

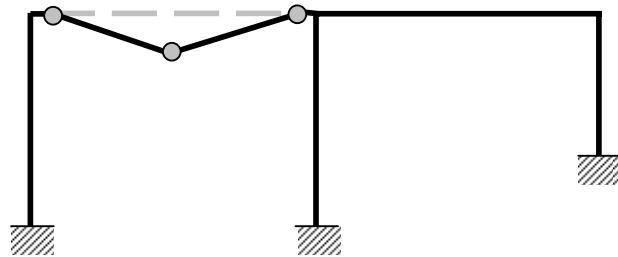
Rak-54.111 RAKENTEIDEN MEKANIikka B

Luentomoniste

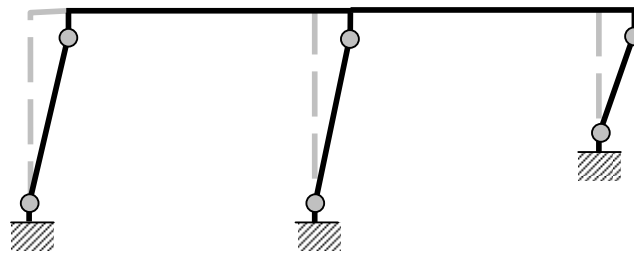
Osa II: Sauvarakenteiden plastiset menetelmät

Jukka Aalto

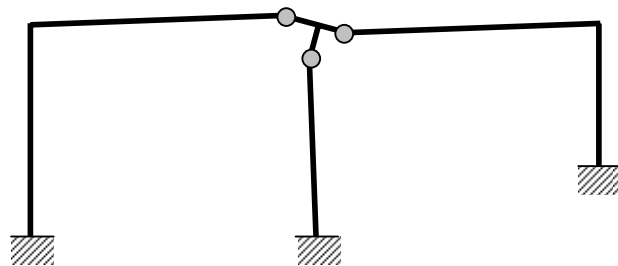
(a) Palkkimekanismi



(b) Sivusiirtymämekanismi



(c) Nurkkamekanismi



1. Poikkileikkauksen jännitys jakauma ja vaste

Lineaarisesti kimmainen, Hooken lakia

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.1)$$

noudattava, materiaalimalli on erittäin käyttökelpoinen erityisesti silloin, kun tarkastellaan rakenteen käyttäytymistä käyttötilassa. Lähtökohtana tässä on se, että suhteellisuusrajaa ei ylitetä, ja näin pysytään jännitys-muodonmuutoskäyrän lineaarisella alueella.

Jos halutaan tarkastella rakenteen käyttäytymistä koko kuormitusalueella tai tutkia sitä, minkälaisen kuorman se kestää, joudutaan Hooken lain otaksumasta (1.1) luopumaan. Tällöin jännityksen ja venymän riippuvuus esitetään muodossa

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad (1.2)$$

Seuraavassa tarkastelussa rajoitutaan kuormitustason suhteen symmetrisiin sauvoihin.

Teknisen taivutusteorian (Bernoulli-Euler palkki) mukaan poikkileikkauksen venymä jakautuu lineaarisesti sauvan korkeussuunnassa. Sille voidaan siis kirjoittaa

$$\varepsilon(y) = \varepsilon + \kappa y, \quad (1.3)$$

missä ε on palkin (pintakeskiö)akselin venymä ja κ on sen käyristymä.

Poikkileikkauksen jännitysresultantit ovat normaalivoima, leikkausvoima ja taivutusmomentti. Ne ovat poikkileikkauksessa vaikuttavien jännitysten redusointitulos sen pintakeskiöön. Toisin sanoen **normaalivoima on poikkileikkauksessa vaikuttavan normaalijännitys jakauman resultantti**, joten sille voidaan kirjoittaa

$$N = \int_A \sigma dA \quad (1.4)$$

jännitysten redusointitulos sen pintakeskiöön, **leikkausvoima on poikkileikkauksessa vaikuttavan leikkausjännitys jakauman resultantti**, joten sille voidaan kirjoittaa

$$Q = \int_A \tau dA \quad (1.5)$$

ja *taivutusmomentti on poikkileikkauksessa vaikuttavan normaalijännitys jakauman rezultoiva momentti pintakeskiön kautta kulkevan akselin (z-akselin) suhteen*, joten sille voidaan kirjoittaa

$$M = \int_A \sigma y dA \quad (1.6)$$

Näissä kaavoissa poikkileikkauksessa oleva y, z -koordinaatisto on siis ajateltu sellaiseksi, että sen origo sijaitsee poikkileikkauksen pintakeskiössä ja y -akseli yhtyy poikkileikkauksen symmetriatasoon. Poikkileikkauksen materiaalin ollessa homogeenista, samalla tavalla kuin venymä on kaavan (1.3) mukaan vain y :n funktio, on myös jännitys σ kaavan (1.2) perusteella pelkästään koordinaatin y funktio. Tämän vuoksi pinta-alkio dA kaavoissa (1.4) ja (1.6) voidaan esittää muodossa

$$dA = b(y)dy, \quad (1.7)$$

missä $b(y)$ on poikkileikkauksen korkeusasemasta riippuva leveys. Samanaikaisesti myös integrointialue muuttuu osaksi y -akselia rajojen ollessa poikkileikkauksen ylä- ja alareunan y -koordinaatit.

Palkin, johon kohdistuu vain poikittaisia kuormia, poikkileikkauksessa ei vaikuta normaalivoimaa, eli

$$N = 0. \quad (1.8)$$

Tällöin sanotaan, että poikkileikkaus on **puhtaan taivutuksen** alainen, ja ehto (1.8) voidaan kutsua puhtaan taivutuksen ehdoksi. Statiikasta tiedämme että, jos voimasysteemi (tässä tapauksessa poikkileikkauksen normaalijännitys σ) redusoituu pelkäksi momentiksi, tämä momentti on riippumaton redusointipisteestä. Tämä merkitsee sitä, että taivutusmomentti voidaan puhtaan taivutuksen tapauksessa laskea normalijännityksen σ rezultoivana momenttina muunkin akselin, kuin poikkileikkauksen pintakeskiöakselin, suhteen. Kaavaa (1.6) voidaan siis tällöin käyttää myös silloin, kun y, z -koordinaatiston z -akseli yhtyy esimerkiksi poikkileikkauksen neutraaliakseliin tai vaikkapa sen yläreunaan.

Seuraavassa rajoitutaan pääasiassa puhtaaseen taivutukseen. Etsitään ratkaisua kahteen perustehtävään: (a) Kuinka voidaan määrittää annettua

taivutusmomentin arvoa M vastaava poikkileikkauksen jännitys jakauma $\sigma(y)$, jotta epälineaarista materiaalista koostuvan staattisesti määrätyn palkin jännitystila voitaisiin hallita. (b) Kuinka voidaan määrittää poikkileikkauksen käyrityksen ja taivutusmomentin riippuvuus $\kappa = \kappa(M)$, jotta voitaisiin laskea staattisesti määrätyn, epälineaarisen palkin taipuma (käyttäen esimerkiksi yksikkövoimamenetelmää). Lopuksi tarkastellaan murtorajatilaa, jossa palkin poikkileikkaus menettää kantokykynsä, ja selostetaan kuinka kimmoisen ideaaloplastisen poikkileikkauksen ns. **täysplastinen momentti** voidaan määrittää. Tarkastelut suoritetaan pääasiassa esimerkkien valossa.

Tarkastellaan tässä kertauksen vuoksi, kuinka nämä perustehtävät ratkeavat lineaarisesti kimmoisen materiaalin tapauksessa. Hookeen laista (1.1) ja venymän lausekkeesta (1.3) seuraa jännitykselle

$$\sigma(y) = E(\varepsilon + \kappa y). \quad (1.9)$$

Sijoittamalla tämä normaalivoiman ja taivutusmomentin määrittelykaavoihin (1.4) ja (1.6) saadaan

$$N = E\varepsilon \int_A dA + E\kappa \int_A y dA = EA\varepsilon + ES\kappa \quad (1.10)$$

$$M = E\varepsilon \int_A y dA + E\kappa \int_A y^2 dA = ES\varepsilon + EI\kappa \quad (1.11)$$

missä

$$A = \int_A dA, \quad S = \int_A y dA, \quad I = \int_A y^2 dA \quad (1.12)$$

ovat poikkipinnan ala, sen staattinen momentti ja sen jäyhyysmomentti pintakeskiöakselin (z -akseli) suhteen. Staattiselle momentille pintakeskiöakselin suhteen on voimassa $S = 0$, joten päädytään seuraaviin normaali-voiman ja akselin venymän sekä taivutusmomentin ja käyrityksen välisiin yhteyksiin:

$$N = EA\varepsilon \quad (1.13)$$

ja

$$M = EI\kappa. \quad (1.14)$$

Jos nyt kysymyksessä on *puhdas taivutus*, ehdosta (1.8) seuraa palkin akselin venymälle tulos $\varepsilon = 0$. Käyritymän ja taivutusmomentin yhteydeksi saadaan kaavasta (1.14)

$$\kappa = \frac{M}{EI}. \quad (1.15)$$

Sijoittamalla tämä ja akselin venymä $\varepsilon = 0$ jännityksen lausekkeeseen (1.9) saadaan poikkileikkauksen jännitysjaumalle tulos

$$\sigma(y) = \frac{M}{I} y. \quad (1.16)$$

Nämä kaksi viimeistä kaavaa ovat ratkaisu esitettyihin perustehtäviin (a) ja (b) lineaarisesti kimmoisen materiaalin tapauksessa, kun kysymyksessä on puhdas taivutus.

Jos kysymyksessä on *normaalivoiman ja taivutusmomentin kuormittama poikkileikkaus*, yhteyksistä (1.13) ja (1.14) seuraa akselin venymän ja normaalivoiman sekä käyritymän ja taivutusmomentin yhteyksiksi

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}, \quad \kappa = \frac{M}{EI}. \quad (1.17)$$

Sijoittamalla nämä jännityksen lausekkeeseen (1.9) saadaan poikkileikkauksen jännitysjaumalle tulos

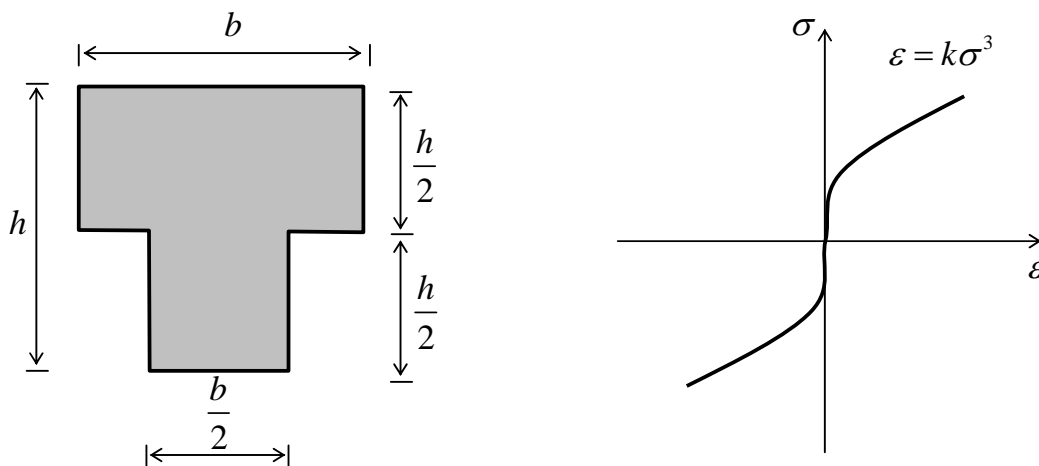
$$\sigma(y) = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y. \quad (1.18)$$

2. Epälineaarista materiaalista koostuvan puhtaan taivutuksen alaisen poikkileikkauksen jännitykset ja vaste

2.1 Kuormitustason suhteen symmetrinen poikkileikkaus

Tarkastellaan aluksi palkkia, joka on pystytason (kuormitustaso KT , x, y -taso) suhteen symmetrinen, mutta vaakatason suhteen ei. Tälle tehtävälle on ominaista, että aluksi joudutaan määrittämään neutraaliakselin (NA) asema puhtaan taivutuksen ehtoa $N = 0$ hyväksi käyttäen. Ensinnäkin käsittelemme esimerkin, jossa jännitys-muodonmuutosriippuvuus voidaan esittää yksinkertaisen polynomin avulla.

Esimerkki 2.1: Tarkastellaan palkkia, jonka poikkileikkaus ja jännitys-muodonmuutoskuvio ovat kuvan mukaiset. Määritetään (a) käyristymän riippuvuus taivutusmomentista, (b) taivutusmomenttia M vastaava poikkileikkauksen jännitys-jakauma sekä (c) suurin ja pienin jännitys.

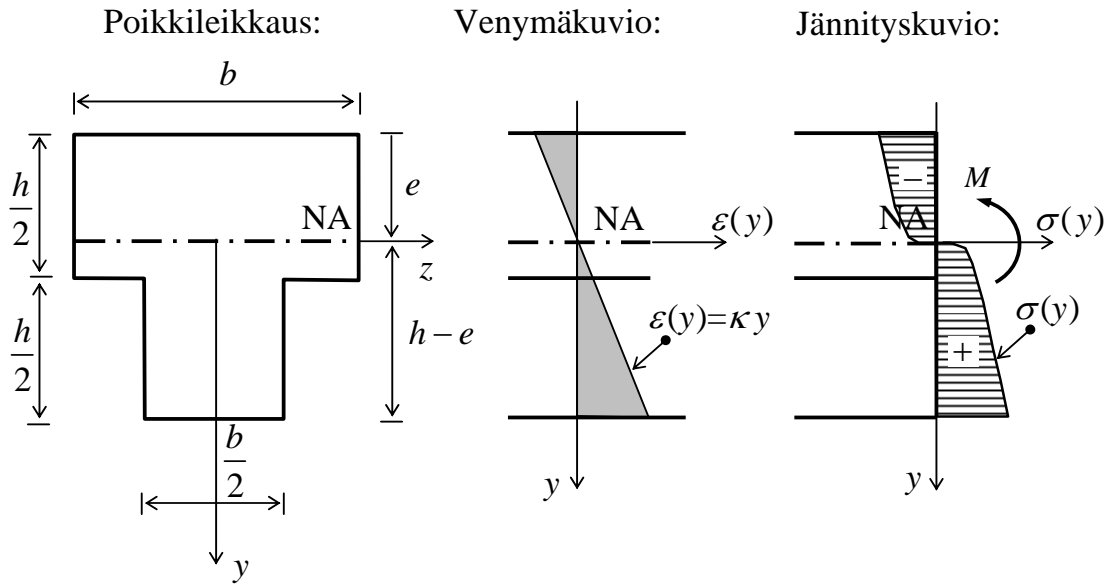


Jännitys-venymäriippuvuus:

$$\epsilon = k\sigma^3 \Rightarrow \sigma = \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}\epsilon^{\frac{1}{3}}$$

Venymäjakaumaa $\epsilon(y) = \kappa y$ vastaava jännitys-jakauma:

$$\sigma(y) = \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$



Normaalivoima:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma(y) dA = \int_{-e}^{h-e} \sigma(y) b(y) dy = \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} \sigma(y) b dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} \sigma(y) \frac{b}{2} dy \\
 &= \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} b dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} \frac{b}{2} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b \left(2 \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} y^{\frac{1}{3}} dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} y^{\frac{1}{3}} dy \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b \left[2 \left| \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} \right|_{-e}^{\frac{h-e}{2}} + \left| \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} \right|_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} \right] \\
 &= \frac{3}{8} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b \left[2 \left(\frac{h}{2} - e \right)^{\frac{4}{3}} - 2e^{\frac{4}{3}} + (h-e)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{h}{2} - e \right)^{\frac{4}{3}} \right] \\
 &= \frac{3}{8} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b \left[\left(\frac{h}{2} - e \right)^{\frac{4}{3}} - 2e^{\frac{4}{3}} + (h-e)^{\frac{4}{3}} \right]
 \end{aligned}$$

Neutraaliakselin asema:

$$\begin{aligned}
 N = 0 &\Rightarrow \left(\frac{h}{2} - e \right)^{\frac{4}{3}} - 2e^{\frac{4}{3}} + (h-e)^{\frac{4}{3}} = 0 \\
 &\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{h} \right)^{\frac{4}{3}} - 2 \left(\frac{e}{h} \right)^{\frac{4}{3}} + \left(1 - \frac{e}{h} \right)^{\frac{4}{3}} = 0.
 \end{aligned}$$

Määritetään yhtälön ratkaisu laskemalla sen vasemman puolen

$$f\left(\frac{e}{h}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{h}\right)^{\frac{4}{3}} - 2\left(\frac{e}{h}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(1 - \frac{e}{h}\right)^{\frac{4}{3}}$$

arvoja suhteen e/h eri arvoilla kunnes se on riittävällä tarkkuudella nolla. Saadaan

e/h	f
0,3	0,3368
0,4	-0,0369
0,39	$1,629 \cdot 10^{-4}$
0,391	$-3,555 \cdot 10^{-3}$
0,3905	$-1,696 \cdot 10^{-3}$
0,3901	$-2,089 \cdot 10^{-4}$

$$\Rightarrow e = \underline{0,390h}.$$

Taivutusmomentti:

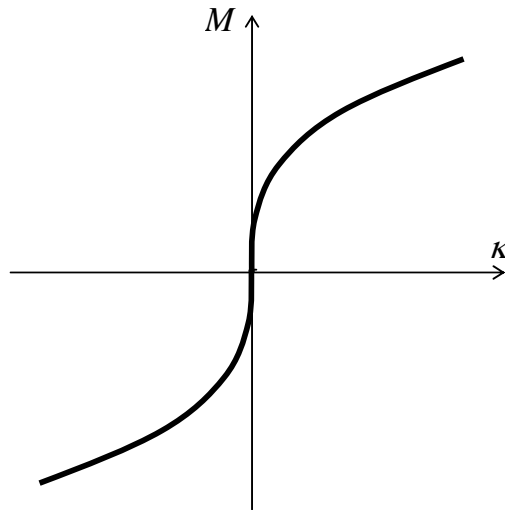
$$\begin{aligned} M &= \int_A \sigma(y) y dA = \int_{-e}^{h-e} \sigma(y) y b(y) dy = \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} \sigma(y) y b dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} \sigma(y) y \frac{b}{2} dy \\ &= \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} y b dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} y \frac{b}{2} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b \left(2 \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} y^{\frac{4}{3}} y dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} y^{\frac{4}{3}} y dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b \left[2 \left. \left(\frac{3}{7} y^{\frac{7}{3}}\right) \right|_{-e}^{\frac{h-e}{2}} + \left. \left(\frac{3}{7} y^{\frac{7}{3}}\right) \right|_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} \right] \\ &= \frac{3}{14} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b \left[2 \left(\frac{h}{2} - e\right)^{\frac{7}{3}} + 2e^{\frac{7}{3}} + (h-e)^{\frac{7}{3}} - \left(\frac{h}{2} - e\right)^{\frac{7}{3}} \right] \\ &= \frac{3}{14} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b h^{\frac{7}{3}} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{e}{h}\right)^{\frac{7}{3}} + 2\left(\frac{e}{h}\right)^{\frac{7}{3}} + \left(1 - \frac{e}{h}\right)^{\frac{7}{3}} \right] \\ &= \frac{3}{14} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b h^{\frac{7}{3}} \left[\left(\frac{1}{2} - 0,390\right)^{\frac{7}{3}} + 2(0,390)^{\frac{7}{3}} + (1 - 0,390)^{\frac{7}{3}} \right] \\ \Rightarrow M &= 0,1165 \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b h^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

Käyristymän ja taivutusmomentin yhteys:

$$M = 0,1165 \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b h^{\frac{7}{3}} \Rightarrow \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{M}{0,1165 b h^{\frac{7}{3}}} \Rightarrow \kappa = k \left(\frac{M}{0,1165 b h^{\frac{7}{3}}}\right)^3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\kappa = 632,4 \frac{k}{b^3 h^7} M^3}}$$

Nähdään, että käyristymän ja taivutusmomentin riippuvuus on kolmannen asteen polynomi. Oheinen kuva havainnollistaa asiaa.



Jännitysjaakauma:

$$\sigma(y) = \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{0,1165^3 b^3 h^7} M^3\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \frac{M}{0,1165 b h^{\frac{7}{3}}} y^{\frac{1}{3}} = 8,584 \frac{M}{b h^{\frac{7}{3}}} y^{\frac{1}{3}}$$

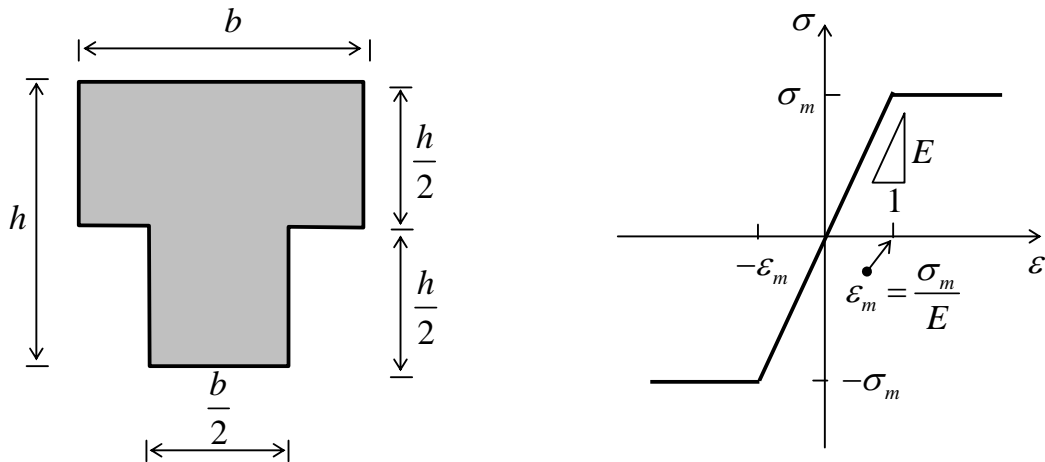
$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma(y) = 8,584 \frac{M}{b h^2} \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{3}}}}$$

Maksimi- ja minimijännitys:

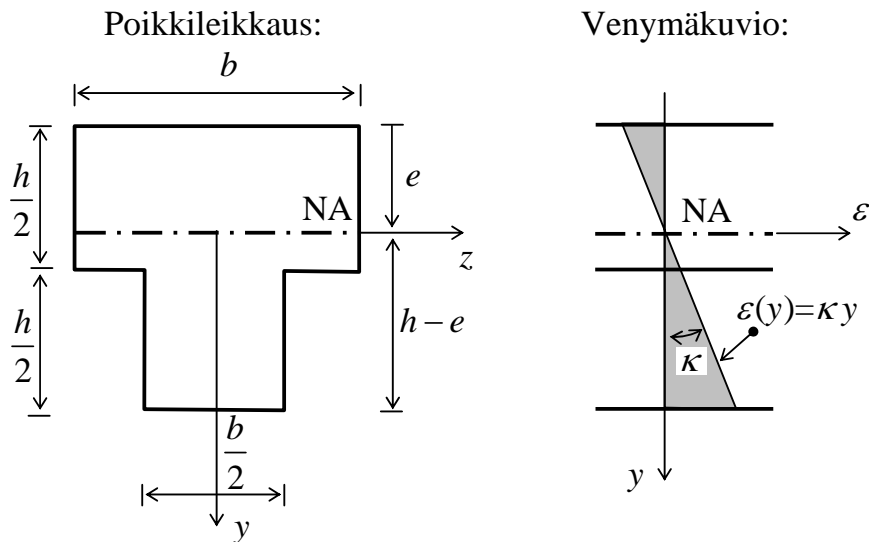
$$\sigma_{\max} = \sigma(h - e) = 8,584 \frac{M}{b h^3} (h - e)^{\frac{1}{3}} = 8,584 \frac{M}{b h^3} (h - 0,390h)^{\frac{1}{3}} = 7,280 \frac{M}{b h^2}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma(-e) = 8,584 \frac{M}{b h^2} (-e)^{\frac{1}{3}} = 8,584 \frac{M}{b h^3} (-0,390h)^{\frac{1}{3}} = -6,272 \frac{M}{b h^2}$$

Esimerkki 2.2: Tarkastellaan palkkia, jonka materiaali on kimmoista ja ideaaliplastista. Sen poikkileikkaus ja jännitys-muodonmuutoskuvio ovat kuvan mukaiset. Määritetään käyristymän κ riippuvuus taivutusmomentista M , sekä ns. **myötökäyristymä** κ_m ja **myötömomentti** M_m , jotka ovat ne käyristymän ja taivutusmomentin arvot, jolla poikkileikkaus alkaa myötää. Määritetään vielä rajatarkasteluna $\kappa \rightarrow \infty$ poikkileikkauksen ns. **täysplastinen momentti** M_p , joka on se taivutusmomentin arvo, jolla poikkileikkaus menettää kantokykynsä. Tutkitaan lopuksi, kuinka poikkileikkauksen jännitys jakauma voidaan määrittää, kun taivutusmomentilla on tietty arvo, esimerkkinä $M = 0,15\sigma_m b h^2$.

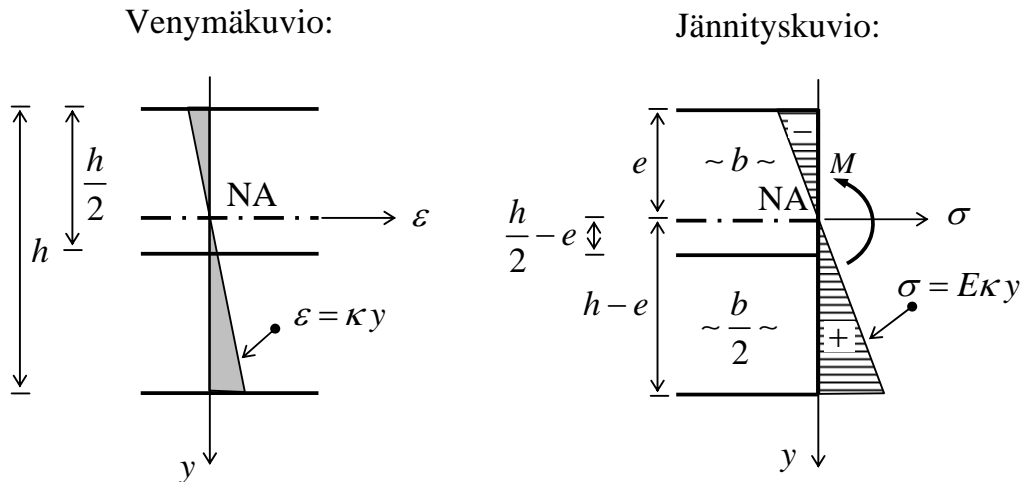


Tarkastellaan palkkia tilanteessa, jossa taivutusmomentti M on positiivinen. Koska jännitys-muodonmuutoskäyrä on vedon ja puristuksen suhteen symmetrinen, saadaan tämän tuloksen perusteella pääteltyä myöskin negatiivisen taivutusmomentin tapaus.



Huomautus: Edellisen sivun kuvassa on esitetty poikkileikkaus ja suora-viivainen venymäkuvio. Koska käyritymä κ on venymäsuoran kulma-kerroin, voidaan sen myös ymmärtää olevan tämän suoran ja y-akselin välinen (pieni) kulma.

(a) Tilanne, jossa poikkileikkaus ei vielä myödy:



Tällöin poikkileikkauksen suurin venymä (alareunassa) ei ylitä myötö-venymää ε_m eikä suurin jännitys ylitä myötörajaa σ_m . Käyttäytyminen on siten koko poikkileikkauksen alueella lineaarisesti kimmoista.

Jännitys:

$$\sigma(y) = E\varepsilon(y) = E\kappa y$$

Normaalivoima:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA = \int_{-e}^{h-e} \sigma(y)b(y)dy = \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} \sigma(y)b dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} \sigma(y)\frac{b}{2} dy \\ &= Eb\kappa \left(\int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} y dy + \frac{1}{2} \int_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} y dy \right) = Eb\kappa \left[\left| \frac{y^2}{2} \right|_{-e}^{\frac{h-e}{2}} + \frac{1}{2} \left| \frac{y^2}{2} \right|_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} \right] \\ &= Eb\kappa \left[\frac{1}{4} \left(\frac{h}{2} - e \right)^2 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{4} (h-e)^2 \right] \\ &= \frac{Eb\kappa}{4} \left(-3e + \frac{5}{4}h \right) \end{aligned}$$

Puhtaan taivutuksen ehdosta seuraa nyt neutraaliakselin asemalle:

$$N = 0 \Rightarrow -3e + \frac{5}{4}h = 0 \Rightarrow e = \underline{\underline{\frac{5}{12}h}}$$

Taivutusmomentti-käyritysmäyhteys:

$$\begin{aligned} M &= \int_A \sigma y dA = \int_{-e}^{h-e} \sigma(y) y b(y) dy = \int_{-e}^{\frac{h}{2}-e} \sigma(y) y b dy + \int_{\frac{h}{2}-e}^{h-e} \sigma(y) y \frac{b}{2} dy \\ &= Eb\kappa \left(\int_{-e}^{\frac{h}{2}-e} y^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\frac{h}{2}-e}^{h-e} y^2 dy \right) = Eb\kappa \left[\left. \frac{y^3}{3} \right|_{-e}^{\frac{h}{2}-e} + \frac{1}{2} \left. \frac{y^3}{3} \right|_{\frac{h}{2}-e}^{h-e} \right] \\ &= Eb\kappa \left[\frac{1}{6} \left(\frac{h}{2} - \frac{5h}{12} \right)^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{5h}{12} \right)^3 + \frac{1}{6} \left(h - \frac{5h}{12} \right)^3 \right] \\ \Rightarrow M &= \underline{\underline{\frac{11}{192} Ebh^3 \kappa}} \end{aligned}$$

Tällä lineaarisesti kimmoisella alueella käyritysmä-taivutusmomentti-yhteys ja jännitys jakauma saadaan yksinkertaisesti

$$\underline{\underline{\kappa = \frac{192}{11Eb^3} M}}$$

$$\sigma(y) = E\kappa y = \frac{192M}{11bh^3} y.$$

Huomautus: Koska tässä tapauksessa poikkileikkaus käyttäytyy lineaarisesti kimmoisesti, yllä olevat alleviivatut tulokset olisi helposti saatu tavanomaiseen tapaan määrittämällä poikkipinnan pintakeskiön etäisyys e yläreunasta sekä poikkipinnan jäyhyysmomentti $I = 11bh^3/192$, jonka avulla muut tulokset saadaan yhteyksistä $M = EI\kappa$, $\kappa = M/EI$ ja $\sigma = My/I$.

Määritetään nyt myötökäyritysmä κ_m , joka on se käyritysmän arvo, ja myötömomentti M_m , joka on sen taivutusmomentin arvo, jolla poikkileikkaus alkaa myötää. Myötääminen alkaa alapinnasta, joten saadaan

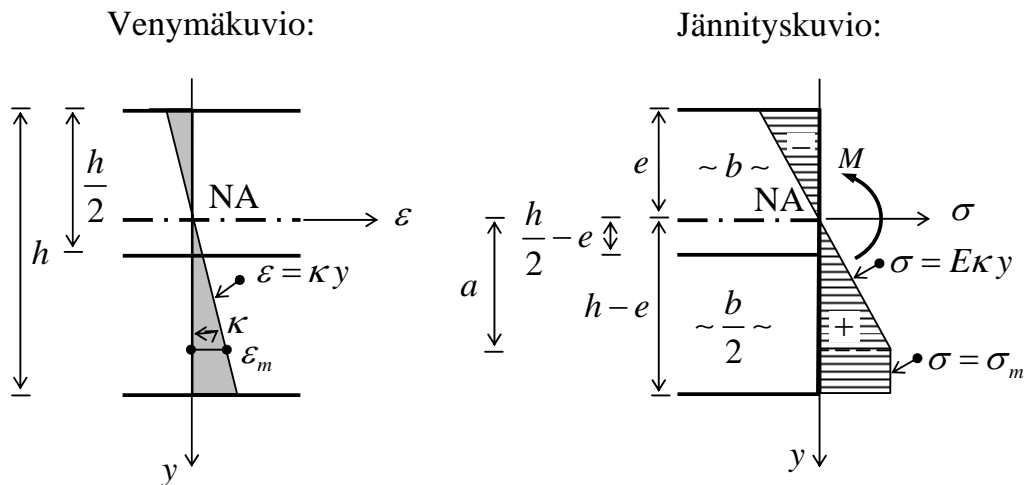
$$\varepsilon_{ala} \equiv \kappa_m (h - e) = \varepsilon_m$$

$$\Rightarrow \kappa_m = \frac{\varepsilon_m}{h - e} = \frac{\sigma_m / E}{h - \frac{5}{12}h} = \frac{12 \sigma_m}{7 Eh}, \quad (a)$$

$$M_m = \frac{11Eb^3}{192} \kappa_m = \frac{11Eb^3}{192} \frac{12 \sigma_m}{7 Eh} = \frac{11}{112} \sigma_m b h^2. \quad (b)$$

Tämän tuloksen avulla on käyritymä-taivutusmomenttikäyrän lineaarinen, suora osa helppo pirtää yhdistämällä pisteet $(0,0)$ ja (κ_m, M_m) .

(b) Tilanne, jossa poikkieikkauksen alareuna myötää:



Nyt myötövenymä ε_m ylittyy poikkileikkauksen alareunassa, mutta ei vielä yläreunassa. Käyttäytyminen on siten poikkileikkauksen yläosassa $y \leq a$ lineaarisesti kimmoista mutta alaosaa $y \geq a$ on plastisoitunut jännityksen ollessa myötörajan σ_m suuruinen. Kuvissa symbolilla a on merkitty plastisoituneen alueen yläreunan etäisyyttä neutraaliakselista. Venymäkuvion perusteella sille saadaan

$$\varepsilon(a) \equiv \kappa a = \varepsilon_m \Rightarrow a = \frac{\varepsilon_m}{\kappa} = \frac{\sigma_m}{E\kappa}$$

Jännitys:

$$\sigma(y) = E\kappa y, \quad \text{kun } -e \leq y \leq a,$$

$$\sigma(y) = \sigma_m, \quad \text{kun } a \leq y \leq h - e.$$

Normaalivoima:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma dA = \int_{-e}^{h-e} \sigma(y)b(y)dy = \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} \sigma(y)b dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^a \sigma(y)\frac{b}{2} dy + \int_a^{h-e} \sigma(y)\frac{b}{2} dy \\
 &= Eb\kappa \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} y dy + \frac{1}{2} Eb\kappa \int_{\frac{h-e}{2}}^a y dy + \frac{1}{2} \sigma_m b \int_a^{h-e} dy \\
 &= Eb\kappa \left(\int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} y dy + \frac{1}{2} \int_{\frac{h-e}{2}}^a y dy + \frac{1}{2} \overbrace{\sigma_m}^a \int_a^{h-e} dy \right) \\
 &= Eb\kappa \left(\left. \frac{y^2}{2} \right|_{-e}^{\frac{h-e}{2}} + \frac{1}{2} \left. \frac{y^2}{2} \right|_{\frac{h-e}{2}}^a + \frac{1}{2} a \left. y \right|_a^{h-e} \right) \\
 &= Eb\kappa \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - e \right)^2 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{h}{2} - e \right)^2 + \frac{1}{2} a(h-e) - \frac{1}{2} a^2 \right] \\
 &= \frac{1}{4} Eb\kappa \left[-e^2 - (h+2a)e - a^2 + 2ah + \frac{h^2}{4} \right]
 \end{aligned}$$

Puhtaan taivutuksen ehdosta seuraa nyt neutraaliakselin asemalle:

$$\begin{aligned}
 N = 0 &\Rightarrow -e^2 - (h+2a)e - a^2 + 2ah + \frac{h^2}{4} = 0 \\
 \Rightarrow e &= -\frac{h}{2} - a \pm \sqrt{\left(\frac{h}{2} + a\right)^2 + \frac{h}{4} + 2ah - a^2} \\
 \Rightarrow e &= \underline{\underline{-\frac{h}{2} - a + \sqrt{\frac{h^2}{2} + 3ah}}}. \quad (c)
 \end{aligned}$$

Taivutusmomentti:

$$\begin{aligned}
 M &= \int_A \sigma y dA = \int_{-e}^{h-e} \sigma(y)yb(y)dy \\
 &= \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} \sigma(y)yb dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^a \sigma(y)y\frac{b}{2} dy + \int_a^{h-e} \sigma(y)y\frac{b}{2} dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Eb\kappa \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} y^2 dy + \frac{1}{2} Eb\kappa \int_{\frac{h-e}{2}}^a y^2 dy + \frac{1}{2} \sigma_m b \int_a^{h-e} y dy \\
&= \sigma_m b \left(\frac{\frac{1}{a}}{\sigma_m} \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} y^2 dy + \frac{\frac{1}{a}}{2 \sigma_m} \int_{\frac{h-e}{2}}^a y^2 dy + \frac{1}{2} \int_a^{h-e} y dy \right) \\
&= \sigma_m b \left(\frac{1}{a} \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-e}^{\frac{h-e}{2}} + \frac{1}{2a} \left| \frac{y^3}{3} \right|_{\frac{h-e}{2}}^a + \frac{1}{2} \left| \frac{y^2}{2} \right|_a^{h-e} \right) \\
&= \sigma_m b \left[\frac{1}{3a} \left(\frac{h}{2} - e \right)^3 + \frac{1}{3a} e^3 + \frac{1}{6} a^2 - \frac{1}{6a} \left(\frac{h}{2} - e \right)^3 + \frac{1}{4} (h-e)^2 - \frac{1}{4} a^2 \right]
\end{aligned}$$

⇒

$$M = \sigma_m b \left[\frac{1}{6a} \left(\frac{h}{2} - e \right)^3 + \frac{1}{3a} e^3 - \frac{1}{12} a^2 + \frac{1}{4} (h-e)^2 \right]. \quad (d)$$

Käyritymä-taivutusmomenttikuvio voidaan nyt piirtää laskemalla pisteitä (κ, M) seuraavasti. Tiettyä arvoa κ vastaava pituus a saadaan kaavalla $a = \sigma_m / (E\kappa)$. Neutraaliakselin asema e saadaan tämän jälkeen kaavasta (c) ja M tämän jälkeen kaavasta (d).

Määritetään lopuksi se käyritymän arvo κ_1 , jolla myös poikkipinnan yläreuna alkaa myötää. Tällöin $a = e$, joten puhtaan taivutuksen ehdosta seuraa

$$\begin{aligned}
a^2 + (h+2a)a + a^2 - 2ah - \frac{h^2}{4} = 0 &\Rightarrow a^2 - \frac{h}{4}a - \frac{h^2}{16} = 0 \\
\Rightarrow a_1 = \frac{h}{8}(1 + \sqrt{5})
\end{aligned}$$

Nyt saadaan käyritysmälle κ_1 tulos

$$\kappa_1 = \frac{\sigma_m}{Ea_1} = \frac{8}{1 + \sqrt{5}} \frac{\sigma_m}{Eh} = 2,472 \frac{\sigma_m}{Eh}. \quad (e)$$

Kun siis $\kappa_m \leq \kappa \leq \kappa_1$ saadaan käyristymä-taivutusmomenttiyhteys edellä kuvatulla tavalla.

(c) Tilanne, jossa sekä poikkileikkauksen ylä- että alaosa myötäävät:

Nyt myötövenymä ε_m ylittyy sekä poikkileikkauksen ala- että yläreunassa. Käyttäytyminen on siten poikkileikkauksen keskiosassa $-a \leq y \leq a$ lineaarisesti kimmoista, mutta yläosa $y \leq -a$ on plastisoitunut jännityksen ollessa $-\sigma_m$ ja alaosa $y \geq a$ on plastisoitunut jännityksen ollessa σ_m .

Jännitys:

$$\sigma(y) = -\sigma_m, \quad \text{kun } -e \leq y \leq -a,$$

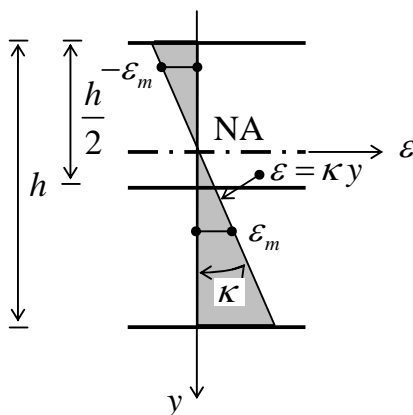
$$\sigma(y) = E\kappa y, \quad \text{kun } -a \leq y \leq a,$$

$$\sigma(y) = \sigma_m, \quad \text{kun } a \leq y \leq h - e.$$

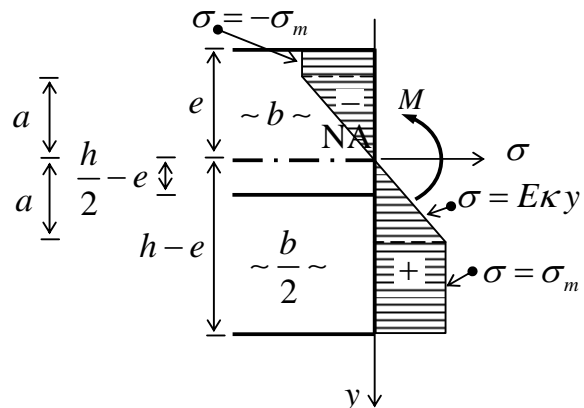
Tässä tapauksessa joudumme vielä käsittelemään erikseen tapauksen $a \geq h/2 - e$, jossa materiaalikäyttäytyminen poikkileikkauksen leveyden muutoskohdassa on vielä kimmoista ja tapauksen $a \leq h/2 - e$, jossa materiaalikäyttäytyminen poikkileikkauksen leveyden muutoskohdassa on plastista.

Tapaus $a \geq h/2 - e$:

Venymäkuvio:



Jännityskuvio:



Normaalivoima:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma dA = \int_{-e}^{h-e} \sigma(y)b(y)dy \\
 &= \int_{-e}^{-a} \sigma(y)b dy + \int_{-a}^{\frac{h-e}{2}} \sigma(y)b dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^a \sigma(y)\frac{b}{2} dy + \int_a^{h-e} \sigma(y)\frac{b}{2} dy \\
 &= -\sigma_m b \int_{-e}^{-a} y dy + E\kappa b \int_{-a}^{\frac{h-e}{2}} y dy + \frac{1}{2} E\kappa b \int_{\frac{h-e}{2}}^a y dy + \frac{1}{2} \sigma_m b \int_a^{h-e} dy \\
 &= E\kappa b \left(-\frac{\overbrace{\sigma_m}^a}{E\kappa} \int_{-e}^{-a} dy + \int_{-a}^{\frac{h-e}{2}} y dy + \frac{1}{2} \int_{\frac{h-e}{2}}^a y dy + \frac{1}{2} \frac{\overbrace{\sigma_m}^a}{E\kappa} \int_a^{h-e} dy \right) \\
 &= E\kappa b \left(-a \Big|_y^{-e} + \Big|_{-a}^{\frac{h-e}{2}} \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \Big|_{\frac{h-e}{2}}^a \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} a \Big|_a^{h-e} \right) \\
 &= E\kappa b \left[a^2 - ae + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - e \right)^2 - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{h}{2} - e \right)^2 + \frac{1}{2} a(h-e) - \frac{1}{2} a^2 \right] \\
 &= \frac{1}{4} E\kappa b \left[e^2 - (h+6a)e + \frac{h^2}{4} + 2ah + a^2 \right].
 \end{aligned}$$

Puhtaan taivutuksen ehdosta seuraa nyt neutraaliakselin asemalle:

$$N = 0 \Rightarrow e^2 - (h+6a)e + \frac{h^2}{4} + 2ah + a^2 = 0$$

\Rightarrow

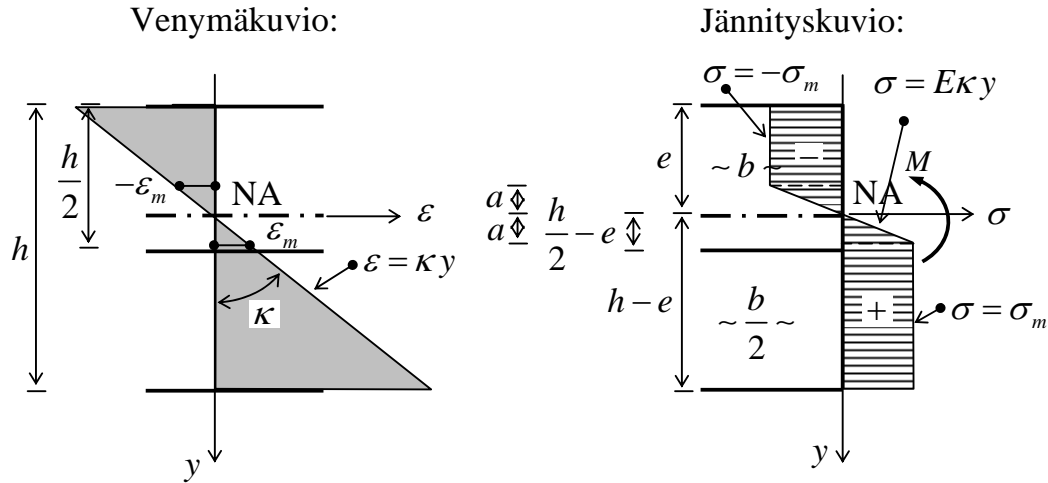
$$e = \frac{h}{2} + 3a \pm \sqrt{\frac{1}{4}(h+6a)^2 - \frac{h^2}{4} - 2ah - a^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{e = \frac{h}{2} + 3a - \sqrt{ah + 8a^2}}}. \quad (f)$$

Taivutusmomentti:

$$\begin{aligned}
 M &= \int_A \sigma y dA = \int_{-e}^{h-e} \sigma(y) y b(y) dy \\
 &= \int_{-e}^{-\frac{a}{2}} \sigma(y) y b dy + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{h-e}{2}} \sigma(y) y b dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^a \sigma(y) y \frac{b}{2} dy + \int_a^{h-e} \sigma(y) y \frac{b}{2} dy \\
 &= -\sigma_m b \int_{-e}^{-\frac{a}{2}} y dy + E\kappa b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{h-e}{2}} y^2 dy + \frac{1}{2} E\kappa b \int_{\frac{h-e}{2}}^a y^2 dy + \frac{1}{2} \sigma_m b \int_a^{h-e} y dy \\
 &= \sigma_m b \left(-\int_{-e}^{-\frac{a}{2}} y dy + \frac{1}{\sigma_m} \overbrace{E\kappa}^{\frac{1}{\sigma_m}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{h-e}{2}} y^2 dy + \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_m} \overbrace{E\kappa}^{\frac{1}{\sigma_m}} \int_{\frac{h-e}{2}}^a y^2 dy + \frac{1}{2} \int_a^{h-e} y dy \right) \\
 &= \sigma_m b \left(-\left. \frac{y^2}{2} \right|_{-e}^{-\frac{a}{2}} + \frac{1}{a} \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{h-e}{2}} + \frac{1}{2a} \left. \frac{y^3}{3} \right|_{\frac{h-e}{2}}^a + \frac{1}{2} \left. \frac{y^2}{2} \right|_a^{h-e} \right) \\
 &= \sigma_m b \left[-\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{3a} (h-e)^3 + \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{6} a^2 - \frac{1}{6a} (h-e)^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} (h-e)^2 - \frac{1}{4} a^2 \right] \\
 \Rightarrow M &= \underline{\underline{\sigma_m b \left[\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{6a} (h-e)^3 + \frac{1}{4} (h-e)^2 \right]}}. \tag{g}
 \end{aligned}$$

Tapaus $a \leq h/2 - e$:



Normaalivoima:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma dA = \int_{-e}^{h-e} \sigma(y)b(y)dy \\
 &= \int_{-e}^{-a} \sigma(y)b dy + \int_{-a}^a \sigma(y)b dy + \int_a^{\frac{h-e}{2}} \sigma(y)b dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} \sigma(y)\frac{b}{2} dy \\
 &= -\sigma_m b \int_{-e}^{-a} y dy + E\kappa b \int_{-a}^a y dy + \sigma_m b \int_a^{\frac{h-e}{2}} y dy + \frac{1}{2} \sigma_m b \int_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} dy \\
 &= \sigma_m b \left(-\int_{-e}^{-a} dy + \frac{E\kappa}{\sigma_m} \int_{-a}^a y dy + \int_a^{\frac{h-e}{2}} y dy + \frac{1}{2} \int_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} dy \right) \\
 &= \sigma_m b \left(-\left| y \right|_{-e}^{-a} + \frac{1}{a} \left| \frac{y^2}{2} \right|_{-a}^a + \left| y \right|_a^{\frac{h-e}{2}} + \frac{1}{2} \left| y \right|_{\frac{h-e}{2}}^{h-e} \right) \\
 &= \sigma_m b \left[a - e + \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} a + \frac{h}{2} - e - a + \frac{1}{2} (h - e) - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - e \right) \right] \\
 &= \sigma_m b \left(-2e + \frac{3}{4} h \right).
 \end{aligned}$$

Puhtaan taivutuksen ehdosta seuraa nyt neutraaliakselin asemalle:

$$N = 0 \Rightarrow -2e + \frac{3}{4}h = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{e = \frac{3}{8}h.}}$$

Taivutusmomentti:

$$\begin{aligned} M &= \int_A \sigma y dA = \int_{-e}^{h-e} \sigma(y) y b(y) dy \\ &= \int_{-e}^{-a} \sigma(y) y b dy + \int_{-a}^a \sigma(y) y b dy + \int_a^{\frac{h}{2}-e} \sigma(y) y dy + \int_{\frac{h}{2}-e}^{h-e} \sigma(y) y \frac{b}{2} dy \\ &= -\sigma_m b \int_{-e}^{-a} y dy + E\kappa b \int_{-a}^a y^2 dy + \sigma_m b \int_a^{\frac{h}{2}-e} y^2 dy + \frac{1}{2} \sigma_m b \int_{\frac{h}{2}-e}^{h-e} y dy \\ &= \sigma_m b \left(-\int_{-e}^{-a} y dy + \frac{\frac{1}{a}}{E\kappa} \int_{-a}^a y^2 dy + \int_a^{\frac{h}{2}-e} y dy + \frac{1}{2} \int_{\frac{h}{2}-e}^{h-e} y dy \right) \\ &= \sigma_m b \left(-\left| \frac{y^2}{2} \right|_{-e}^{-a} + \frac{1}{a} \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-a}^a + \left| \frac{y^2}{2} \right|_a^{\frac{h}{2}-e} + \frac{1}{2} \left| \frac{y^2}{2} \right|_{\frac{h}{2}-e}^{h-e} \right) \\ &= \sigma_m b \left[-\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - e \right)^2 - \frac{1}{2} a^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (h - e)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{h}{2} - e \right)^2 \right] \\ &= \sigma_m b \left[-\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{h}{2} - e \right)^2 + \frac{1}{4} (h - e)^2 \right] \\ &= \sigma_m b h^2 \left[-\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} h \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{h}{2} - \frac{3}{8} h \right)^2 + \frac{1}{4} \left(h - \frac{3}{8} h \right)^2 \right] \\ \Rightarrow \underline{\underline{M = \sigma_m b \left(\frac{11}{64} h^2 - \frac{1}{3} a^2 \right).}} \end{aligned} \tag{h}$$

Määritetään lopuksi se käyristymän arvo κ_2 , jolla poikkipinnan alaosan plastisoitunut alue ulottuu palkin leveyden muutoskohtaan. Saadaan

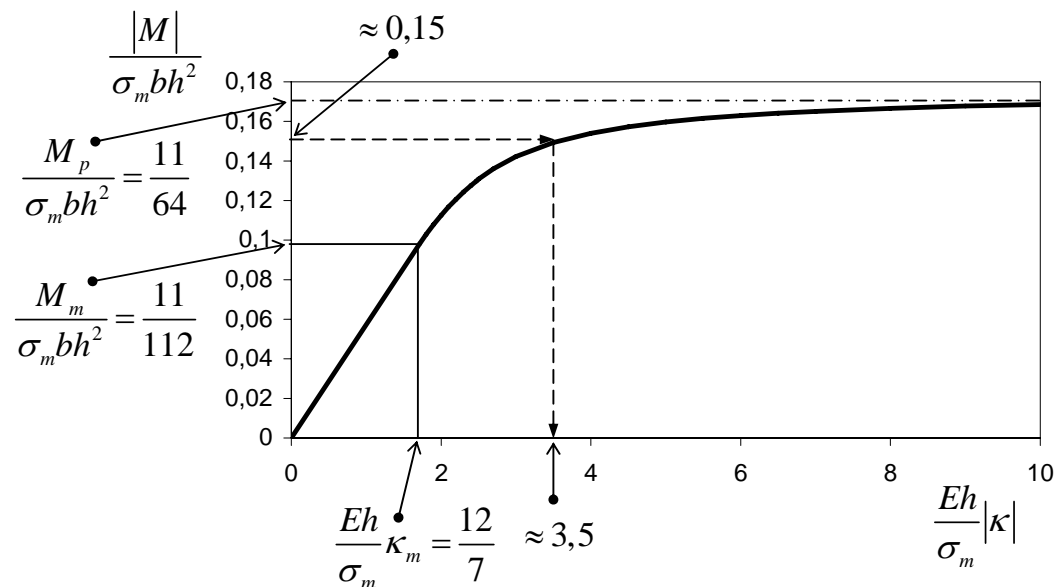
$$a_2 = \frac{h}{2} - e = \frac{h}{2} - \frac{3}{8}h = \frac{1}{8}h$$

$$\Rightarrow \kappa_2 = \frac{\sigma_m}{Ea_2} = 8 \frac{\sigma_m}{Eh}. \quad (\text{i})$$

Käyristymä-taivutusmomenttikuvio voidaan nyt piirtää laskemalla pisteitä κ, M seuraavasti. Tapaus $\kappa \leq \kappa_2$: Tiettyä arvoa κ vastaava pituus a saadaan kaavalla $a = \sigma_m / (E\kappa)$. Neutraaliakselin asema e saadaan tämän jälkeen kaavasta (f) ja M tämän jälkeen kaavalla (g). Tapaus $\kappa \geq \kappa_2$: Tiettyä arvoa κ vastaava pituus a saadaan kaavalla $a = \sigma_m / (E\kappa)$ ja M tämän jälkeen kaavalla (h).

Kun siis $\kappa_1 \leq \kappa \leq \infty$, saadaan käyristymä-taivutusmomenttiyhteys edellä kuvatulla tavalla. Näin olemme selvittäneet, kuinka käyristymä-taivutusmomenttikuvio määritetään kaikilla κ :n positiivisilla arvoilla.

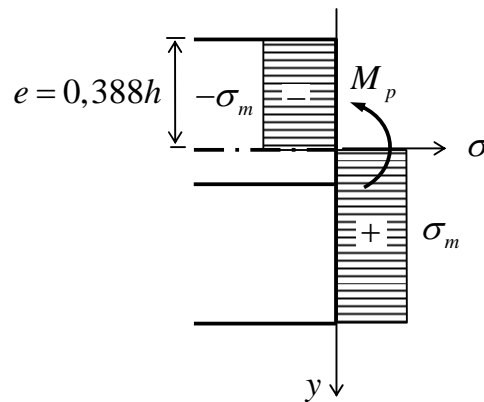
Tulos on esitetty oheisessa kuvassa. (Negatiiviset käyristymän ja taivutusmomentin arvot on sisällytetty tulokseen itseisarvomerkkien välityksellä.)



Määritetään seuraavaksi rajatarkastelulla poikkileikkauksen täysplastisen momentin M_p arvo. Kaavan (h) perusteella saadaan

$$M_p = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} M = \lim_{a \rightarrow 0} M = \lim_{a \rightarrow 0} [\sigma_m b (\frac{11}{64} h^2 - \frac{1}{3} a^2)] = \underline{\underline{\frac{11}{64} \sigma_m b h^2}}$$

Oheiseen kuvioon on piirretty poikkileikkauksen täysplastista momenttia M_p ja rajatilaa $\kappa \rightarrow \infty$ vastaava jännityskuvio.



Täysplastista momenttia vastaavan vaakasuora (ks. edellisen sivun kuva) on siten käyristymä-taivutusmomenttikuvion vaakasuora asymptootti.

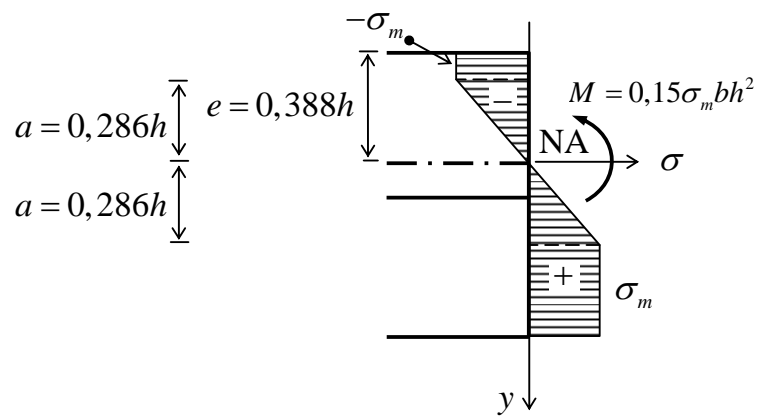
Lopuksi esitetään, kuinka määritetään taivutusmomenttia $M = 0,15 \sigma_m b h^2$ vastaava poikkileikkauksen jännitys jakauma. Tämä tapahtuu määrittämällä taivutusmomenttia M vastaava käyristymä κ , pituus a ja neutraaliakselin asema e . Kun nämä tunnetaan, on jännitys jakauma helppo konstruoida. Koska käyristymä-taivutusmomenttirippuvuus on (poikkileikkauksen ollessa osittain plastisoitunut) hankala kääntää, määritetään taivutusmomenttia vastaava käyristymä tässä likimain käyttäen laadittua käyristymä-taivutusmomenttikuviota (ks. edellisen sivun kuva). Saadaan

$$\frac{Eh}{\sigma_m} \kappa \approx 3,5 \Rightarrow \kappa = 3,5 \frac{\sigma_m}{Eh} \Rightarrow a = \frac{\sigma_m}{E\kappa} = \frac{h}{3,5} = 0,286h$$

Koska $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$ saadaan neutraaliakselin asemalle kaavan (f) avulla

$$e = 0,5h + 3 \cdot 0,286h - \sqrt{0,286h^2 + 8 \cdot (0,286h)^2} = \underline{\underline{0,388h}}$$

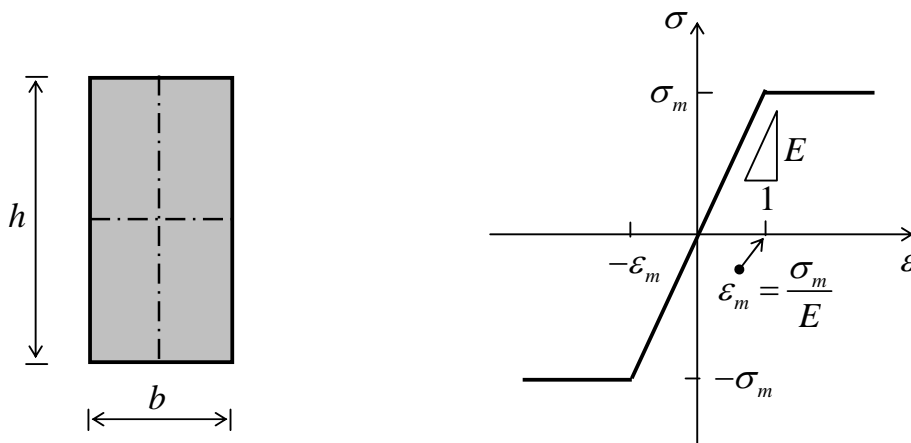
Oheiseen kuvioon on konstruoitu taivutusmomenttia $M = 0,15\sigma_m b h^2$ vastaava jännityskuvio:



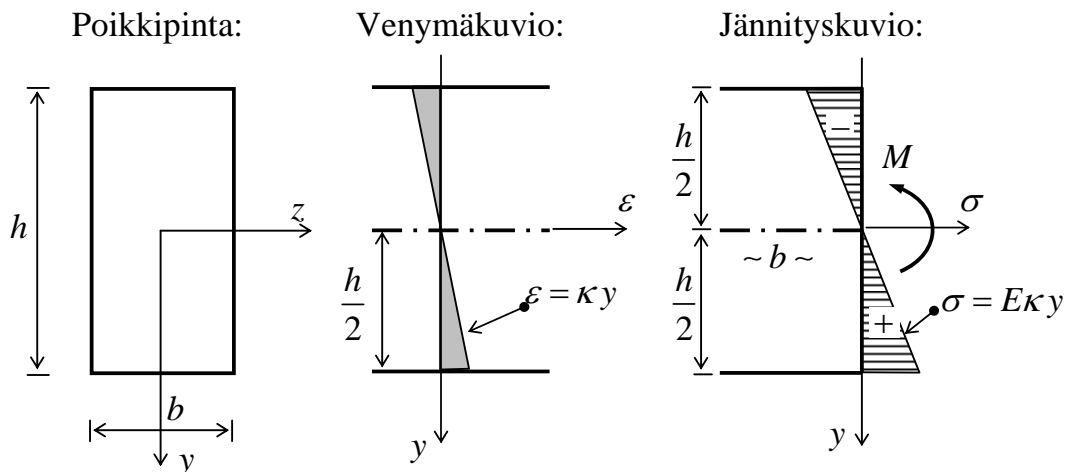
2.2 Kaksoissymmetrinen poikkileikkaus, jonka jännitys-muodonmuutoskäyrä on vedon ja puristuksen suhteen symmetrinen

Tarkastellaan nyt poikkileikkausta, joka on sekä pysty- että vaaka-akselin suhteen symmetrinen. Jos tämän lisäksi jännitys-muodonmuutoskäyrä on samanlainen sekä vedossa että puristuksessa, puhtaan taivutuksen ehto $N=0$ toteutuu, kun neutraaliakseli yhtyy vaakasuoraan symmetria-akseliin. Tässä tapauksessa käsittely yksinkertaistuu melkoisesti, koska neutraali-akselin aseman määrittäminen jää pois.

Esimerkki 2.3: Tarkastellaan suorakaidepalkkia, jonka materiaali on kimmoista ja ideaaliplastista. Sen poikkileikkaus ja jännitys-muodonmuutoskuvio ovat kuvan mukaiset. Määritetään käyristymän κ riippuvuus taivutusmomentista M . Määritetään lopuksi rajatarkasteluna $\kappa \rightarrow \infty$ poikkileikkauksen täysplastinen momentti M_p .



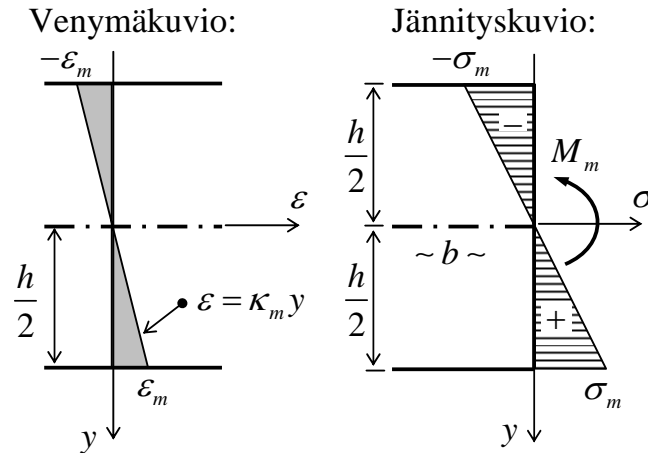
(a) Kimmoinen taivutus:



Taivutusmomentti:

$$M = \int_A \sigma y dA = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma y b dy = Eb\kappa \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = Eb\kappa \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = E \frac{bh^3}{12} \kappa. \quad (a)$$

Myötökäyrityelmä ja myötömomentti:



$$\varepsilon\left(\frac{h}{2}\right) \equiv \kappa_m \frac{h}{2} = \varepsilon_m \Rightarrow \kappa_m = 2 \frac{\varepsilon_m}{h} = \underline{\underline{2 \frac{\sigma_m}{Eh}}}.$$

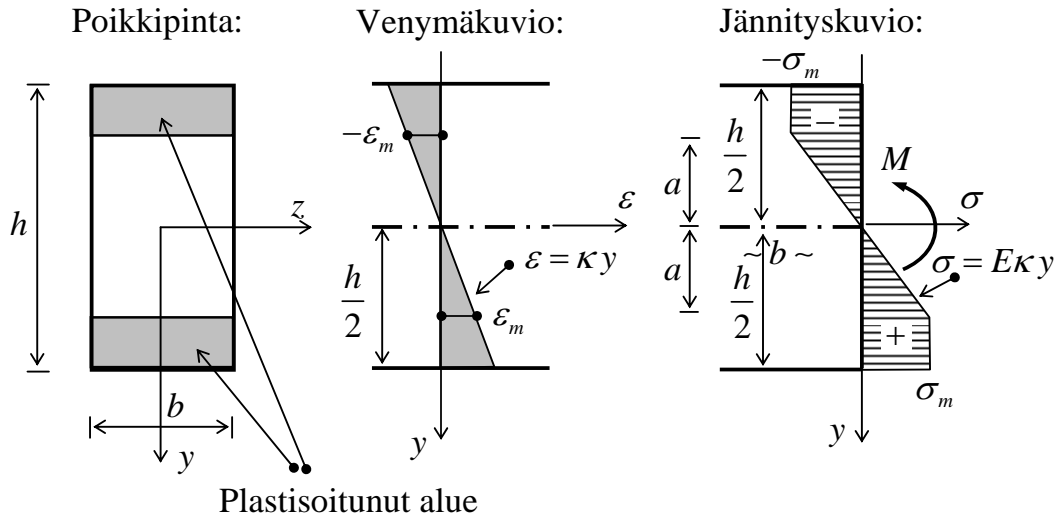
$$M_m = E \frac{bh^3}{12} \kappa_m = E \frac{bh^3}{12} \cdot 2 \frac{\sigma_m}{Eh} = \underline{\underline{\frac{1}{6} \sigma_m bh^2}}}.$$

Kun $0 \leq |M| \leq M_m$, on poikkipinnan taivutusmomentti-käyrityelmäyhteys kaavan (a) mukainen.

Käyrityelmä-taivutusmomenttiyhteys:

$$\underline{\underline{\kappa = \frac{12}{Ebh^3} M}}, \quad 0 \leq M \leq M_m. \quad (b)$$

(b) Osittain plastisoitunut poikkileikkaus:



Merkitään taas plastisoituneen alueen reunan etäisyyttä neutraaliakselista symbolilla a . Sille saadaan

$$\varepsilon(a) = \kappa a = \varepsilon_m \Rightarrow a = \frac{\varepsilon_m}{\kappa} = \frac{\sigma_m}{E\kappa}$$

Taivutusmomentti:

$$\begin{aligned} M &= \int_A \sigma y dA = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma y b dy = \int_{-h/2}^{-a} \sigma y b dy + \int_{-a}^a \sigma y b dy + \int_a^{h/2} \sigma y b dy \\ &= -\sigma_m b \int_{-h/2}^{-a} y dy + E b \kappa \int_{-a}^a y^2 dy + \sigma_m b \int_a^{h/2} y dy \\ &= \sigma_m b \left(- \int_{-h/2}^{-a} y dy + \frac{1/a}{E\kappa} \int_{-a}^a y^2 dy + \int_a^{h/2} y dy \right) \\ &= \sigma_m b \left(- \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-h/2}^{-a} + \frac{1}{a} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-a}^a + \left[\frac{y^2}{2} \right]_a^{h/2} \right) = \sigma_m b \left(-\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{8} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} + \frac{h^2}{8} - \frac{a^2}{2} \right) \\ &= \sigma_m b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{a^2}{3} \right) = \sigma_m b \left[\frac{h^2}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_m}{E\kappa} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M = \sigma_m b h^2 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_m}{E h \kappa} \right)^2 \right]. \quad (b)$$

Käyristymä-taivutusmomenttiyhteys, kun $M \geq M_m$:

$$\Rightarrow \kappa = \frac{\sigma_m}{Eh} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{3M}{\sigma_m b h^2}}}$$

Kun $M \leq -M_m$ saadaan vastaavasti

$$\kappa = -\frac{\sigma_m}{Eh} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3M}{\sigma_m b h^2}}}$$

Tulokset voidaan yhdistää kaavaksi

$$\kappa = \text{sgn}(M) \frac{\sigma_m}{Eh} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{3|M|}{\sigma_m b h^2}}}, \quad |M| \geq M_m, \quad (c)$$

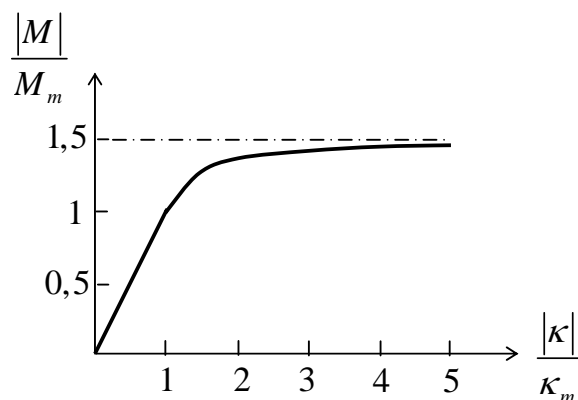
missä $\text{sgn}(M)$ tarkoittaa taivutusmomentin M merkkiä.

Kuvaaja:

Sijoittamalla kaavaan (b) $\sigma_m b h^2 = 6M_m$ ja $\sigma_m / Eh = \kappa_m / 2$ saadaan

$$\frac{M}{M_m} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_m}{\kappa} \right)^2.$$

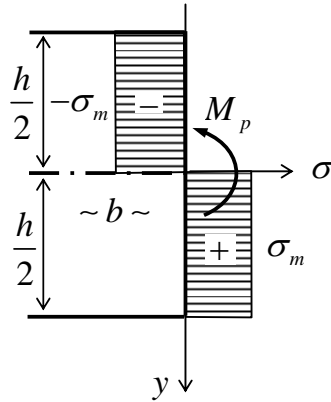
$\frac{ \kappa }{\kappa_m}$	$\frac{ M }{M_m}$
0	0
1	1
1,5	1,278
2	1,375
3	1,444
4	1,469
5	1,48



Kaavan (b) perusteella saadaan poikkileikkauksen täysplastiseksi momentiksi

$$M_p = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} M = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \sigma_m b h^2 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_m}{E h \kappa} \right)^2 \right] = \underline{\underline{\frac{1}{4} \sigma_m b h^2}}.$$

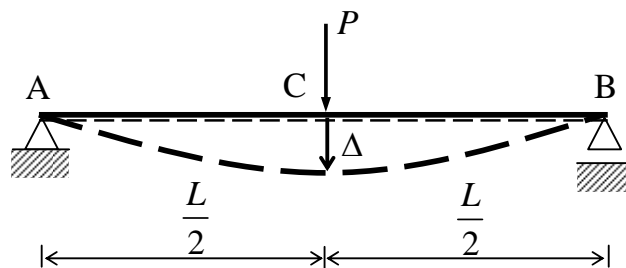
Oheiseen kuvioon on piirretty poikkileikkauksen täysplastista momenttia M_p ja rajatilaa $\kappa \rightarrow \infty$ vastaava jännityskuvio.



3. Epälineaarisesta materiaalista koostuvan staattisesti määrätyn palkin siirtymäsuureiden määrittäminen

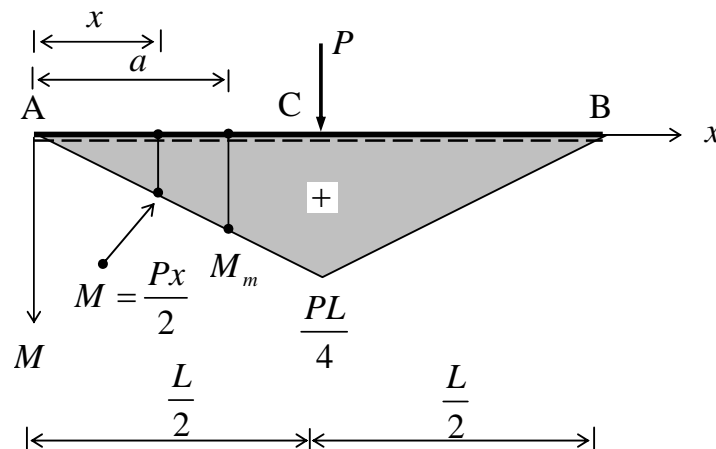
Staattisesti määrätyn palkin siirtymien ja kiertymien määrittämisessä voidaan käyttää yksikkövoimamenetelmää siinäkin tapauksessa, että palkin materiaali käyttäytyy epälineaarisesti. Esitetään yksinkertainen esimerkki.

Esimerkki 3.1: Määritetään oheisen palkin keskipisteen C taipuman riippuvuus kuormasta P . Palkin poikkileikkaus on suorakaide ja sen materiaali on kimmoista ja ideaaliplastista.



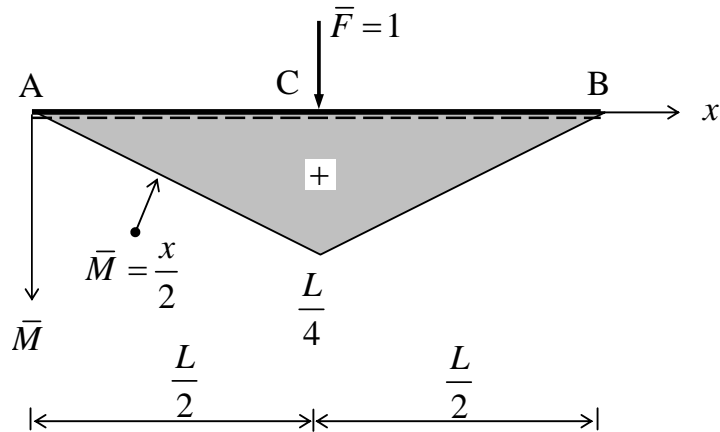
Sovelletaan yksikkövoimamenetelmää.

M -kuvio:



Kuvassa on sen pisteen, jonka taivutusmomentti on myötömomentin M_m suuruinen, etäisyyttä pisteestä A merkitty symbolilla a . Kuvan yhdenmuotoisista kolmioista saadaan verranto $x : a = M : M_m$, jota käytetään hyödyksi jatkossa.

\bar{M} -kuvio:



Esimerkin 2.3 kaavoista (b) ja (c) saadaan käyristymälle κ

$$\kappa = \frac{12}{Ebh^3}M \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$\kappa = \frac{\sigma_m}{Eh} \frac{1}{\sqrt{3 - \frac{3M}{\sigma_m bh^2}}} \quad a \leq x \leq \frac{L}{2}.$$

Ottamalla huomioon yhteydet $M_m = \sigma_m bh^2 / 6$ ja $\kappa_m = 2\sigma_m / Eh$ sekä edellä mainittu verranto, saadaan käyristymän lausekkeet muotoon

$$\kappa = \frac{\kappa_m}{M_m} M = \kappa_m \frac{x}{a} \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$\kappa = \frac{\kappa_m}{\sqrt{3 - 2\frac{M}{M_m}}} = \frac{\kappa_m}{\sqrt{3 - 2\frac{x}{a}}} \quad a \leq x \leq \frac{L}{2}.$$

Soveltamalla nyt yksikkövoimamenetelmää saadaan:

$$\frac{1}{F} \Delta = \int_0^L \bar{M} \kappa dx = 2 \left(\int_0^a \bar{M} \kappa dx + \int_a^{L/2} \bar{M} \kappa dx \right).$$

Symmetrian perusteella integrointi ulotettiin vain palkin vasempaan puoliskoon. Saadaan edelleen

$$\Delta = 2\left(\int_0^a \frac{x}{2} \cdot \kappa_m \frac{x}{a} dx + \int_a^{L/2} \frac{x}{2} \cdot \frac{\kappa_m}{\sqrt{3-2\frac{x}{a}}} dx\right) = \frac{\kappa_m}{a} \int_0^a x^2 dx + \kappa_m \int_a^{L/2} \frac{x}{\sqrt{3-2\frac{x}{a}}} dx$$

$$= \frac{\kappa_m}{a} \left[\frac{x^3}{3} - \kappa_m a \int_a^{L/2} \left(\frac{x}{3} + a\right) \sqrt{3-2\frac{x}{a}} = \kappa_m a^2 \left[\frac{5}{3} - \left(1 + \frac{L}{6a}\right) \sqrt{3 - \frac{L}{a}} \right]. \right.$$

Merkitään kuorman P arvoa, jolla palkin myötääminen sen keskikohdassa alkaa P_m :llä. Myötömomenti sen avulla lausuttuna on $M_m = P_m L/4$. Ottamalla lisäksi huomioon M -kuvioista saatava verranto $M_m : PL/4 = a : L/2$ saadaan mitalle a tulos

$$a = \frac{L P_m}{2 P}.$$

Nyt saadaan taipuma Δ kuorman P funktiona

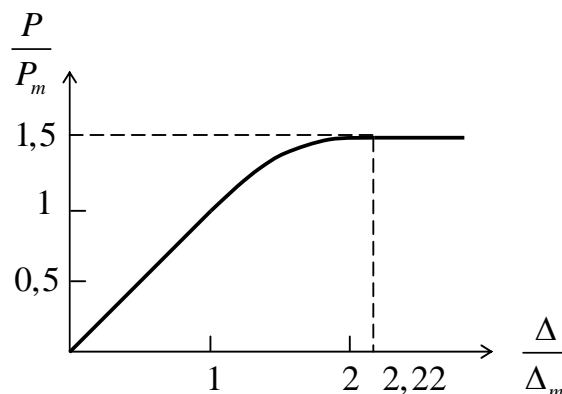
$$\Delta = \frac{\kappa_m L^2}{12} \left(\frac{P_m}{P}\right)^2 \left[5 - \left(3 + \frac{P}{P_m}\right) \sqrt{3 - 2\frac{P}{P_m}} \right].$$

Merkitään sitä taipuman arvoa, jolla myötääminen palkin keskikohdassa alkaa symbolilla Δ_m . Se saadaan määritettyä merkitsemällä taipuman Δ lausekkeessa $P = P_m$, jolloin saadaan $\Delta_m = \kappa_m L^2 / 12$. Näin saadaan taipuma Δ vielä muotoon

$$\Delta = \Delta_m \left(\frac{P_m}{P}\right)^2 \left[5 - \left(3 + \frac{P}{P_m}\right) \sqrt{3 - 2\frac{P}{P_m}} \right].$$

Kuvaaja:

$\frac{P}{P_m}$	$\frac{\Delta}{\Delta_m}$
1	1
1,2	1,21
1,3	1,35
1,4	1,55
1,45	1,71
1,5	2,22

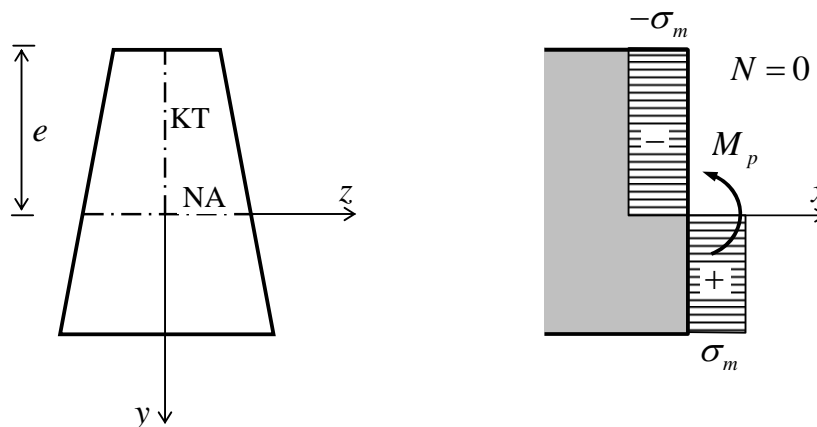


4. Kimmoisen ideaaliplastisen poikkileikkauksen täysplastisen momentti

4.1 Puhtaan taivutuksen alaisen poikkileikkauksen täysplastinen momentti

Edellä olemme jo määrittäneet täysplastisen momentin M_p kahdelle kimmoiselle ideaaliplastiselle esimerkkipoikkileikkaukselle ja esittäneet kyseistä rajatilaa vastaavan jännitys jakauman. Koska poikkileikkauksen täysplastinen momentti on rakenteiden suunnittelun kannalta varsin keskeinen suure, esittelemme tässä lyhyesti sen määrittämistä kimmoiselle ideaaliplastiselle poikkileikkaukselle sekä määrittelemme joitakin aihepiiriin liittyviä käsitteitä.

Tarkastellaan kuvan 4.1 (a) mukaista kuormitustason (x, y -taso) suhteen symmetristä poikkileikkausta. Kuvassa 4.1 (b) on esitetty poikkileikkauksen rajatilaa vastaava jännitys jakauma.



Kuva 4.1: (a) Symmetrinen poikkileikkaus ja sen (b) rajatilaa vastaava jännitys jakauma

Poikkileikkauksen normaalivoimalle saadaan

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma dA = \int_{A_{ala}} \sigma_m dA + \int_{A_{ylä}} (-\sigma_m) dA = \sigma_m \left(\int_{A_{ala}} dA - \int_{A_{ylä}} dA \right) \\
 &= \sigma_m (A_{ala} - A_{ylä}).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Puhtaan taivutuksen ehdosta $N = 0$ seuraa nyt neutraaliakselin aseman e määrittämiseksi ehto

$$\boxed{A_{ala} = A_{ylä}}, \quad (4.2)$$

missä A_{ala} ja $A_{ylä}$ ovat neutraaliakselin (NA) ala- ja yläpuolelle jäävien poikkipinnan A osien pinta-alat. Todetaan siis, että NA jakaa poikkipinnan kahteen yhtä suureen osaan.

Poikkileikkauksen taivutusmomentille, joka siis on täysplastisen momentin suuruinen, saadaan

$$\begin{aligned} M_p &= \int_A \sigma y dA = \int_{A_{ala}} \sigma_m y dA + \int_{A_{ylä}} (-\sigma_m) y dA = \sigma_m \left(\int_{A_{ala}} y dA - \int_{A_{ylä}} y dA \right) \\ &= \sigma_m (S_{ala} - S_{ylä}) = \sigma_m (S_{ala} + |S_{ylä}|), \end{aligned} \quad (4.3)$$

missä S_{ala} ja $S_{ylä}$ ovat poikkipinnan ala- ja yläpuoleisen osan staattiset momentit NA:n (z -akselin) suhteen. Yhtälöketjun viimeinen yhtäsuuruus perustuu siihen, että $S_{ylä}$ on negatiivinen.

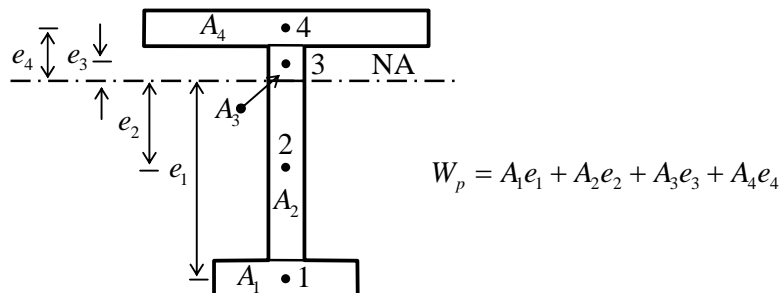
Näin poikkileikkauksen täysplastiselle momentille voidaan kirjoittaa

$$\boxed{M_p = \sigma_m W_p}, \quad (4.4)$$

missä

$$\boxed{W_p = S_{ala} + |S_{ylä}|}. \quad (4.5)$$

Suuretta W_p kutsutaan poikkileikkauksen **plastiseksi taivutusvastukseksi**. Samalla tavalla kuin erilaisten poikkileikkausten kimmoisille taivutusvastuksille W löytyy myös niiden plastisille taivutusvastuksille alan kirjallisuudesta valmiiksi taulukoituja kaavoja.



Kuva 4.2: Plastisen taivutusvastuksen määrittäminen

Jos poikkileikkaus voidaan jakaa osapintoihin, joita NA ei leikkaa ja joiden pinta-alat A_i ja pintakeskiöiden etäisyydet e_i NA:sta (vrt. kuva 4.2) tunnetaan, voidaan sen plastinen taivutusvastus laskea kaavalla

$$W_p = \sum_i A_i e_i. \quad (4.6)$$

Poikkileikkauksen myötömomentille voitiin kirjoittaa

$$M_m = \sigma_m W, \quad (4.7)$$

missä W on poikkipinnan siihen reunaan liittyvä kimmainen taivutusvastus, missä jännitys on itseisarvoltaan suurin.

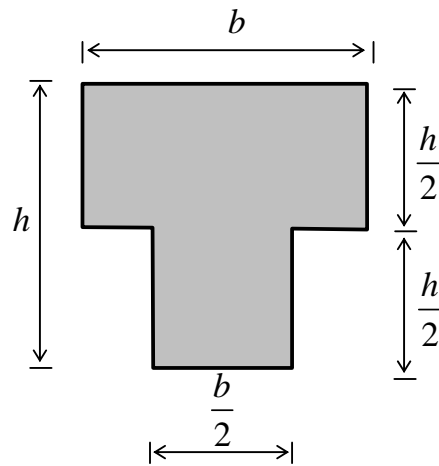
Poikkileikkauksen muotokerroin ϕ määritellään sen täysplastisen momentin ja myötömomentin suhteena, ts. sille saadaan

$$\phi = \frac{M_p}{M_m} = \frac{W_p}{W}. \quad (4.8)$$

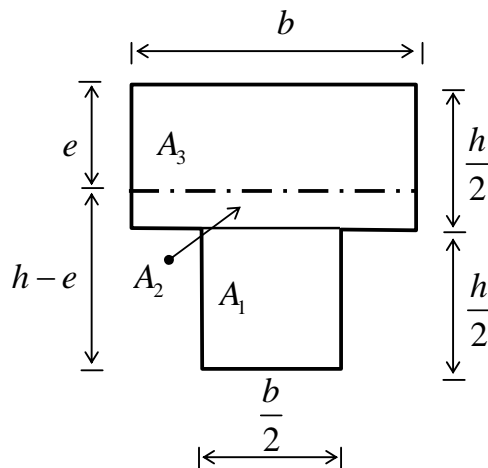
Se on siis myös plastisen ja kimmoisen taivutusvastuksen suhde.

Suorakaidepoikkipinnan täysplastiselle momentille ja myötömomentille saimme esimerkissä 2.3 $M_p = \sigma_m b h^2 / 4$ ja $M_m = \sigma_m b h^2 / 6$, joten sen muotokertoimelle saadaan $\phi = 1,5$. I-poikkileikkauksilla muotokerroin on suuruusluokkaa $\phi \approx 1,15$.

Esimerkki 4.1: Määritetään oheisen poikkileikkauksen täysplastinen momentti.



Neutraaliakselin asema:



$$A_1 = \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4}bh, \quad A_2 = b \cdot \left(\frac{h}{2} - e\right) = \frac{1}{2}bh - be, \quad A_3 = be.$$

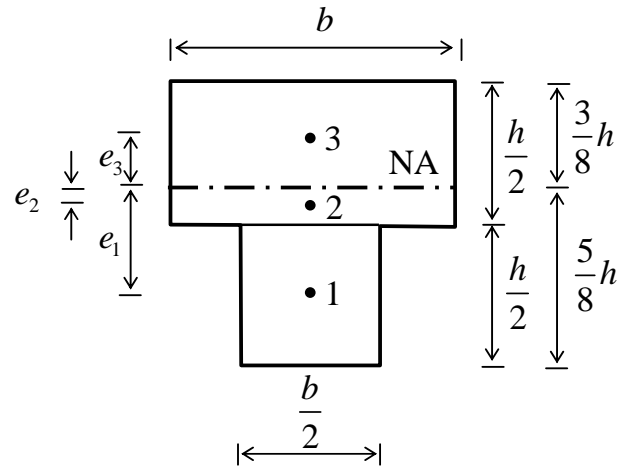
$$A_{ala} = A_{ylä} \Leftrightarrow A_1 + A_2 = A_3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}bh + \frac{1}{2}bh - be = be \Rightarrow \underline{e = \frac{3}{8}h}.$$

Alat:

$$A_1 = \frac{1}{4}bh, \quad A_2 = \frac{1}{2}bh - b \cdot \frac{3}{8}h = \frac{1}{8}bh, \quad A_3 = b \cdot \frac{3}{8}h = \frac{3}{8}bh.$$

Plastinen taivutusvastus:



$$e_1 = \frac{5}{8}h - \frac{h}{4} = \frac{3}{8}h, \quad e_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{3}{8}h \right) = \frac{1}{16}h, \quad e_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}h = \frac{3}{16}h.$$

$$\begin{aligned} W_p &= A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 = \frac{1}{4}bh \cdot \frac{3}{8}h + \frac{1}{8}bh \cdot \frac{1}{16}h + \frac{3}{8}bh \cdot \frac{3}{16}h \\ &= \frac{11}{64}bh^2. \end{aligned}$$

Täysplastinen momentti:

$$M_p = \sigma_m W_p = \frac{11}{64} \sigma_m bh^2.$$

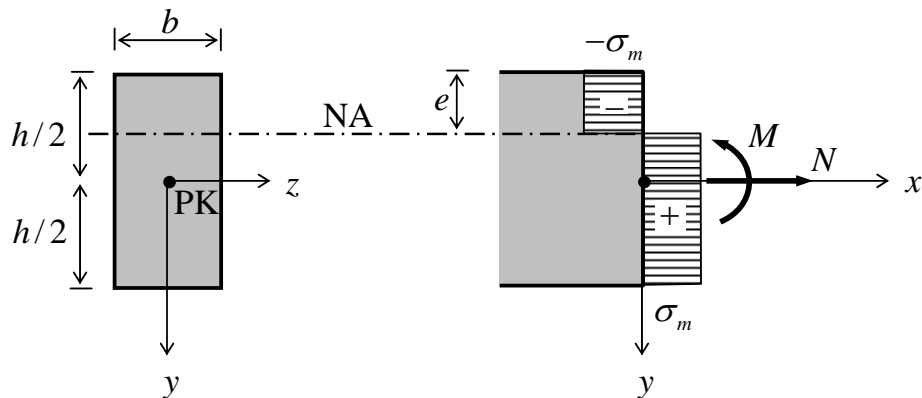
Saatiin sama tulos kuin esimerkissä 2.2.

4.2 Normaalivoiman vaikutus täysplastisen momenttiin

Kun kysymyksessä on normaalivoiman ja taivutusmomentin rasittama poikkileikkaus, sen kantokyky riippuu näistä molemmista. Tässä tapauksessa joudumme pitämään mielessä taivutusmomentin alkuperäisen määritelmän, ts. että se on poikkileikkauksen normaalijännitys jakauman momentti **pintakeskiöakselin** (eikä esimerkiksi neutraaliakselin) suhteen.

Esimerkki 4.2: Tutkitaan täysplastisen momentin riippuvuutta normaalivoimasta, kun kysymyksessä on (a) suorakaidepoikkipinta sekä (b) I-poikkipinta, jonka uuma otaksutaan niin ohueksi, että sen vaikutus voidaan jättää huomioon ottamatta ja laipan paksuus on 1/20 palkin korkeudesta.

(a) Suorakaidepoikkipinta:



Normaalivoimalle saadaan:

$$N = \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+e} (-\sigma_m) b dy + \int_{-\frac{h}{2}+e}^{\frac{h}{2}} \sigma_m b dy = \sigma_m b \left(- \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+e} dy + \int_{-\frac{h}{2}+e}^{\frac{h}{2}} dy \right)$$

$$= -\sigma_m b e + \sigma_m b (h - e) = \sigma_m b (h - 2e).$$

Sijoittamalla tähän $e = 0$, saadaan puhtaan vedon rasittaman poikkileikkauksen täysplastiselle normaalivoimalle

$$N_p = \sigma_m b h.$$

Edellisten suhteelle saadaan

$$\frac{N}{N_p} = 1 - 2\frac{e}{h} \quad (\text{a})$$

Taivutusmomentille saadaan:

$$\begin{aligned} M &= \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+e} (-\sigma_m) y b dy + \int_{-\frac{h}{2}+e}^{\frac{h}{2}} \sigma_m y b dy = \sigma_m b \left(- \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+e} y dy + \int_{-\frac{h}{2}+e}^{\frac{h}{2}} y dy \right) \\ &= \sigma_m b \left(- \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+e} + \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}+e}^{\frac{h}{2}} \right) = \sigma_m b \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{h}{2} + e \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{h}{2} + e \right)^2 \right] \\ &= \sigma_m b \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(-\frac{h}{2} + e \right)^2 \right] = \sigma_m b e (h - e) \end{aligned}$$

Sijoittamalla tähän $e = h/2$ saadaan puhtaan taivutuksen alaisen palkin täysplastiselle momentille

$$M_p = \frac{1}{4} \sigma_m b h^2.$$

Edellisten suhteelle saadaan

$$\frac{M}{M_p} = 4\frac{e}{h} \left(1 - \frac{e}{h} \right) \quad (\text{b})$$

Yhtälöstä (a) saadaan

$$\frac{e}{h} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{N}{N_p} \right)$$

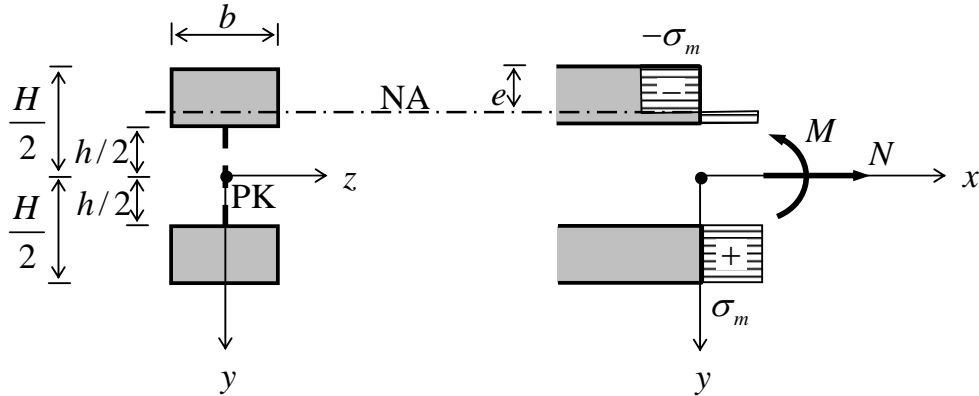
ja sijoittamalla tämä yhtälöön (b) saadaan

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{N}{N_p} \right)^2. \quad (\text{c})$$

Jos N ja M toteuttavat tämän yhtälön, poikkileikkaus menettää kanto-kykynsä.

(b) I-poikkipinta:

(Kuvassa on poikkileikkauksen laipan paksuus esitetty suhteettoman suurena.)



Normaalivoimalle saadaan:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{-\frac{H}{2}}^{-\frac{H}{2}+e} (-\sigma_m) b dy + \int_{-\frac{H}{2}+e}^{\frac{h}{2}} \sigma_m b dy + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_m b dy = \sigma_m b \left(- \int_{-\frac{H}{2}}^{-\frac{H}{2}+e} dy + \int_{-\frac{H}{2}+e}^{\frac{h}{2}} dy + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} dy \right) \\
 &= -\sigma_m b e + \sigma_m b \left(\frac{H-h}{2} - e \right) + \sigma_m b \left(\frac{H-h}{2} \right) = \sigma_m b (H-h-2e).
 \end{aligned}$$

Sijoittamalla tähän $e=0$, saadaan puhtaan vedon rasittaman poikkileikkauksen täysplastiselle normaalivoimalle

$$N_p = \sigma_m b (H-h).$$

Edellisten suhteelle saadaan

$$\frac{N}{N_p} = 1 - \frac{2e}{H-h}$$

ja kun $h = 0,9H$ (laipan paksuus $H/20$) edelleen

$$\frac{N}{N_p} = 1 - \frac{20e}{H}. \quad (d)$$

Taivutusmomentille saadaan:

$$\begin{aligned}
 M &= \int_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}+e} (-\sigma_m) y b dy + \int_{\frac{H}{2}+e}^{\frac{h}{2}} \sigma_m y b dy + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_m y b dy \\
 &= \sigma_m b \left(- \int_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}+e} y dy + \int_{\frac{H}{2}+e}^{\frac{h}{2}} y dy + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} y dy \right) \\
 &= \sigma_m b \left(- \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}+e} + \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{H}{2}+e}^{\frac{h}{2}} + \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} \right) \\
 &= \sigma_m b \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{H}{2} + e \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{H}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{h}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{H}{2} + e \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right] \\
 &= \sigma_m b e (H - e).
 \end{aligned}$$

Sijoittamalla tähän $e = H/2 - h/2$, saadaan puhtaan taivutuksen alaisen palkin täysplastiselle momentille

$$M_p = \frac{1}{4} \sigma_m b (H^2 - h^2).$$

Edellisten suhteelle saadaan

$$\frac{M}{M_p} = \frac{4e(H - e)}{H^2 - h^2}$$

ja kun $h = 0,9H$ edelleen

$$\frac{M}{M_p} = \frac{4}{0,19} \frac{e}{H} \left(1 - \frac{e}{H} \right) \quad (e)$$

Yhtälöstä (d) saadaan

$$\frac{e}{h} = \frac{1}{20} \left(1 - \frac{N}{N_p} \right),$$

ja sijoittamalla tämä yhtälöön (e) saadaan

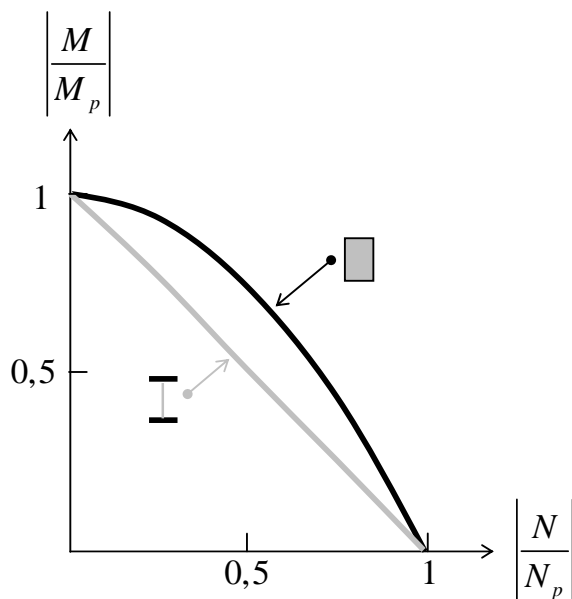
$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{18}{19} \frac{N}{N_p} - \frac{1}{19} \left(\frac{N}{N_p} \right)^2. \quad (\text{f})$$

Jos N ja M toteuttavat tämän yhtälön, poikkileikkaus menettää kanto-
kykynsä.

Lasketaan arvoja:

$\frac{N}{N_p}$	(a) $\frac{M}{M_p}$	(b) $\frac{M}{M_p}$
0	1	1
0,25	0,938	0,761
0,5	0,75	0,513
0,75	0,438	0,260
1	0	0

Kuvaajat:

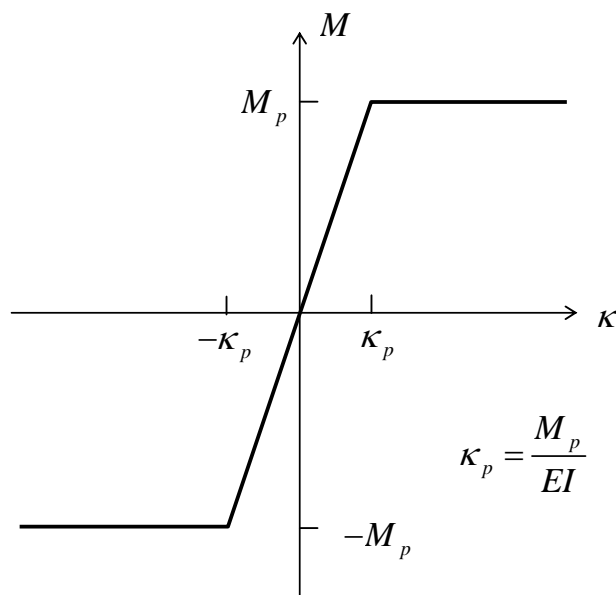


Käyrät on itseisarvomerkkien avulla laajennettu kattamaan myös tapaukset joissa normaalivoima, taivutusmomentti tai molemmat ovat negatiivisia. Tätä laajennusta ei tässä yhteydessä perustella.

5. Rajakuorman määrittäminen yksinkertaisille rakenteille

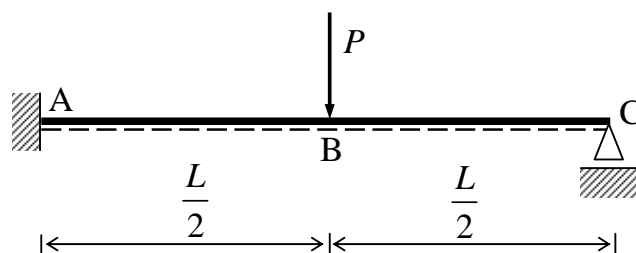
5.1 Plastinen rajakuorma

Plastisella rajakuormalla tarkoitetaan suurinta kuormaa, jonka rakenne voi kantaa. Sitä määritettäessä poikkileikkauksen momentti-käyritysmäriippuvuus (vrt. esimerkkien 2.2 ja 2.3 ao. kuvat) korvataan kuvan 5.1 idealisoinnilla. Tällöin siihen palkin kohtaan, jossa täysplastinen momentti M_p (tai $-M_p$) saavutetaan, syntyy plastinen nivel. Itse asiassa plastista rajakuormaa määritettäessä voitaisiin kimmainen käyrityminen jättää kokonaan huomioonottamatta.



Kuva 5.1: Momentti-käyritysmäriippuvuuden idealisointi

Esimerkki 5.1: Tutkitaan oheisen staattisesti määräämättömän palkin kuorman ja taipuman riippuvuutta. Palkin täysplastinen momentti on M_p .



Kimmainen (kun $|M| \leq M_p$):

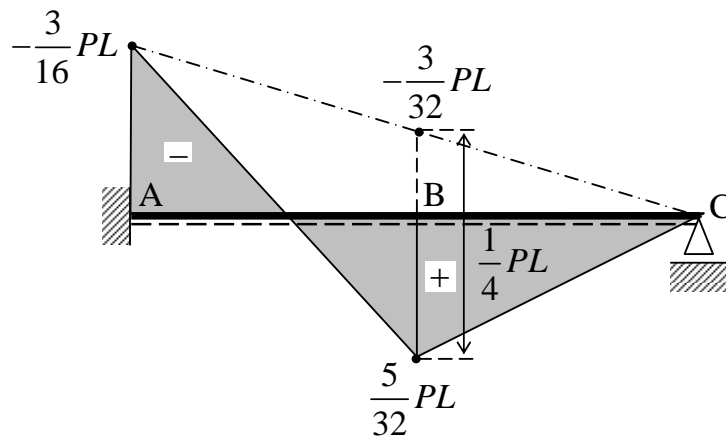
Momenttikuvio:

(Kulmanmuutosmenetelmä):

$$M_{AC} = \frac{3EI}{L} \overbrace{\varphi_{AC}^0} - \frac{3EI}{L} \overbrace{\psi_{AC}^0} + MK_{AC}^0 = -\frac{3PL}{16},$$

$$M_A = M_{AC} = -\frac{3PL}{16}$$

$$M_B = -\frac{3}{32}PL + \frac{1}{4}PL = \frac{5}{32}PL$$



Pisteen B taipuma:

(Momenttimenetelmä):

$$\varphi_{AB} \equiv \frac{L/2}{3EI} \overbrace{M_{AB}^{M_A}} - \frac{L/2}{6EI} \overbrace{M_{BA}^{-M_B}} + \psi_{AB} + \alpha_{AB}^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{6EI} \left(-\frac{3}{16}PL\right) - \frac{L}{12EI} \left(-\frac{5}{32}PL\right) + \psi_{AB} = 0$$

$$\Rightarrow \psi_{AB} = \frac{7}{384} \frac{PL^2}{EI}$$

$$v_B = \psi_{AB} \frac{L}{2} = \underline{\underline{\frac{7}{768} \frac{PL^3}{EI}}}$$

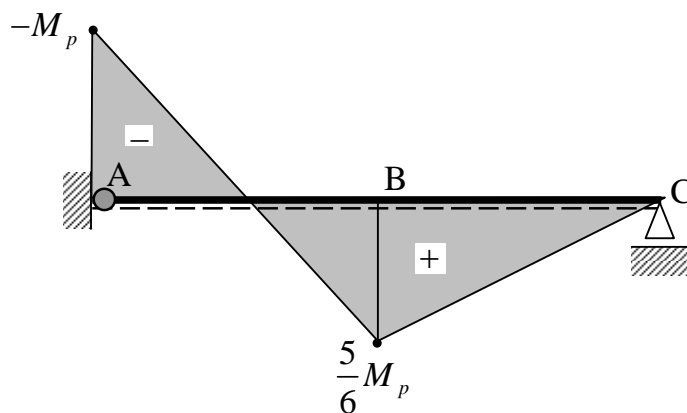
Täysplastinen momentti saavutetaan pisteessä A ($M_A = -M_p$):

$$M_A \equiv -\frac{3PL}{16} = -M_p \Rightarrow P_1 = \frac{16M_p}{3L}$$

$$\Rightarrow M_A = -M_p, \quad M_B = \frac{5}{32}P_1L = \frac{5}{6}M_p (< M_p)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_{B1}}} = \frac{7}{768} \frac{P_1L^3}{EI} = \underline{\underline{\frac{7}{144} \frac{M_pL^2}{EI}}}$$

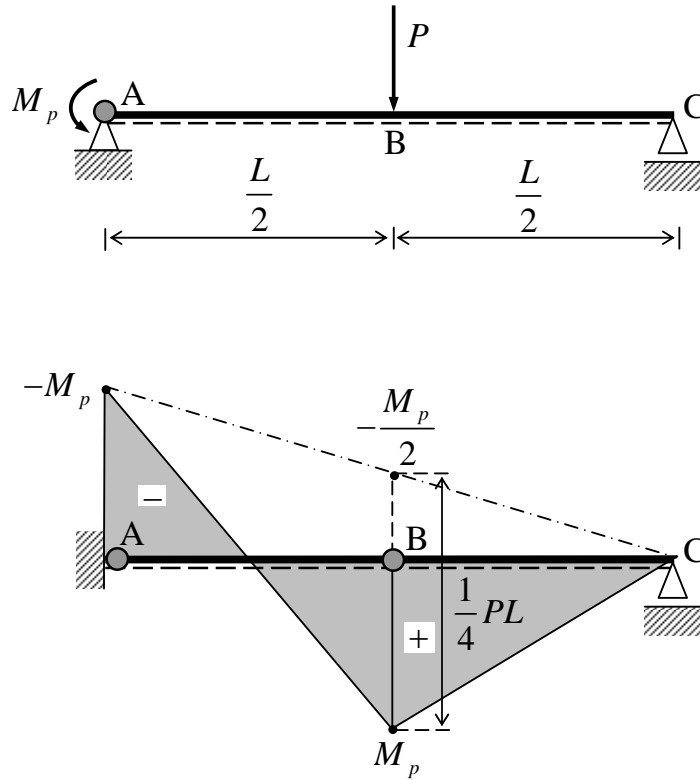
Pisteeseen A syntyy **plastinen nivel**. Rakenne ei kuitenkaan vielä sorru, vaan kuormaa voidaan kasvattaa kunnes täysplastinen momentti M_p saavutetaan myös pisteessä B.



Huomautus: Plastista niveltä merkitään harmaalla ja tavallista niveltä entiseen tapaan (tarvittaessa) valkoisella ympyrällä.

Täysplastinen momentti saavutetaan pisteessä B ($M_B = M_p$):

Muuttunut staattinen systeemi:



$$M_B \equiv -\frac{M_p}{2} + \frac{1}{4}PL = M_p \Rightarrow \underline{\underline{P_2 = 6\frac{M_p}{L}}}$$

P_2 on suurin kuorma, jonka palkki kestää ts. **plastinen rajakuorma** on

$$\underline{\underline{P_p = P_2 = 6\frac{M_p}{L}}}$$

Taipuman laskeminen:

(Momenttimenetelmä:)

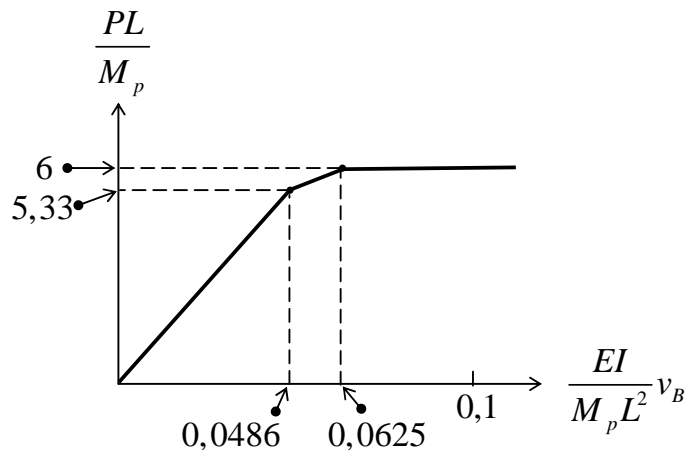
$$\begin{aligned}\varphi_{AC} &= \frac{L}{3EI} M_{AC} - \frac{L}{6EI} \cdot 0 + \overbrace{\psi_{AC}}^0 + \alpha_{AC}^0 = \frac{L}{3EI} (-M_p) + \frac{\frac{6M_p}{L} L^2}{16EI} \\ &= \frac{M_p L}{24EI}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{AB} &\equiv \frac{L/2}{3EI} M_{AB} - \frac{L/2}{6EI} M_{BA} + \psi_{AB} + \alpha_{AB}^0 = \frac{M_p L}{24EI} \\ \Leftrightarrow \frac{L}{6EI} (-M_p) - \frac{L}{12EI} (-M_p) + \psi_{AB} &= \frac{M_p L}{24EI} \\ \Rightarrow \psi_{AB} &= \frac{1}{8} \frac{M_p L}{EI}.\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{v_{B2}}} = \psi_{AB} \frac{L}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{16} \frac{M_p L^2}{EI}}}$$

Tämä on taipuma pisteessä B , kun nivel on juuri syntymäisillään!

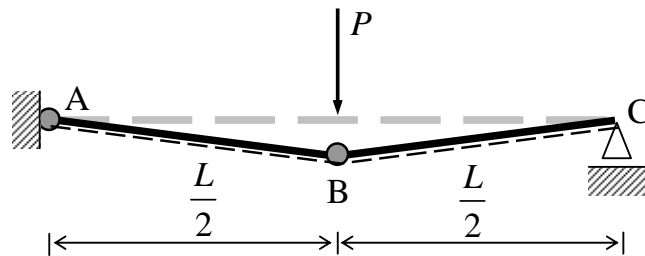
Kuorma-taipuma yhteys:



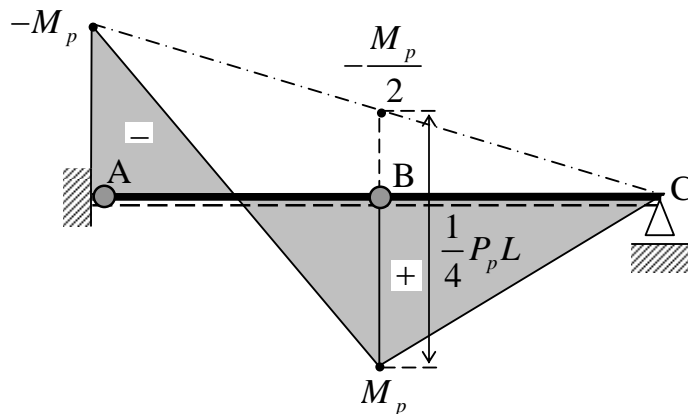
Kun täysplastinen momentti pisteessä B saavutetaan, syntyy myös sinne plastinen nivel ja rakenteesta tulee mekanismi.

Rajakuorma saadaan selville helpommin tutkimalla momenttikuviota, kun rakenteesta on tullut mekanismi.

Mekanismi:



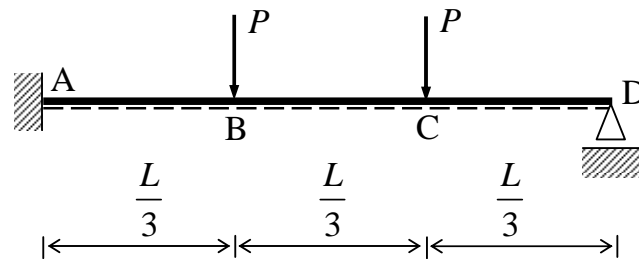
M-kuvio:



M -kuvioista saadaan

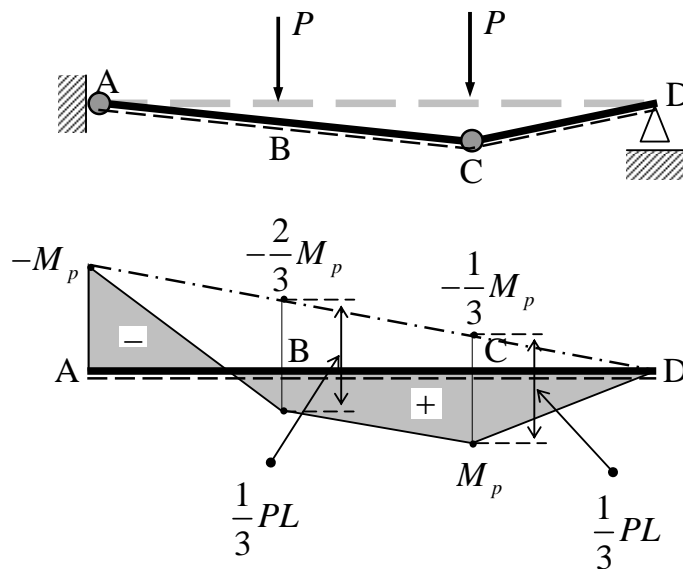
$$M_B \equiv -\frac{M_p}{2} + \frac{1}{4} P_p L = M_p \Rightarrow \underline{\underline{P_p = 6 \frac{M_p}{L}}}$$

Esimerkki 5.2: Määritetään oheisen palkin plastinen rajakuorma. Palkin täysplastinen momentti on M_p .



Tälle rakenteelle voimme muodostaa 2 mekanismia. Tutkitaan niitä.

Mekanismi 1: Plastinen nivel pisteissä A ja C



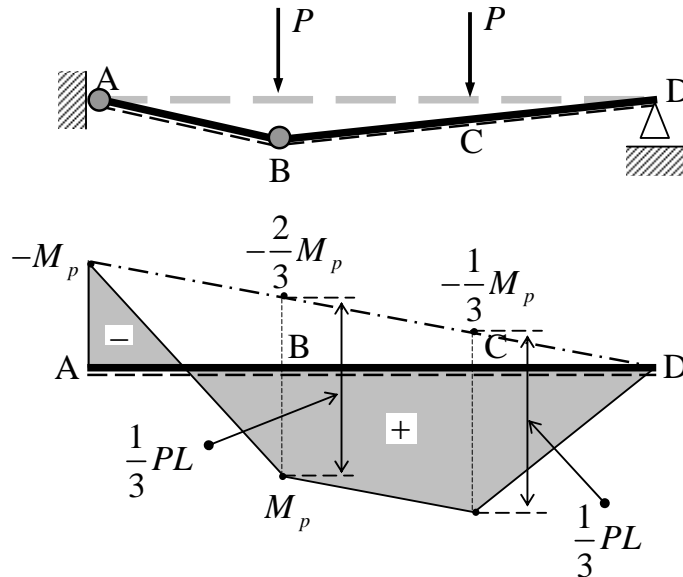
Ehdosta $M_C = M_p$ seuraa

$$M_C \equiv -\frac{1}{3}M_p + \frac{1}{3}PL = M_p \Rightarrow \underline{\underline{P_1 = 4\frac{M_p}{L}}}$$

Taivutusmomentille M_B saadaan

$$M_B = -\frac{2}{3}M_p + \frac{1}{3} \overbrace{P_1}^{4\frac{M_p}{L}} L = \underline{\underline{\frac{2}{3}M_p}} (< M_p)$$

Mekanismi 2: Plastinen nivel pisteissä A ja B



Ehdosta $M_B = M_p$ seuraa

$$M_B = -\frac{2}{3}M_p + \frac{1}{3}PL = M_p \Rightarrow \underline{\underline{P_2 = 5\frac{M_p}{L}}}$$

Taivutusmomentille M_C saadaan

$$M_C = -\frac{1}{3}M_p + \frac{1}{3}\left(\frac{5M_p}{L}\right)L = \underline{\underline{\frac{4}{3}M_p}} (> M_p)$$

Mekanismi 2 ei tule kyseeseen, koska pisteessä C: $M_C = \frac{4}{3}M_p > M_p$ ja siitä johtuen rikotaan myötöehtoa $|M| \leq M_p$.

⇒

Plastinen rajakuorma:

$$\underline{\underline{P_p = P_1 = 4\frac{M_p}{L}}}$$

6. Virtuaalisen työn periaatteen käyttö plastisen rajakuorman määrittämisessä

Sen sijaan, että tarkasteltaisiin rakenteen mahdollista rajatilaa taivutusmomenttipinnan avulla, voidaan lähteä liikkeelle mahdollisista kinemaattisista rajatiloista eli **sortumamekanismeista** ja päätyä niiden avulla rajakuorman arvioihin. Tällöin ajatellaan, että mekanismin liikkua vain plastisissa nivelissä tapahtuu liikkeitä, kiertymiä, nivelten välisten kimmoisten palkin osien pysyessä täysin jäykkinä. Edellä sanottu voidaan täsmällisesti näyttää toteen. Seuraavassa tarkastellaan sekä sisäistä että ulkoista virtuaalista työtä mekanismin pienen liikkeen tapahtuessa.

6.1 Mekanismin sisäinen virtuaalinen työ

Sortumismekanismin sisäinen virtuaalinen työ tapahtuu sen plastisissa nivelissä. Osoitetaan, että sisäinen virtuaalinen (kokonais) työ on yleisesti

$$\bar{W}_{\text{int}} = -\sum M_i \bar{\theta}_i \quad (6.1)$$

ja

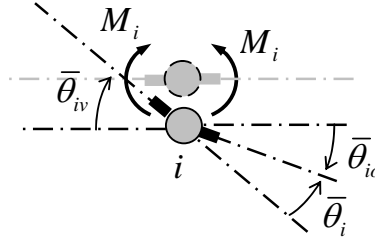
$$\bar{W}_{\text{int}} = -\sum M_{pi} |\bar{\theta}_i|, \quad (6.2)$$

jos virtuaalisena siirtymätilana on tarkasteltavan sortumismekanismin siirtymätila. Näissä kaavoissa summaus käy yli mekanismin plastisten nivelten i , M_i ja M_{pi} ovat taivutusmomentti ja täysplastinen momentti nivelen i kohdalla sekä $\bar{\theta}_i$ on virtuaalinen kulmanmuutos nivelessä i .



Kuva 6.1: Kulmanmuutos plastisessa nivelessä

Kulmanmuutoksen θ_i merkkisääntöä on havainnollistettu oheisessa kuvassa 6.1. Se on siis positiivinen, kun se "venyttää" katkoviivalla merkittyä sauvan positiivista pintaa, joka on kuvassa alapinta.



Kuva 6.2: Sisäisen virtuaalisen työn määrittäminen plastisessa nivelessä

Plastisessa nivelessä i tapahtuva sisäinen virtuaalinen työ voidaan määrittää tarkastelemalla niveltä i siihen liittyvistä sauvoista irroitettuna. Sille pätee virtuaalisen työn periaate: $\bar{W}_i \equiv \bar{W}_{\text{int},i} + \bar{W}_{\text{ext},i} = 0$, joten $\bar{W}_{\text{int},i} = -\bar{W}_{\text{ext},i}$. Nyt saadaan kuva 6.2 perusteella

$$W_{\text{int},i} = -(M_i \bar{\theta}_{iv} - M_i \bar{\theta}_{io}) = -M_i \bar{\theta}_i, \quad (6.3)$$

missä

$$\bar{\theta}_i = \bar{\theta}_{iv} - \bar{\theta}_{io}, \quad (6.4)$$

missä $\bar{\theta}_{iv}$ ja $\bar{\theta}_{io}$ ovat nivelen vasemman- ja oikeanpuoleisen sauvan kiertymät. (Sauvat siis otaksuttiin jäykiksi.)

(Plastisessa nivelessä i tapahtuva sisäinen virtuaalinen työ voidaan myös määrittää otaksumalla se Δx :n pituiseksi palkin osaksi, ja antamalla Δx :n lähestyä nollaa. Otaksumalla, että taivutusmomentti tämän pienen osan alueella pysyy vakiona $M_i = M(x_i)$, saadaan

$$\begin{aligned} \bar{W}_{\text{int}} &= - \int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i + \Delta x/2} M(x) \bar{\kappa}(x) dx \approx \int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i + \Delta x/2} \overbrace{M(x_i)}^{M_i} \bar{\theta}'(x) dx = M_i \int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i + \Delta x/2} \bar{\theta}'(x) dx \\ &= M_i [\overbrace{\bar{\theta}(x_i + \Delta x/2)}^{\bar{\theta}_{io}} - \overbrace{\bar{\theta}(x_i - \Delta x/2)}^{\bar{\theta}_{iv}}] = -M_i (\bar{\theta}_{iv} - \bar{\theta}_{io}) = -M_i \bar{\theta}_i, \end{aligned}$$

missä $\bar{\theta}_{iv} = \bar{\theta}(x_i - \Delta x/2)$ on kiertymä palkin osan vasemmassa päässä ja $\bar{\theta}_{io} = \bar{\theta}(x_i + \Delta x/2)$ on kiertymä palkin osan oikeassa päässä. Saatu lauseke pysyy samana, kun $\Delta x \rightarrow 0$.)

Huomautus: Sauvarakenteiden plastisten menetelmien yhteydessä (normaalin) kiertymälle $\varphi(x)$ ($\varphi = v'$ tekninen taivutusteoria) käytetään aikaisemmasta poiketen merkintää $\theta(x)$.

Jos virtuaalisena siirtymätilana on tarkasteltavan sortumismekanismiin siirtymätila, on tilanne kuvan 6.3 mukainen

$$\begin{array}{l}
 (a) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Diagram (a): A hinge mechanism with a central joint labeled } i. \text{ Two arms extend from the joint, each subjected to a moment } M_{pi}. \text{ The mechanism is shown in a slightly deformed state.} \\ M_{pi} \text{ (left)} \quad \text{Diagram (a)} \quad M_{pi} \text{ (right)} \\ \left. \begin{array}{l} M_i = +M_{pi} \\ \bar{\theta}_i > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{W}_{\text{int},i} = -M_i \bar{\theta}_i = -M_{pi} \bar{\theta}_i < 0 \\
 (b) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Diagram (b): Similar to (a), but the mechanism is shown in a different deformed state.} \\ M_{pi} \text{ (left)} \quad \text{Diagram (b)} \quad M_{pi} \text{ (right)} \\ \left. \begin{array}{l} M_i = -M_{pi} \\ \bar{\theta}_i < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{W}_{\text{int},i} = -M_i \bar{\theta}_i = +M_{pi} \bar{\theta}_i < 0
 \end{array}$$

Kuva 6.3: Plastisen nivelen virtuaalisen työ määrittäminen, kun virtuaalinen siirtymätila on rajatilaa vastaava sortumismekanismi.

Todetaan, että kummassakin tapauksessa on voimassa

$$\bar{W}_{\text{int},i} = -|M_{pi} \bar{\theta}_i| = -M_{pi} |\bar{\theta}_i|. \quad (6.5)$$

Näin saatiin sisäisen virtuaalisen työn kaavat (6.1) ja (6.2) perusteltua.

6.2 Mekanismin ulkoinen virtuaalinen työ

Sortumismekanismin ulkoiselle virtuaaliselle työlle saadaan

$$\bar{W}_{\text{ext}} = \sum F_i \bar{\delta}_i \quad (6.6)$$

missä F_i on ulkoinen (yleistetty) voima ja $\bar{\delta}_i$ sitä vastaava virtuaalinen (yleistetty) siirtymä.

6.3 Mekanismin virtuaalisen työn yhtälö

Tasapainossa olevalle sortumismekanismissa on voimassa virtuaalisen työn yhtälö $\bar{W} \equiv \bar{W}_{\text{int}} + \bar{W}_{\text{ext}} = 0$ eli

$$-\bar{W}_{\text{int}} = \bar{W}_{\text{ext}} \Leftrightarrow \sum M_i \bar{\theta}_i = \sum F_i \bar{\delta}_i \quad (6.7)$$

ja

$$-\bar{W}_{\text{int}} = \bar{W}_{\text{ext}} \Leftrightarrow \sum M_{pi} |\bar{\theta}_i| = \sum F_i \bar{\delta}_i. \quad (6.8)$$

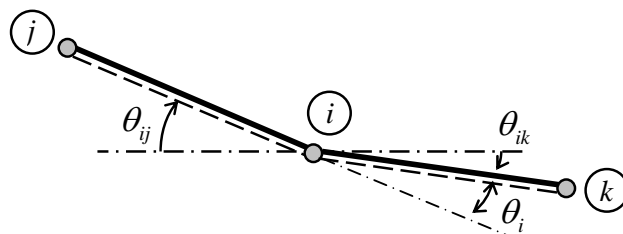
Jälkimmäistä yhtälöä voidaan käyttää, jos virtuaalinen siirtymätila on rajatilaan vastaava sortumismekanismi. Tämän yhtälön käyttö helpottaa laskelmaa siinä mielessä, että etumerkeistä huolehtiminen jää vähemmälle.

6.4 Mekanismin kulmanmuutosten θ_i laskeminen

Kulmanmuutokset θ_i voidaan määrittää joko (a) geometrisella tarkastelulla tai (b) käyttäen systemaattisempaa tapaa, joka perustuu momentti- ja kulmanmuutosmenetelmien yhteydessä johdettujen sauvanpäiden siirtymien ja sauvakiertymän välisten yhteyksien sekä kinemaattisen ketjun käyttöön. Seuraavassa esitetään jälkimmäiseen tapaan liittyvät kaavat.

Merkitään tässä mekanismin sauvan i - j kiertymää θ_{ij} :llä (Tämä vastaa momentti- ja kulmanmuutosmenetelmän sauvakiertymää, jolle käytettiin merkintää ψ_{ij}). Sauvojen i - j ja i - k välisen plastisen nivelen i kulmanmuutokselle θ_i saadaan kuvan 6.4 perusteella

$$\theta_i = \theta_{ij} - \theta_{ik}. \quad (6.9)$$

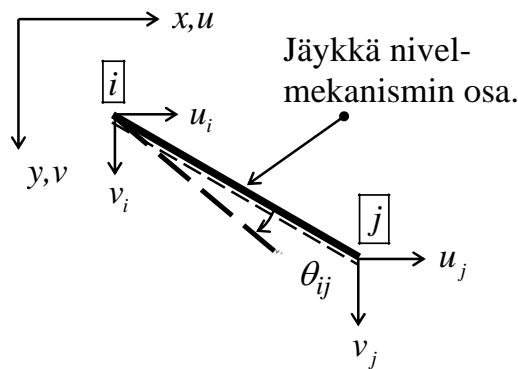


Kuva 6.4: Sauvojen i - j ja i - k välisen plastisen nivelen i kulmanmuutoksen määrittäminen.

Tämä tulos voidaan laajentaa koskemaan myös plastista niveltä i , joka liittyy toisiinsa kaksi mekanismin jäykkää osaa $i-j$ ja $i-k$.

Nivelmekanismin sauvan tai sen jäykkän osan $i-j$ päiden siirtymien ja kiertymän väliset kaavat ovat

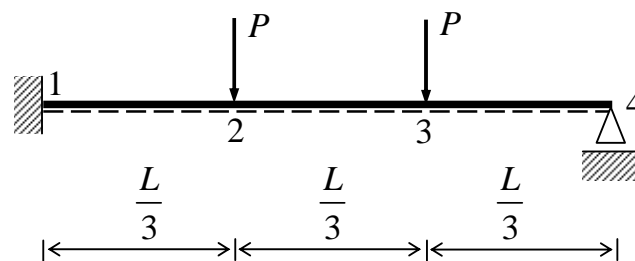
$$\begin{aligned} u_j &= u_i - (y_j - y_i)\theta_{ij}, \\ v_j &= v_i + (x_j - x_i)\theta_{ij}. \end{aligned} \quad (6.10)$$



Kuva 6.5: Nivelmekanismin sauvan päiden siirtymien ja kiertymän positiiviset suunnat

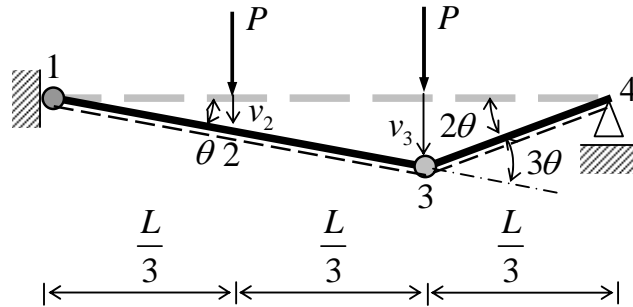
Huomautus: Jatkossa virtuaalista siirtymätilaa kuvaava yläviiva jätetään mukavuussyistä pois.

Esimerkki 6.1: Määritetään virtuaalisen työn periaattella oheisen palkin rajakuorma. Palkin täysplastinen momentti on M_p .



Kuvaan on merkitty mahdolliset plastisten nivelten paikat 1 2 ja 3. (Pisteessä 4 liikkuva niveltuki, ts. tavallinen nivel.)

Mekanismi (a): Plastinen nivel pisteissä 1 ja 3



Kuvan merkinnöin saadaan plastisten nivelten virtuaalisille kulmanmuutoksille

$$\theta_1 = -\theta, \theta_3 = 3\theta,$$

ja pisteiden 2 ja 3 virtuaalisille pystysuunnille

$$v_2 = \frac{L}{3} \cdot \theta = \frac{1}{3}L\theta, v_3 = \frac{2L}{3} \cdot \theta = \frac{2}{3}L\theta.$$

Sisäinen virtuaalinen työ:

$$-W_{\text{int}} = M_p |\theta_1| + M_p |\theta_3| = M_p (\theta + 3\theta) = 4M_p \theta$$

(Kysymyksessä on ko. rajatilaa vastaava sortumismekanismi.)

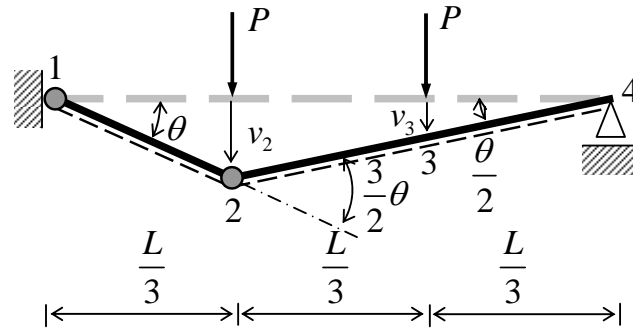
Ulkoinen virtuaalinen työ:

$$W_{\text{ext}} = Pv_2 + Pv_3 = P \cdot \frac{L}{3} \theta + P \cdot \frac{2}{3} L\theta = PL\theta$$

Virtuaalisen työn periaate:

$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Leftrightarrow 4M_p \theta = PL\theta \Rightarrow \underline{P_p^{(a)} = 4 \frac{M_p}{L}}.$$

Mekanismi (b): Plastinen nivel pisteissä 1 ja 2



Kuvan merkinnöin saadaan plastisten nivelten virtuaalisille kulmanmuutoksille

$$\theta_1 = -\theta, \quad \theta_2 = \frac{3}{2}\theta,$$

ja pisteiden 2 ja 3 virtuaalisille pystysuunnille

$$v_2 = \frac{L}{3} \cdot \theta = \frac{1}{3}L\theta, \quad v_3 = \frac{L}{3} \cdot \frac{\theta}{2} = \frac{1}{6}L\theta.$$

Sisäinen virtuaalinen työ:

$$-W_{\text{int}} = M_p |\theta_1| + M_p |\theta_2| = M_p \left(\theta + \frac{3}{2}\theta \right) = \frac{5}{2} M_p \theta$$

Ulkoinen virtuaalinen työ:

$$W_{\text{ext}} = P v_2 + P v_3 = P \cdot \frac{1}{3}L\theta + P \cdot \frac{1}{6}L\theta = \frac{1}{2}PL\theta$$

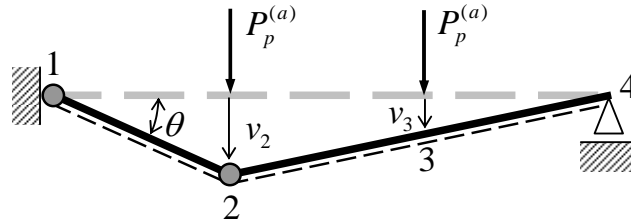
Virtuaalisen työn periaate:

$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Rightarrow P_p^{(b)} = 5 \frac{M_p}{L}$$

Mekanismi (a) johtaa pienempään rajakuormaan. Se on oikea, jos myötöehtoa $|M| \leq M_p$ ei rikota. Tämän vuoksi tarkistetaan mekanismin (a) taivutusmomentin arvo pisteessä 2. Se voidaan laskea helpoimmin virtuaalisen työn yhtälöllä käyttäen virtuaalisena siirtymätilana mekanismia (b). Tässä tapauksessa siis virtuaalinen siirtymätila ei ole

rajatilaa vastaavan sortumismekanismin (a), joten täytyy käyttää yleisempää kaavaa (6.7). Saadaan

Mekanismi (b):



Sisäinen virtuaalinen työ:

$$-W_{\text{int}} = M_1\theta_1 + M_2\theta_2 = -M_p(-\theta) + M_2 \frac{3}{2}\theta$$

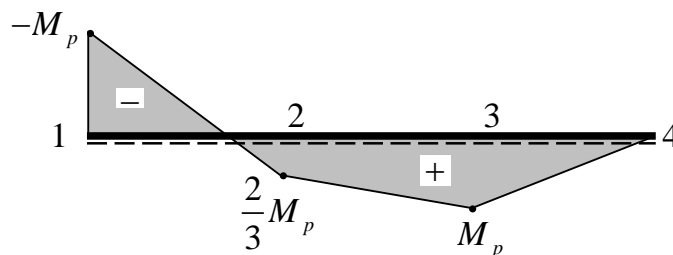
Ulkoinen virtuaalinen työ:

$$W_{\text{ext}} = P_p^{(a)} \cdot v_2 + P_p^{(a)} \cdot v_3 = \frac{1}{2} \overbrace{P_p^{(a)}}^{4M_p/L} L\theta = 2M_p\theta$$

Virtuaalisen työn periaate:

$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Rightarrow \underline{M_2 = \frac{2}{3}M_p < M_p}$$

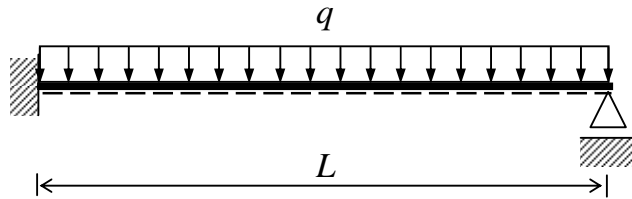
Sortumismekanismin (a) M -kuvio:



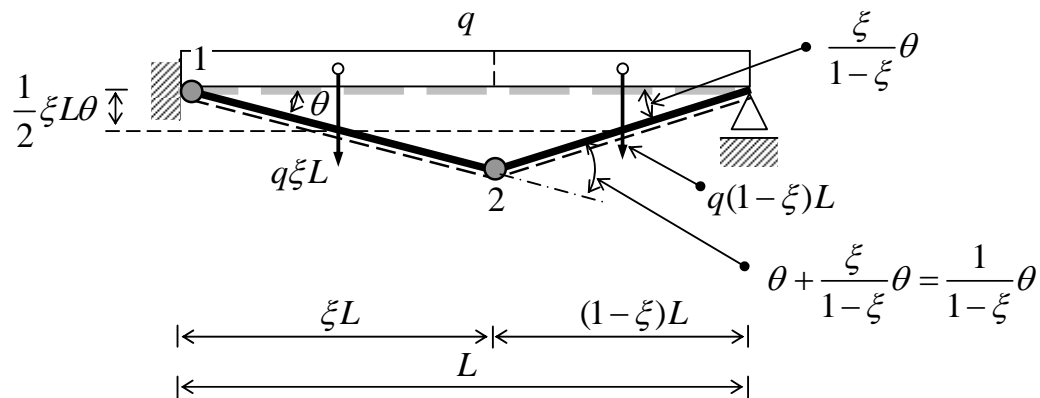
Myötöehtoa $|M| \leq M_p$ ei siis missään kohdassa rikota, joten

$$\underline{\underline{P_p = P_p^{(a)} = 4 \frac{M_p}{L}}}$$

Esimerkki 6.2: Määritetään oheisen palkin tasain jakautunut rajakuorma q_p . Palkin täysplastinen momentti on M_p .



Mekanismi: Nivelen paikka ξL on tuntematon.



Nivelten kulmanmuutokset:

$$\theta_1 = -\theta, \theta_2 = \frac{1}{1-\xi}\theta$$

Virtuaalisen työn periaate:

$$-W_{\text{int}} = M_p |\theta_1| + M_p |\theta_2| = M_p \left(\theta + \frac{1}{1-\xi}\theta\right) = \frac{2-\xi}{1-\xi} M_p \theta$$

$$W_{\text{ext}} = q\xi L \cdot \frac{1}{2}\xi L\theta + q(1-\xi)L \cdot \frac{1}{2}\xi L\theta = \frac{1}{2}q\xi L^2\theta$$

$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Rightarrow \frac{2-\xi}{1-\xi} M_p \theta = \frac{1}{2}\xi q L^2 \theta$$

$$\Rightarrow q = 2 \frac{2-\xi}{\xi(1-\xi)} \frac{M_p}{L^2}$$

Minimoidaan q :

$$\frac{dq}{d\xi} \equiv 2 \frac{-\xi + \xi^2 - (2-\xi)(1-2\xi)}{\xi^2(1-\xi)^2} \frac{M_p}{L^2} = 2 \frac{-\xi^2 + 4\xi - 2}{\xi^2(1-\xi)^2} \frac{M_p}{L^2} = 0$$

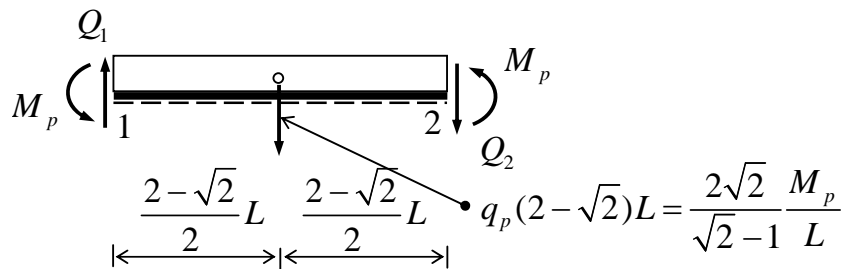
$$\Rightarrow \xi^2 - 4\xi + 2 = 0 \Rightarrow \xi = 2 - \sqrt{2}^{(+)} \approx 0,586$$

Plastinen rajakuorma:

$$\underline{\underline{q_p}} = 2 \frac{2 - 2 + \sqrt{2}}{(2 - \sqrt{2})(1 - 2 + \sqrt{2})} \frac{M_p}{L^2} = \frac{2\sqrt{2}}{(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)} \frac{M_p}{L^2} \approx \underline{\underline{11,66 \frac{M_p}{L^2}}}$$

Varmistetaan lopuksi, että myötöehto $|M| \leq M_p$ toteutuu:

Asia varmistuu, jos piste 2 on M :n maksimikohta. Sen tulisi siten olla M :n derivaatan nollakohta ja myös leikkausvoiman Q nollakohta. Määritetään leikkausvoima pisteessä 2. Se saadaan kirjoittamalla palkin osan 1-2 momenttitasapainoyhtälö pisteen 1 suhteen:



$$M_p + M_p - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \frac{M_p}{L} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2} L - Q_2 \cdot (2-\sqrt{2})L = 0$$

$$\Rightarrow Q_2 = 0.$$

Huomautus: Mekanismin **yhteen** jäykkään sauvaan kohdistuvan **jakautuneen kuorman** tekemä virtuaalinen työ saadaan korvaamalla se vaikutussuorallaan vaikuttavalla resultantilla ja laskemalla sen suorittama virtuaalinen työ. Näin meneteltiin yllä. Jos kuorma on **tasan jakautunut**, voidaan myös käyttää kaavaa: $W_{\text{ext}}^q = qA_q$, missä q on kuorman intensiteetti ja A_q on se pinta-ala, jonka jää alkuperäinen ja siirtyneen mekanismin väliin kuorman alapuolelle. Tarkasteltavan esimerkin tapauksessa saataisiin näin $W_{\text{ext}} = q \cdot 1/2 \cdot L \cdot \xi L \theta = 1/2 q \xi L^2 \theta$. Siis sama tulos.

7. Mekanismimenetelmä eli kinemaattinen menetelmä

7.1 Rajakuorman määrittäminen

Tarkastellaan kehärakennetta annetun, vain **yhdestä parametrissa riippuvan kuormituksen** alaisena. Tunnetulle rakenteelle ja kuormitukselle plastisia niveliä voi muodostua tietty määrä: taivutusmomenttipinnan maksimi- ja minimikohtiin sekä sauvojen päihin. Toisaalta mekanismin syntymistä varten tarvitaan tietty määrä niveliä. Voidaan näyttää, että rakenteella on tietty määrä **riippumattomia perusmekanismeja** (yhden parametrin kinemaattisia ketjuja) ja että jokainen mahdollinen mekanismi voidaan lausua perusmekanismien lineaarisena kombinaationa. **Todellinen sortumismekanismi** on sellainen perusmekanismien yhdistelmä, joka antaa **pienimmän plastisen rajakuorman** arvon. Laskelmissa on mukava käyttää virtuaalisen työn periaatetta. Käytännössä riittää tutkia ”todennäköisimmät” mekanismit. Lopuksi suoritetaan myötöehdon $|M| \leq M_p$ tarkistus: Jos mekanismia vastaa taivutusmomenttijakauma, joka ei riko myötöehtoa $|M| \leq M_p$, on löydetty todellinen rajakuorma.

7.2 Rajamitoitus

Jos lähdetään liikkeelle annetusta kuormasta ja pyritään mitoittamaan rakenne niin, että se kestää annetun kuorman, puhutaan **rajamitoituksesta**. Tällöin mekanismimenetelmässä etsitään mekanismi, joka antaa **suurimman M_p :n arvon**.

7.3 Perusmekanismit

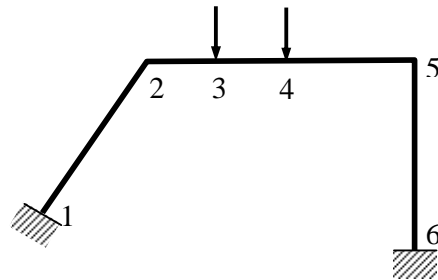
Perusmekanismien lukumäärä p voidaan määrittää kaavasta

$$p = m - n_s \quad (6.11)$$

missä m on niiden pisteiden lukumäärä, joihin plastinen nivel voi syntyä, ja n_s on staattisen määräämättömyyden kertaluku. (Pisteet, joissa plastinen nivel voi syntyä, ovat pisteitä, joissa taivutusmomentilla on ääriarvo.) Kaavan selitys on seuraava: n_s kertaa staattisesti määräämättömän rakenteen muuttamiseksi staattisesti määräytyksi tarvitaan n_s niveltä. Sen jälkeen tarvitaan vielä yksi nivel yhden vapausasteen mekanismin aikaansaamiseksi. Sen sijoittamiseksi on jäljellä täsmälleen $m - n_s$ mahdollista nivelen kohtaa.

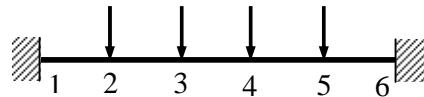
Esimerkki 7.1: Perusmekanismien lukumäärän määrittäminen

(a)



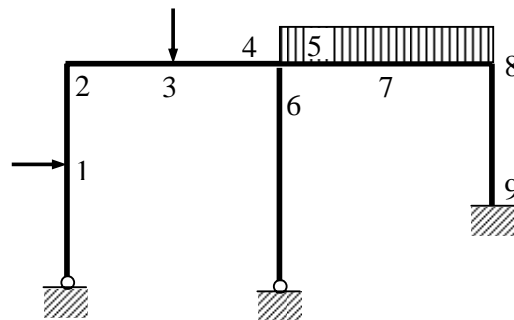
$$\frac{m = 6}{n_s = 3} \\ p = 3$$

b)



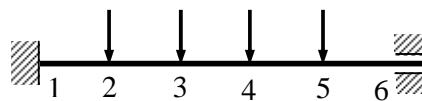
$$\frac{m = 6}{n_s = 2} \\ p = 4$$

(c)



$$\frac{m = 9}{n_s = 4} \\ p = 5$$

Huomautus: Tapauksen b) pakin tuenta täsmällisemmin piirrettynä:

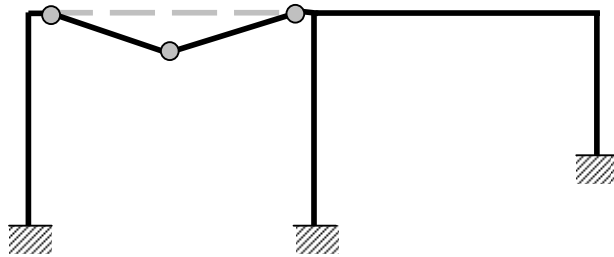


Staattisen määräämättömyyden kertaluvun kaavasta saadaan nyt

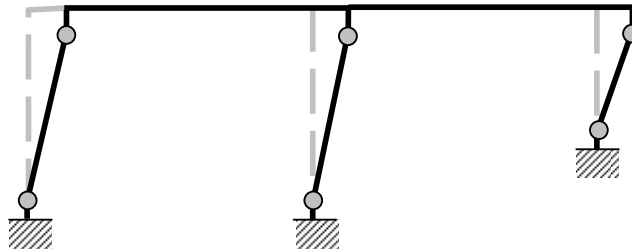
$$n_s = t + 3r - c - 3 = 5 + 3 \cdot 0 - 0 - 3 = 2$$

Tyypillisiä perusmekanismeja on kolmea tyyppiä: (a) **palkkimekanismi**, (b) **sivusiirtymämekanismi** ja (c) **nurkkamekanismi**. Niitä esittää kuva 7.1. Puhtaana tälliset mekanismit esiintyvät kehissä, joissa on vain vaaka- ja pystysuoria sauvoja. Kehissä, joissa on myös vinoja sauvoja, joidenkin perusmekanismien kinematiikka tulee usein monimutkaisemmaksi.

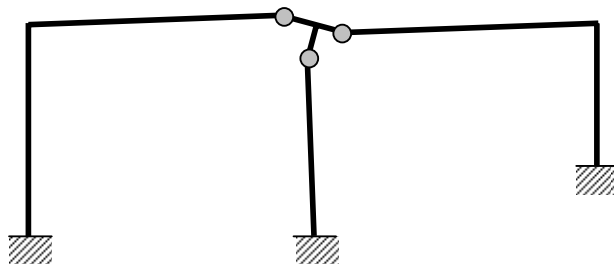
(a) Palkkimekanismi



(b) Sivusiirtymämekanismi



(c) Nurkkamekanismi



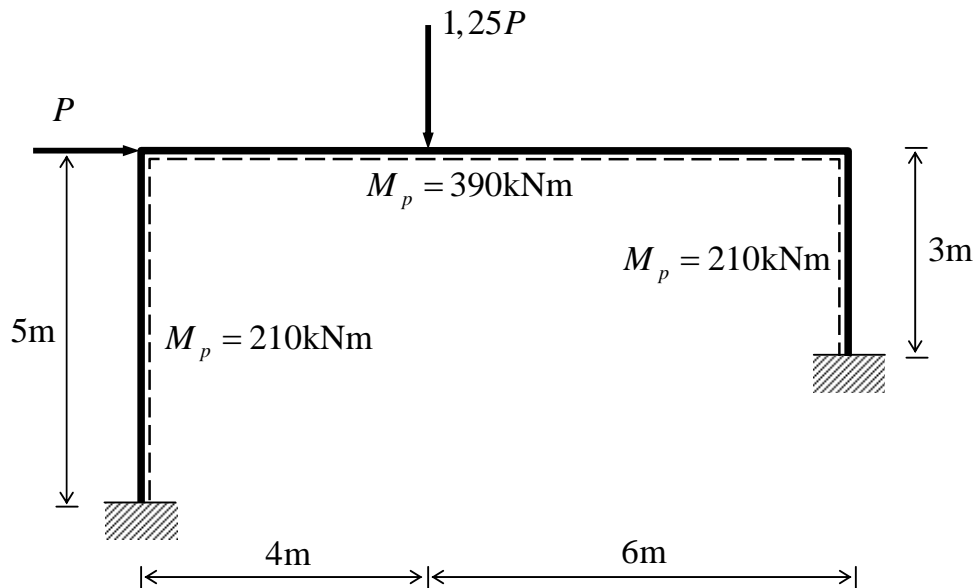
Kuva 7.1: Tyypilliset perusmekanismit

Kuvissa nivelet on merkitty äärellisen etäisyyden päähän nurkista, jotta kävisi ilmi, minkä sauvan päässä ko. nivel on. Todellisuudessa nivelet ovat sauvojen ja nurkkien yhtymäkohdissa. Nurkkamekanismi on mekanismien ydistelyssä käytettävä apumekanismi, joka ei tule kysymykseen erillisenä mekanismina. Se on kooltaan äärettömän pieni.

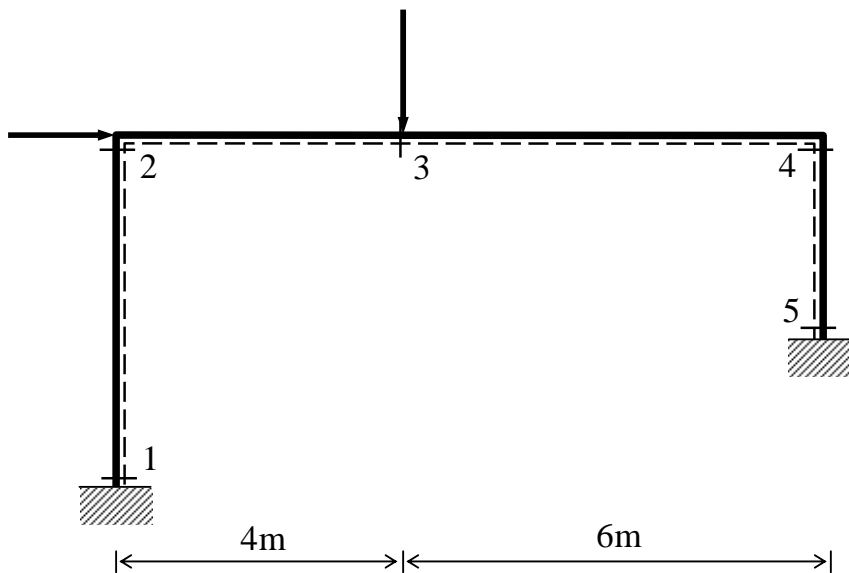
Perusmekanismien yhdistely tapahtuu muodostamalla sellaisia perusmekanismien lineaarisia yhdistelmiä, jotka antavat mahdollisimman pienen rajakuorman arvon (tai rajamitoituksessa mahdollisimman suuren täysplastisen momentin arvon). Tällaisessa yhdistelmämekanismissa tulisi ulkoisen virtuaalisen työn suhteessa sisäiseen virtuaaliseen työhön olla mahdollisimman suuri. Tämä saadaan aikaan konstruoimalla yhdistelmämekanismi siten, että sen **nivelten lukumäärä** perusmekanismeihin nähden **ei kasva** ja sen liike **ulkoisten kuormien** kohdalla tapahtuu (mahdollisimman hyvin) niiden **suuntaan**.

Mekanismien yhdistely on mukava tehdä taulukkomuodossa. On myös hyvä piirtää kuvia mahdollisista yhdistelmämekanismista. Niiden perusteella voi jo etukäteen hylätä epätodennäköiset vaihtoehdot.

Esimerkki 7.2: Määritä oheisen kehän rajakuorma P_p .

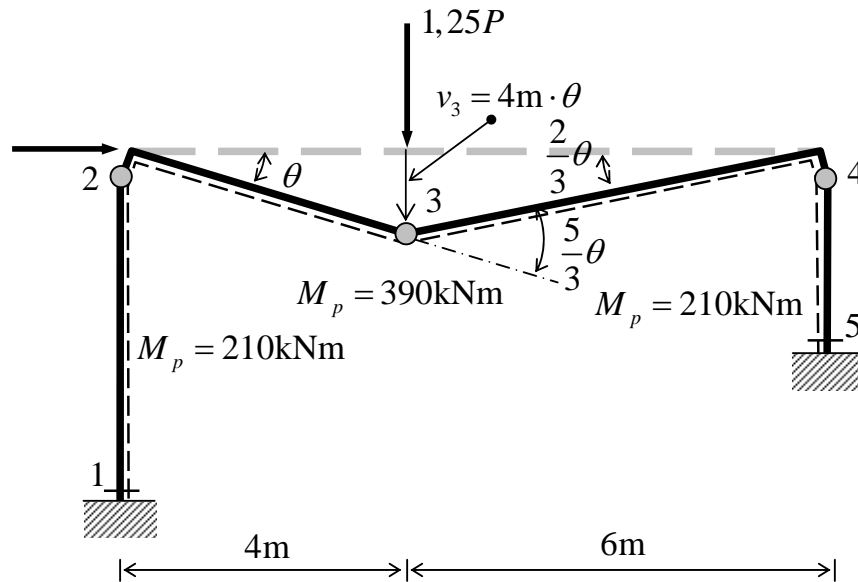


Nivelten paikat ja perusmekanismien lukumäärä:



$$p = m - n_s = 5 - 3 = 2$$

Mekanismi (a): Palkkimekanismi



Mekanismin siirtymätilaa kuvaavaksi parametriksi otetaan sauvan 2–3 kaltevuuskulma θ . Geometrisellä tarkastelulla saadaan helposti kuvassa esitetyt kulmat ja nivelen 3 pystysiirtymä v_3 parametrin θ avulla lausuttuna.

Nivelten kulmanmuutokset:

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = -\theta, \theta_3 = \frac{5}{3}\theta, \theta_4 = -\frac{2}{3}\theta, \theta_5 = 0.$$

Virtuaalisen työn periaate:

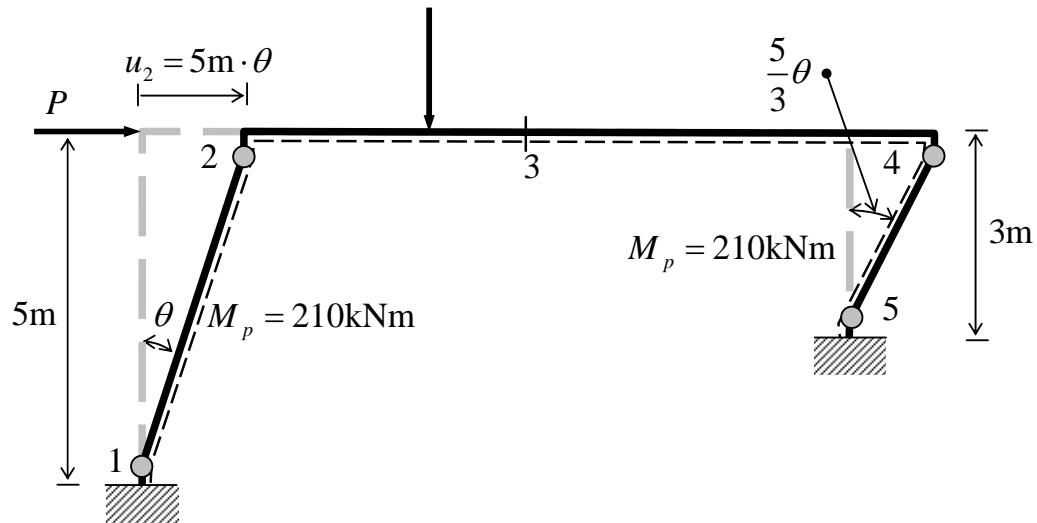
$$\begin{aligned} -W_{\text{int}} &= \sum M_{pi} |\theta_i| = M_{p2} |\theta_2| + M_{p3} |\theta_3| + M_{p4} |\theta_4| \\ &= 210\text{kNm} \cdot \theta + 390\text{kNm} \cdot \frac{5}{3}\theta + 210\text{kNm} \cdot \frac{2}{3}\theta = 1000\text{kNm} \cdot \theta \end{aligned}$$

$$W_{\text{ext}} = 1,25P \cdot v_3 = 1,25P \cdot 4\text{m} \cdot \theta = 5\text{m} \cdot P\theta$$

$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Leftrightarrow 1000\text{kNm} \cdot \theta = 5\text{m} \cdot P\theta$$

$$\Rightarrow \underline{P_p^{(a)} = 200\text{kN}}$$

Mekanismi (b): Sivusiirtymämekanismi



Mekanismin siirtymätilaa kuvaavaksi parametriksi otetaan sauvan 1–2 kaltevuuskulma θ .

Nivelten kulmanmuutokset:

$$\theta_1 = -\theta, \theta_2 = \theta, \theta_3 = 0, \theta_4 = -\frac{5}{3}\theta, \theta_5 = \frac{5}{3}\theta.$$

Virtuaalisen työn periaate:

$$\begin{aligned} -W_{\text{int}} &= \sum M_{pi} |\theta_i| = M_{p1} |\theta_1| + M_{p2} |\theta_2| + M_{p4} |\theta_4| + M_{p5} |\theta_5| \\ &= 210\text{kNm} \cdot \theta + 210\text{kNm} \cdot \theta + 210\text{kNm} \cdot \frac{5}{3}\theta + 210\text{kNm} \cdot \frac{5}{3}\theta \\ &= 1120\text{kNm} \cdot \theta \end{aligned}$$

$$W_{\text{ext}} = P \cdot u_2 = P \cdot 5\text{m} \cdot \theta = 5\text{m} \cdot P\theta$$

$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Leftrightarrow 1120\text{kNm} \cdot \theta = 5\text{m} \cdot P\theta$$

$$\Rightarrow \underline{P_p^{(b)} = 224\text{kN}}$$

Mekanismien yhdistely:

Mekanismi	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	$-W_{\text{int}}$	W_{ext}	P_p
(a)	0	$-\theta$	$\frac{5}{3}\theta$	$-\frac{2}{3}\theta$	0	$1000\text{kNm} \cdot \theta$	$5\text{m} \cdot P\theta$	200kN
(b)	$-\theta$	θ	0	$-\frac{5}{3}\theta$	$\frac{5}{3}\theta$	$1120\text{kNm} \cdot \theta$	$5\text{m} \cdot P\theta$	224kN
(c)=(a)+(b)	$-\theta$	0	$\frac{5}{3}\theta$	$-\frac{7}{3}\theta$	$\frac{5}{3}\theta$	$1700\text{kNm} \cdot \theta$	$10\text{m} \cdot P\theta$	170kN
(d) = (a) - $\frac{2}{5}$ (b)	$\frac{2}{5}\theta$	$-\frac{7}{5}\theta$	$\frac{5}{3}\theta$	0	$-\frac{2}{3}\theta$	$1168\text{kNm} \cdot \theta$	$3\text{m} \cdot P\theta$	389,3kN

Yhdistelmämekanismien nivelten kulmanmuutokset saadaan laskemalla perusmekanismien nivelten kulmanmuutosten ao. lineaarikombinaatiot. Yhdistelmämekanismi (c) saatiin hävittämällä nivel 2 ja yhdistelmämekanismi (d) hävittämällä nivel 4. Yhdistelmämekanismien sisäiset virtuaaliset työt lasketaan tavanomaiseen tapaan:

Mekanismi (c):

$$\begin{aligned}
 W_{\text{int}} &= \sum M_{pi} |\theta_i| \\
 &= 210\text{kNm} \cdot \theta + 390\text{kNm} \cdot \frac{5}{3}\theta + 210\text{kNm} \cdot \frac{7}{3}\theta + 210\text{kNm} \cdot \frac{5}{3}\theta \\
 &= 1700\text{kNm} \cdot \theta
 \end{aligned}$$

Mekanismi (d):

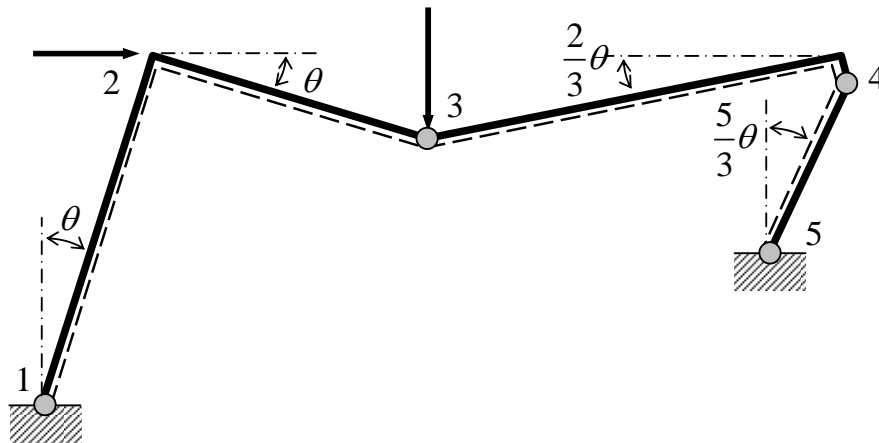
$$\begin{aligned}
 W_{\text{int}} &= \sum M_{pi} |\theta_i| \\
 &= 210\text{kNm} \cdot \frac{2}{5}\theta + 210\text{kNm} \cdot \frac{7}{5}\theta + 390\text{kNm} \cdot \frac{5}{3}\theta + 210\text{kNm} \cdot \frac{2}{3}\theta \\
 &= 1168\text{kNm} \cdot \theta
 \end{aligned}$$

Yhdistelmämekanismien ulkoiset virtuaaliset työt saadaan laskemalla perusmekanismien virtuaalisten töiden ao. lineaarikombinaatiot. Yhdistelmämekanismien rajakuormat saadaan lopulta ratkaisemalla ao. virtuaalisen työn yhtälöt. Tulokset on merkitty taulukkaan.

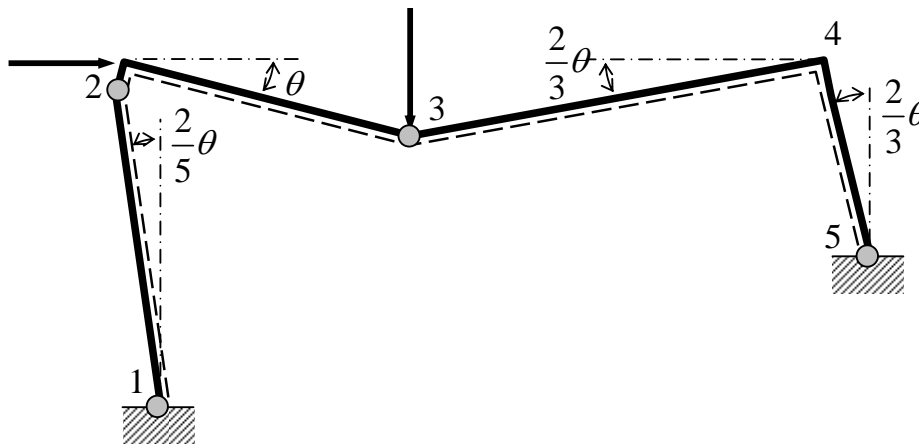
Nähdään, että mekanismi (c) antaa pienimmän rajakuorman $P_p = 170\text{kN}$.

Oheisiin kuviin on piirretty mekanismit (c) ja (d):

Mekanismi (c):



Mekanismi (d):



Kuvan perusteella mekanismi (d) on aika epätodennäköinen sortumis-mekanismi, koska vaakavoima P ja nivelen 2 siirtymä ovat vastakkaissuuntaisia. Ulkoinen virtuaalinen työ suhteessa sisäiseen työhön jää tässä tapauksessa pieneksi ja saatu $P_p^{(d)}$ on siten suuri (vrt. taulukko). Hahmottelemalla mekanismit (c) ja (d) etukäteen, olisi mekanismi (d) voitu jättää tarkastelusta pois.

Myötöehdon tarkistus:

Tarkistetaan lopuksi, ettei myötöehtoa $|M| \leq M_p$ rikota kehän missään pisteessä. Riittää, kun tutkitaan pisteet 1,...,5. Nivelissä 1, 3, 4 ja 5 pätee $|M_i| = M_{pi}$, joten myötöehtoa ei rikota. Myötöehdon tarkistamiseksi pisteessä 2 joudutaan ensin määrittämään ko. taivutusmomentin arvo.

Virtuaalisen työn periaate:

Sortumismekanismi (c); virtuaalinen siirtymätila mekanismi (a).

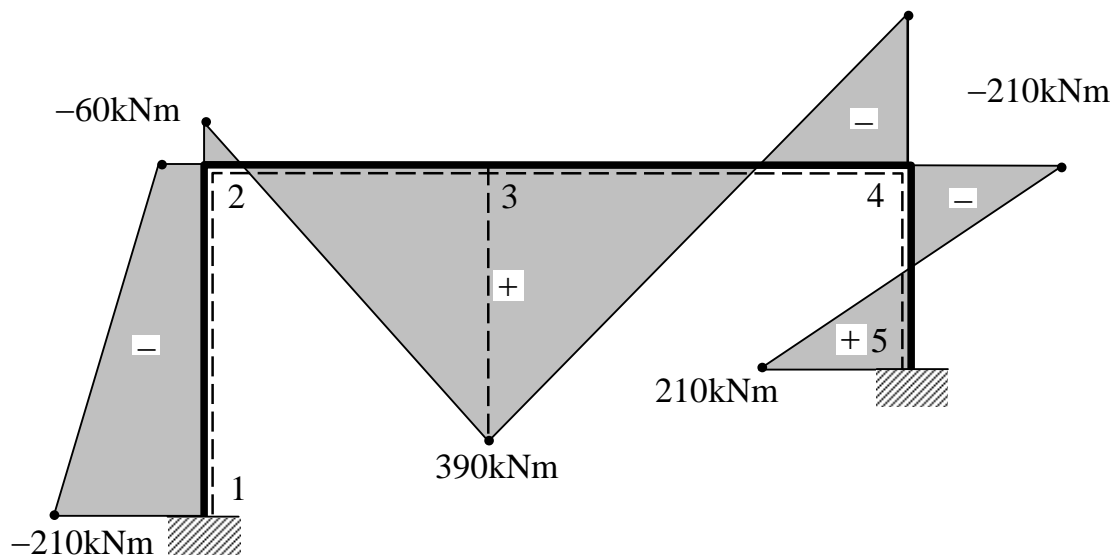
$$\begin{aligned}
 -W_{\text{int}} &= \sum M_i \theta_i = \overbrace{M_1}^{-M_{p1}} \overbrace{\theta_1}^0 + M_2 \theta_2 + \overbrace{M_3}^{M_{p3}} \theta_3 + \overbrace{M_4}^{-M_{p4}} \theta_4 + \overbrace{M_5}^{M_{p5}} \overbrace{\theta_5}^0 \\
 &= M_2(-\theta) + 390\text{kNm} \cdot \frac{5}{3}\theta - 210\text{kNm} \cdot \left(-\frac{2}{3}\theta\right) = (-M_2 + 790\text{kNm})\theta
 \end{aligned}$$

$$W_{\text{ext}} = 1,25 P_p^{(c)} \cdot v_3 = 1,25 \cdot 170\text{kN} \cdot 4\text{m} \cdot \theta = 850\text{kNm} \cdot \theta$$

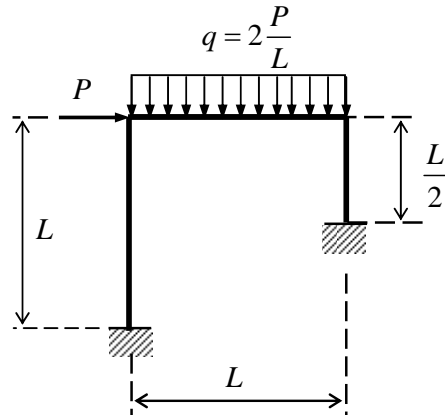
$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Leftrightarrow \underline{M_2 = -60\text{kNm}}$$

Nyt nähdään, että $|M_2| = 60\text{kNm} < 210\text{kNm} = M_{p2}$, joten myötöehtoa ei rikottu.

Piirretään lopuksi sortumismekanismin (c) taivutusmomenttikuvio:

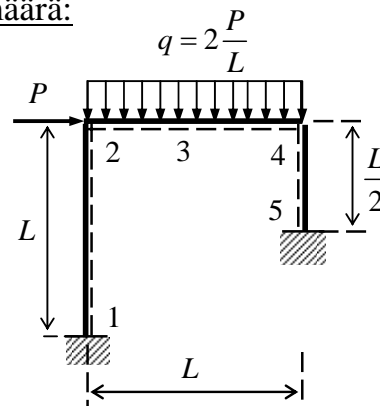


Esimerkki 7.3: Oheisen kehän täysplastinen momentti on M_p . Kuinka suuren kuorman P rakenne kestää.



Nivelten paikat ja perusmekanismien lukumäärä:

$$p = m - n_s = 5 - 3 = 2$$



Mekanismi (a): Sivusiirtymämekanismi.

$$\theta_1 = -\theta$$

$$\theta_2 = +\theta$$

$$\theta_3 = 0$$

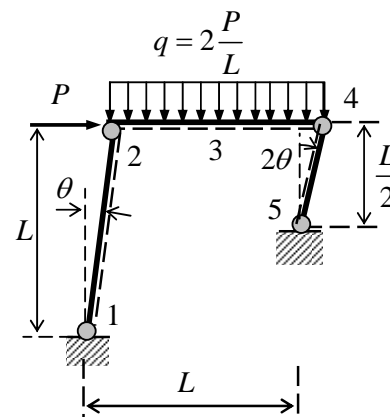
$$\theta_4 = -2\theta$$

$$\theta_5 = +2\theta$$

$$\begin{aligned} -W_{\text{int}} &= M_p (|\theta_1| + |\theta_2| + |\theta_3| + |\theta_4| + |\theta_5|) \\ &= M_p (\theta + \theta + 2\theta + 2\theta) = 6M_p \theta \end{aligned}$$

$$W_{\text{ext}} = P \cdot \theta L = PL\theta$$

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \Rightarrow PL\theta = 6M_p \theta \Rightarrow \underline{P^{(a)} = 6 \frac{M_p}{L}}$$



Mekanismi (b): Palkkimekanismi.

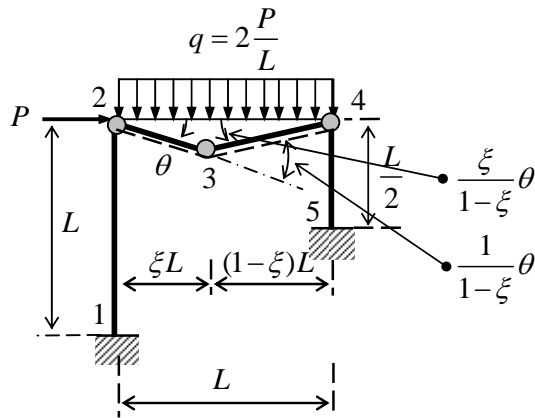
$$\theta_1 = 0$$

$$\theta_2 = -\theta$$

$$\theta_3 = +\frac{1}{1-\xi}\theta$$

$$\theta_4 = -\frac{\xi}{1-\xi}\theta$$

$$\theta_5 = 0$$



$$\begin{aligned} -W_{\text{int}} &= M_p (|\theta_1| + |\theta_2| + |\theta_3| + |\theta_4| + |\theta_5|) \\ &= M_p \left(\theta + \frac{1}{1-\xi}\theta + \frac{\xi}{1-\xi}\theta \right) = \frac{2}{1-\xi} M_p \theta \end{aligned}$$

$$W_{\text{ext}} = qA_q = q \cdot \frac{2P}{L} \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot \xi L \theta = P\xi L \theta$$

Symmetrian takia $\xi = 1/2$:

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \Rightarrow \frac{1}{2} PL\theta = 4M_p\theta \Rightarrow \underline{P^{(b)} = 8 \frac{M_p}{L}}$$

Mekanismien yhdistely:

Mekanismi	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	$-W_{\text{int}}$	W_{ext}
(a)	$-\theta$	$+\theta$	0	-2θ	$+2\theta$	$6M_p\theta$	$PL\theta$
(b)	0	$-\theta$	$\frac{1}{1-\xi}\theta$	$-\frac{\xi}{1-\xi}\theta$	0	$\frac{2}{1-\xi}M_p\theta$	$P\xi L\theta$
(c)=(a)+(b)	$-\theta$	0	$\frac{1}{1-\xi}\theta$	$-\frac{2-\xi}{1-\xi}\theta$	$+2\theta$	$2\frac{3-2\xi}{1-\xi}M_p\theta$	$(1+\xi)PL\theta$

Huomautus: Mekanismi (c) saatiin hävittämällä nivel 2.

Mekanismi (c):

$$\begin{aligned} -W_{\text{int}} &= M_p (|\theta_1| + |\theta_2| + |\theta_3| + |\theta_4| + |\theta_5|) = M_p \left(\theta + \frac{1}{1-\xi} \theta + \frac{2-\xi}{1-\xi} \theta + 2\theta \right) \\ &= 2 \frac{3-2\xi}{1-\xi} M_p \theta \end{aligned}$$

$$W_{\text{ext}} = PL\theta + P\xi L\theta = (1+\xi)PL\theta$$

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}}$$

$$\Rightarrow (1+\xi)PL\theta = 2 \frac{3-2\xi}{1-\xi} M_p \theta \Rightarrow P = 2 \frac{3-2\xi}{1-\xi^2} \frac{M_p}{L}$$

Minimointi:

$$\frac{dP}{d\xi} = 2 \frac{-2(1-\xi^2) - (-2\xi)(3-2\xi)}{(1-\xi^2)^2} \frac{M_p}{L} = 2 \frac{-2+6\xi-2\xi^2}{(1-\xi^2)^2} \frac{M_p}{L} = 0$$

$$\Rightarrow \xi^2 - 3\xi + 1 = 0 \Rightarrow \xi_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \xi = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,381$$

$$P_p = 2 \frac{3-2\xi}{1-\xi^2} \frac{M_p}{L} = 2 \frac{3-2 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2} \frac{M_p}{L} = \frac{8\sqrt{5}}{6\sqrt{5}-10} \frac{M_p}{L} \approx 5,236 \frac{M_p}{L}$$

Taivutusmomentin tarkistus pisteessä 2:

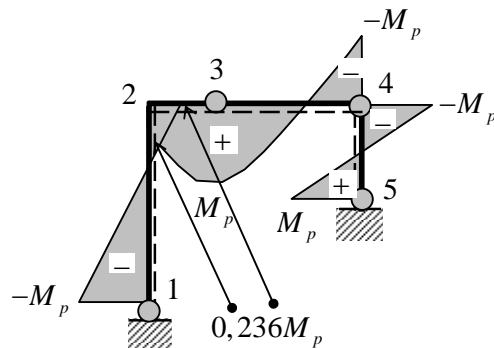
Otetaan virtuaaliseksi siirtymätilaksi mekanismi (a), jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
 -W_{\text{int}} &= \overbrace{M_1}^{-M_p} \overbrace{\theta_1}^{-\theta} + M_2 \overbrace{\theta_2}^{+\theta} + \overbrace{M_3}^{M_p} \overbrace{\theta_3}^0 + \overbrace{M_4}^{-M_p} \overbrace{\theta_4}^{-2\theta} + \overbrace{M_5}^{+M_p} \overbrace{\theta_5}^{+2\theta} \\
 &= M_p \theta + M_2 \theta + 2M_p \theta + 2M_p \theta \\
 &= (M_2 + 5M_p) \theta
 \end{aligned}$$

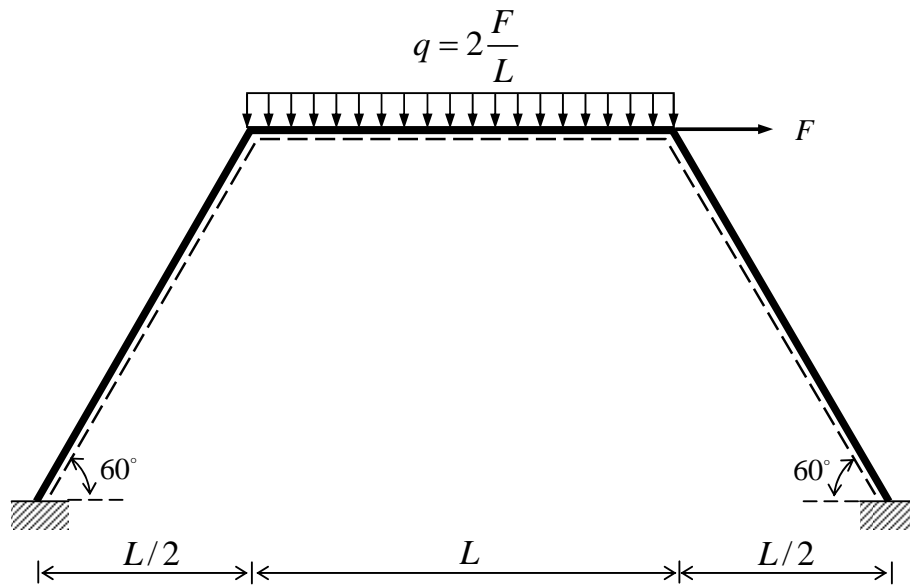
$$W_{\text{ext}} = P_p \cdot \theta L = 5,236 \frac{M_p}{L} \cdot \theta L = 5,236 M_p \theta$$

$$\begin{aligned}
 -W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} &\Rightarrow (M_2 + 5M_p) \theta = 5,236 M_p \theta \\
 \Rightarrow M_2 &= (5,236 - 5) M_p = \underline{\underline{0,236 M_p}} < M_p.
 \end{aligned}$$

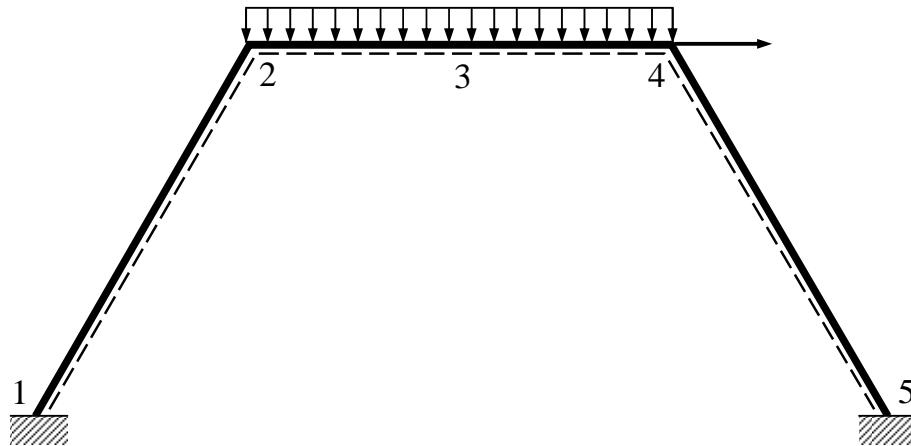
Sortumismekanismin (c) M -kuvio:



Esimerkki 7.4: Määritä oheisen tasajäykän kehän täysplastisen momentin M_p arvo siten, että kehä kantaa siihen kohdistuvan kuormituksen.

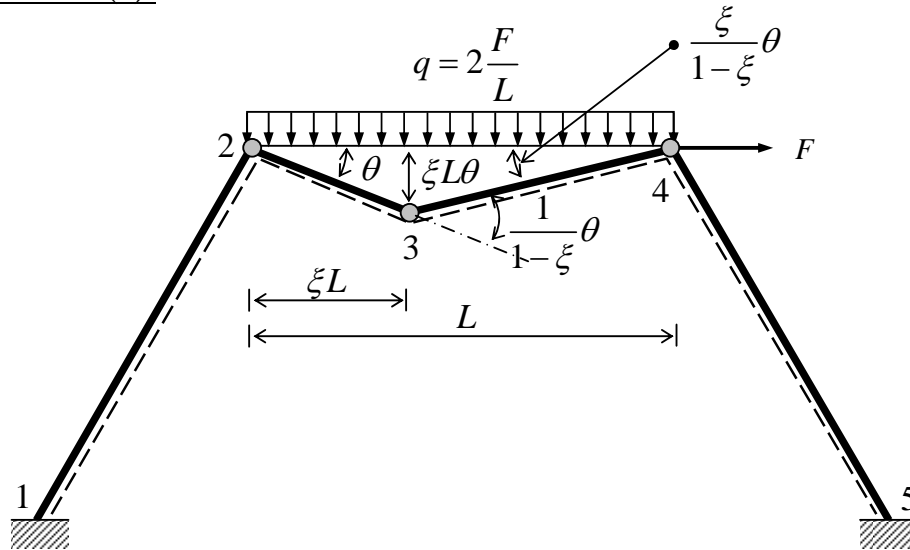


Nivelten paikat ja perusmekanismien lukumäärä:



$$p = m - n_s = 5 - 3 = 2$$

Mekanismi (a): Palkkimekanismi



Nivelten kulmanmuutokset:

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = -\theta, \theta_3 = \frac{1}{1-\xi}\theta, \theta_4 = -\frac{\xi}{1-\xi}\theta, \theta_5 = 0$$

Virtuaalisen työn periaate:

$$-W_{\text{int}} = \sum M_{pi} |\theta_i| = M_p (|\theta_2| + |\theta_3| + |\theta_4|) = M_p \left(\theta + \frac{1}{1-\xi}\theta + \frac{\xi}{1-\xi}\theta \right) = \frac{2}{1-\xi} M_p \theta$$

$$W_{\text{ext}} = q \cdot A_q = \frac{2F}{L} \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot \xi L \theta = \xi FL \theta$$

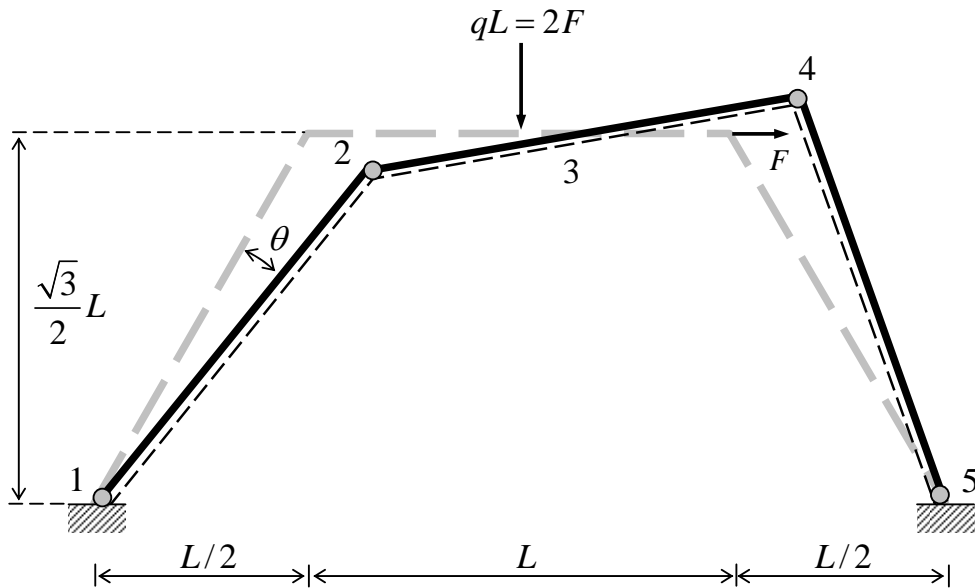
$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Rightarrow \frac{2}{1-\xi} M_p \theta = \xi FL \theta \Rightarrow \underline{M_p = \frac{1}{2} FL \xi (1-\xi)}$$

Täysplastisen momentin suurin arvo:

$$\frac{dM_p}{d\xi} = \frac{FL}{2} (1-2\xi) = 0 \Rightarrow \xi = \frac{1}{2}; M_p^{(a)} = \frac{FL}{8} = 0,125FL$$

(Olisi voitu myös päätellä suoraan symmetrian perusteella, että $\xi = 1/2$.)

Mekanismi (b): Sivusiirtymämekanismi



Nivelten kulmanmuutokset ja pisteiden 2 ja 4 siirtymät: Otetaan $\theta_{12} = \theta$, muodostetaan kinemaattinen ketju ja huomioidaan tukiehdot:

$$\text{Väli 1-2: } \begin{cases} u_2 - u_1 = -\left(-\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)\theta_{12} \Rightarrow u_2 = \frac{L\sqrt{3}}{2}\theta \\ v_2 - v_1 = \frac{L}{2}\theta_{12} \Rightarrow v_2 = \frac{L}{2}\theta \end{cases}$$

$$\text{Väli 2-4: } \begin{cases} u_4 - u_2 = 0 \Rightarrow u_4 = \frac{L\sqrt{3}}{2}\theta \\ v_4 - v_2 = L\theta_{24} \Rightarrow v_4 = \frac{L}{2}\theta + L\theta_{24} \end{cases}$$

$$\text{Väli 4-5: } \begin{cases} u_5 - u_4 = -\frac{L\sqrt{3}}{2}\theta_{45} \Rightarrow u_5 = \frac{L\sqrt{3}}{2}\theta - \frac{L\sqrt{3}}{2}\theta_{45} = 0 \\ v_5 - v_4 = \frac{L}{2}\theta_{45} \Rightarrow v_5 = \frac{L}{2}\theta + L\theta_{24} + \frac{L}{2}\theta_{45} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta - \theta_{45} = 0 \\ \theta + 2\theta_{24} + \theta_{45} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{45} = \theta \\ \theta_{24} = -\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\theta_{12} = \theta, \theta_{24} = -\theta, \theta_{45} = \theta; v_2 = \frac{L}{2}\theta, u_4 = \frac{L\sqrt{3}}{2}\theta, v_4 = -\frac{L}{2}\theta.}}$$

Saadaan:

$$\theta_1 = -\theta_{12} = \underline{-\theta}$$

$$\theta_2 = \theta_{21} - \theta_{24} = \underline{2\theta}$$

$$\theta_4 = \theta_{42} - \theta_{45} = \underline{-2\theta}$$

$$\theta_5 = \theta_{45} = \underline{\theta}$$

Virtuaalisen työn periaate:

$$-W_{\text{int}} = \sum M_{pi} |\theta_i| = M_p (|\theta_1| + |\theta_2| + |\theta_4| + |\theta_5|) = M_p (\theta + 2\theta + 2\theta + \theta) = 6M_p \theta$$

$$W_{\text{ext}} = 2F \frac{v_2 + v_4}{2} + F \cdot u_4 = 2F \cdot \frac{\frac{L}{2}\theta - \frac{L}{2}\theta}{2} + F \frac{L\sqrt{3}}{2} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} FL\theta$$

$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Leftrightarrow 6M_p \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} FL\theta \Rightarrow M_p^{(b)} = \frac{\sqrt{3}}{12} FL \approx 0,1443FL$$

Mekanismien yhdistely:

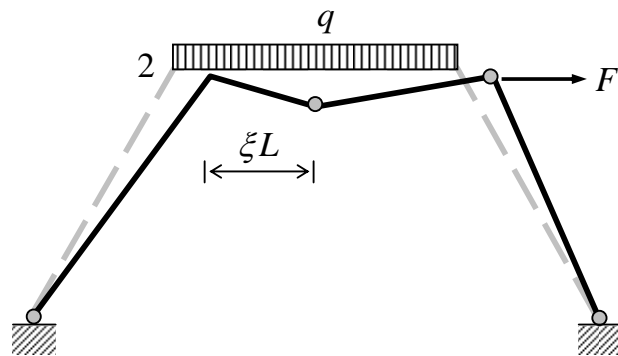
Mekanismi	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	$-W_{\text{int}}$	W_{ext}
(a)	0	$-\theta$	$\frac{1}{1-\xi}\theta$	$-\frac{\xi}{1-\xi}\theta$	0	$\frac{2}{1-\xi}M_p\theta$	$\xi FL\theta$
(b)	$-\theta$	2θ	0	-2θ	θ	$6M_p\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2} FL\theta$
(c)	$-\theta$	0	$\frac{2}{1-\xi}\theta$	$-\frac{2}{1-\xi}\theta$	θ	$2\frac{3-\xi}{1-\xi}M_p\theta$	$(2\xi + \frac{\sqrt{3}}{2})FL\theta$
(d)	$-\xi\theta$	2θ	-2θ	0	$\xi\theta$	$(2\xi + 4)M_p\theta$	$\xi(2\xi + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2)FL\theta$

Huom! (c) = 2(a) + (b) ja (d) = $-2(1-\xi)(a) + \xi(b)$

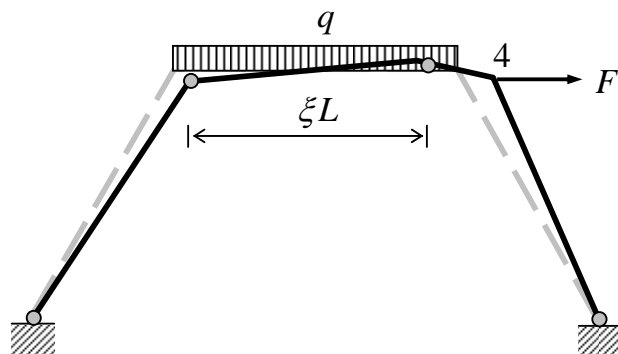
Mekanismi (c) saatiin hävittämällä nivel 2 ja mekanismi (d) saatiin hävittämällä nivel 4.

Piirretään yhdistelmämekanismit:

Mekanismi (c):



Mekanismi (d):



Hylätään mekanismi (d) kuvan perusteella ja jatketaan meknismin (c) käsittelyä.

Virtuaalisen työn periaate:

$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Leftrightarrow 2 \frac{3-\xi}{1-\xi} M_p \theta = (2\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}) FL \theta \Rightarrow M_p = \frac{FL}{4} \frac{(\sqrt{3} + 4\xi)(1-\xi)}{3-\xi}$$

Maksimoidaan M_p :

$$\frac{dM_p}{d\xi} = \frac{4\xi^2 - 24\xi + 12 - 2\sqrt{3}}{(3-\xi)^2} = 0 \Rightarrow \xi = 3 - \sqrt{6 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0,380$$

$$\Rightarrow M_p^{(c)} = (5 + \frac{1}{4}\sqrt{3} - \sqrt{24 + 2\sqrt{3}}) FL \approx 0,192 FL.$$

Havaitaan, että mekanismi (c) antaa suurimman täysplastisen momnetin arvon. Se on sortumismekanismi, jos myötöehtoa ei rikota.

Myötöehdon $|M| \leq M_p$ tarkistus:

Määritetään mekanismin (c) taivutusmomentin arvo nurkassa 2. Virtuaalisenä siirtymätilana on mekanismi (b).

$$\begin{aligned} -W_{\text{int}} &= M_1\theta_1 + M_2\theta_2 + M_3\theta_3 + M_4\theta_4 \\ &= -M_p(-\theta) + M_2 \cdot 2\theta - M_p(-2\theta) + M_p\theta = 4M_p\theta + 2M_2\theta \end{aligned}$$

$$W_{\text{ext}} = 2F \cdot \frac{v_2 + v_4}{2} + F u_4 = 2F \cdot 0 + F \frac{L\sqrt{3}}{2} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} FL\theta$$

$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Rightarrow M_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \underbrace{FL}_{\frac{M_p}{0,192}} - 2M_p = 0,255 M_p < M_p$$

Myötöehtoa $|M| \leq M_p$ ei rikota!

∴ Tarvittava täysplastisen momentin arvo on siis $M_p = M_p^{(c)} = \underline{\underline{0,192 FL}}$.

Sortumismekanismin M-kuvio:

