöteho P_Q saadaan periaatteessa lausekkeena (1.3.38), jossa $\vec{q} = \vec{q}^c + \vec{q}^r$. Koska säteily on vaikea käsitellä tässä muodossa, kirjoitetaan tavallisimmin kuitenkin

$$P_Q = \int \vec{n} \cdot \vec{q}^c \, dS + \int \rho Q^* dV. \tag{4.6.2}$$

Tässä Q^* on ns. lämpölähteen antoisuus massaa kohti (engl. heat source per unit mass)($[Q^*] = W/kg$). Täten säteilyn osuus pyritään esittämään tavalla, jota on kuvattu symbolisesti kuvassa 4.6.1. Samoin mahdollinen kemiallinen tai radioaktiivinen lämmönkehitys — jos näitä ei ilmaista sisäenergian avulla — esitetään termin Q^* avulla.



Kuva 4.6.1 Kappaleen saaman lämpötehon osuudet.

Kappaleen sisäenergian U lauseke on taas kohdan 1.3 mukaisesti (kaava (1.3.30))

$$U = \int \rho u \, dV. \tag{4.6.3}$$

Yleinen periaate (4.6.1) kirjoitetaan tässä vielä vertailun vuoksi mekaanisen energian taseen periaatteen yhtälöä (4.5.20) muistuttavassa muodossa

$$\boxed{P^B_{ext} + P^S_{ext} = \dot{T} + \dot{U} - P_Q.} \qquad (4.6.4)$$

Kun tätä yhtälöä työstetään vastaavaan tapaan kuin mitä tehtiin yleistettyä Bernoullin yhtälöä johdettaessa, päästään lopuksi samantapaiseen enemmän termejä sisältävään äärelliseen sovellutusmuotoon; jätetään tässä käsittelemättä.

4.6.2 Paikallinen muoto

Paikallisen muodon johtaminen tapahtuu kätevimmin vähentämällä ensin yhtälöt (4.6.4) ja (4.5.20) puolittain toisistaan (vrt. esimerkki D 6.3.3, kaava (n)):

$$\dot{U} = P_Q + \int \{\sigma\}^T \{d\}\, dV. \qquad (4.6.5)$$

Kun tähän sijoitetaan lausekkeet (4.6.2) ja (4.6.3), saadaan

$$\frac{d}{dt}\int \rho u \, dV = -\int \vec{n}\cdot\vec{q}^{\,c}\, dS + \int \rho Q^* dV + \int \{\sigma\}^T\{d\}\, dV, \qquad (4.6.6)$$

$$\int \rho \frac{du}{dt}\, dV = \int \left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{q}^{\,c} + \rho Q^* + \{\sigma\}^T\{d\}\right) dV. \qquad (4.6.7)$$

On sovellettu Reynoldsin lausetta (3.3.64) ($F \hat{=} u$) ja Gaussin lausetta (L.1.3) ($\vec{q}^{\,c} \hat{=} \vec{F}$).

Näin ollen saadaan energian taseen periaatteen yleinen paikallinen muoto

$$\boxed{\varrho \frac{du^*}{dt} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \varrho Q^* + \{\sigma\}^T\{d\},} \qquad (4.6.8)$$

jota nimitetään kirjallisuudessa usein lyhyesti energiayhtälöksi (engl. energy equation)

Kun sitten otaksutaan konstitutiivisiksi yhteyksiksi ominaissisäenergian differentiaalin lauseke (1.3.28), Fourierin laki (1.3.40) ja Newtonin nesteelle pätevä tulos (4.5.16), saadaan nestemekaniikassa käytetty muoto

$$\varrho\left(c_v \frac{dT}{dt} + \cancel{\frac{p}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{dt}} - \frac{TK_T\gamma_p}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{dt}\right) =$$

$$+\vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) + \varrho Q^* - \cancel{p\vec{\nabla}\cdot\vec{v}} + \mu\Phi, \qquad (4.6.9)$$

$$\boxed{\varrho c_v \frac{dT}{dt} + TK_T\gamma_p \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) + \varrho Q^* + \mu\Phi.} \qquad (4.6.10)$$

On käytetty hyväksi dilataationopeuden lausekkeita (3.4.59).

Yhtälö (4.6.10) esiintyy nestemekaniikassa lähes lukemattomissa eri muodoissa johtuen eri merkinnöistä ja mahdollisista yksinkertaistuksista. Suorakulmaisessa karteesisessa koordinaatistossa saadaan esitys — otaksutaan lämmönjohtavuus k vakioksi —

$$\varrho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)+TK_T\gamma_p\cdot\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\varrho Q^*+\mu\Phi. \qquad (4.6.11)$$

Jos neste ei liiku – ts. konvektiivista lämmön siirtymistä ei tapahdu –, energiayhtälöstä tulee kiinteän aineen mekaniikasta tuttu ns. Fourierin <u>lämmönjohtumisyhtälö</u>

$$\varrho c_v\frac{\partial T}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\varrho Q^*. \qquad (4.6.12)$$

KIRJALLISUUTTA

1. Outinen, H., Vulli, P., Lujuusopin perusteet. Kustannusyhtymä 1979, 368 s.

2. Linnaluoto, V., Kaasudynamiikka. Luku teoksessa Tekniikan käsikirja 1. Gummerus 1973.

3. Reynolds, W.C., Perkins, H.C., Engineering Thermodynamics. McGraw-Hill 1970,

4. Lu, P.-C., Fluid Mechanics. An Introductory Course. The Iowa State University Press, Ames 1979, 468 s.

5. Ziegler, H., An Introduction to Thermomechanics. North-Holland 1977, 308 s.

6. Zemansky, M.W., Heat and Thermodynamics. McGraw-Hill 1957, 484 s.

7. Streeter, V.L., Fluid Mechanics. McGraw-Hill 1971, 751 s.

8. Condon, E.U., Kinematics and Dynamics. Luku teoksessa Handbook of Physics. McGraw-Hill 1958.

9. Launder, B.E., Spalding, D.B., Mathematical Models of Turbulence. Academic Press 1972, 169 s.

10. Laitinen, E., Mäkelä, M., Soininen, L., Tuomola, S., Kaavasto. Tammertekniikka 1978, 199 s.

11. Hosia, L., Hydrauliikka. Luku 2 teoksessa Vesirakennus. Suomen rakennusinsinöörien liitto 1973, s. 75...119.

12. Wong, H.Y., Handbook of Essential Formulae and Data on Heat Transfer for Engineers. Longman 1977, 236 s.

13. Fysiikan suureniment kansainvälisen standardin ISO 31 mukaan. SFS 3655 Suomen Standardisoimislautakunta 1976, 59 s.

14. Väisälä, K., Vektorianalyysi. Werner Söderström 1954, 159 s.

15. Prandtl, L., Tietjens, O.G., Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics. Dover 1957, 270 s.

16. Ryti, H. Standardi-ilmakehä. Luku teoksessa Tekniikan käsikirja 2. Gummerus 1973, s. 187...192.

17. Li, W.-H., Lam, S.-H., Principles of Fluid Mechanics. Addison-Wesley 1976, 374 s.

18. Prager, W., Introduction to Mechanics of Continua. Ginn 1961, 230 s.

19. Schade, H., Kunz, E., Strömungslehre. Walter de Gruyter 1980, 544 s.

20. Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N., Transport Phenomena. Wiley 1960, 780 s.

21. Ylinen, A., Kimmo- ja lujuusoppi I. Werner Söderström 1969, 476 s.

22. Hansen, A.G., Fluid Mechanics. Wiley 1967, 531 s.

23. Denn, M.M., Process Fluid Mechanics. Prentice-Hall 1980, 383 s.

24. Shames, I. H., Mechanics of Fluids. McGraw-Hill 1962, 558 s.

25. Watters, G. Z., Modern Analysis and Control of Unsteady Flow in Pipelines. Ann Arbor Science 1979, 251 s.

26. Chow, V. T., Open-Channel Flow. Luku teoksessa Streeter, V. L. (toim.), Handbook of Fluid Dynamics. McGraw-Hill 1961.

27. Le Méhauté, B., An Introduction to Hydrodynamics & Water Waves. Springer 1976, 315 s.

28. Tokaty, G. A., A History & Philosophy of Fluidmechanics. Foulis 1971, 241 s.

29. Jeppson, R. W., Analysis of Flow in Pipe Networks. Ann Arbor Science 1976, 164 s.

30. Rouse, H., Elementary Mechanics of Fluids. Dover, 1946.

31. Batchelor, G. K., An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press 1967, 615 s.

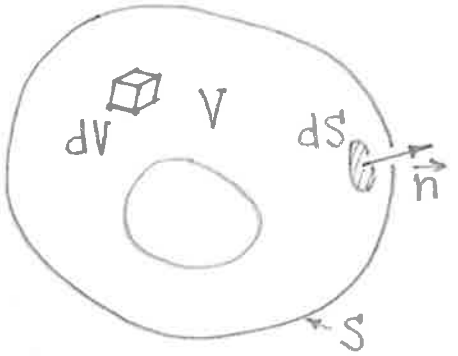
32. Niskanen, E., Hydromekaniikka. Luku teoksessa Tekniikan käsikirja 1. Gummerus 1973.

33. Kaufmann, W., Fluid Mechanics. McGraw-Hill 1963, 432 s.

*LIITTEET

L.1 Gaussin lause

Yleistetty Gaussin Lause on (vrt. kuva L.1.1)



Kuva L.1.1

$$\boxed{\int \vec{\nabla} * \vec{f}\, dV = \int d\vec{S} * \vec{f}} \qquad (L.1.1)$$

eli

$$\int \vec{\nabla} * \vec{f}\, dV = \int \vec{n} * \vec{f}\, dS. \qquad (L.1.2)$$

Gaussin Lause on

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \int \vec{n} \cdot \vec{f}\, dS \qquad (L.1.3)$$

Suure $\vec{f}$ on mielivaltainen jatkuva (derivaatat paloittain jatkuvia) paikan funktio. Tähti voi merkitä pistettä, ristiä tai tyhjää, jolloin viimeisessä tapauksessa $\vec{f}$ on korvattava skalaarifunktiolla (tai yleisemmin: jos vektori, kyseessä on dyadi). Suure $\vec{f}$ saa luonnollisesti riippua myös ajasta t; kaavat pätevät kullakin ajan hetkellä.

Gaussin Lauseen ehkä helpoiten muistissa pysyvät muodot ovat karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa (peräkkäisillä valinnoilla $\vec{f} = f(x,y,z)\,\vec{i}$ jne.) syntyvät kaavat

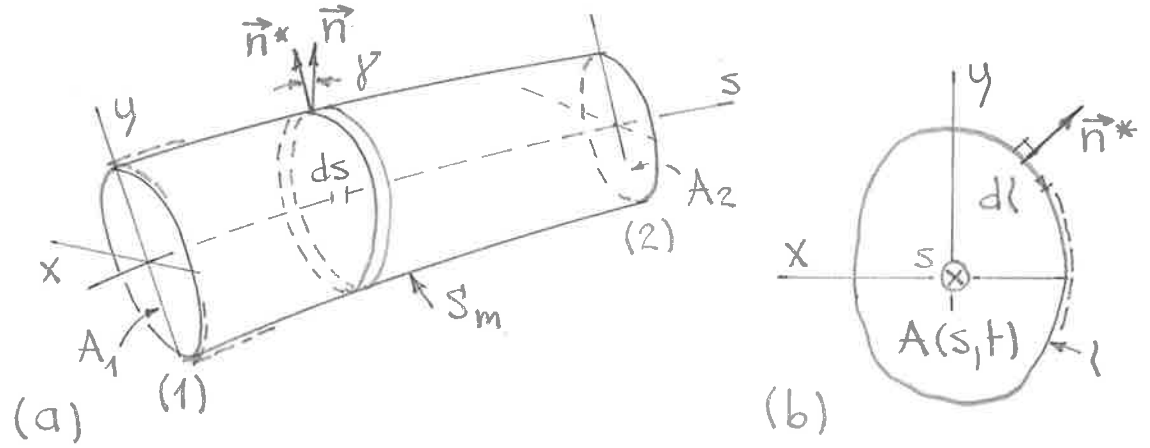
$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dV = \int n_x f\, dS, \quad \int \frac{\partial f}{\partial y} dV = \int n_y f\, dS, \quad \int \frac{\partial f}{\partial z} dV = \int n_z f\, dS. \qquad (L.1.4)$$

Suure f saa olla tässä myös vektori.

L.2 Yksidimensioinen Reynoldsin lause

Yksidimensioiset virtaustapaukset — kuten putkivirtaus ja avouomavirtaus — ovat käytännössä erittäin tärkeitä. Täten on syytä kehittää johdonmukainen tapa muuntaa kolmessa dimensiossa johdetut tulokset yhtä dimensiota koskeviksi.

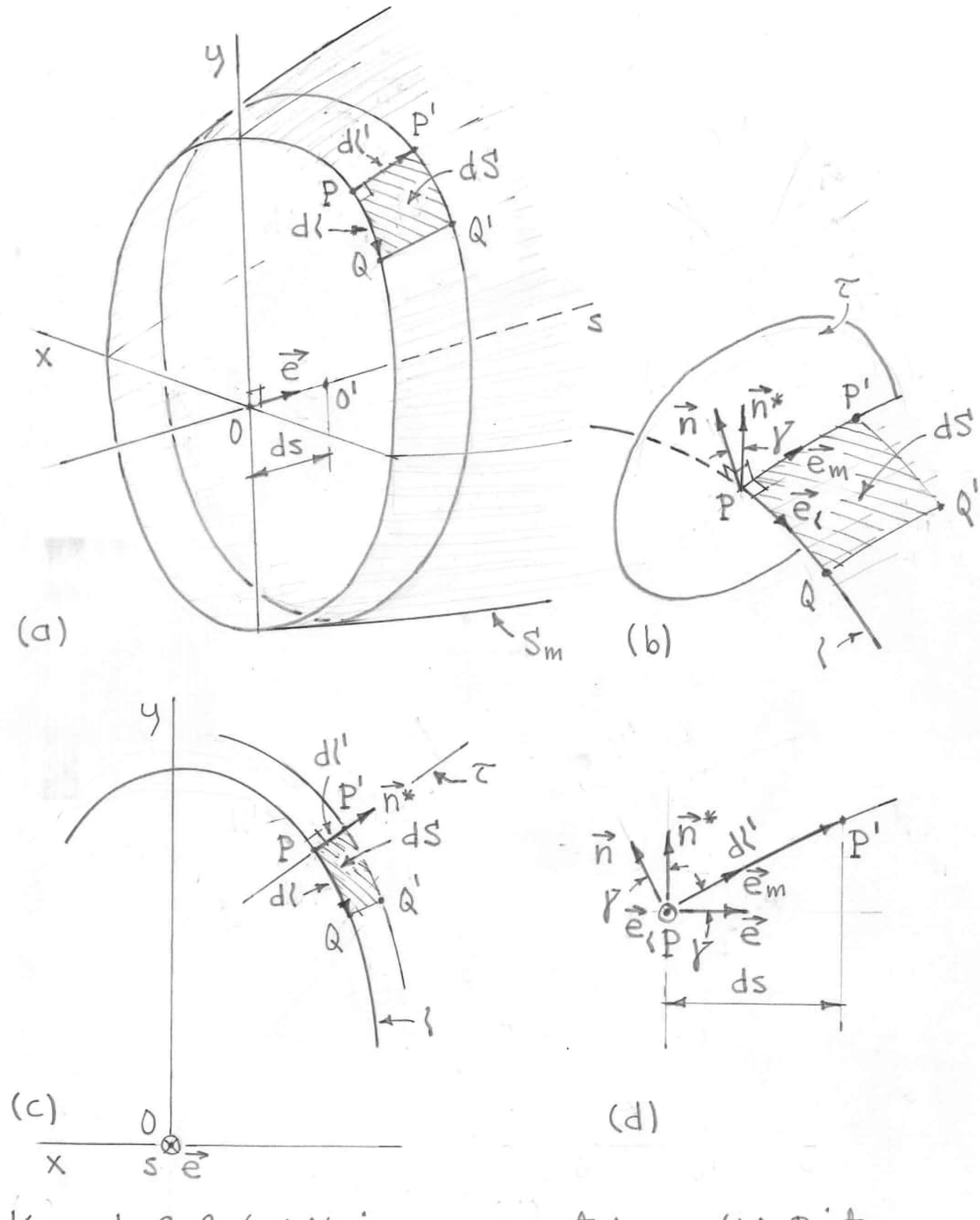
Kuvassa L.2.1 on esitetty uudestaan kohdassa



Kuva L.2.1 (a) Kontrollialue. (b) Tyypillinen poikkileikkaus.

3.4.1 tarkastelun alaiseksi otettu geometrialtaan putkimainen kontrollialue.

Kuvassa L.2.2 näkyy vaipalla olevan mielivaltaisen pisteen P ympäristön yksityiskohtia. Virtausakseli oletetaan tässä tarkastelussa aluksi suoraksi. Pisteiden 0 ja 0' kautta kulkevat akselia vastaan kohtisuorassa olevat poikkileikkaustasot sekä ensimmäisen poikkileikkauspinnan reunakäyrältä valittujen pisteiden P ja Q kautta asetetut ko. käyrää vastaan kohtisuorassa olevat tasot leikkaavat vaippapinnasta suora-



Kuva L.2.2 (a) Vaipan geometriaa. (b) Pisteen P kautta kulkeva reunakäyrää vastaan kohtisuorassa oleva taso τ. (c) Pisteen O kautta kulkeva poikkileikkaustaso. (d) Tasossa τ olevia suuntia.

kulmaisen differentiaalisen pinta-alkion PQQ'P', jonka pinta-ala

$$dS = dl\,dl' = dl\frac{ds}{\cos\gamma} = \frac{1}{\cos\gamma}\,dl\,ds, \qquad (L.2.1)$$

jossa kulman γ merkitys selviää kuvan L.2.2 (d) avulla. Täten kontrollipinnan yli otettu integraali

$$\int f\,dS = \int_{S_m} f\,dS + \int_{A_1} f\,dA + \int_{A_2} f\,dA, \qquad (L.2.2)$$

eli

$$\boxed{\int f\,dS = \int_1^2 \left(\int \frac{f}{\cos\gamma}\,dl\right) ds + \langle f\rangle_1 A_1 + \langle f\rangle_2 A_2 .} \qquad (L.2.3)$$

Merkintä $\int(\ )dl$ tarkoittaa poikkileikkauksen piirin yli otettua sulkeen ( ) integraalia ja merkintä $\int_1^2(\ )ds$ taas akselin pituuden yli poikkileikkauksesta 1 poikkileikkaukseen 2 eli s:n arvosta s_1 arvoon s_2 otettua sulkeen ( ) integraalia. Termi $(\int(f/\cos\gamma)dl)ds$ on siis etäisyydellä ds toisistaan olevien poikkileikkaustasojen vaipasta leikkaaman vyön yli otettu integraali.

Vastaavasti kontrollitilavuuden ylitse otettu integraali

$$\int f\,dV = \int_1^2 \left(\int f\,dA\right) ds \qquad (L.2.4)$$

eli

$$\boxed{\int f\,dV = \int_1^2 \langle f\rangle A\,ds .} \qquad (L.2.5)$$

Termi $(\int f\,dA)ds$ on siis etäisyydellä ds toisistaan olevien poikkileikkaustasojen erottaman levyn yli otettu integraali.

Kaavat (L.2.3) ja (L.2.5) ovat täysin tarkat, kun akseli on suora. Jos geometria on pyörähdyssymmetrinen (virtausakseli symmetria-akselina), γ ja $\cos\gamma$ ovat kussakin poikkileikkauksessa vakioita ja $\cos\gamma$ voidaan viedä piirin yli otetun integraalin ulkopuolelle. Jos geometria on prismaattinen, $\gamma = 0$ ja $\cos\gamma = 1$.

Lähdetään tämän jälkeen kehittämään Reynoldsin lausetta (3.3.60). Saadaan aluksi

$$\frac{d}{dt}\int f\,dV = \int \frac{\partial f}{\partial t}\,dV + \int f v_n\,dS$$

$$= \int_1^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle A\,ds + \int_1^2 \left(\int \frac{f v_n}{\cos\gamma}\,dl\right) ds +$$

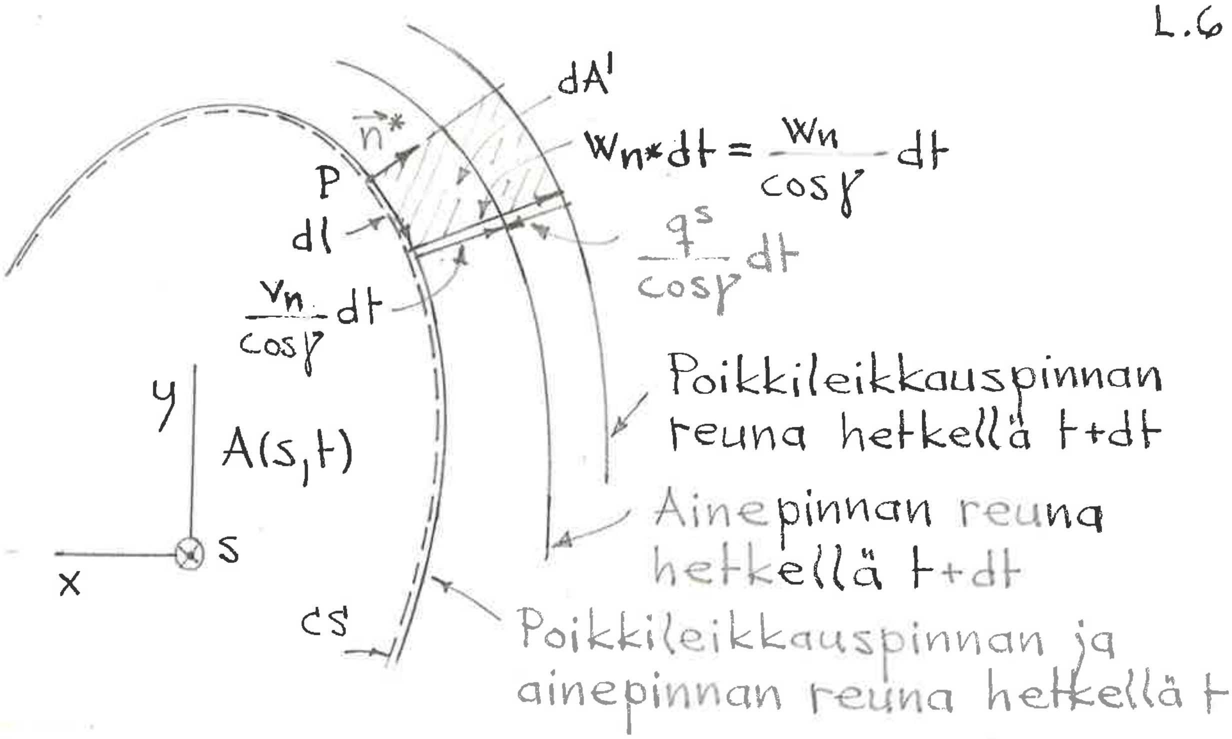
$$- \langle f v_e \rangle_1 A_1 + \langle f v_e \rangle_2 A_2 , \qquad \text{(L.2.6)}$$

jossa on siis sovellettu kaavoja (L.2.5), (L.2.3) ja (3.4.9).

Kaavan (L.2.6) muuntamiseksi tarkastellaan aputehtävänä funktion

$$I(s,t) = \int_{A(s,t)} f(x,y,s,t)\,dA = \langle f \rangle A \qquad \text{(L.2.7)}$$

osittaisderivaatan $\partial I/\partial t = \partial(\langle f \rangle A)/\partial t$ laskemista. Kysymyksessä on jälleen Leibnitzin säännön (3.3.55) tapainen tilanne. Johto on samantyyppinen kuin kuvan 3.3.10 yhteydessä suoritettu käsittely. Tarkastellaan kuvaa L.2.3, joka esittää tyypillistä poikkileikkausta kahdella perättäisellä ajan hetkellä t ja $t+dt$. Ajan differentiaalin dt kuluessa kontrollipinnan sisällä hetkellä t olleen nesteen – eli siis valitun systeemin eli kappaleen – liike kasvattaa vaipalle kenoksen, jonka



Kuva L.2.3 Poikkileikkauspinnan muuttuminen ajan suhteen tietyssä kohdassa s = vakio.

paksuus on $v_n dt$ ja poikkileikkaukseen kerroksen, jonka paksuus on $v_n/\cos\gamma \cdot dt$ (vrt. kuva L.2.2 ja kohta 3.5.1). Vektorit $\vec{n}$ ja $\vec{n}^*$ ovat vaipan tietyssä pisteessä olevat vaipan ulkoinen yksikkönormaalivektori ja poikkileikkauksen reunakäyrän poikkileikkaustasossa oleva ulkoinen yksikkönormaalivektori, joten

$$\cos\gamma = \vec{n}^* \cdot \vec{n}. \qquad \text{(L.2.8)}$$

Jos poikkileikkauksen määrittelemän matemaattisen vaippapinnan siirtymänopeus pinnan normaalin suunnassa on w_n, poikkileikkauspinta kasvaa ajassa dt kerroksella, jonka paksuus on $w_n/\cos\gamma \cdot dt$. Jos kohdassa 3.5.1 esitetty termi q^s on nolla — sanotaan lyhyesti ei suotovirtausta —

$$w_n = v_n. \qquad \text{(L.2.9)}$$

Suotovirtaustapauksessa

$$w_n = v_n + q^s. \qquad (L.2.10)$$

Lasketaan ensin pinta-alan kasvuun liittyvä suureen $\int f\,dA$ muutos. Kuvan L.2.3 pinta-alkio $dA' = dl\, w_n/\cos\gamma \cdot dt$, joten siihen liittyy määrä $f w_n/\cos\gamma \cdot dl\, dt$ ja integrointi yli reunakäyrän piirin antaa täten muutoksen

$$dI' = \left(\int \frac{f w_n}{\cos\gamma}\, dl\right) dt \qquad (L.2.11)$$

Hetkellä t vallinneen reunakäyrän sisällä syntyy muutos

$$dI'' = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t}\, dt\right) dA = \left(\int \frac{\partial f}{\partial t}\, dA\right) dt. \qquad (L.2.12)$$

Kun koko muutos $dI = dI' + dI''$ jaetaan ajan differentiaalilla dt ja otetaan huomioon, että tarkastellaan muutosta, jossa s on kiinteä, saadaan siis tulos

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int f\,dA = \int \frac{\partial f}{\partial t}\, dA + \int \frac{f w_n}{\cos\gamma}\, dl} \qquad (L.2.13)$$

eli

$$\frac{\partial}{\partial t}(\langle f\rangle A) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle A + \int \frac{f w_n}{\cos\gamma}\, dl. \qquad (L.2.14)$$

Kun tästä kaavasta ratkaistu $\langle \frac{\partial f}{\partial t}\rangle A$ sijoitetaan yhtälöön (L.2.6), saadaan <u>yksidimensioinen Reynoldsin lause</u>

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d}{dt}\int f\,dV = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}(\langle f\rangle A)\,ds - \int_1^2 \left(\int \frac{f q^s}{\cos\gamma}\, dl\right) ds + \\ - \langle f v_e\rangle_1 A_1 + \langle f v_e\rangle_2 A_2 .\end{gathered}} \qquad (L.2.15)$$

Tavallisesti termi $q^s = w_n - v_n$ häviää ja saadaan Reynoldsin Lauseen muoto

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int f\,dV = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}(\langle f\rangle A)\,ds + -\langle f v_e\rangle_1 A_1 + \langle f v_e\rangle_2 A_2 .} \qquad (L.2.16)$$

Saadut tulokset ovat tähän asti täysin tarkkoja, kun virtausakseli on suora. Kun virtausakseli on vain lievästi kaareva, voidaan näitä kaavoja soveltaa edelleen enemmän tai vähemmän hyvinä approksimaatioina.

L.3 Termin $\int \vec{f}\cdot\vec{v}\,dV$ muuntaminen

1. $$\int \vec{f}\cdot\vec{v}\,dV = \int\left(\frac{\partial \vec{T}^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{T}^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{T}^{(z)}}{\partial z}\right)\cdot\vec{v}\,dV,$$

2. $$= \int\left[\frac{\partial}{\partial x}(\vec{T}^{(x)}\cdot\vec{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{T}^{(y)}\cdot\vec{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{T}^{(z)}\cdot\vec{v})\right]dV +$$
$$-\int\left(\vec{T}^{(x)}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{T}^{(y)}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{T}^{(z)}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\right)dV,$$

3. $$= \int(n_x\vec{T}^{(x)}\cdot\vec{v} + n_y\vec{T}^{(y)}\cdot\vec{v} + n_z\vec{T}^{(z)}\cdot\vec{v})\,dS +$$
$$-\int\Big(\sigma_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{xy}\frac{\partial v_y}{\partial x} + \tau_{xz}\frac{\partial v_z}{\partial x} +$$
$$+\tau_{yx}\frac{\partial v_x}{\partial y} + \sigma_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{yz}\frac{\partial v_z}{\partial y} +$$
$$+\tau_{zx}\frac{\partial v_x}{\partial z} + \tau_{zy}\frac{\partial v_y}{\partial z} + \sigma_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\Big)dV,$$

4. $$= \int(n_x\vec{T}^{(x)} + n_y\vec{T}^{(y)} + n_z\vec{T}^{(z)})\cdot\vec{v}\,dS +$$
$$-\int\Big[\sigma_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + \sigma_z\frac{\partial v_z}{\partial z} +$$
$$+\tau_{yz}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) + \tau_{zx}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \tau_{xy}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\Big]dV,$$

5. $= \int \vec{T}\cdot\vec{v}\,dS +$

$- \int (\sigma_x d_x + \sigma_y d_y + \sigma_z d_z + \tau_{yz} g_{yz} + \tau_{zx} g_{zx} + \tau_{xy} g_{xy})\,dV,$

6. $= P^S_{ext} - \int \{\sigma\}^T \{d\}\,dV.$

Käytetyt askeleet:

1. Sijoitetaan $\vec{F}$:n Lauseke (4') taulukko 4.3.1.
2. Manipulointi, jotta saataisiin Gaussin Lausetta varten sopiva muoto.
3. Sovelletaan Gaussin Lausetta (L.1.4) otetaan huomioon Lausekkeet (4.2.2) ja (3.3.5).
4. Otetaan $\vec{v}$ yhteiseksi tekijäksi ja otetaan huomioon kaavat (4.2.8).
5. Otetaan huomioon kaava (4.2.4) ja määritelmät (3.3.41).
6. Käytetään lyhennysmerkintöjä (4.5.6) ja (4.5.11).

L.4 Dissipaatiofunktion Φ Lauseke

1. $\Phi = \frac{1}{\mu} \{\sigma^*\}^T \{d\},$

2. $= \frac{1}{\mu} (\sigma^*_x d_x + \sigma^*_y d_y + \sigma^*_z d_z +$

$+ \tau_{yz} g_{yz} + \tau_{zx} g_{zx} + \tau_{xy} g_{xy}),$

3. $$= 2d_x^2 - \frac{2}{3}(d_x+d_y+d_z)d_x + 2d_y^2 - \frac{2}{3}(d_x+d_y+d_z)d_y + 2d_z^2 - \frac{2}{3}(d_x+d_y+d_z)d_z + g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2,$$

4. $$= 2(d_x^2+d_y^2+d_z^2) + g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2 - \frac{2}{3}(d_x+d_y+d_z)^2,$$

5. $$= \frac{2}{3}\left[(d_x-d_y)^2 + (d_y-d_z)^2 + (d_z-d_x)^2\right] + g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2.$$

Käytetyt askeleet:

1. Kaavojen (4.5.13) ja (4.5.16) mukainen määritelmä.
2. Otetaan huomioon lyhennysmerkinnät (4.5.11).
3. Sijoitetaan Stokesin kitkalain mukaiset lausekkeet (4.2.15).
4. Kehitetään lauseketta.
5. Todetaan kehittämällä oikeaksi. Tästä muodosta näkyy, että Φ on ei-negatiivinen suure.