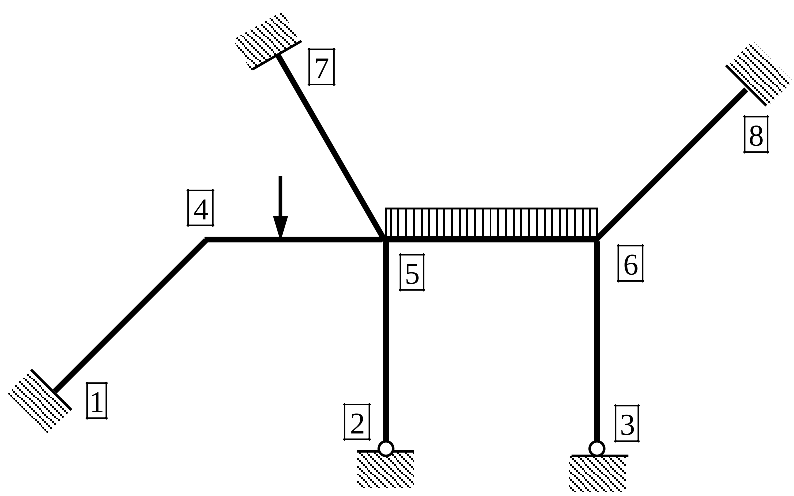
Rak-54.111 RAKENTEIDEN MEKANIIKKA B

Luentomoniste

Osa I: Sauvarakenteiden kimmoiset menetelmät

Jukka Aalto



1. PERUSKÄSITTEITÄ

Sauvaksi nimitetään rakenne-elementtiä, jonka pituus on suuri verrattuna poikkisuuntaisiin mittoihin. Sauvarakenteessa sauvat liitetään toisiinsa jäykästi, monoliittisesti tai nivelellisesti, joskus myös osittain jäykästi, kuitenkin aina niin että muodostuva rakenne, **kehä**, **jatkuva palkki** tai **ristikko**, pystyy kantamaan kuormia luotettavasti ja ilman liian suuria muodonmuutoksia. Sauva on tietenkin kolmiulotteinen kappale, mutta sen lujuusopillisesta toimintatavasta johtuen sitä kuvataan rakenteiden mekaniikassa viivalla, jolla on tietyt jäykkyys- ja lujuusominaisuudet. Viiva esittää sauvan akselia, joka voi olla suora tai kaareva. Jos rakenteen sauvat ja kuormat ovat samassa tasossa, puhutaan tasorakenteesta, esim. tasokehä tai jatkuva palkki. Jos sauvat muodostavat kolmiulotteisen systeemin, puhutaan kolmidimensioisesta tai -ulotteisesta rakenteesta tai avaruuskehästä. **Arina** on kehä, jonka sauvat ovat samassa tasossa, mutta kuormat vaikuttavat kohtisuoraan tätä tasoa vastaan.

Sauvarakenteet ovat erittäin tavallisia rakenteita talon- ja sillanrakennustekniikassa. **Rakennemallin**, ts. viivamaisen systeemin, jota sitten rakenteiden mekaniikan keinoin tutkitaan, muodostaminen todellisesta rakenteesta vaatii taitoa arvioida rakenteen toimintaa eli yhdellä sanalla sanottuna insinööritaitoa. Rakennemalli ei saa olla liian monimutkainen, koska se tekee analysoinnista tarpeettoman vaikean, eikä liian yksinkertainen, koska se voi johtaa epätaloudelliseen rakenteeseen. Sen tulee ottaa huomioon olennaiset piirteet rakenteen mekaanisessa toiminnassa ja olla rakenteen merkitystä vastaava. Kuorman kantamisen kannalta primääriset rakenteet on mallinnettava huolella, sekundäärirakenteissa voidaan tyytyä yksinkertaisempiin malleihin.

Sauvarakenteen ratkaiseminen tarkoittaa sen jännitystilan ja siirtymien määrittämistä tietyn kuormituksen alaisena. **Kuormitukset** aiheutuvat rakenteen omasta painosta, hyötykuormista, tuulesta, lumesta, lämpötilan muutoksista, tukien siirtymistä, jne. Jännitysten tai jännitysresultanttien kuten taivutusmomentin, normaalivoiman ja leikkausvoiman, määrittäminen on tarpeen rakenteen kestävyyden arvioimiseksi. Siirtymien määrittäminen tähtää myös rakenteen käyttötarkoituksen varmistamiseen. Suuret siirtymät voivat muuttaa rakenteen kuormankantamisominaisuuksia, rikkoa rakenneosien välisiä liitoksia tai olla esteettisesti tai psykologisesti epämiellyttäviä.

Rakenteiden ratkaisumenetelmät jaetaan perinteisesti kahteen ryhmään: **voimamenetelmä** ja **siirtymämenetelmä**. Edellisessä tuntemattomiksi suureiksi, jotka tehtävässä pyritään ratkaisemaan, valitaan voimasuureita (tukireaktio, taivutusmomentti, leikkausvoima, normaalivoima) ja jälkimmäisessä siirtymäsuureita (siirtymä, kiertymä, vääntökulma). Voimamenetelmässä perusrakennetta nimitetään **staattisesti määrätyksi** ja siirtymämenetelmässä vastaavasti **kinemaattisesti määrätyksi**.

1.1 Staattisen määräämättömyyden kertaluku

Rakennetta, jonka **tukireaktiot** ja **leikkausrasitukset** (jännitysresultantit) voidaan määrittää pelkästään **tasapainoehtoja** käyttäen, kutsutaan **staattisesti määrätyksi** (statically determinate, isostatic) rakenteeksi. Muussa tapauksessa sitä kutsutaan **staattisesti määräämättömäksi** eli hyperstaattiseksi (statically indeterminate, hyperstatic) rakenteeksi. Rakenne on **ulkoisesti staattisesti määrätty**, jos sen **tukireaktiot** voidaan määrittää tasapainoehtoja käyttäen. Muussa tapauksessa se on **ulkoisesti staattisesti määräämätön**.

Staattisesti määräämättömän rakenteen ns. **staattisesti määrätty perusmuoto** on systeemi, joka saadaan aikaan vapauttamalla tukia ja muodostamalla rakenteen osien välille niveliä tai katkaisuja siten, että rakenteesta tulee lopulta staattisesti määrätty.

Ns. **staattisesti määräämättömillä suureilla** tarkoitetaan niitä vapautettuihin tukiin liittyviä tukivoimia ja tukimomentteja, niveliin liittyviä taivutusmomentteja sekä katkaisuihin liittyviä leikkausrasituksia, joiden vaikutuksesta tuille, niveliin ja katkaisuihin syntyvät siirtymät ja kiertymät sekä siirtymä- ja kiertymäerot saadaan estetyiksi. Staattisesti määräämättömän rakenteen ratkaiseminen voimamenetelmällä käsittää näiden tuntemattomien määrittämisen.

Rakenteen **staattisen määräämättömyyden kertaluku** määritellään yleisesti kaavalla

$$\boxed{n_s = n - p,} \tag{1.1}$$

missä n on staattisesti määrätyn perusmuodon tukiin sekä siihen muodostettuihin niveliin ja katkaisuihin vaikuttavien tuntemattomien voimasuureiden lukumäärä ja p on rakenteelle käytettävissä olevien riippumattomien tasapainoyhtälöiden lukumäärä.

Staattisesti määrätyssä rakenteessa $n = p$ eli $n_s = 0$. Lisäksi edellytetään, että syntyvä yhtälöryhmä on ratkaistavissa.

1.11 Tasosauvarakenne

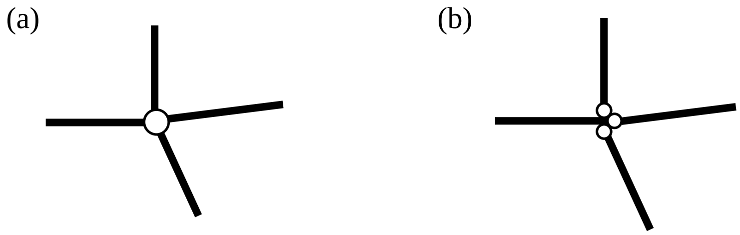
Tasosauvarakenteella ymmärretään tässä sauvarakennetta, jonka sauvat sijaitsevat samassa tasossa ja jota kuormittaa tässä tasossa vaikuttava tasovoimasysteemi. Tasosauvarakenteen staattisen määräämättömyyden kertaluvulle voidaan esittää kaava

$$\boxed{n_s = t + 3r - c - 3,} \tag{1.2}$$

missä t yksiarvoisten tukien (rajoitteiden) lukumäärä, r suljettujen renkaiden lukumäärä ja c liitosten vapausasteiden lukumäärä. Seuraavassa tarkastellaan kaavaan (1.2) liittyviä käsitteitä ja esitetään kuinka se on saatu.

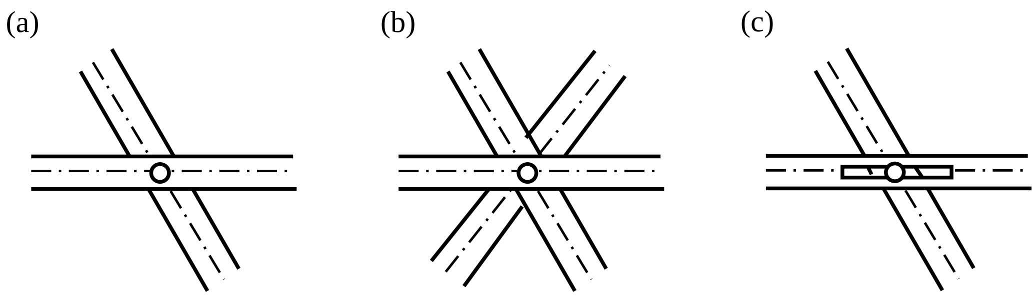
Liitoksen vapausasteiden lukumäärä:

Liitoksen vapausasteiden lukumäärä c on sen sallimien liikemahdollisuuksien lukumäärä. Yleisin sauvarakenteiden liitos on nivel. Kahden rakenteen osan välisen nivelen vapausasteiden lukumäärä $c = 1$, koska nivel sallii rakenteen osien välisen kiertymän. Kolmen rakenteen osan välisen nivelen vapaus-asteiden lukumäärä $c = 2$, jne. Kuva 1.1 havainnollistaa asiaa, kun sauvoja on neljä ja $c = 3$. Muunlaisiakin liitoksia esiintyy.



Kuva 1.1: Nivel kehärakenteen nurkassa: (a) neljään sauvaan liittyvä nivel, jonka $c = 3$, (b) vastaavat yksivapausasteiset nivelet

Kuvassa 1.2 on kolme liitosta. Kuvan (a) liitos on kahden sauvan välinen nivel, joten $c = 1$, kuvan (b) liitos on kolmen sauvan välinen nivel, joten $c = 2$ ja kuvan (c) liitos sallii kahden sauvan välisen vaakasiirtymän ja kiertymän, joten $c = 2$.



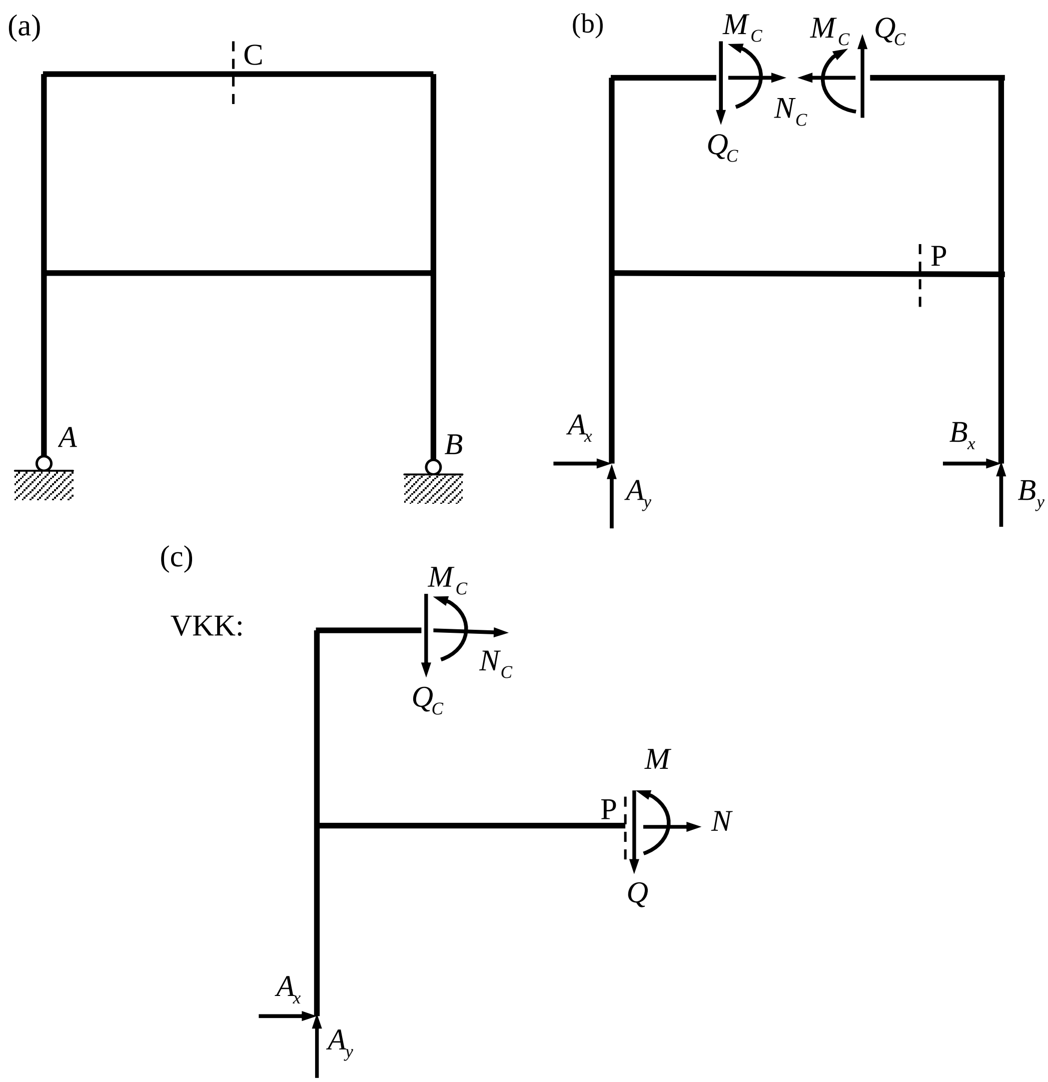
Kuva 1.2: Liitoksia.

Kaavan (1.2) perustelua:

Seuraavassa selvitetään pääpiirtein, kuinka kaava (1.2) on saatu. Tarkastelu ei ole tämän monisteen sisällön ymmärtämisen kannalta keskeistä, joten lukija voi alkuvaiheessa huoletta hypätätä sen yli. Tarkastelun ymmärtäminen on helpompaa, kun lukija on sisäistänut tämän tasosauvarakenteita käsittelevän luvun.

Kaavan (1.1) mukaan staattisen määräämättömyyden kertaluku on $n_s = n - p$, missä n on tuntemattomien lukumäärä ja p on yhtälöiden lukumäärä. Tuntemattomia ovat tukivoimat, joiden lukumäärä on t. Jos rakenteessa on suljettuja renkaita, tuntemattomien lukumäärä kasvaa. Tavoitteena näet on, että rakenteen jokaisen sauvan leikkausrasitukset voidaan määrittää tasapainotarkasteluilla.

Tarkastellaan kuvan 1.3a mukaista tasokehää, jossa on suljettu rengas. Jos rengas ajatellaan katkaistuksi pisteestä C, vaikuttaa siinä leikkausrasitukset N_C, Q_C ja M_C, jotka estävät leikkaukseen liittyvien sauvojen päiden liikkeen toisiinsa nähden (kuva 1.3b) ja joiden arvot ovat tuntemattomia. Näin tukireaktioiden $t = 4$ lisäksi probleemaan on tullut 3 uutta tuntematonta.



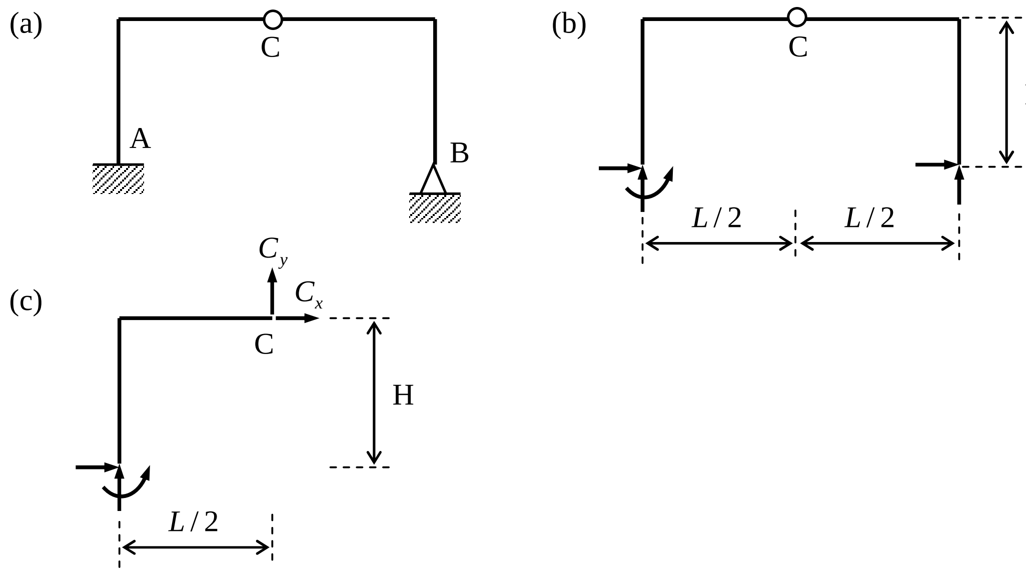
Kuva 1.3: Tasokehä, jossa on suljettu rengas.

Tarkastellaan sitten tilannetta sen jälkeen kuin tuntemattomat A_x, A_y, B_x, B_y, N_C, Q_C ja M_C on saatu ratkaistua. (Koska tuntemattomia on n=7 kpl ja tasapainoyhtälöitä p=3 kpl, ratkaisua ei ole saatu statiikan keinoin. Kyseessä on staattisesti määräämätön rakenne, jolle $n_s = n - p = 7 - 3 = 4$.) Nyt meidän tulisi voida määrittää rakenteen kunkin sauvan leikkausrasitukset mielivaltaisessa pisteessä P. Sijaitkoon tämä piste esimerkiksi kuvassa 1.3b esitetyssä kohdassa. Ajatellaan rakenne leikatuksi kahtia kohdasta P ja tarkastellaan sen vasemman puolen vapaakappalekuviota (kuva 1.3c) . Tähän kappaleeseen vaikuttaa kolme tuntematonta: leikkausrasitukset N, Q ja M ja sille voidaan muodostaa kolme tasapainoyhtälöä. Näin yhtälöitä on yhtä paljon kuin tuntemattomia ja leikkausrasitukset pisteessä P saadaan määritetyksi. Vastaavalla menettelyllä päästään tulokseen, oli tarkasteltava piste P missä tahansa rakenteessa. Havaitaan siis, että jokaista rakenteen suljettua rengasta kohti tulee siihen 3 lisätuntematonta.

Näin tuntemattomien lukumääräksi saadaan

$$n = t + 3r \, . \tag{1.3}$$

Jos rakenteen liitokset ovat liikkumattomia, sitä voidaan tarkastella kuten jäykkää kappaletta ja tasapainoyhtälöiden lukumäärä (tasotapaus) on 3. Jos rakenteessa on liitoksia, joilla on liikemahdollisuuksia eli vapausasteita tilanne muuttuu. Jokaista liitoksen vapausastetta kohti rakenteelle voidaan kirjoittaa yksi lisätasapainoyhtälö. Tätä havainnollistetaan kuvan 1.4a kehän tapauksessa.



Kuva 1.4: Tasokehä, jossa on nivel.

Kuvassa 1.4b on kehän VKK. Sille voidaan kirjoittaa 3 tasapainoyhtälöä. Jos kehä katkaistaan nivelen C kohdalta, saadaan esimerkiksi sen vasemman puoleiselle osalle kuvan 1.4c mukainen VKK. Sille voidaan taas kirjoittaa 3 tasapainoyhtälöä. Ko. VKK:ssa on kuitenkin kaksi uutta tuntematonta: nivelvoimat C_x ja C_y. Muodostamalla momenttitasapainoyhtälö nivelpisteen C suhteen uudet tuntemattomat eivät kuitenkaan tule mukaan lisäyhtälöön. Näin olemme saaneet yhden lisäyhtälön alkuperäisten tuntemattomien - kehän tukireaktioiden määrittämiseksi. (Lukijalle saattaa herätä ajatus, että kehän oikean puolen momenttitasapainoyhtälöstä nivelen C suhteen saataisiin toinen käyttökelpoinen lisäyhtälö. Näin ei kuitenkaan käy, koska näin saatu yhtälö osoittautuu olevan lineaarisesti riippuva nivelpisteen C suhteen kirjoitetun kehän momenttitasapainoyhtälön ja sen vasemman puolen momenttitasapainoyhtälön kanssa.)

Näin saamme lopulta yhtälöiden lukumääräksi

$$p = 3 + c \, , \tag{1.4}$$

missä siis c on koko rakenteen liitosten vapausasteiden lukumäärä. Sijoittamalla tulokset (1.3) ja (1.4) yhtälöön (1.1) saadaan lopullinen tulos (1.2).

Tarkastellaan lopuksi tasosauvarakenteen ulkoista ja sisäistä staattista määräämättömyyttä. **Ulkoisen staattisen määräämättömyyden kertaluku** on tasapainoyhtälöiden lisäksi tarvittavien yhtälöiden lukumäärä rakenteen tukireaktioiden määrittämiseksi. Tasorakenteelle saadaan kaava

$$n_{su} = t - c_a - 3, \tag{1.5}$$

missä c_a on avointen osien liitosten vapausasteiden lukumäärä. **Sisäisen staattisen määräämättömyyden kertaluku** on rakenteen staattisen määräämättömyyden ja sen ulkoisen staattisen määräämättömyyden kertalukujen erotus. Tasorakenteelle saadaan kaava

$$n_{ss} = 3r - c_s, \tag{1.6}$$

missä c_s on suljettujen renkaiden liitosten vapausasteiden lukumäärä.

1.12 Avaruussauvarakenne

Avaruussauvarakenteen **staattisen määräämättömyyden kertaluvulle** saadaan vastaavaan tapaan kaava

$$\boxed{n_s = t + 6r - c - 6.} \tag{1.7}$$

Kaava (1.7) on samantyyppinen kuin tasokehärakenteen kaava (1.2). Suljettujen renkaiden poistamiseksi tarvittavien katkaisujen lukumäärän *r* kertoimeksi tulee nyt 6, koska jokaisessa katkaisussa on 6 jännitysresultanttia. Myös kaavan viimeiseksi termiksi tulee 6, koska kolmidimensioisessa tapauksessa on käytettävissä kuusi riippumatonta tasapainoyhtälöä.

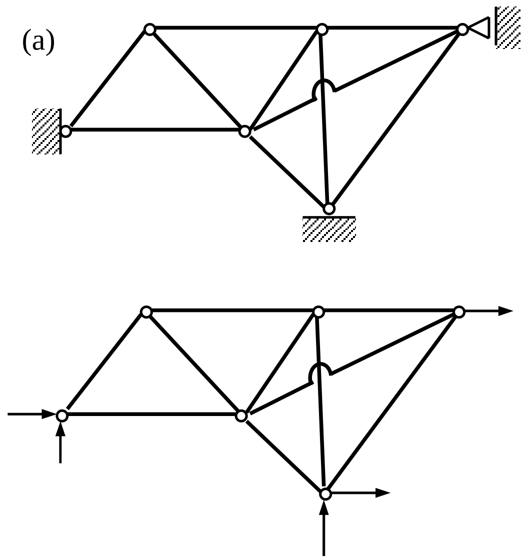
Kolmidimensiosten sauvarakenteiden liitoksista tarkastellaan tässä **sarana-** ja **palloniveltä**. niveliä. Saarananivel mahdollistaa kiertymisen tietyn akselin ympäri ja sen vapausasteiden lukumäärä on 1. Pallonivel mahdollistaa kiertymisen kolmen akselin ympäri ja sen vapausasteiden lukumäärä on 3.

Avaruussauvarakenteen **ulkoisen staattisen määräämättömyyden kertaluku** on

$$n_{su} = t - c_a - 6. \tag{1.8}$$

ja **sisäisen staattisen määräämättömyyden kertaluku** on

$$n_{ss} = 6r - c_s. \tag{1.9}$$



Kuva 1.5: Tasoristikko: (a) tuet (b) tukireaktiot

1.13 Tasoristikko

Tasoristikon tapauksessa staattisen määräämättömyyden kertaluku saadaan seuraavasti (kuva 1.5). Ristikossa tuntemattomina ovat sauvavoimat ja tukireaktiot. Näin tuntemattomien lukumäärä on $s+t$, missä s on sauvojen lukumäärä ja t on yksiarvoisten tukien lukumäärä. Tasoristikon jokaisessa nivelessä voidaan kirjoittaa kaksi tasapainoyhtälöä, joten tasapainoyhtälöiden lukumäärä on $2k$, missä k on nivelten lukumäärä. Tasoristikon **staattisen määräämättömyyden kertaluku** (tuntemattomien lukumäärän ja tasapainoyhtälöiden lukumäärän erotus) on

$$\boxed{n_s = s + t - 2k.} \tag{1.10}$$

Kuvan 1.5 tapauksessa saadaan $n_s = 10 + 5 - 2 \cdot 6 = 3$. Tasoristikon ulkoisen ja sisäisen staattisen määräämättömyyden kertaluvut ovat

$$n_{su} = t - 3 \text{ ja } n_{ss} = n_s - n_{su}. \tag{1.11}$$

1.14 Avaruusristikko

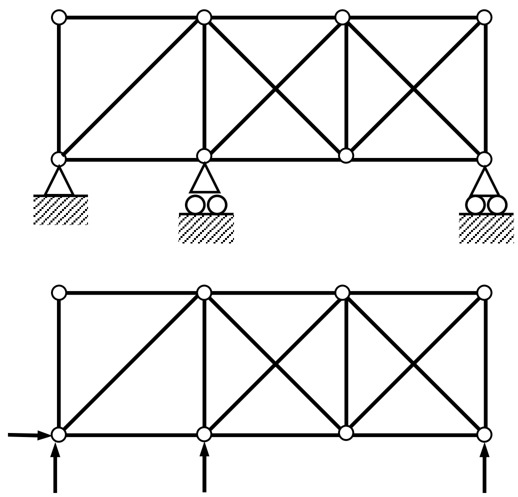
Avaruusristikon **staattisen määräämättömyyden kertaluvut** ovat vastaavasti

$$n_s = s + t - 3k, \tag{1.12}$$

ja

$$n_{su} = t - 6 \text{, ja } n_{ss} = n_s - n_{su}. \tag{1.13}$$

Esimerkki 1.1: Määritetään oheisen tasoristikon staattisen määräämättömyyden kerta-luvut. (Risteävät diagonaalisauvat pääsevät vapaasti liikkumaan toistensa suhteen.)



Saadaan:

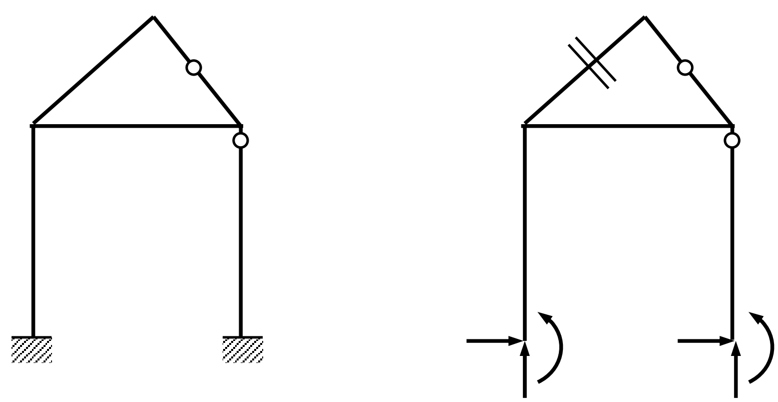
$s = 15,\ k = 8,\ t = 4,$

$n_s = s + t - 2k = 15 + 4 - 2 \cdot 8 = 3,$

$n_{su} = t - 3 = 4 - 3 = 1,$

$n_{ss} = n_s - n_{su} = 3 - 1 = 2.$

Esimerkki 1.2: Määritetään oheisen tasokehän staattisen määräämättömyyden kerta-luvut.



Saadaan:

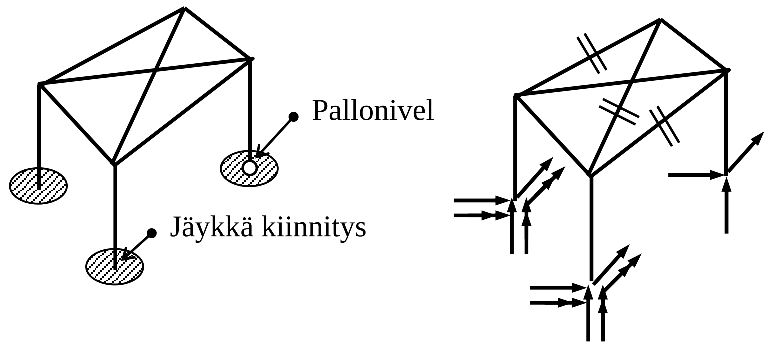
$t = 6,\ r = 1,\ c = 2,\ c_s = 1,\ c_a = 1,$

$n_s = t + 3r - c - 3 = 6 + 3 \cdot 1 - 2 - 3 = 4,$

$n_{su} = t - c_a - 3 = 6 - 1 - 3 = 2,$

$n_{ss} = 3r - c_s = 3 - 1 = 2.$

Esimerkki 1.3: Määritetään oheisen avaruuskehän staattisen määräämättömyyden kertaluku.



Saadaan:

$$t = 15,\ r = 3,\ c = 0,$$
$$n_s = t + 6r - c - 6 = 15 + 6 \cdot 3 - 0 - 6 = 27.$$

1.2 Alkuvenymä ja alkukäyristymä

1.21 Alkuvenymä

Tarkastellaan sauvaa, joka saa aksiaalisen venymän muusta syystä kuin ulkoisen kuormituksen johdosta. Tällaista venymää merkitään tässä ε_0 ja kutsutaan **alkuvenymäksi**. Alkuvenymä on siis **kuormittamattoman sauvan vapaa venymä**. Jos lineaarisesti kimmoista sauvaa vedetään tai puristetaan, se saa alkuvenymän lisäksi myös normaalivoimasta N aiheutuvan venymän

$$\boxed{\varepsilon_N = \frac{N}{EA},} \tag{1.13}$$

missä EA on sauvan aksiaalijäykkyys. Kokonaisvenymä ε on siten

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_N + \varepsilon_0 = \frac{N}{EA} + \varepsilon_0}. \tag{1.14}$$

Alkuvenymä voi aiheutua esimerkiksi lämpötilan tai kosteuden muutoksesta. Myös keskeisen jälkijännittämisen vaikutuksesta aiheutuva venymä voidaan ymmärtää alkuvenymäksi.

Tarkastellaan ensin sauvaa, joka saa **tasaisen lämpötilan muutoksen** $T(x)$. Tasaisella lämpötilan muutoksella tarkoitetaan tässä palkin poikkileikkauksessa vakiota lämpötilan muutosta. Otaksutaan, että sauva on homogeeninen, jolloin pituuden lämpötilakerroin α_T on vakio. Sauvan **alkuvenymä** eli **lämpötilan muutoksesta aiheutuva venymä** on nyt

$$\boxed{\varepsilon_0(x) = \varepsilon_T(x) \equiv \alpha_T T(x).} \tag{1.15}$$

Tarkastellaan sitten homogeenista sauvaa, jota **jälkijännitetään keskeisesti voimalla** P. Sauvan **alkuvenymä** eli **jännittämisestä aiheutuva venymä** on nyt

$$\boxed{\varepsilon_0(x) = \varepsilon_P(x) \equiv -\frac{P}{EA(x)}.} \tag{1.16}$$

1.22 Alkukäyristymä

Tarkastellaan sauvaa, joka saa käyristymän muusta syystä kuin ulkoisen kuormituksen johdosta. Tällaista käyristymää merkitään tässä $\kappa_0(x)$ ja kutsutaan **alkukäyristymäksi**. Alkukäyristymä on siis **kuormittamattoman sauvan vapaa käyristymä**. Jos lineaarisesti kimoista sauvaa taivutetaan, se saa alkukäyristymän lisäksi myös taivutusmentista M aiheutuvan käyristymän

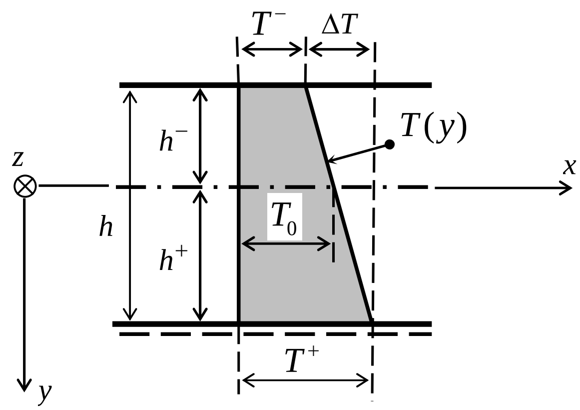
$$\boxed{\kappa_M = \frac{M}{EI},} \tag{1.17}$$

missä EI on sauvan taivutusjäykkyys. Kokonaiskäyristymä κ on siten

$$\boxed{\kappa = \kappa_M + \kappa_0 = \frac{M}{EI} + \kappa_0}. \tag{1.18}$$

Alkukäyristymä voi aiheutua esimerkiksi lämpötilan tai kosteuden muutoksesta. Myös epäkeskeisen jälkijännittämisen vaikutuksesta aiheutuva käyristymä voidaan ymmärtää alkukäyristymäksi.

Tarkastellaan ensin sauvaa, joka saa **epätasaisen lämpötilan muutoksen** $T(x, y)$. Epätasaisella lämpötilan muutoksella tarkoitetaan tässä lämpötilan muutosta, joka vaihtelee palkin korkeussuunnassa y (vrt. kuva 1.6). Otaksutaan, että palkki on homogeeninen, jolloin pituuden lämpötilakerroin α_T on vakio.



Kuva 1.6 Lämpötilan muutoksen jakauma $T(y)$ sauvan korkeussuunnassa

Otaksutaan, että palkin positiivinen pinta (alapinta) saa lämpötilan muutoksen $T^+(x)$ ja negatiivinen pinta (yläpinta) saa lämpötilan muutoksen $T^-(x)$. Otaksutaan edelleen, että lämpötilan muutos jakautuu palkin korkeussuunnassa lineaarisesti. Tämä otaksuma edellyttää sen lisäksi, että palkin poikkileikkaus on homogeeninen, myös sen, että lämmön virtaus on stationaarista. Seuraavassa tarkastelussa mahdollinen riippuvuus koordinaatista x jätetään selkeyden vuoksi merkitsemättä. Lämpötilan muutoksen lineaariselle jakaumalle $T(y)$ palkin poikkisuunnassa saadaan (kuva 1.6).

$$T(y) = T_0 + \frac{\Delta T}{h} y, \tag{1.19}$$

missä

$$\boxed{T_0 = \frac{h^+ T^- + h^- T^+}{h}, \quad \Delta T = T^+ - T^-.} \tag{1.20}$$

ovat **lämpötilan muutos palkin akselin kohdalla** sekä **ala- ja yläpinnan lämpötilan muutosten erotus**. Lämpötilan muutoksesta aiheutuva venymä $\varepsilon_x(y)$ on nyt

$$\varepsilon_x(y) = \alpha_T T(y) = \alpha_T T_0 + \frac{\alpha_T \Delta T}{h} y \tag{1.21}$$

eli

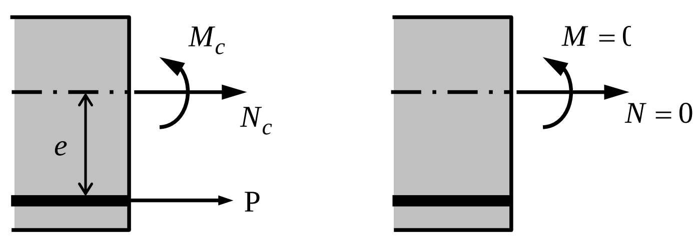
$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon_T + \kappa_T y\,, \tag{1.22}$$

missä

$$\varepsilon_T = \alpha_T T_0, \quad \kappa_T = \frac{\alpha_T \Delta T}{h} \tag{1.23}$$

ovat lämpötilan muutoksesta aiheutuvat palkin akselin venymä ja käyristymä. Nämä ovat toisaalta kuormittamattoman sauvan venymä ja käyristymä eli siis alkuvenymä ja alkukäyristymä. Näin saamme **lämpötilan muutoksesta aiheutuville alkuvenymälle ja alkukäyristymälle** kaavat

$$\boxed{\varepsilon_0 = \varepsilon_T \equiv \alpha_T T_0, \quad \kappa_0 = \kappa_T \equiv \frac{\alpha_T \Delta T}{h}.} \tag{1.24}$$



Kuva 1.7: Jännepalkin kuormittamattoman poikkileikkauksen ($N = 0,\ M = 0$) jännitys-resultantit

Tarkastellaan jännitetyn betonirakenteen sauvaa. Olkoon jännevoima P ja jänteen epäkeskisyys (jänneterästen pintakeskiön y-koordinaatti kohdassa x) $e(x)$. Palkin poikkileikkauksessa (kuva 1.7) vaikuttavat normaalivoima ja taivutusmomentti ovat $N = P + N_c$ ja $M = Pe + M_c$, missä N_c ja M_c ovat betonipoikkileikkauksen normaali-jännityksistä $\sigma_{cx}(y)$ aiheutuvat normaalivoima ja taivutusmomentti. Kuormittamattoman sauvan ($N = 0$ ja $M = 0$) tapauksessa saadaan siis $N_c = -P$ ja $M_c = -Pe$. Poikki-leikkauksen betonisen osan normaalijännitykselle saadaan siis

$$\sigma_{cx}(y) = \frac{N_c}{A_c} + \frac{M_c}{I_c} y = -\frac{P}{A_c} - \frac{Pe}{I_c} y \tag{1.25}$$

missä A_c ja I_c ovat poikkileikkauksen betonisen osan pinta-ala ja jäyhyysmomentti (kuva 1.8). Palkin venymälle $\varepsilon_x(y)$ saadaan nyt

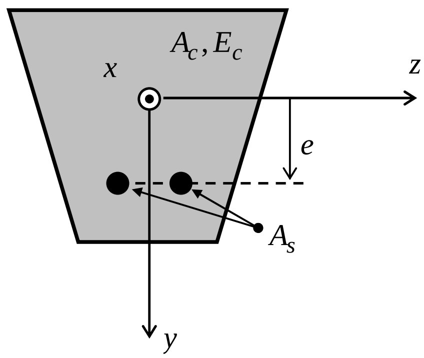
$$\varepsilon_x(y) = \frac{\sigma_{cx}(y)}{E_c} = -\frac{P}{E_c A_c} - \frac{Pe}{E_c I_c} y, \tag{1.26}$$

missä E_c on betonin kimmomoduuli eli

$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon_P + \kappa_P y \tag{1.27}$$

missä

$$\varepsilon_P = -\frac{P}{E_c A_c}, \quad \kappa_P = -\frac{Pe}{E_c I_c} \tag{1.28}$$



Kuva 1.8: Jännepalkin poikkileikkaus

ovat jännevoimasta aiheutuvat sauvan akselin venymä ja käyristymä. Nämä ovat toisaalta kuormittamattoman sauvan venymä ja käyristymä eli siis alkuvenymä ja alkukäyristymä. Näin saimme **jännevoimasta aiheutuville alkuvenymälle** ja **alkukäyristymälle** kaavat

$$\boxed{\varepsilon_0 = \varepsilon_P \equiv -\frac{P}{EA}, \quad \kappa_0 = \kappa_P \equiv -\frac{Pe}{EI},} \tag{1.29}$$

missä betoniin liittyvät alaindeksit c on jätetty pois.

1.3 Kaareva sauva

Tarkastellaan esimerkkinä kaarevaa tasosauvaa, jonka deformoitumattomaan akseliin yhtyvä pituuskoordinaatti on s ja akselia vastaan kohtisuora koordinaatti on y (vrt. kuva 1.9). Olkoon $R(s)$ akselin kaarevuussäde pisteessä s. Käytetään tarkastelussa apuna napakoordinaatistoa, jonka napapiste yhtyy akselin kaarevuuskeskipisteeseen O. Sauvan yleisen pisteen (r,θ) venymälle ε_θ ja liukumalle $\gamma_{r\theta}$ voidaan kirjoittaa

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}, \tag{1.30}$$

(vrt. Rak-54.104 Kontinuumimekaniikan perusteet luentomoniste, kaava (5.8-11)), missä siirtymäkomponentit u_r ja u_θ yhtyvät sauvan normaalin ja akselin suuntiin. Ottamalla huomioon, että $r = R + y$ ja $r \cdot d\theta = ds$ saadaan näistä

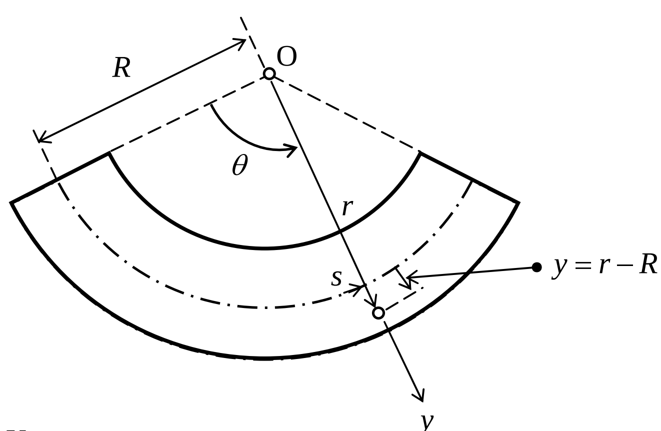
$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial s} + \frac{u_r}{R+y}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial y} + \frac{\partial u_r}{\partial s} - \frac{u_\theta}{R+y}, \tag{1.31}$$

Tehdään siirtymäkomponenteille u_r ja u_θ tyypillinen palkkiteorian mukainen otaksuma (vrt. RM A)

$$u_\theta(s,y) = u(s) - \varphi(s)y, \quad u_r(s,y) = v(s), \tag{1.32}$$

jolloin venymän ja liukuman lausekkeet (1.31) saavat muodon

$$\begin{aligned} \varepsilon_s(s,y) &= u'(s) + \frac{v(s)}{R+y} - \varphi'(s)y, \\ \gamma_{sy}(s,y) &= -\varphi(s) + v'(s) - \frac{u(s)-\varphi(s)y}{R+y}. \end{aligned} \tag{1.33}$$



Kuva 1.9: Kaareva tasosauva

Tässä vaiheessa vaihdettiin myös venymän ja liukuman merkinnöiksi ε_s ja γ_{sy}, koska koordinaattien s, y ja r, θ suunnat yhtyvät. Tavanomaiset rakennustekniikassa esiintyvät kaarevat sauvat ovat hoikkia, jolloin

$$\frac{y}{R} \ll 1 \;\Rightarrow\; R + y \approx R \tag{1.34}$$

Tässä tapauksessa venymän ja liukuman lausekkeet (1.33) yksinkertaistuvat muotoon

$$\varepsilon_s(s,y) = u'(s) + \frac{v(s)}{R} - \varphi'(s)y, \quad \gamma_{sy}(s,y) = -\varphi(s) + v'(s) - \frac{u(s)}{R}. \tag{1.35}$$

Tämä tulos voidaan esittää muodossa

$$\boxed{\varepsilon_s(s,y) = \varepsilon(s) + \kappa(s)y, \quad \gamma_{sy}(s,y) = \gamma(s),} \tag{1.36}$$

missä

$$\varepsilon(s) = u'(s) + \frac{v(s)}{R} \tag{1.37}$$

on **sauvan akselin venymä**,

$$\kappa(s) = -\varphi'(s) \tag{1.38}$$

on sauvan **käyristymä**,

$$\gamma(s) = \vartheta(s) - \varphi(s) \tag{1.39}$$

on **liukumakulma**,

$$\vartheta(s) = v'(s) - \frac{u(s)}{R} \tag{1.40}$$

on sauvan **akselin kiertymä** ja $\varphi(x)$ on sauvan **normaalin kiertymä**.

Kaavasta (1.36) havaitaan, että venymä ε_s jakautuu sauvan poikkisuunnassa (y-suunnassa) lineaarisesti ja liukuma γ_{sy} on vakio. Lausekkeita (1.36)-(1.40) vastaavat suoran sauvan lausekkeet ovat

$$\boxed{\varepsilon_x(x,y) = \varepsilon(x) + \kappa(x)y, \quad \gamma_{xy}(x,y) = \gamma(x),} \tag{1.41}$$

$$\varepsilon(x) = u'(x) \tag{1.42}$$

$$\kappa(x) = -\varphi'(x) \tag{1.43}$$

$$\gamma(x) = \vartheta(x) - \varphi(x) \tag{1.44}$$

ja

$$\vartheta(x) = v'(x) \tag{1.45}$$

(vrt. RM A).

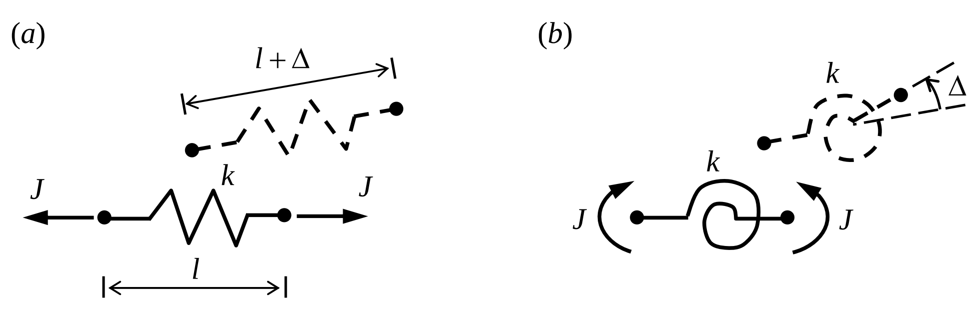
Lausekkeet (1.36) ja (1.41) ovat täysin analogisia. Erona on vain se, että suoran ja kaarevan sauvan akseliin yhtyvää koordinaattia on totuttu merkitsemään vastaavasti x:llä ja s:llä. Sen sijaan akselin venymän $\varepsilon(x)$ ja akselin kiertymän $\vartheta(x)$ lausekkeet eroavat kaarevalla ja suoralla sauvalla toisistaan. Tämä lausekkeiden (1.36) ja (1.41) analogia johtaa siihen, että luvussa 2 suorille sauvoille johdettavat sisäisen virtuaalisen työn lausekkeet tulevat myös olemaan täysin analogisia kaarevan sauvan vastaavien lausekkeiden kanssa. Tästä seuraa se, että seuraavassa (luvut 2 ja 3) käsiteltävät **yksikkövoimanenetelmän** ja siihen pohjautuvan **yleisen voimamenetelmän yhtälöt soveltuvat yhtälailla suorille kuin kaareville sauvoille**, kunhan vain **korvaamme** saaduissa kaavoissa **koordinaatin** x **koordinaatilla** s.

1.4 Yleistetty jousi

Yleistetyllä jousella (kuva 1.10) ymmärretään tässä joko jousta tai kierrejousta. Se kytkee toisiinsa yleistetyn venymän Δ (siirtymäero tai kiertymäero) ja yleistetyn jousivoiman J (voima tai momentti) siten, että niillä on funktionaalinen riippuvuus $\Delta = \Delta(J)$. Tavallisimmin tämä riippuvuus on lineaarinen

$$\Delta = \frac{J}{k} + \Delta_0 \tag{1.46}$$

missä k on jousivakio ja Δ_0 on jousen alkuvenymä.



Kuva 1.10: Yleistetty jousi: (a) jousi ja (b) kierrejousi

2. SIIRTYMÄSUUREIDEN MÄÄRITTÄMINEN YKSIKKÖVOIMAMENETELMÄLLÄ

2.1 Yksikkövoimamenetelmän periaate

Tarkastellaan **staattisesti määrättyä** sauvarakennetta, jonka kuormitus on annettu. Tavoitteena on määrittää rakenteen pisteeseen A liittyvä yleistetty siirtymä δ_A. Sovelletaan virtuaalisen työn periaatetta siten, että **staattisesti sallituksi** (toteuttaa tasapainoehdot ja mekaaniset reunaehdot) **virtuaaliseksi** (eli kuvitelluksi) **voimatilaksi** otetaan δ_A:ta vastaavan, ykkösen suuruisen yleistetyn voiman $\overline{F}_A = 1$ aiheuttama voimatila ja **kinemaattisesti sallituksi** (toteuttaa yhteensopivuusehdot ja geometriset reunaehdot) **siirtymätilaksi** rakenteen todellisesta kuormituksesta aiheutuva siirtymätila.

Yleistetyn voiman $\overline{F}_A$ tekemä ulkoinen virtuaalinen työ on tällöin

$$W_{\text{ext}} = \overline{F}_A \delta_A \tag{2.1}$$

Sauvarakenteen sisäisen virtuaalisen työn W_{int} lauseke riippuu rakennetyypistä ja se johdetaan joillekin yksinkertaisille rakennetyypeille jäljempänä.

Virtuaalisen työn periaatteen mukaan tasapainossa olevassa rakenteessa virtuaalinen kokonaistyö häviää, ts.

$$W \equiv W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = 0\,. \tag{2.2}$$

Rakenteen virtuaalinen voimatila muodostuu siis ulkoisesta yleistetystä voimasta $\overline{F}_A = 1$ ja siitä aiheutuvista virtuaalisista jännitysresultanteista, joita ovat esimerkiksi ristikon sauvojen virtuaaliset sauvavoimat $\overline{S}_i$, aksiaalisesti kuormitetun sauvan virtuaalinen normaalivoima $\overline{N}(x)$, taivutetun palkin virtuaalinen taivutusmomentti $\overline{M}(x)$ tai väännetyn palkin virtuaalinen vääntömomentti $\overline{M}_t(x)$. Näitä jännitysresultantteja pidetään tässä tunnettuina, koska ne voidaan (staattisesti määrätyn rakenteen tapauksessa) määrittää etukäteen.

Rakenteen todellinen siirtymätila muodostuu rakenteen ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvista siirtymistä, joita vastaava pisteen A yleistetty siirtymä on siis δ_A, ja jännitysresultantteja vastaavista todellisista muodonmuutossuureista, joita ovat esimerkiksi ristikon sauvojen pituuden muutokset ΔL_i, aksiaalisesti kuormitetun sauvan venymä $\varepsilon(x)$, taivutetun palkin käyristymä $\kappa(x)$ ja väännetyn sauvan vääntymä $\theta(x)$. Näitä muodonmuutossuureita pidetään tässä tunnettuina, koska ne voidaan (staattisesti määrätyn rakenteen tapauksessa) määrittää etukäteen.

Virtuaalisen työn periaatteesta (2.2) ja yhtälöstä (2.1) seuraa **yksikkövoimamenetelmän kaava**

$$\boxed{\underbrace{\bar{F}_A}_{1}\,\delta_A = -W_{\text{int}}},\qquad (2.3)$$

missä W_{int} on yksikkövoiman $\bar{F}_A = 1$ aiheuttamaa virtuaalista voimatilaa ja todellista siirtymätilaa vastaava sisäinen virtuaalinen työ. Tästä yhtälöstä seuraa suoraan etsitylle yleistetylle siirtymälle δ_A tulos

$$\delta_A = -W_{\text{int}}\,. \qquad (2.4)$$

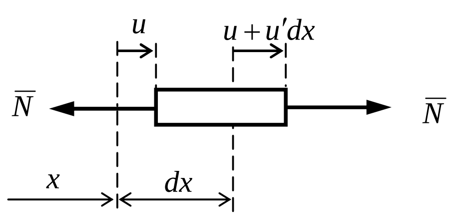
Yhtälö (2.3) muodostaa lähtökohdan staattisesti määrättyjen sauvarakenteiden siirtymien määrittämiseksi yksikkövoimamenetelmällä.

Seuraavassa johdamme vedon tai puristuksen alaisen sauvan, taivutuksen alaisen palkin, leikkauksen alaisen (Timoshenko) palkin, väännetyn sauvan sekä yleistetyn jousen sisäisen virtuaalisen työn W_{int} lausekkeet. Mekaanisen kuormituksen lisäksi tarkastelemme ns. alkumuodonmuutoksen vaikutusta.

2.2 Sisäisen virtuaalisen työn lausekkeita

2.21 Vedon tai puristuksen rasittama sauva

Tarkastellaan vedon tai puristuksen rasittamaa suoraa sauvaa.



Kuva 2.1: Sauva-alkion normaalivoiman $\bar{N}$ tekemä sisäinen virtuaalinen työ

Kuvassa 2.1 on sauva-alkio, jota kuormittaa virtuaalinen normaalivoima $\bar{N}$ ja joka on tasapainossa. Virtuaalisen työn periaate sauva-alkiolle kuuluu

$$dW \equiv dW_{\text{int}} + dW_{\text{ext}} = 0\,, \qquad (2.5)$$

josta saadaan sen sisäiselle virtuaaliselle työlle

$$\mathrm{d}W_{\text{int}} = -\mathrm{d}W_{\text{ext}} = -[\bar{N}(u+u'\mathrm{d}x) - \bar{N}u] = -\bar{N}u'\mathrm{d}x = -\bar{N}\varepsilon\mathrm{d}x\,. \qquad (2.6)$$

Integroimalla sauvan pituuden yli saadaan sauvan sisäiselle virtuaaliselle työlle lauseke

$$\boxed{W^{\varepsilon}_{\text{int}} = -\int_0^L \bar{N}\varepsilon dx}. \qquad (2.7)$$

Kaava (2.7) on mahdollisimman ***yleinen muoto***. Sitä johdettaessa ei ole käytetty lainkaan hyväksi sauvan materiaalilakia, joten se on voimassa myös fysikaalisesti epälineaariselle sauvalle. Poikkileikkaukseltaan muuttuvan sauvan käsittely on myös mahdollista.

Homogeeninen, lineaarisesti kimmoinen sauva: Seuraavassa rajoitutaan sauvaan, jonka materiaali on homogeenista ja lineaarisesti kimmoista. Sauva poikkileikkaus voi kuitenkin vaihdella. Sijoittamalla sauvan venymän ja normaalivoiman yhteys

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} + \varepsilon_0 \qquad (2.8)$$

lausekkeeseen (2.7) saadaan sauvan sisäiselle virtuaaliselle työlle tulos

$$W_{\text{int}} = W_{\text{int}}^{N} + W_{\text{int}}^{\varepsilon_0} \qquad (2.9)$$

missä

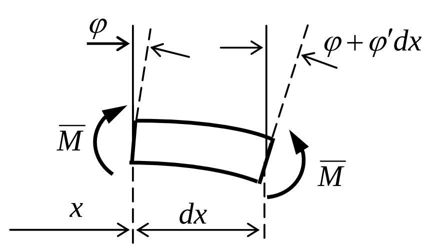
$$\boxed{W_{\text{int}}^{N} = -\int_0^L \frac{\overline{N}(x)N(x)}{EA(x)}dx, \quad W_{\text{int}}^{\varepsilon_0} = -\int_0^L \overline{N}(x)\varepsilon_0(x)dx.} \qquad (2.10)$$

ovat normaalivoiman ja alkuvenymän osuudet sauvan virtuaalisesta työstä. Jos sauva on **tasajäykkä,** ts. $EA = \text{vakio}$, edelliselle saadaan

$$W_{\text{int}}^{N} = -\frac{1}{EA}\int_0^L \overline{N}(x)N(x)\mathrm{d}x\,. \qquad (2.11)$$

2.22 Taivutuksen rasittama palkki

Tarkastellaan taivutuksen rasittamaa ***palkkia***.



Kuva 2.2: Palkkialkion taivutusmomentin $\overline{M}$ tekemä sisäinen virtuaalinen työ

Kuvassa 2.2 on palkkialkio, jota kuormittaa virtuaalinen taivutusmomentti $\overline{M}$ ja joka on tasapainossa. Virtuaalisen työn periaatteen perusteella palkkialkion sisäiselle virtuaaliselle työlle saadaan

$$dW_{\text{int}} = -dW_{\text{ext}} = -[-\bar{M}(\varphi + \varphi' dx) + \bar{M}\varphi] = \bar{M}\varphi' dx = -\bar{M}\kappa dx . \qquad (2.12)$$

Integroimalla palkin pituuden yli saadaan palkin sisäiselle virtuaaliselle työlle lauseke

$$\boxed{W_{\text{int}}^{\kappa} = -\int_0^L \bar{M}\kappa dx.} \qquad (2.13)$$

Kaava (2.13) on mahdollisimman ***yleinen muoto***. Sitä johdettaessa ei ole käytetty lainkaan hyväksi palkin materiaalilakia, joten se on voimassa myös fysikaalisesti epälineaariselle palkille. Poikkileikkaukseltaan muuttuvan palkin käsittely on myös mahdollista.

Homogeeninen, lineaarisesti kimmoinen palkki: Seuraavassa rajoitutaan palkkiin, jonka materiaali on homogeenista ja lineaarisesti kimmoista. Palkin poikkileikkaus voi kuitenkin vaihdella. Sijoittamalla palkin käyristymän taivutusmomentin yhteys

$$\kappa = \frac{M}{EI} + \kappa_0 . \qquad (2.14)$$

kaavaan (2.13), saadaan palkin sisäiselle virtuaaliselle työlle tulos

$$W_{\text{int}} = W_{\text{int}}^{M} + W_{\text{int}}^{\kappa_0} \qquad (2.15)$$

missä

$$\boxed{W_{\text{int}}^{M} = -\int_0^L \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI(x)} dx, \quad W_{\text{int}}^{\kappa_0} = -\int_0^L \bar{M}(x)\kappa_0(x) dx,} \qquad (2.16)$$

ovat normaalivoiman ja alkukäyristymän osuudet sauvan virtuaalisesta työstä. Jos palkki on lisäksi **tasajäykkä,** ts. $EI = \text{vakio}$, edelliselle saadaan

$$W_{\text{int}}^{M} = -\frac{1}{EI}\int_0^L \bar{M}(x)M(x) dx . \qquad (2.17)$$

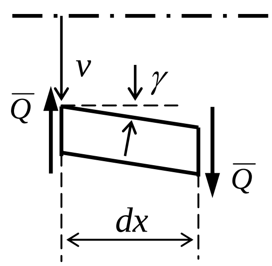
Huomautus: Samanaikaisesti kuin palkki saa alkukäyristymän se saa usein myös alkuvenymän (vrt. kohta 1.2), jolloin myös virtuaalinen normaalivoima $\bar{N}$ tekee virtuaalista työtä. Tämä **sauvan akselin alkuvenymään liittyvä virtuaalinen työ** on

$$W_{\text{int}}^{\varepsilon_0} = -\int_0^L \bar{N}(x)\varepsilon_0(x) dx . \qquad (2.18)$$

Jos kuitenkin ollaan kiinnostuneita tyypillisistä palkin yleistetyistä siirtymistä, kuten esimerkiksi taipumista ja kiertymistä, ”yksikkövoimasta” $\bar{F}_A = 1$ aiheutuva virtuaalinen normaalivoima $\bar{N}(x)$ häviää ja sauvan akselin venymään liittyvä virtuaalinen työ $W_{\text{int}}^{\varepsilon_0}$ on nolla.

2.23 Palkin leikkausvoiman tekemä virtuaalinen työ

Teknisessä taivutusteoriassa (Bernoulli-Euler teoriassa) otaksutaan, että palkin leikkausmuodonmuutos γ_{xy} häviää. Tämän vuoksi virtuaalinen leikkausvoima $\bar{Q}$ ei tee työtä. **Timoshenko-palkkiteoriassa** sen sijaan palkin leikkausmuodonmuutos otetaan huomioon ja sitä edustaa liukumakulma $\gamma(x)$. Tällöin virtuaalinen leikkausvoima $\bar{Q}(x)$ tekee työtä.



Kuva 2.6 Palkkialkion leikkausvoiman $\bar{Q}$ tekemä sisäinen virtuaalinen työ

Kuvassa 2.6 on palkkialkio, joka saa leikkausmuodonmuutoksen γ, jota kuormittaa virtuaalinen leikkausvoima $\bar{Q}$ ja joka on tasapainossa. Virtuaalisen työn periaatteen perusteella palkkialkion sisäiselle virtuaaliselle työlle saadaan

$$dW_{\text{int}} = -dW_{\text{ext}} = -[\bar{Q}(v+\gamma dx) - \bar{Q}v] = -\bar{Q}\gamma dx. \qquad (2.19)$$

Integroimalla palkin pituuden yli saadaan palkin virtuaalisen leikkausvoiman $\bar{Q}$ tekemälle sisäiselle virtuaaliselle työlle lauseke

$$\boxed{W_{\text{int}}^{\gamma} = -\int_0^L \bar{Q}\gamma dx.} \qquad (2.20)$$

Kaava (2.20) on mahdollisimman ***yleinen muoto***, jota johdettaessa ei ole vielä käytetty hyväksi palkin materiaalilakia.

Sauvan ollessa **homogeeninen ja lineaarisesti kimmoinen** liukumakulmalla ja leikkausvoimalla on yhteys

$$\gamma = \zeta \frac{Q}{GA}, \qquad (2.21)$$

missä G on liukumoduuli ja ζ on **poikkileikkauksen siirtymäkerroin**. Sauvan leikkauksesta aiheutuva sisäisen virtuaalisen työn lauseke (2.20) saa tässä tapauksessa muodon

$$\boxed{W_{\text{int}}^{Q} = -\int_0^L \zeta \frac{\bar{Q}(x)Q(x)}{GA(x)} dx.} \qquad (2.22)$$

Jos sauva on lisäksi ***tasajäykkä,*** ts. $GA = \text{vakio}$, saadaan

$$W_{\text{int}}^{Q} = -\frac{\zeta}{GA}\int_0^L \bar{Q}(x)Q(x)dx. \tag{2.23}$$

Poikkileikkauksen siirtymäkerroin voidaan määrittää kaavasta

$$\zeta = \frac{A}{I^2}\int_{y^-}^{y^+} \frac{S(y)^2}{b(y)}dy, \tag{2.24}$$

missä A, I, $S(y)$ ja $b(y)$ ovat poikkipinnan ala, jäyhyysmomentti, staattinen momentti (osapoikkipintasuure) ja leveys sekä y^- ja y^+ ovat poikkipinnan ylä- ja alareunan y-koordinaatit (vrt. RMA).

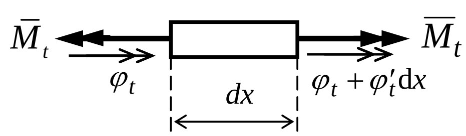
Huomautus: Timoshenko palkissa voi esiintyä myös alkuliukumakulma γ_0, jolloin liukumakulman ja leikkausvoiman yhteys on

$$\gamma = \zeta\frac{Q}{GA} + \gamma_0 .$$

Koska alkuliukumakulma on käytännössä harvinaisempi käsite, jätetään se tässä yhteydessä tarkastelun ulkopuolelle.

2.24 Väännön rasittama sauva

Tarkastellaan väännön rasittamaa suoraa ***sauvaa***.



Kuva 2.7: Sauva-alkion vääntömomentin $\bar{M}_t$ tekemä sisäinen virtuaalinen työ

Kuvassa 2.7 on sauva-alkio, jota kuormittaa virtuaalinen vääntömomentti $\bar{M}_t$ ja joka on tasapainossa. Virtuaalisen työn periaatteen perusteella sauva-alkion sisäiselle virtuaaliselle työlle saadaan

$$dW_{\text{int}} = -dW_{\text{ext}} = -[\bar{M}_t(\varphi_t + \varphi_t' dx) - \bar{M}_t\varphi_t] = -\bar{M}_t\varphi_t' dx = -\bar{M}_t\theta dx, \tag{2.25}$$

missä θ on sauvan vääntymä. Integroimalla sauvan pituuden yli saadaan sauvan sisäiselle virtuaaliselle työlle lauseke

$$\boxed{W_{\text{int}}^{\theta} = -\int_0^L \bar{M}_t\theta dx}. \tag{2.26}$$

Kaava (2.26) on mahdollisimman ***yleinen muoto***. Sitä johdettaessa ei ole vielä käytetty hyväksi sauvan materiaalilakia. Poikkileikkaukseltaan muuttuvan sauvan käsittely on myös mahdollista.

Homogeeninen, lineaarisesti kimmoinen sauva: Seuraavassa rajoitutaan sauvaan, jonka materiaali on homogeenista ja lineaarisesti kimmoista. Sauva poikkileikkaus voi kuitenkin vaihdella. Sauvan vääntymän ja vääntömomentin yhteys on

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} \tag{2.27}$$

Sijoittamalla tämä vääntymän lauseke kaavaan (2.26), saadaan sauvan vääntömomentista aiheutuvalle sisäiselle virtuaaliselle työlle tulos

$$\boxed{W_{\text{int}}^{M_t} = -\int_0^L \frac{\bar{M}_t(x)M_t(x)}{GI_t(x)}dx.} \tag{2.28}$$

Jos sauva on lisäksi ***tasajäykkä,*** ts. $GI_t = \text{vakio}$, saadaan

$$W_{\text{int}}^{M_t} = -\frac{1}{GI_t}\int_0^L \bar{M}_t(x)M_t(x)dx\,. \tag{2.29}$$

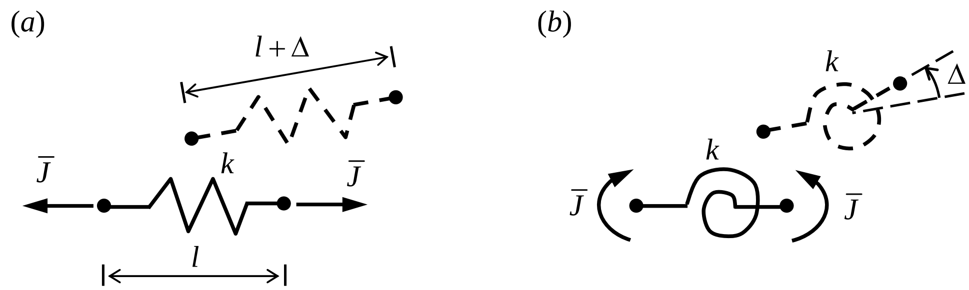
Huomautus: Väännetyssä sauvassa voi esiintyä myös alkuvääntymä θ_0, jolloin vääntymän ja vääntömomentin yhteys on

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} + \theta_0\,.$$

Koska alkuvääntymä on käytännössä harvinaisempi käsite, jätetään se tässä yhteydessä tarkastelun ulkopuolelle.

2.25 Yleistetty jousi

Tarkastellaan ***yleistettyä jousta***.



Kuva 2.8: Yleistetty jousi: (a) jousi ja (b) kierrejousi

Kuvassa 2.8 on yleistetty jousi, jota kuormittaa virtuaalinen yleistetty jousivoima $\bar{J}$, jonka todellinen yleistetty venymä on Δ ja joka on tasapainossa. Virtuaalisen työn periaatteen perusteella jousen sisäiselle virtuaaliselle työlle saadaan

$$\boxed{W_{\text{int}}^{\Delta} = -\bar{J}\Delta.} \tag{2.30}$$

Lineaarisesti kimmoinen yleistetty jousi: Sijoittamalla jousen yleistetyn venymän lauseke

$$\Delta = \frac{J}{k} \tag{2.31}$$

sisäisen virtuaalisen työn lausekkeeseen (2.30) saadaan

$$W_{\text{int}}^{J} = -\frac{\bar{J}J}{k}. \tag{2.32}$$

Huomautus: Yleistetyssä jousessa voi esiintyä myös jousen alkuvenymä Δ_0, jolloin jousen venymän ja jousivoiman yhteys on

$$\Delta = \frac{J}{k} + \Delta_0 .$$

Koska jousen alkuvenymä on käytännössä harvinaisempi käsite, jätetään se tässä yhteydessä tarkastelun ulkopuolelle.

2.3 Integraalien määrittäminen yksikkövoimamenetelmässä

Yksikkövoimamenetelmässä joudutaan tavanomaisesti laskemaan viiva-integraaleja, jotka ovat muotoa

$$\int \frac{\bar{N}(x)N(x)}{EA(x)}dx, \quad \int \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI(x)}dx, \quad \text{jne.} \tag{2.33}$$

Koordinaatti x on sauvan akseliin yhtyvä koordinaatti ja integrointi suoritetaan sauvan tai sen osan pituuden yli. Jos sauvat ovat tasajäykkiä ts. EI=vakio, kuten usein on asianlaita, integraalit ovat muotoa

$$\frac{1}{EA}\int \bar{N}(x)N(x)dx, \quad \frac{1}{EI}\int \bar{M}(x)M(x)dx, \quad \text{jne.} \tag{2.34}$$

Merkitään lausekkeiden (2.33) integroimistehtävää jatkossa lyhyesti

$$\int F(x)dx\,, \tag{2.35}$$

missä

$$F(x) = \frac{\bar{N}(x)N(x)}{EA(x)}, \quad F(x) = \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI(x)}, \quad \text{jne.} \tag{2.36}$$

ja lausekkeissa (2.34) esiintyvää integroimistehtävää vastaavasti

$$\int \bar{f}(x)f(x)dx\,. \tag{2.37}$$

missä

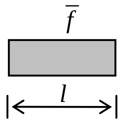
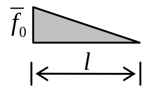
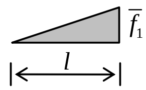
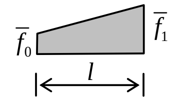
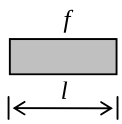
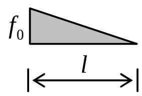
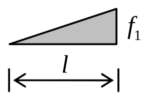
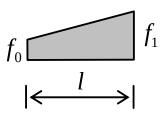
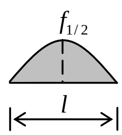
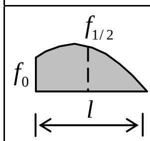
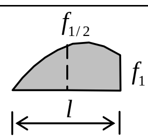
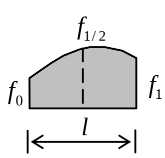
$$\bar{f}(x)f(x) = \bar{N}(x)N(x), \quad \bar{f}(x)f(x) = \bar{M}(x)M(x), \quad \text{jne.} \tag{2.38}$$

Integrointi voidaan suorittaa usealla vaihtoehtoisella tavalla, joita on esitetty seuraavassa.

Analyyttinen integrointi. Integrointi kannattaa suorittaa analyyttisesti, mikäli integrandissa esiintyvien suureiden analyyttiset lausekkeet voidaan helposti muodostaa ja integrointi on kohtuullisella työllä mahdollista.

Taulukoiden käyttö. Seuraavalla sivulla on esitetty $\int \bar{f} \cdot f \; dx$-taulukot, jotka on laadittu nimenomaan yksikkövoimamenetelmää varten. Niiden käyttö on hyvin helppoa ja käytännöllistä. Taulukkoa voidaan soveltaa kullakin sellaisella sauvan osalla, jolla $\bar{f}(x)$ on ***korkeintaan lineaarinen*** ja $f(x)$ on ***korkeintaan kvadraattinen*** (paraabeli) ***polynomi***.

Taulukko 2.1: Integraalien $\int \bar f f \; dx$ määritystaulukko[1].

$\bar f \rightarrow$ $f \downarrow$				
	$l\bar f f$	$\frac{l}{2}\bar f_0 f$	$\frac{l}{2}\bar f_1 f$	$\frac{l}{2}(\bar f_0+\bar f_1) f$
	$\frac{l}{2}\bar f f_0$	$\frac{l}{3}\bar f_0 f_0$	$\frac{l}{6}\bar f_1 f_0$	$\frac{l}{6}(2\bar f_0+\bar f_1) f_0$
	$\frac{l}{2}\bar f f_1$	$\frac{l}{6}\bar f_0 f_1$	$\frac{l}{3}\bar f_1 f_1$	$\frac{l}{6}(\bar f_0+2\bar f_1) f_1$
	$\frac{l}{2}\bar f(f_0+f_1)$	$\frac{l}{6}\bar f_0(2f_0+f_1)$	$\frac{l}{6}\bar f_1(f_0+2f_1)$	$\frac{l}{6}[\bar f_0(2f_0+f_1)$ $+\bar f_1(f_0+2f_1)]$
	$\frac{2}{3}l\bar f f_{1/2}$	$\frac{l}{3}\bar f_0 f_{1/2}$	$\frac{l}{3}\bar f_1 f_{1/2}$	$\frac{l}{3}(\bar f_0+\bar f_1) f_{1/2}$
	$\frac{l}{6}\bar f(f_0+4f_{1/2})$	$\frac{l}{6}\bar f_0(f_0+2f_{1/2})$	$\frac{l}{3}\bar f_1 f_{1/2}$	$\frac{l}{6}[\bar f_0 f_0+2(\bar f_0+\bar f_1) f_{1/2}]$
	$\frac{l}{6}\bar f(4f_{1/2}+f_1)$	$\frac{l}{3}\bar f_0 f_{1/2}$	$\frac{l}{6}\bar f_1(2f_{1/2}+f_1)$	$\frac{l}{6}[2(\bar f_0+\bar f_1) f_{1/2}+\bar f_1 f_1]$
	$\frac{l}{6}\bar f(f_0+4f_{1/2}+f_1)$	$\frac{l}{6}\bar f_0(f_0+2f_{1/2})$	$\frac{l}{6}\bar f_1(2f_{1/2}+f_1)$	$\frac{l}{6}[\bar f_0 f_0+2(\bar f_0+\bar f_1) f_{1/2}$ $+\bar f_1 f_1]$
$\int \bar f^2 dx$	$l\bar f^2$	$\frac{l}{3}\bar f_0^2$	$\frac{l}{3}\bar f_1^2$	$\frac{l}{3}(\bar f_0^2+\bar f_0\bar f_1+\bar f_1^2)$

[1]Taulukon 2.1 kaavat on helppo johtaa kaavan (2.41) avulla. Tarkastellaan esimerkiksi neljännen rivin ja neljännen sarakkeen tapausta, jossa sekä $\bar f(x)$ että $f(x)$ ovat lineaarisia. Tällöin on $\bar f_{1/2} = (\bar f_0 + \bar f_1)/2, \quad f_{1/2} = (f_0 + f_1)/2$. Sijoittamalla nämä tulokset kaavaan (2.41) saadaan taulukon tulos.

Numeerinen integrointi. Numeerisia integrointimenetelmiä on kehitetty useita. Niistä voidaan mainita mm. puolisuunnikassääntö, Simpsonin kaava ja Gauss-Legendren kvadratuuri (vrt. M. Mäkelä, O. Nevanlinna ja J. Virkkunen: Numeerinen matematiikka). Tässä yhteydessä käsitellään ainoastaan ***Simpsonin kaavaa***. Integroimisväli l (sauvan pituus tai sen osa) jaetaan tasavälein ***parilliseen*** määrään n jakovälejä. Tällöin Simpsonin kaava on

$$\boxed{\int_0^l F(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left(F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + ... + 2F_{n-2} + 4F_{n-1} + F_n\right),} \qquad (2.39)$$

missä $\Delta x = l/n$ ja $F_i = F(i\Delta x)$. Kaava on likimääräiskaava, jonka tarkkuus paranee, kun jakovälien lukumäärää n lisätään. Mikäli integroitava funktio on polynomi, jonka asteluku on kolme tai alempi, Simpsonin kaava antaa tarkan tuloksen. Yksikkövoimamenetelmän sovelluksissa on näin usein laita, jolloin voidaan ottaa käyttöön Simpsonin kaava kahta jakoväliä käyttäen

$$\int_0^l F(x)dx \approx \frac{l}{6}\left(F_0 + 4F_1 + F_2\right) \qquad (2.40)$$

Sovellettuna tuloon $\bar{f} \cdot f$ saadaan

$$\boxed{\int_0^l \bar{f}(x)\, f(x)\, dx = \frac{l}{6}(\bar{f}_0 f_0 + 4\bar{f}_{1/2} f_{1/2} + \bar{f}_1 f_1),} \qquad (2.41)$$

missä alaindeksit 0, $1/2$ ja 1 viittaavat vastaavasti integroimisvälin vasempaan päähän, keskipisteeseen ja oikeaan päähän. Tämä kaava tarjoaa kätevän ja systemaattisen tavan integroida tarkasti ja ilman taulukoita. Edellytyksenä on, että $\bar{f}(x)$:n ja $f(x)$:n **astelukujen summa** on **korkeintaan 3**.

2.4 Yksikkövoimamenetelmän kaavoja tyypillisille rakenteille

2.41 Ristikko

Tarkastellaan ensin **ristikkoa**, joka voi olla joko taso- tai avaruusristikko. Ristikko on suorista sauvoista muodostuva rakenne, jossa sauvat liittyvät toisiinsa nivelten välityksellä ja kuormat kohdistuvat pelkästään niveliin. Ristikon sauvoissa esiintyy tämän vuoksi vain **vakiosuuruinen normaalivoima**, jota kutsutaan sauvavoimaksi ja merkitään symbolilla S_i. Tavallisesti ristikon sauvat ovat lisäksi **tasajäykkiä** (materiaali on homogeenista ja poikkileikkaus ei vaihtele), jolloin myös sauvan venymä $\varepsilon_i = \text{vakio}$.

Ristikkosauvan i sisäisen virtuaalisen työn lauseke saadaan lausekkeesta (2.7) sijoittamalla siihen $\overline{N}(x) = \overline{S}_i = \text{vakio}$ ja $\varepsilon = \varepsilon_i = \text{vakio}$, jolloin saadaan

$$W_{\text{int},i} = -\overline{S}_i \varepsilon_i \int_0^{L_i} dx = -\overline{S}_i \varepsilon_i L_i \tag{2.42}$$

Summaamalla ristikon sauvojen yli saadaan koko ristikon sisäiselle virtuaaliselle työlle lauseke

$$W_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{n} W_{\text{int},i} = -\sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i \varepsilon_i L_i \tag{2.43}$$

missä n on ristikon sauvojen lukumäärä. Sijoittamalla tämä tulos yhtälöön (2.3) saadaan **yksikkövoimamenetelmän kaavaksi ristikolle**

$$\boxed{\underbrace{\overline{F}_A}_{1} \delta_A = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i \varepsilon_i L_i} \tag{2.44}$$

Kaava (2.44) on mahdollisimman **yleinen muoto**. Sitä johdettaessa ei käytetty lainkaan hyväksi sauvojen materiaalilakia, joten se on voimassa myös fysikaalisesti epälineaarisille ristikoille.

Ristikon virtuaalinen voimatila muodostuu siis kuvitellusta yleistetystä voimasta $\overline{F}_A = 1$ ja siitä aiheutuvista sauvavoimista $\overline{S}_i$ ja todellinen siirtymätila ristikon kuormituksesta aiheutuvasta yleistetystä siirtymästä δ_A ja sauvojen venymistä ε_i. Kaavaa (2.44) käytettäessä joudutaan siis laskemaan kuvitellusta yksikkövoimasta $\overline{F}_A = 1$ aiheutuvat sauvavoimat $\overline{S}_i$ ja sauvojen todellisesta kuormituksesta aiheutuvat venymät ε_i. Jälkimmäiset saadaan määrittämällä ensin todellisesta kuormituksesta aiheutuvat sauvavoimat S_i ja sitten, kun sauvojen materiaalilakiin perustuva kunkin sauvan venymä sauvavoima riippuvuus $\varepsilon_i = \varepsilon_i(S_i)$ tunnetaan, sauvojen venymät ε_i.

Lineaarisesti kimmoinen ristikko: Tarkastellaan ristikkoa, jonka sauvat ovat lineaarisesti kimmoisia, aksiaalisen jäykkyyden ollessa $(EA)_i$, ja saavat alkuvenymän ε_{0i}. Sauvan i venymälle saadaan

$$\varepsilon_i = \frac{S_i}{(EA)_i} + \varepsilon_{0i} \tag{2.45}$$

Sijoittamalla tämä lausekkeeseen (2.44) saadaan yksikkövoimamenetelmän kaavaksi **lineaarisesti kimmoiselle ristikolle**

$$\boxed{\underbrace{\bar{F}_A}\,\delta_A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{S}_i S_i L_i}{(EA)_i} + \sum_{i=1}^{n} \bar{S}_i \varepsilon_{0i}} \tag{2.46}$$

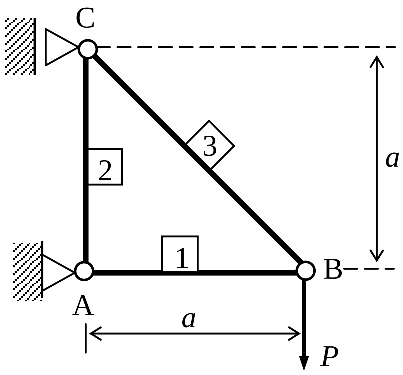
Kaavaa (2.46) käytettäessä joudutaan laskemaan kuvitellusta yksikkövoimasta $\bar{F}_A = 1$ aiheutuvat sauvavoimat $\bar{S}_i$ ja ristikon todellisesta kuormituksesta aiheutuvat sauvavoimat S_i

Huomautus: Jos ristikkoon liittyy **jousia**, tulee niistä kustakin kaavan (2.46) oikean puoleen jousivoimaan vastaava lisätermi $\bar{J}J / k$, jolloin kaava saa muodon

$$\underbrace{\bar{F}_A}\,\delta_A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{S}_i S_i L_i}{(EA)_i} + \sum_{i=1}^{n} \bar{S}_i \varepsilon_{0i} + \sum_{\text{jouset}} \frac{\bar{J}J}{k}. \tag{2.47}$$

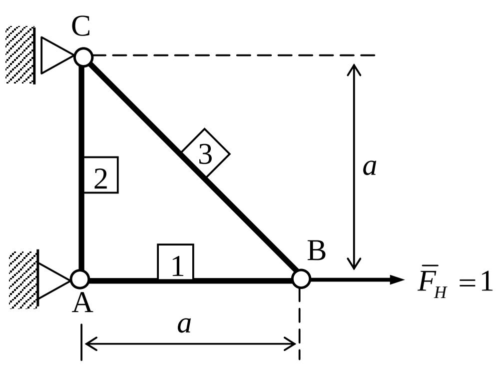
Huomautus: Ristikoihin liittyy usein myös painottomiksi otaksuttuja **vetotankoja tai köysiä**, jotka toimivat ainoastaan vedettyinä. Ne voidaan käsitellä kuten muutkin ristikon sauvat, kuhan pidetään mielessä, että niiden sauvavoimille tulee olla voimassa $S_i > 0$.

Esimerkki 2.1: Määritetään oheisen ristikon nivelen B vaaka- ja pystysiirtymät (a) kuormasta P ja (b) kun sauva AB saa lämpötilan muutoksen T. Sauvojen jäykkyys EA ja pituuden lämpötilakerroin α_T ovat vakiot.

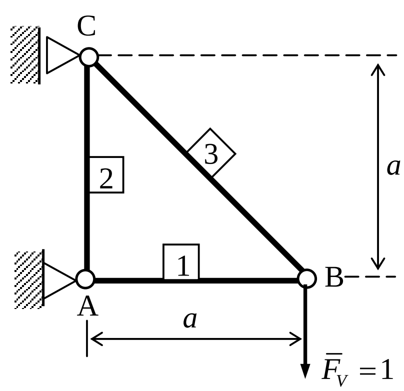


Ratkaisu:

Kuormitus $\bar{F}_H = 1$:



Kuormitus $\bar{F}_V = 1$:



Määritetään tavanomaiseen tapaan todelliset sauvavoimat S_i ulkoisesta kuormasta P sekä virtuaaliset sauvavoimat $\bar{S}_i$ yksikkövoimista $\bar{F}_H = 1$ ja $\bar{F}_V = 1$. (Laskelmia ei tässä suoriteta.) Tulokset on esitetty oheisessa taulukossa:

i	L_i	S_i	$\bar{S}_i$ $(\bar{F}_H = 1)$	$\bar{S}_i$ $(\bar{F}_V = 1)$	$S_i \bar{S}_i L_i$ $(\bar{F}_H = 1)$	$S_i \bar{S}_i L_i$ $(\bar{F}_V = 1)$
1	a	$-P$	1	-1	$-Pa$	Pa
2	a	$-P$	0	-1	0	Pa
3	$a\sqrt{2}$	$P\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0	$2Pa\sqrt{2}$
				$\sum$	$-Pa$	$2(1+\sqrt{2})Pa$

(a) Soveltamalla yksikkövoimamenetelmää saadaan

$$\overbrace{\bar{F}_H}^{1} \delta_H = \sum_{i=1}^{3} \frac{\bar{S}_i S_i L_i}{(EA)_i} + \sum_{i=1}^{3} \bar{S}_i \overbrace{\varepsilon_{0i}}^{0} L_i = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^{3} \bar{S}_i S_i L_i = -\frac{Pa}{EA} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\delta_H = -\frac{Pa}{EA}}}$$

$$\overbrace{F_V}^{1}\delta_V = \frac{1}{EA}\sum_{i=1}^{3}\bar{S}_i S_i L_i = \frac{2(1+\sqrt{2})Pa}{EA} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\delta_V = 2(1+\sqrt{2})\frac{Pa}{EA}}}$$

(b) Sauvojen alkuvenymät:

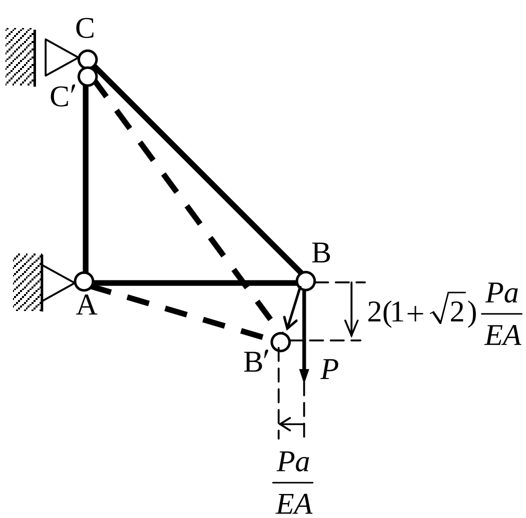
$$\varepsilon_{01} = \alpha_T T\,,\;\; \varepsilon_{02} = \varepsilon_{03} = 0$$

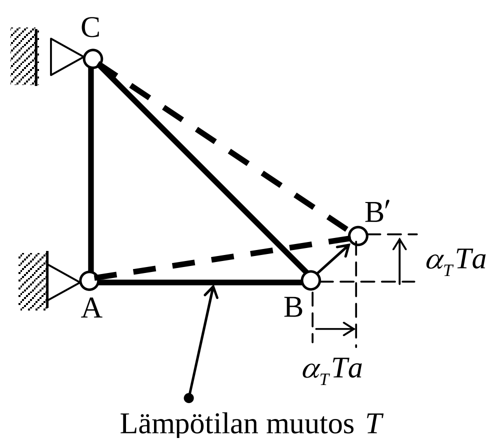
Soveltamalla yksikkövoimamenetelmää saadaan

$$\overbrace{F_H}^{1}\delta_H = \sum_{i=1}^{3}\frac{\bar{S}_i\overbrace{S_i}^{0}L_i}{(EA)_i} + \sum_{i=1}^{3}\bar{S}_i\varepsilon_{0i}L_i = \sum_{i=1}^{3}\bar{S}_i\varepsilon_{0i}L_i = 1\cdot\alpha_T T\cdot a \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\delta_H = \alpha_T Ta}}$$

$$\overbrace{F_V}^{1}\delta_V = \sum_{i=1}^{3}\bar{S}_i\varepsilon_{0i}L_i = -1\cdot\alpha_T T\cdot a \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\delta_V = -\alpha_T Ta}}$$

Oheiset kuviot havainnollistavat tuloksia:





2.42 Palkki

Tarkastellaan palkkia, joka voi koostua yhdestä tai useammasta osasauvasta. **Teknistä taivutusteoriaa** noudattavan (Bernoulli-Euler) palkin sisäinen virtuaalinen työ kaavan (2.13) mukainen W_{int}^{κ}. Sijoittamalla tämä lauseke kaavaan (2.3) ja saadaan yksikkövoimamenetelmän kaavaksi

$$\boxed{\overset{1}{\overbrace{\bar{F}_A}}\,\delta_A = \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L \bar{M}\,\kappa\,dx} \tag{2.48}$$

Kaava (2.48) on mahdollisimman **yleinen muoto,** joka on voimassa myös fysikaalisesti epälineaarisille palkeille.

Lineaarisesti kimmoisen Bernoulli-Euler palkin tapauksessa palkin sisäinen virtuaalinen työ muodostuu kaavan (2.16) mukaisista taivutuksen ja alkukäyristymän osuuksista W_{int}^{M} ja $W_{\text{int}}^{\kappa_0}$, jolloin yksikkövoimamenetelmän kaava saa muodon

$$\boxed{\overset{1}{\overbrace{\bar{F}_A}}\,\delta_A = \sum_{\text{sauvat}} \Big(\int_0^L \frac{\bar{M}M}{EI}\,dx + \int_0^L \bar{M}\,\kappa_0\,dx\Big)}. \tag{2.49}$$

Jos kysymyksessä on Timoshenko-palkki, virtuaaliseen työhön tulee leikkausmuodonmuutosta vastaava kaavan (2.22) lisätermi W_{int}^{Q}, jolloin yksikkövoimamenetelmän kaava saa muodon

$$\boxed{\overset{1}{\overbrace{\bar{F}_A}}\,\delta_A = \sum_{\text{sauvat}} \Big(\int_0^L \frac{\bar{M}M}{EI}\,dx + \int_0^L \zeta\,\frac{\bar{Q}Q}{GA}\,dx + \int_0^L \bar{M}\,\kappa_0\,dx\Big)} \tag{2.50}$$

Käytännössä hyvin usein kysymykseen tulee teknistä taivutusteoriaa noudattava palkki, jolla ei ole alkukäyristymää. Yksikkövoimamenetelmän kaava on tällöin yksinkertaisesti

$$\overset{1}{\overbrace{\bar{F}_A}}\,\delta_A = \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L \frac{\bar{M}M}{EI}\,dx\,. \tag{2.51}$$

Huomautus: Jos palkkiin sisältyy myös **yleistettyjä jousia**, tulee niistä kustakin kaavan oikeaan puoleen jousivoimaa vastaava lisätermi, jolloin esimerkiksi kaava (2.49) saa muodon

$$\overset{1}{\overbrace{\bar{F}_A}}\,\delta_A = \sum_{\text{sauvat}} \Big(\int_0^L \frac{\bar{M}M}{EI}\,dx + \int_0^L \bar{M}\,\kappa_0\,dx\Big) + \sum_{\text{jouset}} \frac{\bar{J}J}{k}\,. \tag{2.52}$$

Esimerkki 2.2: Kuvan (a) palkin käyristymä-taivutusmomenttiriippuvuutta kuvataan kuvan (b) mukaisella paraabelilla, jonka kulmakerroin origossa on $1/EI$ ja joka kulkee pisteen (κ_0, M_0) kautta. Riippuvuus on muotoa

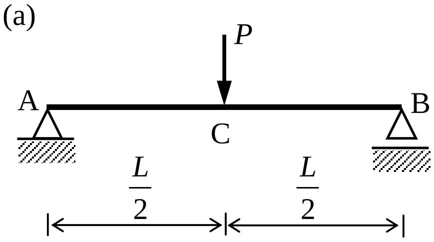
$$\kappa = M(a + bM),$$

missä

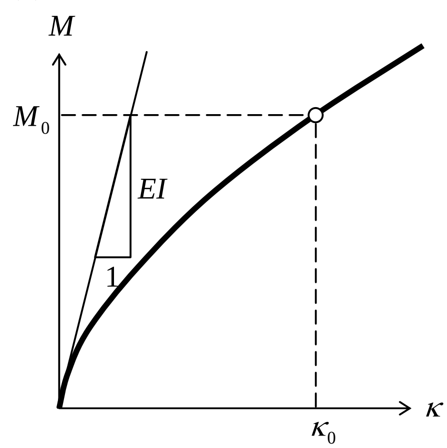
$$a = \frac{1}{EI}, \quad b = \frac{1}{M_0}\left(\frac{\kappa_0}{M_0} - \frac{1}{EI}\right),$$

I on palkin jäyhyysmomentti ja E on materiaalin alkukimmokerroin. Määritä yksikkövoimamenetelmällä palkin keskipisteen C kuorma-taipumariippuvuus ja piirrä sen kuvaaja, kun $\kappa_0 = 3M_0 / EI$.

(a)

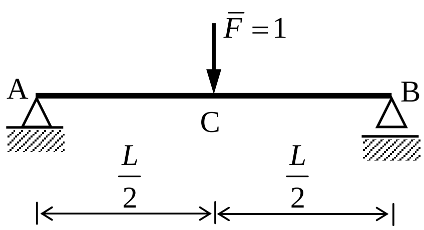


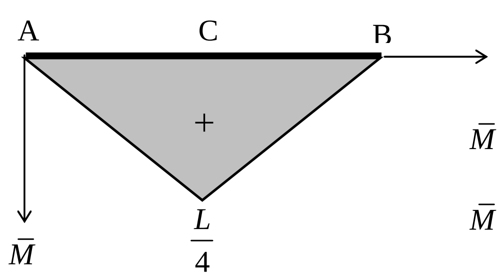
(b)



Ratkaisu:

Virtuaalinen taivutusmomenttikuvio $\bar{M}(x)$:

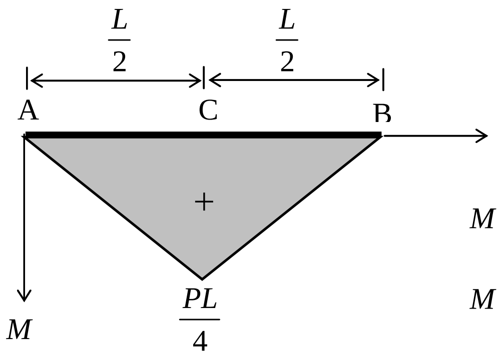




$$\bar{M}(x) = \frac{x}{2}, \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2},$$

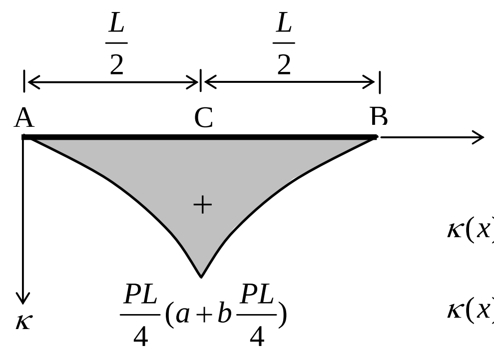
$$\bar{M}(x) = \frac{1}{2}(L - x), \quad \frac{L}{2} \le x \le L.$$

Todellinen taivutusmomenttikuvio $M(x)$:



$$M(x) = \frac{Px}{2}, \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2},$$
$$M(x) = \frac{P}{2}(L-x), \quad \frac{L}{2} \le x \le L.$$

Todellinen käyristymäkuvio:



$$\kappa(x) = \frac{Px}{2}(a + b\frac{Px}{2}), \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$
$$\kappa(x) = \frac{P(L-x)}{2}[a + b\frac{P(L-x)}{2}], \quad \frac{L}{2} \le x \le L.$$

Soveltamalla yksikkövoimamenetelmää saadaan

$$\overset{1}{\overbrace{\bar{F}}}\,\delta_{\mathrm{C}} = \int_0^L \bar{M}\kappa dx = 2\int_0^{L/2} \bar{M}\kappa dx\,,$$

jossa käytettiin hyväksi momentti- ja käyristymäpinnan symmetriaa. Saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{C}} &= 2\int_0^{L/2} \bar{M}\kappa dx = 2\int_0^{L/2} \bar{M}\kappa dx = 2\int_0^{L/2} \frac{x}{2}\cdot\frac{Px}{2}(a + b\frac{Px}{2})dx \\
&= \frac{P}{2}\int_0^{L/2} (ax^2 + b\frac{Px^3}{2})dx = \frac{P}{2}\Big|_0^{L/2}(a\frac{x^3}{3} + b\frac{Px^4}{8}) \\
&= \underline{\underline{\frac{PL^3}{48}(a + b\frac{3PL}{16})}}.
\end{aligned}$$

Kun $\kappa_0 = 3M_0 / EI$ saadaan

$$a = \frac{1}{EI}, \quad b = \frac{2}{EIM_0}$$

ja

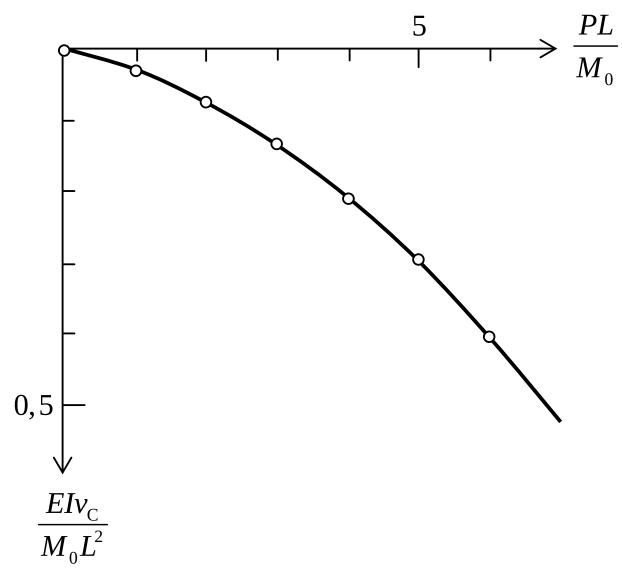
$$v_{\mathrm{C}} = \frac{PL^3}{48}(a + b\frac{3PL}{16}) = \frac{PL^3}{48EI}(1 + \frac{3PL}{8M_0})$$

eli dimensiottomassa muodossa

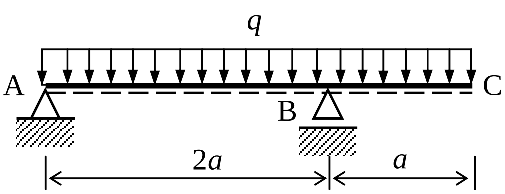
$$\frac{EIv_{\mathrm{C}}}{M_0 L^2} = \frac{PL}{48M_0}(1 + \frac{3PL}{8M_0}) \; .$$

Kuorma-taipumakäyrä:

$\frac{PL}{M_0}$	$\frac{EIv_{\mathrm{C}}}{M_0 L^2}$
0	0
1,0	0,029
2,0	0,073
3,0	0,133
4,0	0,208
5,0	0,299
6,0	0,406

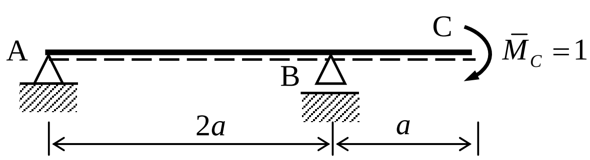


Esimerkki 2.3: Määritä oheisen palkin kiertymä pisteessä C (a) tasaisesta kuormasta q ja (b) kun palkin alapinta tukien A ja B välillä saa lämpötilan muutoksen T. Palkki on tasajäykkä, sen korkeus on h, taivutusjäykkyys on EI ja pituuden lämpötilakerroin on α_T .



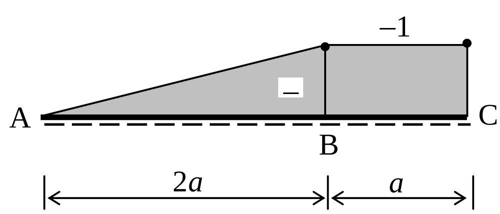
Ratkaisu:

Yksikkömomentin $\bar{M}_C = 1$ kuormittama palkki:

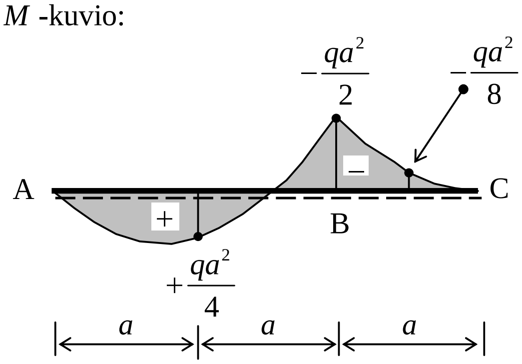


(a) Määritetään palkin todellinen taivutusmomentti $M(x)$ ulkoisesta kuormasta q sekä virtuaalinen taivutusmomentti $\bar{M}(x)$ yksikkömomentista $\bar{M}_C = 1$. (Laskelmia ei tässä suoriteta.) Ohessa ovat tulokseksi saadut taivutusmomenttikuviot.

$\bar{M}$ -kuvio:



M -kuvio:



Soveltamalla yksikkövoimamenetelmään saadaan:

$$\underbrace{\bar{M}_C}_{1}\varphi_C = \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L \frac{\bar{M}M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\int_0^{3a} \bar{M}M\,dx$$

Soveltamalla integraalitaulukkoa saadaan

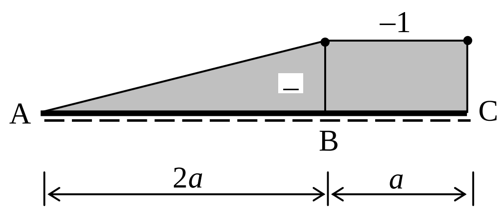
$$\varphi_C = \frac{1}{EI}\{\frac{2a}{6}(-1)[2\cdot\frac{qa^2}{4}+(-\frac{qa^2}{2})]+\frac{a}{6}(-1)[(-\frac{qa^2}{2})+4(-\frac{qa^2}{8})]\}=\underline{\underline{\frac{1}{6}\frac{qa^3}{EI}}}$$

(b) Palkin AB alkukäyristymälle saadaan

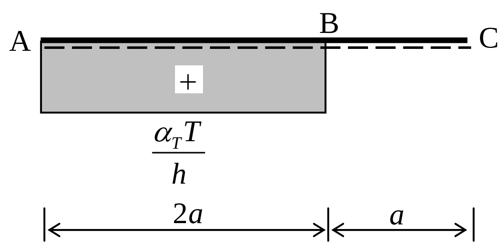
$$\kappa_0 = \alpha_T\frac{\Delta T}{h} = \alpha_T\frac{T-0}{h} = \frac{\alpha_T T}{h}\,.$$

Ohessa ovat palkin $\bar{M}$ -kuvio ja κ_0-kuvio.

$\bar{M}$ -kuvio:



κ_0-kuvio:



Soveltamalla yksikkövoimamenetelmän kaavaa (2.54) saadaan:

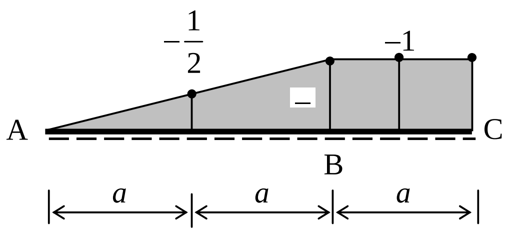
$$\bar{M}_C\varphi_C = \sum_{\text{sauvat}}(\int_0^L \frac{\bar{M}\overbrace{M}^{0}}{EI}dx + \int_0^L \bar{M}\kappa_0 dx) = \int_0^{2a}\bar{M}\kappa_0 dx$$

Soveltamalla integraalitaulukkoa saadaan

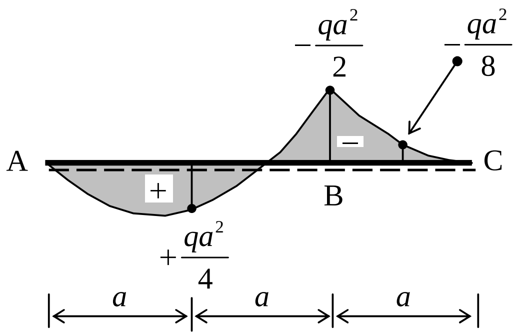
$$\varphi_C = \frac{2a}{2}(-1)\frac{\alpha_T T}{h} = \underline{\underline{-\frac{\alpha_T Ta}{h}}}$$

Lasketaan lopuksi (a) kohta vertailun vuoksi Simsonin kaavaa:

$\bar{M}$ -kuvio:



M -kuvio:



$$\varphi_C = \frac{1}{EI}\{\frac{2a}{6}[0\cdot 0 + 4(-\frac{1}{2})\frac{qa^2}{4} + (-1)(-\frac{qa^2}{2})] + \frac{a}{6}[(-1)(-\frac{qa^2}{2}) + 4(-1)(-\frac{qa^2}{8}) + (-1)\cdot 0]\}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi_C = \frac{1}{6}\frac{qa^3}{EI}}}$$

Esimerkki 2.4: Oheisen ulokepalkin poikkileikkaus on suorakaide**,** jonka korkeus vaihtelee parabolisesti kaavan

$$h(x) = h_0(1+\frac{x^2}{L^2}) \,,$$

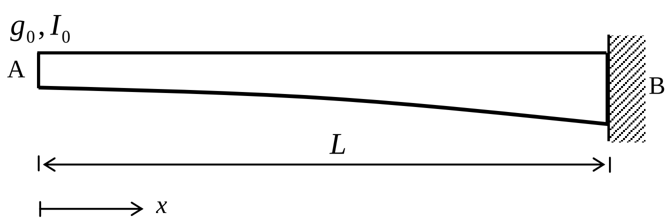
mukaisesti, missä h_0 on palkin korkeus ulokkeen päässä. Palkin oma paino pituutta kohti on

$$g(x) = \gamma bh(x) = g_0(1+\frac{x^2}{L^2}) \,,$$

missä $g_0 = \gamma bh_0$ on sen arvo ulokkeen päässä, γ on tilavuuspaino ja b on leveys. Pakin jäyhyysmomentti on

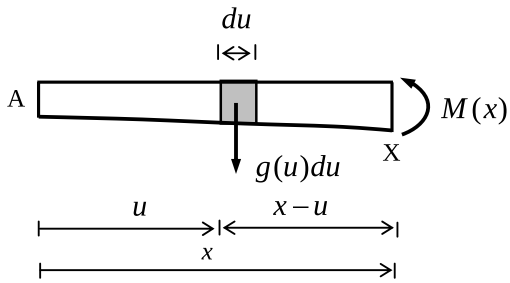
$$I = \frac{bh(x)^3}{12} = I_0(1+\frac{x^2}{L^2})^3 ,$$

missä $I_0 = bh_0^3/12$ on sen arvo ulokkeen päässä. Määritä palkin omasta painosta aiheutuva taipuma ulokkeen päässä A, kun kimmomoduuli on E.



Ratkaisu:

Todellinen taivutusmomentti $M(x)$:

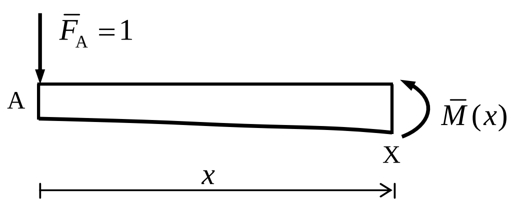


$$\overset{\curvearrowleft}{X}\quad M(x)+\int_0^x g(u)(x-u)du=0$$

$$\Rightarrow\ M(x)=-\int_0^x g(u)(x-u)du=-g_0\int_0^x(1+\frac{u^2}{L^2})(x-u)du=-g_0\int_0^x(x+\frac{u^2}{L^2}x-u-\frac{u^3}{L^2})du$$

$$=-g_0\Big|_0^x(xu+\frac{u^3}{3L^2}x-\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4L^2})=-g_0(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12L^2})=\underline{-\frac{g_0L^2}{2}[(\frac{x}{L})^2+\frac{1}{6}(\frac{x}{L})^4]}$$

Virtuaalinen taivutusmomentti $\bar{M}(x)$:



$$\overset{\curvearrowleft}{X}\quad \bar{M}(x)+\overbrace{\bar{F}_A}^{1}\cdot x=0\quad\Rightarrow\quad\underline{\bar{M}(x)=-x}$$

Yksikkövoimamenetelmä:

$$\overbrace{\bar{F}_{\mathrm{A}}}^{1}\delta_{\mathrm{A}}=\int_0^L\frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI(x)}dx+\int_0^L\bar{M}(x)\overbrace{\kappa_0(x)}^{0}dx\quad\Rightarrow\quad\delta_{\mathrm{A}}=\int_0^L\frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI(x)}dx$$

Koska EI riippuu muuttujasta x ja on nimittäjässä, integrandi on rationaalilauseke ja varsin hankala integroida tarkasti. Tämän vuoksi käytetään numeerista integrointia Simsonin kaavalla. Merkitään

$$F(x)=\frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI(x)}=\frac{g_0L^3}{EI_0}\frac{(\frac{x}{L})^3(1+\frac{1}{6}\frac{x}{L})}{2(1+\frac{x^2}{L^2})^3},$$

jolloin

$$\delta_A = \int_0^L F(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(F_0 + 4F_1 + 2F_2 + \cdots + 4F_{n-1} + F_n) .$$

Otetaan $n = 4$:

i	x_i / L	Kerroin	$\frac{EI_0}{g_0 L^4} F_i$
0	0	1	0
1	0,25	4	0,00678
2	0,5	2	0,03467
3	0,75	4	0,06221
4	1	1	0,07291

$$\delta_A \approx \frac{L}{3 \cdot 4} \frac{g_0 L^3}{EI_0}(0 + 4 \cdot 0{,}00678 + 2 \cdot 0{,}03467 + 4 \cdot 0{,}06221 + 0{,}07291) = \frac{g_0 L^4}{EI_0} \frac{0{,}41821}{12}$$

$$= \underline{\underline{0{,}03485 \frac{g_0 L^4}{EI_0}}}$$

Otetaan $n = 8$:

i	x_i / L	Kerroin	$\frac{EI_0}{g_0 L^4} F_i$
0	0	1	0
1	0,125	4	0,00095
2	0,25	2	0,00678
3	0,375	4	0,01888
4	0,5	2	0,03467
5	0,625	4	0,05012
6	0,75	2	0,06221
7	0,875	4	0,06973
8	1	1	0,07291

$$\delta_A \approx \frac{L}{3 \cdot 8} \frac{g_0 L^3}{EI_0} \cdot 0{,}083895 = \underline{\underline{0{,}03496 \frac{g_0 L^4}{EI_0}}}$$

Todetaan, että saatiin aika tarkka tulos jo käyttäen neljää jakoväliä $(n = 4)$.

2.43 Tasokehä ja kaari

Tarkastellaan seuraavaksi **lineaarisesti kimmoista tasokehää**, jonka sauvat noudattavat **teknistä taivutusteoriaa** $(GA = \infty)$. Rakenteen sisäinen virtuaalinen työ muodostuu sen sauvojen virtuaalisen normaalivoiman, taivutusmomentin, alkuvenymän ja alkukäyristymän osuuksista W_{int}^{N}, W_{int}^{M}, $W_{\text{int}}^{\varepsilon_0}$ ja $W_{\text{int}}^{\kappa_0}$. Yksikkövoimamenetelmän kaavaksi saadaan tällöin

$$\boxed{\overbrace{\bar{F}_A}^{1}\delta_A = \sum_{\text{sauvat}} \left(\int_0^L \frac{\bar{N}N}{EA}\,dx + \int_0^L \frac{\bar{M}M}{EI}\,dx + \int_0^L \bar{M}\kappa_0 dx + \int_0^L \bar{N}\varepsilon_0 dx \right)}. \tag{2.53}$$

Monissa tapauksissa kehärakenteissa voidaan tehdä otaksuma, että sauvat ovat **aksiaalisesti jäykkiä** $(EA = \infty)$. Tämä merkitsee sitä, lausekkeen (2.53) ensimmäinen integraalitermi voidaan pudottaa pois, jolloin yksikkövoimamenetelmän kaava on

$$\boxed{\overbrace{\bar{F}_A}^{1}\delta_A = \sum_{\text{sauvat}} \left(\int_0^L \frac{\bar{M}M}{EI}\,dx + \int_0^L \bar{M}\kappa_0 dx + \int_0^L \bar{N}\varepsilon_0 dx \right)}. \tag{2.54}$$

Käytännössä hyvin usein kysymykseen tulee teknistä taivutusteoriaa noudattava kehä, jolla ei ole alkuvenymää eikä alkukäyristymää. Yksikkövoimamenetelmän kaava on tällöin yksinkertaisesti

$$\overbrace{\bar{F}_A}^{1}\delta_A = \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L \frac{\bar{M}M}{EI}\,dx\,. \tag{2.55}$$

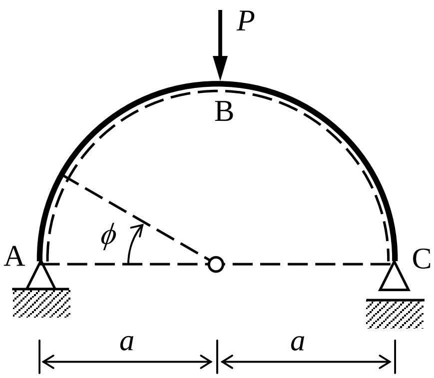
Huomautus: Yllä olevat kaavat soveltuvat sellaisenaan myös **tasokaareen**. Ainoana erona on vain se, että kaaren akseliin yhtyvää koordinaattia on tällöin totuttu merkitsemään symbolilla s.

Huomautus: Jos kehään tai kaareen palkkiin sisältyy myös **yleistettyjä jousia**, tulee niistä kustakin kaavan oikeaan puoleen jousivoimaa vastaava lisätermi, jolloin esimerkiksi kaava (2.54) saa muodon

$$\overbrace{\bar{F}_A}^{1}\delta_A = \sum_{\text{sauvat}} \left(\int_0^L \frac{\bar{M}M}{EI}\,dx + \int_0^L \bar{M}\kappa_0 dx + \int_0^L \bar{N}\varepsilon_0 dx \right) + \sum_{\text{jouset}} \frac{\bar{J}J}{k} \tag{2.56}$$

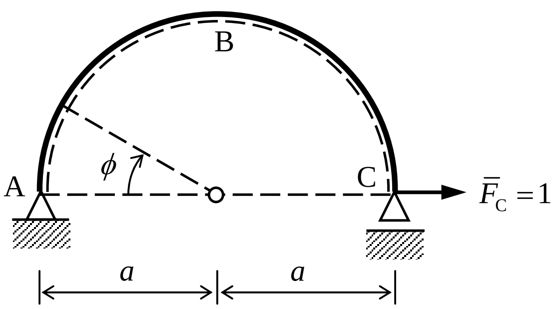
.

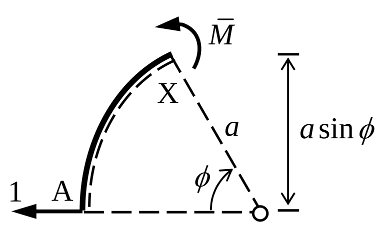
Esimerkki 2.5: Oheista puoliympyrän muotoista kaarta kuormittaa pistekuorma P sen lakipisteessä B ja kaaren taivutusjäykkyys on EI. Määritä tukipisteen C vaakasiirtymä.



Ratkaisu:

Virtuaalinen taivutusmomentti $\bar{M}$ **:**

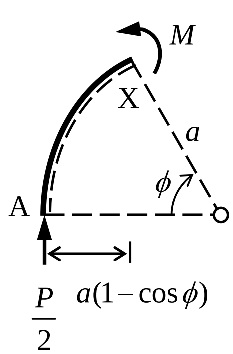




$$X: \quad \bar{M} - a\sin\phi = 0 \;\Rightarrow\; \bar{M} = a\sin\phi$$

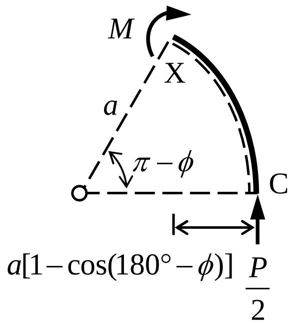
Todellinen taivutusmomentti M **:**

Väli AB:



$$X: \quad M - \frac{P}{2}a(1-\cos\phi) = 0 \;\Rightarrow\; M = \frac{Pa}{2}(1-\cos\phi)$$

Väli BC:



$$\text{X}\circlearrowleft \quad -M+\frac{P}{2}a[1-\cos(\pi-\phi)]=0 \;\Rightarrow\; M=\frac{Pa}{2}(1+\cos\phi)$$

Yksikkövoimamenetelmä (kaari $ds \to dx$):

$$\overbrace{\bar{F}_{\mathrm{C}}}^{1}\delta_{\mathrm{C}}=\int_0^L\frac{\bar{M}M}{EI}ds \;\Rightarrow\; \delta_{\mathrm{C}}=\int_0^L\frac{\bar{M}M}{EI}ds=\frac{1}{EI}\int_0^L\bar{M}M\,ds$$

Vaihdetaan integrointimuuttujaksi ϕ. Jos koordinaattia s mitataan pisteestä A lähtien, saadaan $s=a\phi$, $ds=ad\phi$ ja $\phi=s/a$. Saadaan

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{C}}&=\frac{1}{EI}\int_0^{\pi}\bar{M}Mad\phi=\frac{a}{EI}\int_0^{\pi}\bar{M}Md\phi\\
&=\frac{a}{EI}[\int_0^{\pi/2}a\sin\phi\cdot\frac{Pa}{2}(1-\cos\phi)d\phi+\int_{\pi/2}^{\pi}a\sin\phi\cdot\frac{Pa}{2}(1+\cos\phi)d\phi]\\
&=\frac{Pa^3}{2EI}[\int_0^{\pi/2}(\sin\phi-\frac{1}{2}\sin2\phi)d\phi+\int_{\pi/2}^{\pi}(\sin\phi+\frac{1}{2}\sin2\phi)d\phi]\\
&=\frac{Pa^3}{2EI}[\Big|_0^{\pi/2}(-\cos\phi+\frac{1}{4}\cos2\phi)+\Big|_{\pi/2}^{\pi}(-\cos\phi-\frac{1}{4}\cos2\phi)]\\
&=\underline{\underline{\frac{Pa^3}{2EI}}}
\end{aligned}$$

2.43 Väännön ja kaksiakselisen taivutuksen rasittama sauvarakenne

Seuraavaksi tarkastellaan sauvarakennetta, jota rasittaa vääntö ja kaksiakselinen taivutus. Rajoitumme **lineaarisesti kimmoiseen** tapaukseen. Otaksumme, että rakenne noudattaa **teknistä taivutusteoriaa** $(GA=\infty)$, se on **aksiaalisesti jäykkä** $(EA=\infty)$ ja saa muodonmuutoksia ainoastaan ulkoisesta, **mekaanisesta kuormituksesta**.

Tarkasteltavan rakenteen sisäisen virtuaalinen työ muodostuu sen sauvojen virtuaalisen vääntömomentin sekä taivutusmomenttien osuuksista. Jos virtuaaliset taivutusmomentit poikkileikkauksen pääjäyhyyskoordinaatistossa ovat $\bar{M}_y$ ja $\bar{M}_z$ sekä vastaavat todelliset käyristymät ovat κ_y ja κ_z, näiden osuudet sauvan sisäisestä virtuaalisesta työstä saadaan vastaavaan tapaan kuin tasosauvarakenteella (vrt. kaava (2.13)). Näin saadaan

$$W_{\text{int}}^{\kappa_y} = -\int_0^L \bar{M}_y \kappa_y dx, \quad W_{\text{int}}^{\kappa_z} = -\int_0^L \bar{M}_z \kappa_z dx. \tag{2.57}$$

Sijoittamalla näihin yhtälöihin käyristymien ja taivutusmomenttien yhteydet

$$\kappa_y = \frac{M_y}{EI_y}, \quad \kappa_z = \frac{M_z}{EI_z}, \tag{2.58}$$

saadaan taivutusmomenttien osuudeksi lineaarisesti kimmoisen, homogeenisen sauvan sisäisestä virtuaalisesta työstä

$$W_{\text{int}}^{M_y} = -\int_0^L \frac{\bar{M}_y M_y}{EI_y} dx, \quad W_{\text{int}}^{M_z} = -\int_0^L \frac{\bar{M}_z M_z}{EI_z} dx. \tag{2.59}$$

Rakenteen sisäinen virtuaalinen työ on nyt

$$W_{\text{int}} = \sum_{\text{sauvat}} (W_{\text{int}}^{M_t} + W_{\text{int}}^{M_y} + W_{\text{int}}^{M_z}) \,. \tag{2.60}$$

Sijoittamalla tämä lauseke kaavaan (2.3) ja käyttämällä hyväksi edellä sisäiselle virtuaaliselle työlle johdettuja lausekkeita lausekkeet (2.59) mukaan lukien saadaan yksikkövoimamenetelmän kaavaksi

$$\boxed{\overbrace{\bar{F}_A}^{1} \delta_A = \sum_{\text{sauvat}} \left(\int_0^L \frac{\bar{M}_t M_t}{GI_t} dx + \int_0^L \frac{\bar{M}_y M_y}{EI_y} dx + \int_0^L \frac{\bar{M}_z M_z}{EI_z} dx\right)} \tag{2.61}$$

Tämä on yksikkövoimamenetelmän yhtälö **homogeenisistä, lineaarisesti kimmoisista** sauvoista koostuvalle **väännetylle ja kaksiakselisesti taivutetulle sauvarakenteelle**, joka noudattaa teknistä taivutusteoriaa.

2.44 Arinarakenne

Tyypillinen sauvarakenne, jossa esiintyy taivutusrasitusten lisäksi vääntörasituksia, on **arina**. Se on kehä, jonka **sauvat ovat samassa tasossa** (usein vaakataso) ja **kuormat vaikuttavat kohtisuoraan tätä tasoa vastaan** (alaspäin).

Jos arinan sauvojen poikkileikkaukset ovat **pystyakselin suhteen symmetrisiä**, voidaan kunkin sauvan sauvakoordinaatisto valita siten, että *y*-akseli on alaspäin ja *x*,*z*-taso on vaakataso. Arinan kuormituksesta ei tässä tapauksessa aiheudu sen sauvoihin myöskään taivutusmomenttia M_y. Näin kaavasta (2.61) saadaan edelleen

$$\boxed{\overbrace{\bar{F}_A}^{1} \delta_A = \sum_{\text{sauvat}} \left(\int_0^L \frac{\bar{M}_t M_t}{GI_t} dx + \int_0^L \frac{\bar{M}_z M_z}{EI_z} dx \right)} \qquad (2.62)$$

Tämä on **yksikkövoimamenetelmän yhtälö arinalle**, jonka sauvat ovat **pystytason suhteen symmetrisiä**.

3. YLEINEN VOIMAMENETELMÄ

3.1 Voimamenetelmän yhtälöt

Tarkastellaan n kertaa **staattisesti määräämätöntä, lineaarisesti kimmoista** rakennetta (vrt. kuva 3.1 (a), jossa n=3), jolle on valittu staattisesti määrätty perusmuoto (kuva (b)) poistamalla rakenteen yksiarvoisia tukia ja/tai lisäämällä siihen niveliä ja/tai katkaisuja. Näin rakenteeseen on syntynyt n vapausastetta. Merkitään näitä vapausasteita vastaavia yleistettyjä siirtymiä δ_i, $i = 1,\ldots,n$ ja yleistettyjä voimia X_i, $i = 1,\ldots,n$ (kuva (b)). Nämä voimasuureet ovat rakenteen **staattisesti määräämättömät suureet**, jotka ovat tuntemattomia. Niiden arvot määräytyvät alkuperäisen rakenteen ao. vapausasteisiin liittyvistä yhteensopivuusehdoista $\delta_i = \hat{\delta}_i$, $i = 1,\ldots,n$. Suureet $\hat{\delta}_i$ ovat annettuja yleistettyjä siirtymiä, jotka tavallisimmin ovat nollia (kuva (b)). Kuitenkin, jos esimerkiksi rakenteen tuki on painunut 1mm ja ao. tukireaktio X_i on staattisesti määräämättömänä suureena, on $\hat{\delta}_i = -1\text{mm}$.

Merkitään δ_{i0}:lla staattisesti määrätyn perusmuodon vapausasteen i yleistettyä siirtymää ulkoisesta kuormituksesta (mukaan lukien mahdollinen alkuvenymä ja alkukäyristymä) (vrt. kuva (c)). Merkitään edelleen δ_{ij}:llä staattisesti määrätyn perusmuodon vapausasteen i yleistettyä siirtymää vapausasteen j yleistetystä voimasta $X_j = 1$ (vrt. kuvat (d)-(f)). Staattisesti määrätyn perusmuodon vapausasteen i yleistetylle siirtymälle ulkoisesta kuormituksesta ja staattisesti määräämättömistä suureista X_j, $j = 1,\ldots,n$ saadaan soveltamalla yhteenlaskuperiaatetta tulos

$$\delta_i = \delta_{i0} + \delta_{i1}X_1 + \cdots + \delta_{in}X_n\,. \tag{3.1}$$

Tämän yleistetyn siirtymän tulee toteuttaa yhteensopivuusehto $\delta_i = \hat{\delta}_i$, joten saadaan yhtälö

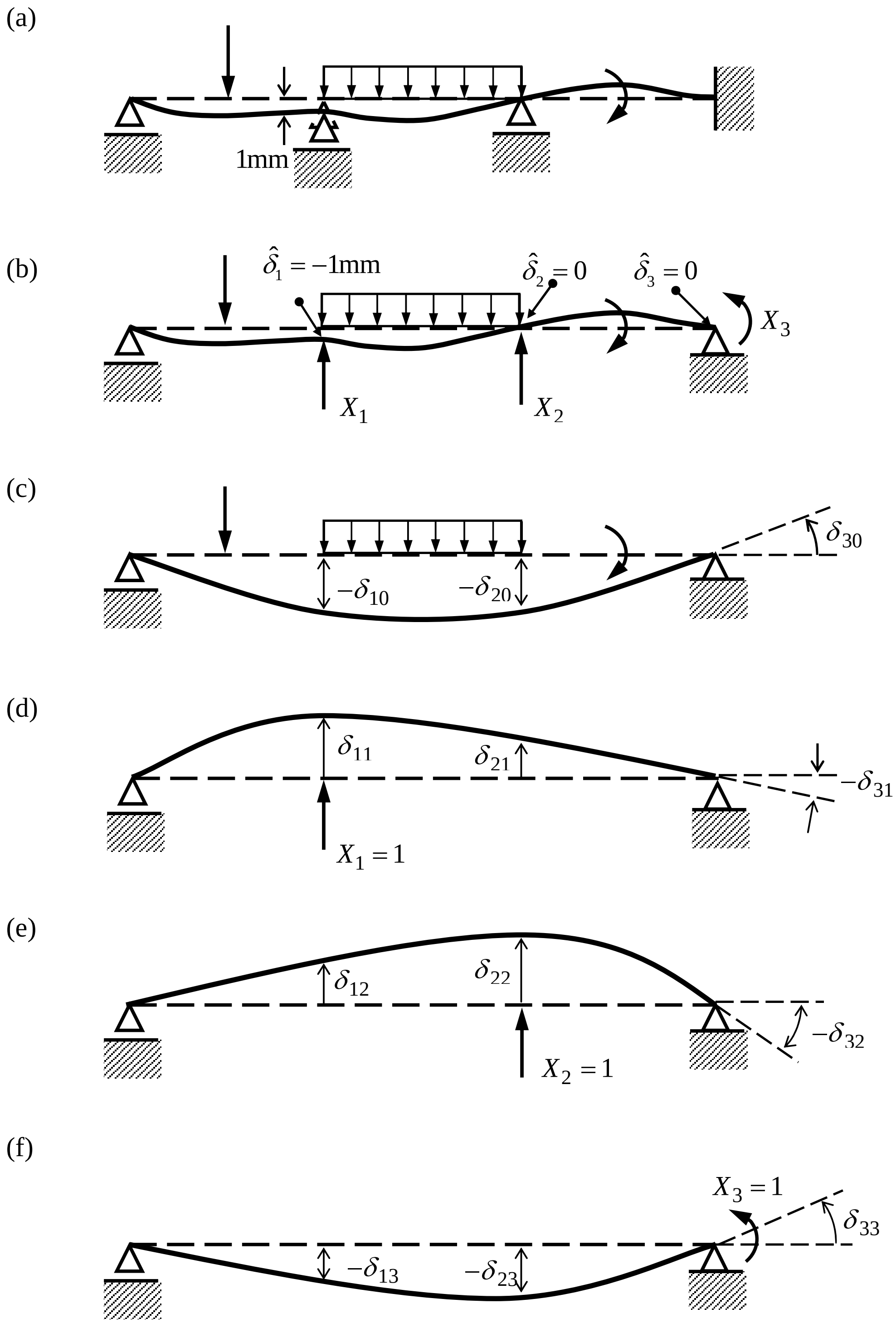
$$\delta_{i0} + \delta_{i1}X_1 + \cdots + \delta_{in}X_n = \hat{\delta}_i\,. \tag{3.2}$$

Kutakin vapausastetta $i = 1,\cdots,n$ kohti voidaan kirjoittaa samanlainen yhtälö, joten saadaan yhtälöryhmä

$$\left.\begin{array}{c} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \cdots + \delta_{1n}X_n = \hat{\delta}_1 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \cdots + \delta_{2n}X_n = \hat{\delta}_2 \\ \vdots \\ \delta_{n0} + \delta_{n1}X_1 + \cdots + \delta_{nn}X_n = \hat{\delta}_n \end{array}\right\}, \tag{3.3}$$

joka on matriisimuodossa

$$\boxed{\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\delta}_1 - \delta_{10} \\ \hat{\delta}_2 - \delta_{20} \\ \vdots \\ \hat{\delta}_n - \delta_{n0} \end{Bmatrix}.} \tag{3.4}$$



Kuva 3.1: Voimamenetelmän periaate.

Yhtälöryhmä (3.4) on lineaarinen yhtälöryhmä, josta staattisesti määräämättömät suureet $X_i \; i = 1, \cdots, n$ voidaan ratkaista. Tämän voimamenetelmän yhtälöryhmän kerroinmatriisia kutsutaan **joustomatriisiksi**.

3.2 Yhtälöryhmän muodostaminen

Voimamenetelmän yhtälöryhmän (3.4) kerroinmatriisissa ja vakiovektorissa esiintyvät yleistetyt siirtymät δ_{ij}, $i=1,\dots,n,\ j=0,\dots,n$ voidaan mukavimmin laskea yksikkövoimamenetelmää käyttäen. Siirtymä δ_{i0} oli staattisesti määrätyn perusmuodon vapausasteen i yleistetty siirtymä ulkoisesta kuormituksesta. Siirtymä δ_{ij} $(j>1)$ oli siis staattisesti määrätyn perusmuodon vapausasteen i yleistetty siirtymä ykkösen suuruisesta vapausasteen j yleistetystä voimasta $X_j=1$. Seuraavassa esitetään siirtymien δ_{ij}, $i=1,\dots,n,\ j=0,\dots,n$ laskukaavat ristikon, palkin, kehän ja kaaren sekä kaksiakselisesti taivutetun sauvarakenteen tapauksessa.

3.21 Ristikko

Ristikon tapauksessa sovelletaan yksikkövoimamenetelmän kaavaa (2.46), missä sauvaan viittaava summausindeksiä merkitään (*i*:n sijasta) *k*:lla ja sauvojen lukumäärää merkitään (*n*:n sijasta) *m*:llä. Merkitään yksikkövoimasta $X_i=1$ staattisesti määrätyn perusmuodon sauvaan k aiheutuvaa virtuaalista sauvavoimaa S_k^i:llä ja ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvaa todellista sauvavoimaa S_k^0:lla. Yleistetylle siirtymälle δ_{i0} saadaan näin tulos

$$\boxed{\delta_{i0}=\sum_{k=1}^{m}[\frac{S_k^i S_k^0 L_k}{(EA)_k}+S_k^i\varepsilon_{0k}L_k].} \tag{3.5}$$

Merkitään vielä yksikkövoimasta $X_j=1$ aiheutuvaa todellista sauvavoimaa S_k^j:llä. Yleistetylle siirtymälle δ_{ij} saadaan tulos

$$\boxed{\delta_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\frac{S_k^i S_k^j L_k}{(EA)_k}} \tag{3.6}$$

Huomautus: Jos ristikkoon liittyy **jousia**, tulee kaavojen (3.5) ja (3.6) oikeisiin puoliin kutakin jousta kohti jousivoimaa vastaavat lisätermit $J_i J_0/k$ ja $J_i J_j/k$, jolloin kaavat saavat muodon

$$\delta_{i0}=\sum_{k=1}^{m}[\frac{S_k^i S_k^0 L_k}{(EA)_k}+S_k^i\varepsilon_{0k}L_k]+\sum_{\text{jouset}}\frac{J_i J_0}{k}\,,\quad \delta_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\frac{S_k^i S_k^j L_k}{(EA)_k}+\sum_{\text{jouset}}\frac{J_i J_j}{k}\,.$$

3.22 Palkki

Teknistä taivutusteoriaa (Bernoulli-Euler) noudattavan palkin tapauksessa sovelletaan yksikkövoimamenetelmän kaavaa (2.49). Yleistetyille siirtymille δ_{i0} ja δ_{ij} saadaan tulokset

$$\delta_{i0}=\sum_{\text{sauvat}}(\int_0^L\frac{M_i M_0}{EI}dx+\int_0^L M_i\kappa_0 dx),\quad \delta_{ij}=\sum_{\text{sauvat}}\int_0^L\frac{M_i M_j}{EI}dx\,. \tag{3.7}$$

Timoshenko-palkkiteoriaa noudattavan palkin tapauksessa sovelletaan yksikkövoimamenetelmän kaavaa (2.50). Yleistetyille siirtymille δ_{i0} ja δ_{ij} saadaan tulokset

$$\delta_{i0} = \sum_{\text{sauvat}} (\int_0^L \frac{M_i M_0}{EI} dx + \int_0^L \zeta \frac{Q_i Q_0}{GA} dx + \int_0^L M_i \kappa_0 dx), \; \delta_{ij} = \sum_{\text{sauvat}} (\int_0^L \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int_0^L \zeta \frac{Q_i Q_j}{GA} dx) \; . \tag{3.8}$$

Kaavoissa (3.7) ja (3.8) $M_i(x)$, ja $Q_i(x)$ ovat staattisesti määrätyn perusmuodon taivutusmomentti ja leikkausvoima, kun staattisesti määräämättömällä suureella X_i on arvo 1, $M_0(x)$ ja $Q_0(x)$ ovat vastaavat suureet ulkoisesta kuormituksesta sekä $\kappa_0(x)$ on sauvan alkukäyristymä.

Huomautus: Jos palkkiin liittyy **yleistettyjä jousia**, tulee kaavojen (3.7) ja (3.8) oikeisiin puoliin kutakin jousta koti jousivoimaa vastaavat lisätermit $J_i J_0 / k$ ja $J_i J_j / k$, jolloin esimerkiksi kaavat (3.7) saavat muodon

$$\delta_{i0} = \sum_{\text{sauvat}} (\int_0^L \frac{M_i M_0}{EI} dx + \int_0^L M_i \kappa_0 dx) + \sum_{\text{jouset}} \frac{J_i J_0}{k}, \quad \delta_{ij} = \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L \frac{M_i M_j}{EI} dx + \sum_{\text{jouset}} \frac{J_i J_j}{k} \; .$$

3.23 Tasokehä tai kaari

Tasokehän, jonka sauvat noudattavat **teknistä taivutusteoriaa (**$GA = \infty$**)**, tapauksessa sovelletaan yksikkövoimamenetelmän kaavaa (2.53). Yleistetyille siirtymille δ_{i0} ja δ_{ij} saadaan tulokset

$$\begin{aligned} \delta_{i0} &= \sum_{\text{sauvat}} (\int_0^L \frac{N_i N_0}{EA} dx + \int_0^L \frac{M_i M_0}{EI} dx + \int_0^L N_i \varepsilon_0 dx + \int_0^L M_i \kappa_0 dx) dx, \\ \delta_{ij} &= \sum_{\text{sauvat}} (\int_0^L \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int_0^L \frac{M_i M_j}{EI} dx). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Jos kehän sauvat voidaan otaksua **aksiaalisesti jäykiksi** $(EA = \infty)$, sovelletaan yksikkövoimamenetelmän kaavaa (2.54). Yleistetyille siirtymille δ_{i0} ja δ_{ij} saadaan tulokset

$$\delta_{i0} = \sum_{\text{sauvat}} (\int_0^L \frac{M_i M_0}{EI} dx + \int_0^L N_i \varepsilon_0 dx + \int_0^L M_i \kappa_0 dx) dx, \quad \delta_{ij} = \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L \frac{M_i M_j}{EI} dx. \tag{3.10}$$

Kaavoissa (3.9) ja (3.10) $N_i(x)$, ja $M_i(x)$ ovat staattisesti määrätyn perusmuodon normaalivoima ja taivutusmomentti, kun staattisesti määräämättömällä suureella X_i on arvo 1, $N_0(x)$ ja $Q_0(x)$ ovat vastaavat suureet ulkoisesta kuormituksesta sekä $\varepsilon_0(x)$ sauvan akselin alkuvenymä ja $\kappa_0(x)$ on sauvan alkukäyristymä.

Huomautus: Jos kehään tai kaareen liittyy **yleisettyjä jousia**, tulee kaavojen (3.9) ja (3.10) oikeisiin puoliin kutakin jousta kohti jousivoimaa vastaavat lisätermit $J_i J_0 / k$ ja $J_i J_j / k$.

3.24 Väännön ja kaksiakselisen taivutuksen rasittama sauvarakenne

Otaksumme, että rakenne noudattaa **teknistä taivutusteoriaa** $(GA = \infty)$, se on **aksiaalisesti jäykkä** $(EA = \infty)$ ja saa muodonmuutoksia ainoastaan ulkoisesta, **mekaanisesta kuormituksesta**. Soveltamalla yksikkövoimamenetelmän kaavaa (2.61) saadaan yleistetyille siirtymille δ_{i0} ja δ_{ij} tulokset

$$
\begin{aligned}
\delta_{i0} &= \sum_{\text{sauvat}} \left(\int_0^L \frac{M_{ti} M_{t0}}{GI_t} dx + \int_0^L \frac{M_{yi} M_{y0}}{EI_y} dx + \int_0^L \frac{M_{zi} M_{z0}}{EI_z} dx\right), \\
\delta_{ij} &= \sum_{\text{sauvat}} \left(\int_0^L \frac{M_{ti} M_{tj}}{GI_t} dx + \int_0^L \frac{M_{yi} M_{yj}}{EI_y} dx + \int_0^L \frac{M_{zi} M_{zj}}{EI_z} dx\right).
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Jos kysymyksessä on **arina**, jonka sauvojen poikkileikkaukset ovat **pystyakselin suhteen symmetrisiä**, lausekkeiden (3.11) toiset integraalitermit jäävät pois ja yleistetyille siirtymille δ_{i0} ja δ_{ij} saadaan tulokset

$$
\delta_{i0} = \sum_{\text{sauvat}} \left(\int_0^L \frac{M_{ti} M_{t0}}{GI_t} dx + \int_0^L \frac{M_{zi} M_{z0}}{EI_z} dx\right), \quad \delta_{ij} = \sum_{\text{sauvat}} \left(\int_0^L \frac{M_{ti} M_{tj}}{GI_t} dx + \int_0^L \frac{M_{zi} M_{zj}}{EI_z} dx\right). \tag{3.12}
$$

3.3 Voimasuureiden laskeminen

Kun staattisesti määräämättömät suureet X_i, $i=1,\ldots,n$ on yhtälöryhmän (3.4) ratkaisuna saatu, halutut voimasuureet voidaan määrittää **yhteenlaskuperiaatetta soveltaen**. Esimerkiksi pakin tai kehän tapauksessa saadaan

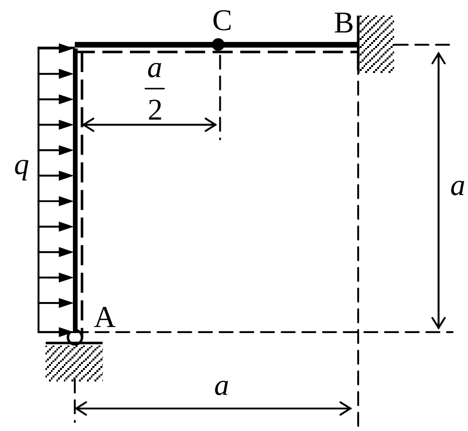
$$\left.\begin{aligned} N(x) &= N_0(x) + N_1(x)X_1 + \cdots + N_n(x)X_n \\ Q(x) &= Q_0(x) + Q_1(x)X_1 + \cdots + Q_n(x)X_n \\ M(x) &= M_0(x) + M_1(x)X_1 + \cdots + M_n(x)X_n \\ J &= J_0 + J_1X_1 + \cdots + J_nX_n \\ R &= R_0 + R_1X_1 + \cdots + R_nX_n \end{aligned}\right\}, \tag{3.13}$$

missä R merkitsee tukireaktiota ja muiden suureiden merkitys on ilmeinen. Ristikon ja kaksiakselisesti taivutetun sauvarakenteen tapauksessa saadaan vastaavanlaiset kaavat.

3.4 Siirtymäsuureiden laskeminen

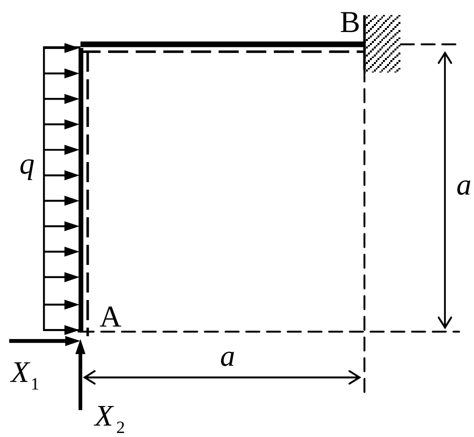
Myös staattisesti määräämättömän rakenteen siirtymät voidaan määrittää yksikkövoimamenetelmällä. Määritettäessä vapausasteen A yleistettyä siirtymää δ_A ao. yleistetyn **yksikkövoiman** $\bar{F}_A = 1$ **aiheuttama virtuaalinen voimatila,** esimerkiksi $\bar{N}(x)$, $\bar{M}(x)$ ja $\bar{J}$ voidaan määrittää **jollekin rakenteen staattisesti määrätylle perusmuodolle** eikä kyseiselle staattisesti määräämättömälle rakenteelle. Tämä helpottaa huomattavasti laskelmia. Asia voidaan perustella seuraavaan tapaan: Ajatellaan, että rakenne on ratkaistu ko. staattisesti määrättyä perusmuotoa käyttäen. Kun staattisesti määräämättömät suureet X_i, $i=1,\ldots,n$ nyt tunnetaan, voidaan ne ymmärtää staattisesti määrättyyn perusmuotoon vaikuttaviksi ulkoisiksi kuormiksi. Probleema voidaan näin ymmärtää ko. staattisesti määrätyn perusmuodon siirtymien määrittämistehtäväksi.

Esimerkki 3.1: Määritetään oheisen tasokehän taivutusmomenttikuvio ja pisteen C pystysiirtymä. Sauvat ovat aksiaalisesti jäykkiä ($EA = \infty$) ja niiden taivutusjäykkyys on EI .

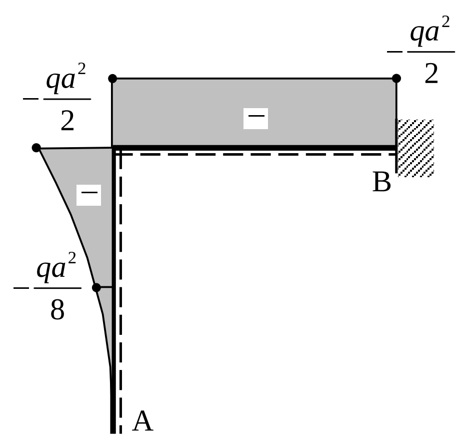


Staattisesti määrätty perusmuoto (SMPM) ja sen taivutusmomenttikuviot:

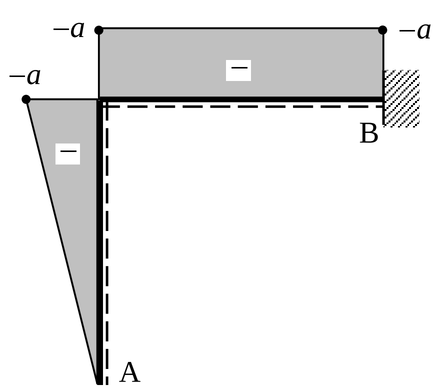
SMPM:



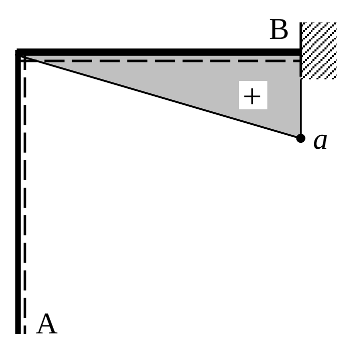
M_0 -kuvio:



M_1 -kuvio:



M_2 -kuvio:



SMPM:n siirtymät ulkoisesta kuormituksesta:

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\sum_{\text{sauvat}}\int_0^a M_1M_0dx=\frac{1}{EI}\{\frac{a}{6}(-a)[2\cdot(-\frac{qa^2}{8})+(-\frac{qa^2}{2})]+a(-a)(-\frac{qa^2}{2})\}=\frac{5}{8}\frac{qa^4}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\sum_{\text{sauvat}}\int_0^a M_2M_0dx=\frac{1}{EI}\cdot\frac{a}{2}\cdot a\cdot(-\frac{qa^2}{2})=-\frac{1}{4}\frac{qa^4}{EI}$$

Joustomatriisin alkiot:

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\sum_{\text{sauvat}}\int_0^a M_1^2dx=\frac{1}{EI}[\frac{a}{3}\cdot(-a)^2+a(-a)^2]=\frac{4}{3}\frac{a^3}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\sum_{\text{sauvat}}\int_0^a M_1M_2dx=\frac{1}{EI}\cdot\frac{a}{2}\cdot a(-a)=-\frac{1}{2}\frac{a^3}{EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\sum_{\text{sauvat}}\int_0^a M_2^2dx=\frac{1}{EI}\cdot\frac{a}{3}\cdot a^2=\frac{1}{3}\frac{a^3}{EI}$$

(Käytettiin integraalitaulukoita.)

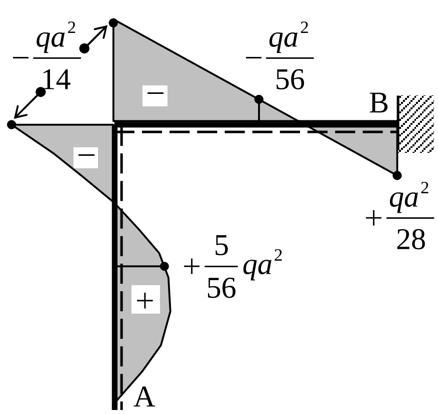
Yhtälöryhmä ja sen ratkaisu:

$$\begin{cases}\delta_1\equiv\delta_{10}+\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0\\ \delta_2\equiv\delta_{20}+\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{5}{8}\frac{qa^4}{EI}+\frac{4}{3}\frac{a^3}{EI}X_1-\frac{1}{2}\frac{a^3}{EI}X_2=0\\ -\frac{1}{4}\frac{qa^4}{EI}-\frac{1}{2}\frac{a^3}{EI}X_1+\frac{1}{3}\frac{a^3}{EI}X_2=0\end{cases}$$

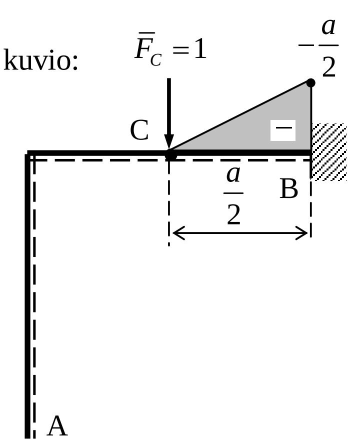
$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{4}{3}X_1-\frac{1}{2}X_2=-\frac{5}{8}qa\\ -\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2=\frac{1}{4}qa\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1=-\frac{3}{7}qa\\ X_2=\frac{3}{28}qa\end{cases}$$

Taivutusmomenttikuvio:

$$M(x)=M_0(x)+M_1(x)X_1+M_2(x)X_2$$



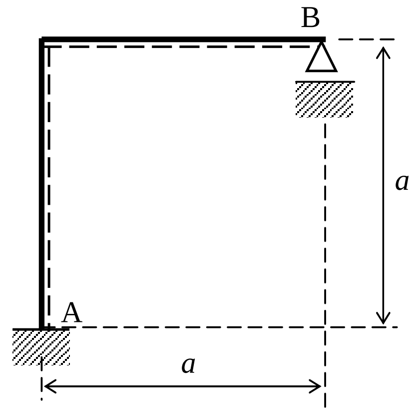
$\bar{M}$ –kuvio:



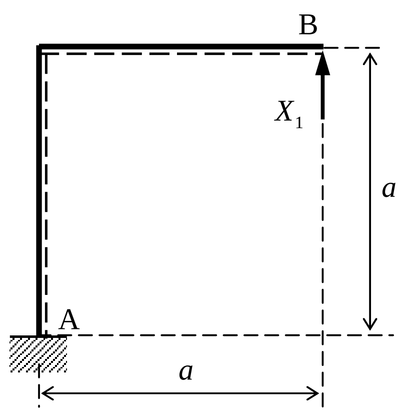
Pisteen C taipuma:

$$\underbrace{\bar{F}_C}_{1}\delta_C=\frac{1}{EI}\sum\int_0^a\bar{M}Mdx=\frac{1}{EI}\frac{a/2}{6}(-\frac{qa^2}{56}+2\frac{qa^2}{28})(-\frac{a}{2})=-\frac{1}{448}\frac{qa^4}{EI}\Rightarrow\underline{\underline{\delta_C=-\frac{1}{448}\frac{qa^4}{EI}}}.$$

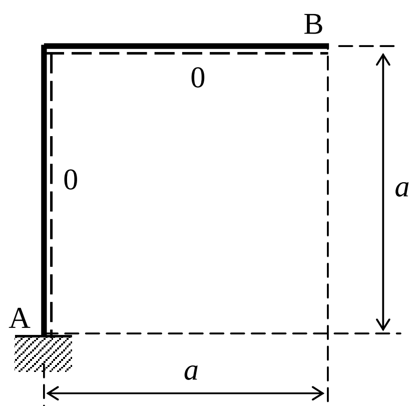
Esimerkki 3.2: Määritä oheisen tasokehän vakiosuuruisesta lämpötilan muutoksesta T aiheutuvat normaalivoima- ja taivutusmomenttikuviot. Sauvat ovat aksiaalisesti jäykkiä ($EA = \infty$) sekä niiden taivutusjäykkyys EI ja pituuden lämpötilakerroin α_T ovat vakioita.



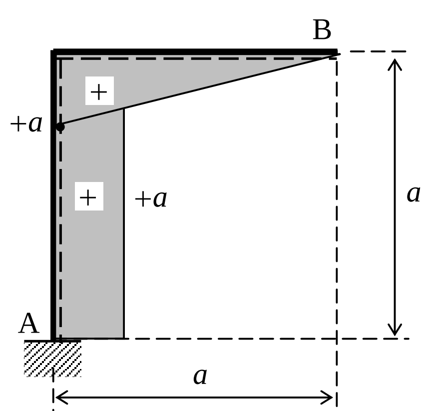
SMPM:



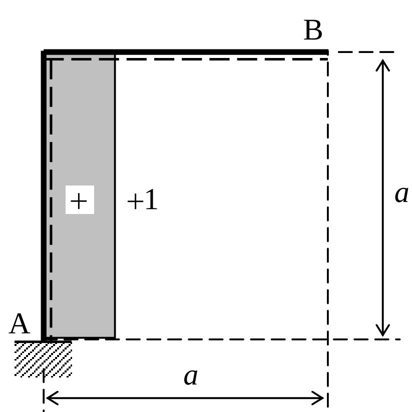
M_0 -kuvio:



M_1 -kuvio:



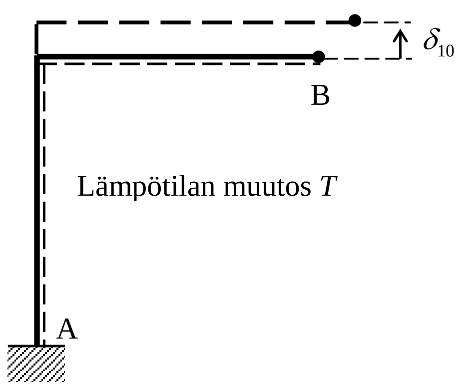
N_1-kuvio:

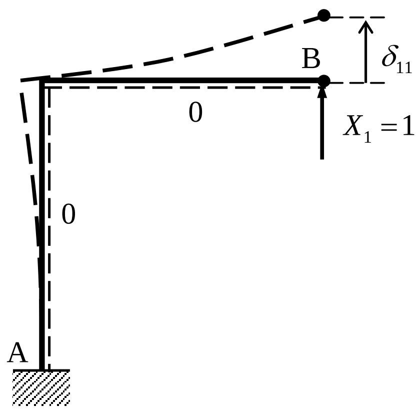


SMPM:n siirtymät:

$$\delta_{10} = \sum_{\text{sauvat}} \left(\int_0^L \frac{M_1 \overbrace{M_0}^{0}}{EI} dx + \int_0^L N_1 \overbrace{\varepsilon_0}^{\alpha_T T} dx + \int_0^L M_1 \overbrace{\kappa_0}^{0} dx\right) = \alpha_T T \int_0^a 1 dx = \alpha_T T a$$

$$\delta_{11} = \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left(a \cdot a^2 + \frac{a}{3} \cdot a^2\right) = \frac{4}{3}\frac{a^3}{EI}$$





Yhtälö ja ratkaisu:

$$\delta_1 \equiv \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

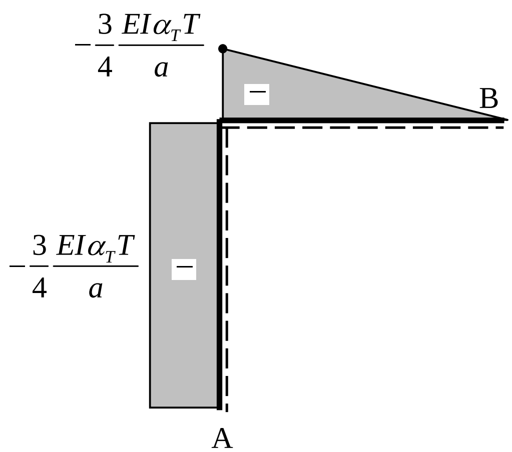
$$\Rightarrow \ \mathrm{X}_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\alpha_T T a}{\frac{4}{3}\frac{qa^3}{EI}} = -\frac{3}{4}\frac{EI\alpha_T T}{a^2}$$

Normaalivoima- ja taivutusmomenttikuviot:

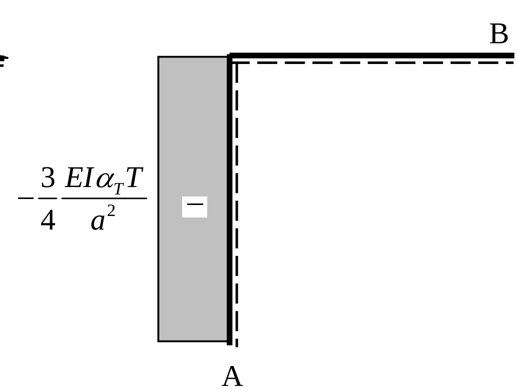
$$N(x) = N_0(x) + X_1 N_1(x) = -\frac{3}{4}\frac{EI\alpha_T T}{a^2} N_1(x)$$

$$M(x) = M_0(x) + X_1 M_1(x) = -\frac{3}{4}\frac{EI\alpha_T T}{a^2} M_1(x)$$

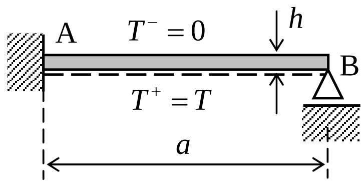
M-kuvio:



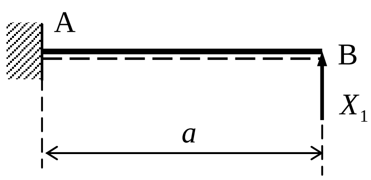
N-kuvio:



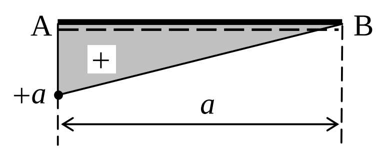
Esimerkki 3.3: Oheisen palkin alapinnan lämpötila saa muutoksen T yläpinnan lämpötilan pysyessä ennallaan. Määritä taivutusmomentti tuella A ja kiertymä tuella B. Palkin taivutusjäykkyys on EI ja pituuden lämpötilakerroin on α_T.



SMPM:



M_1 -kuvio:



Huom.: $M_0 = 0$

SMPM:n siirtymät:

$$\delta_{10} = \int_0^a \left(\frac{M_1 \overbrace{M_0}^{0}}{EI} + M_1 \overbrace{\kappa_0}^{\frac{\alpha_T \Delta T}{h}}\right)dx = \frac{\alpha_T T}{h}\int_0^a M_1 dx = \frac{\alpha_T T}{h}\frac{1}{2}a \cdot a = \frac{1}{2}\frac{\alpha_T T a^2}{h}$$

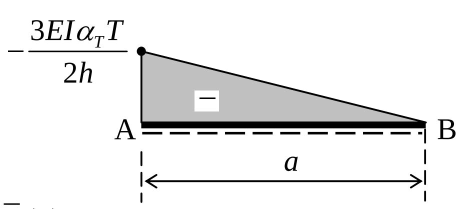
$$\delta_{11} = \int_0^a \frac{M_1^2}{EI}dx = \frac{1}{EI}\cdot\frac{a}{3}\cdot a^2 = \frac{1}{3}\frac{a^3}{EI}$$

Staattisesti määräämättömän suureen määritys:

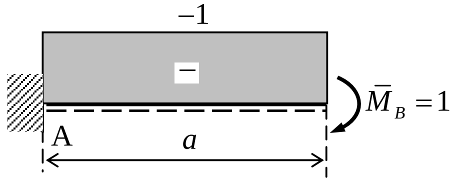
$$\delta_1 \equiv \delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0 \ \Rightarrow\ X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{3EI\alpha_T T}{2ha}$$

Taivutusmomentti:

$$M(x) = \overbrace{M_0(x)}^{0} + M_1(x)X_1 = -\frac{3EI\alpha_T T}{2ha}M_1(x), \quad M_A = -\frac{3EI\alpha_T T}{2ha}\cdot a = \underline{\underline{-\frac{3EI\alpha_T T}{2h}}}$$

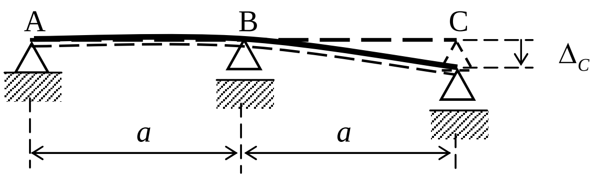


$\bar{M}(x)$:

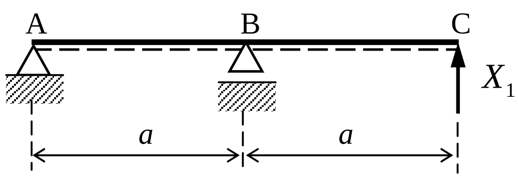


$$\overbrace{\bar{M}_B}^{1}\varphi_B = \frac{1}{EI}\int_0^a \bar{M}M dx + \frac{\alpha_T T}{h}\int_0^a \bar{M}dx = \frac{1}{EI}\frac{1}{2}a(-1)(-\frac{3EI\alpha_T T}{2h}) + \frac{\alpha_T T}{h}a(-1) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}\frac{\alpha_T T a}{h}}}.$$

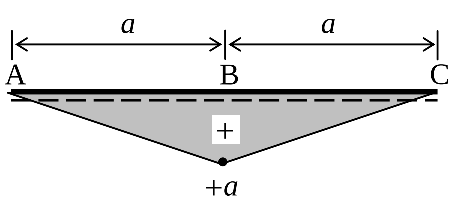
Esimerkki 3.4: Oheisen kolmitukisen palkin oikea tuki C saa painuman Δ_C. Määritä taivutusmomenttikuvio ja pisteen C kiertymä. Palkin taivutusjäykkyys on *EI*.



SMPM:



M_1-kuvio:



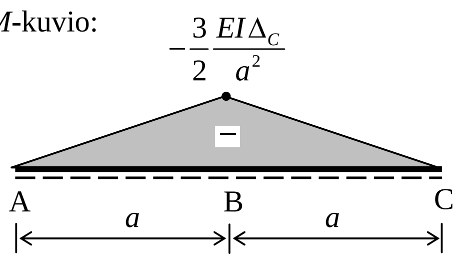
$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\int M_1 \overbrace{M_0}^{0} dx = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\int M_1^2 dx = \frac{1}{EI}\cdot 2\cdot\frac{a}{3}\cdot a^2 = \frac{2}{3}\frac{a^3}{EI}$$

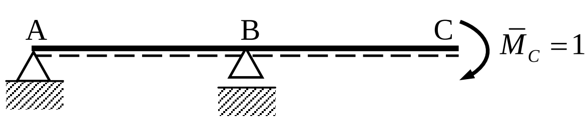
$$\delta_1 \equiv \overbrace{\delta_{10}}^{0} + \delta_{11}X_1 = \overbrace{\hat{\delta}_1}^{\Delta_C}$$

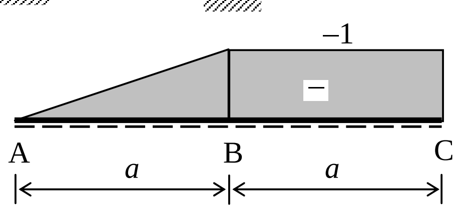
$$\Rightarrow\ X_1 = \frac{\Delta_C}{\delta_{11}} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}\frac{EI\Delta_C}{a^3}}}.$$

M-kuvio:



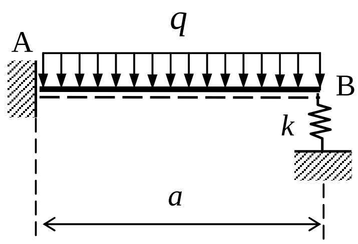
$\bar{M}$ -kuvio:



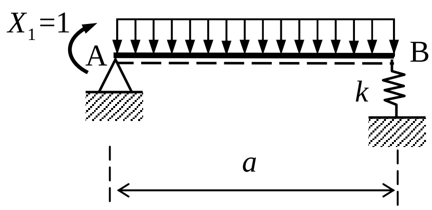


$$\underbrace{\bar{M}_C}_{1}\varphi_C = \frac{1}{EI}\int \bar{M}M dx \Rightarrow\ \varphi_C = \frac{1}{EI}[\frac{1}{3}a(-1)(-\frac{3}{2}\frac{EI\Delta_C}{a^2}) + \frac{1}{2}a(-1)(-\frac{3}{2}\frac{EI\Delta_C}{a^2})] = \underline{\underline{\frac{5}{4}\frac{\Delta_C}{a}}}.$$

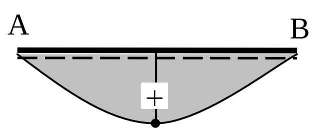
Esimerkki 3.5: Oheinen palkki on vasemmasta päästään A jäykästi kiinnitetty ja oikeasta päästään B jousella tuettu. Palkin taivutusjäykkyys on EI ja jousivakiolla on arvo $k = 3EI/a^3$. Määritä taivutusmomentti tuella A.



SMPM:



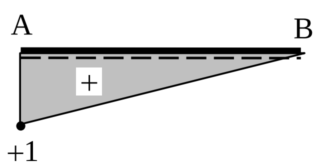
M_0 -kuvio:



$$+\frac{qa^2}{8}$$

$$J_0 = -\frac{qa}{2}$$

M_1 -kuvio:



$$J_1 = -\frac{1}{a}$$

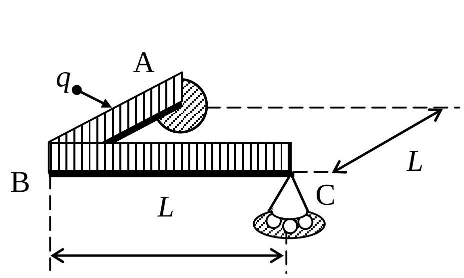
$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\int_0^a M_1 M_0 dx + \frac{J_1 J_0}{k} = \frac{1}{EI}\frac{a}{3}\cdot 1\cdot\frac{qa^2}{8} + \frac{-\frac{1}{a}\cdot(-\frac{qa}{2})}{3\frac{EI}{a^3}} = \frac{5}{24}\frac{qa^3}{EI}$$

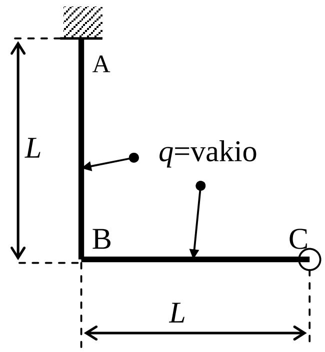
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^a M_1^2 dx + \frac{J_1^2}{k} = \frac{1}{EI}\frac{a}{3}\cdot 1^2 + \frac{(-\frac{1}{a})^2}{3\frac{EI}{a^3}} = \frac{2}{3}\frac{a}{EI}$$

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \;\Rightarrow\; X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{5}{24}\frac{qa^3}{EI}}{\frac{2}{3}\frac{a}{EI}} = \underline{\underline{-\frac{5}{16}qa^3}}$$

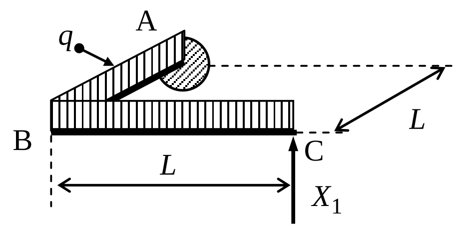
$$M_A = X_1 = \underline{\underline{-\frac{5}{16}qa^2}}.$$

Esimerkki 3.6: Oheinen arina on päästä A jäykästi kiinnitetty ja päästä C tuettu pallonivelellä, joka pääsee kitkattomasti liukumaan vaakatasossa. Määritä vääntömomentti tuella A, kun $GI_t = 4/5 \cdot EI_z$.

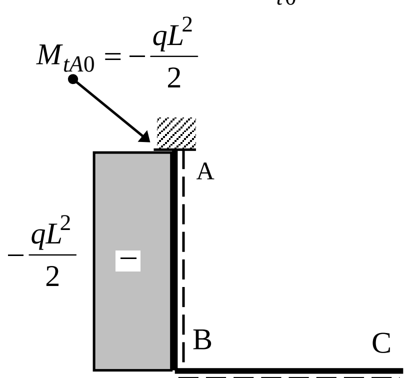




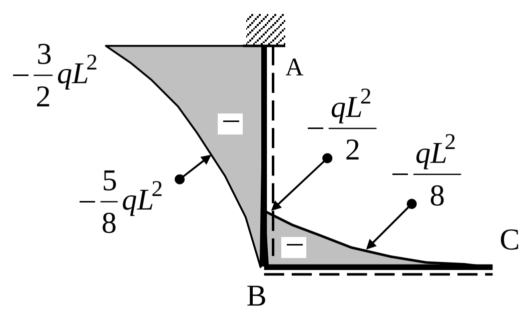
Staattisesti määrätty perusmuoto (SMPM):



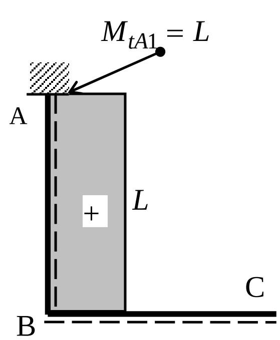
Vääntömomentti M_{t0}



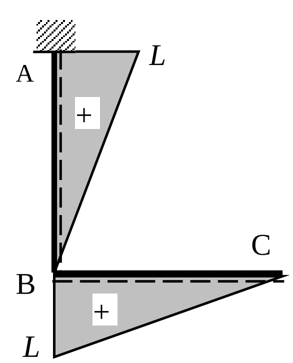
Taivutusmomentti M_{z0}



Vääntömomentti M_{t1}



Taivutusmomentti M_{z1}



Saadaan:
(Käytetään integrointitaulukkoa.)

$$\delta_{10} = \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L \left(\frac{M_{t1}M_{t0}}{GI_t} + \frac{M_{z1}M_{z0}}{EI_z}\right)dx$$

$$= \frac{1}{GI_t}\sum_{\text{sauvat}} \int_0^L M_{t1}M_{t0}dx + \frac{1}{EI_z}\sum_{\text{sauvat}} \int_0^L M_{z1}M_{z0}dx$$

$$= \frac{1}{GI_t} L \cdot L \cdot \left(-\frac{qL^2}{2}\right) + \frac{1}{EI_z}\left\{\frac{L}{6}L\left[\left(-\frac{3}{2}qL^2\right) + 2\left(-\frac{5}{8}qL^2\right)\right]\right.$$

$$\left. + \frac{L}{6}L\left[\left(-\frac{qL^2}{2}\right) + 2\left(-\frac{qL^2}{8}\right)\right]\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{qL^4}{GI_t} - \frac{7}{12}\frac{L^4}{EI_z} = -\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} + \frac{7}{12}\right)\frac{L^4}{EI_z}$$

$$= \underline{-\frac{29}{24}\frac{L^4}{EI_z}}$$

$$\delta_{11} = \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L \left(\frac{M_{t1}M_{t1}}{GI_t} + \frac{M_{z1}M_{z1}}{EI_z}\right)dx = \frac{1}{GI_t}\sum_{\text{sauvat}} \int_0^L M_{t1}^2 dx + \frac{1}{EI_z}\sum_{\text{sauvat}} \int_0^L M_{z1}^2 dx$$

$$= \frac{1}{GI_t} L \cdot L^2 + \frac{1}{EI_z}\left(\frac{L}{3}L^2 + \frac{L}{3}L^2\right) = \frac{L^3}{GI_t} + \frac{2}{3}\frac{L^3}{EI_z} = \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{3}\right)\frac{L^3}{EI_z}$$

$$= \underline{\frac{23}{12}\frac{L^3}{EI_z}}$$

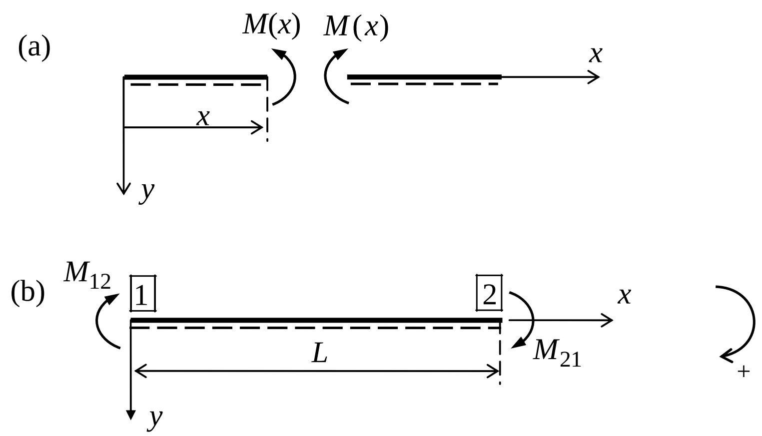
$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0 \;\Rightarrow\; X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{29}{46}qL.$$

Vääntömomentille tuella A saadaan nyt:

$$M_{tA} = M_{tA0} + X_1 M_{tA1} = -\frac{qL^2}{2} + \frac{29}{46}qL \cdot L = \underline{\underline{\frac{3}{23}}}qL^2 \approx 0{,}130qL^2.$$

4. MOMENTTIMENETELMÄ JA KULMANMUUTOS-MENETELMÄ

4.1 Keskeiset voima- ja siirtymäsuureet



Kuva 4.1: Positiiviset suunnat: (a) taivutusmomentti (b) sauvanpäämomentit

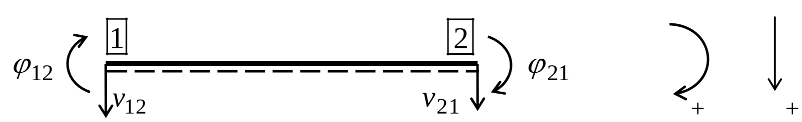
Seuraavassa käsiteltävissä **momenttimenetelmässä** ja **kulmanmuutosmenetelmässä** keskeiset voimasuureet ovat ns. **sauvanpäämomentit.** Sauvanpäämomenttien M_{12} ja M_{21} positiiviset suunnat on esitetty kuvassa 4.1 (b). Kuvassa 4.1 (a) on vertailun vuoksi esitetty taivutusmomentin $M(x)$ positiiviset suunnat. Nähdään, että

$$\boxed{M_{12} = M(0), \quad M_{21} = -M(L).} \tag{4.1}$$

Sauvanpäämomenttien lisäksi käytetään myös ns. **sauvanpäänormaalivoimia** N_{12} ja N_{21} sekä **sauvanpääleikkausvoima** Q_{12} ja Q_{21}**.** Näiden voimasuureiden positiiviset suunnat määritellään tavanomaiseen tapaan, ts.

$$N_{12} = N(0), \quad N_{21} = N(L),$$
$$Q_{12} = Q(0), \quad Q_{21} = Q(L).$$

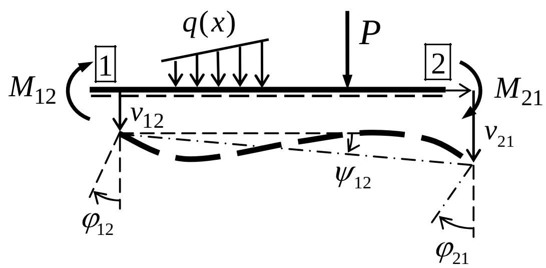
Momentti- ja kulmanmuutosmenetelmissä esiintyvät keskeiset siirtymäsuureet ovat ns. **sauvanpääkiertymät** φ_{12} ja φ_{21}. Lisäksi käytetään ns. **sauvanpäätaipumia** v_{12} ja v_{21}. (Jälkimmäisissä käytetään usein vain ensimmäistä, ko. sauvan päätä vastaavaa alaindeksiä.) Näiden siirtymäsuureiden positiiviset suunnat on esitetty kuvassa 4.2.



Kuva 4.2: Sauvanpääkiertymien ja -taipumien positiiviset suunnat

Kolmas keskeinen siirtymäsuure sauvanpääkiertymien lisäksi on ns. **sauvakiertymä** $\psi_{12} = \psi_{21}$, jolla ymmärretään sauvan päiden 1 ja 2 välisen janan kiertymää. Se määritellään kaavalla (vrt. kuva 4.3)

$$\boxed{\psi_{12} = \psi_{21} = \frac{v_{21} - v_{12}}{L}.} \tag{4.2}$$



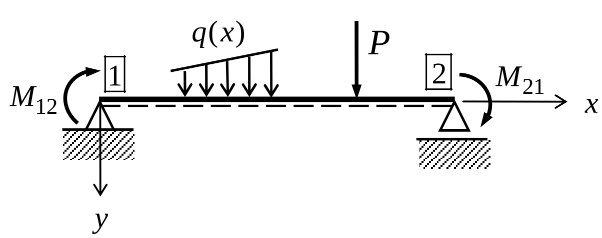
Kuva 4.3: Sauvan deformaatio

Momenttimenetelmässä sauvojen otaksutaan noudattavan **teknistä taivutusteoriaa** ($\gamma = 0$, $GA = \infty$) ja olevan **aksiaalisesti jäykkiä** ($EA = \infty$).

4.2 Momenttimenetelmän yhtälöt

Tarkastellaan sauvaa, jota kuormittaa ulkoinen kuormitus $q(x)$, P, jne. sekä sauvanpäämomentit M_{12} ja M_{21}, ja joka deformoituu kuvan 4.3 mukaisesti. Pyritään määrittämään sauvanpääkiertymien φ_{12} ja φ_{21} lausekkeet ilmaistuina sauvanpäämomenttien ja sauvakiertymän ψ_{12} avulla. Probleema on mukava ratkaista käyristymäpintamenetelmää (momenttipintamenetelmää) käyttäen.

Sauvan deformaatio muodostuu jäykän kappaleen siirtymästä, jossa sauvan päät $\boxed{1}$ ja $\boxed{2}$ siirtyvät loppuasemiinsa sekä puhtaasta taivutuksesta (vrt. kuva 4.3). Koska jäykän kappaleen siirtymästä ei aiheudu rasituksia, voidaan se sauvan leikkausrasituksia määritettäessä jättää huomiotta ja tarkastella vapaasti tuettua palkkia (kuva 4.4), jota kuormittaa ulkoinen kuormitus ja sauvanpäämomentit M_{12} ja M_{21}.



Kuva 4.4: Vapaasti tuettu palkki

Merkitään tarkasteltavan vapaasti tuetun palkin taivutusmomenttia ulkoisesta kuormituksesta $M_0(x)$. Se on erilaisissa kuormitustapauksissa helppo määrittää. Palkin sauvanpäämomenteista aiheutuva taivutusmomenttijakauma on helppo päätellä. Tämä taivutusmomentin arvot sauvan päissä ovat M_{12} ja $-M_{21}$ ja se jakautuu niiden välillä lineaarisesti. Taivutusmomentti molemmista kuormitustapauksista saadaan yhteenlaskuperiaatteella ja sille saadaan

$$M(x) = M_{12}(1-\frac{x}{L}) - M_{21}\frac{x}{L} + M_0(x).,$$

Palkin käyristymä on siten

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI} + \kappa_0(x) = \frac{M_{12}}{EI}(1-\frac{x}{L}) - \frac{M_{21}}{EI}\frac{x}{L} + \frac{M_0(x)}{EI} + \kappa_0(x)$$

missä $\kappa_0(x)$ on palkin alkukäyristymä. Seuraavassa tarkastelussa palkin ei tarvitse olla tasajäykkä ($EI = \text{vakio}$), vaan taivutusjäykkyys voi vaihdella pitkin palkin pituutta ts. $EI = EI(x)$. Tätä riippuvuutta ei kuitenkaan ole seuraavassa johdossa merkitty näkyviin.

Sovelletaan käyristymäpintamenetelmän yhtälöitä välillä $\boxed{1}-\boxed{2}$. Käyristymäpinnan pinta-alaksi $\mathcal{A}_{12}$ ja momentiksi $\mathcal{M}_{12}$ pisteen $\boxed{2}$ suhteen saadaan

$$\mathcal{A}_{12} = \int_0^L \kappa(x)dx = M_{12}\int_0^L \frac{1}{EI}(1-\frac{x}{L})dx - M_{21}\int_0^L \frac{1}{EI}\frac{x}{L}dx + \int_0^L [\frac{M_0(x)}{EI} + \kappa_0(x)]dx,$$

$$\mathcal{M}_{12} = \int_0^L \kappa(x)(\overbrace{x_2}^{L} - x)dx$$

$$= L\{M_{12}\int_0^L \frac{1}{EI}(1-\frac{x}{L})^2 dx - M_{21}\int_0^L \frac{1}{EI}\frac{x}{L}(1-\frac{x}{L})dx + \int_0^L [\frac{M_0(x)}{EI} + \kappa_0(x)](1-\frac{x}{L})dx\}.$$

Tarkastellaan nyt kuvan 4.3 palkkia. Soveltamalla ensin käyristymäpintamenetelmän toista yhtälöä saadaan

$$v_{21} = v_{12} + \varphi_{12}(\overbrace{x_2 - x_1}^{L}) - \mathcal{M}_{12} \;\Rightarrow\; \varphi_{12} = \frac{\mathcal{M}_{12}}{L} + \frac{v_{21} - v_{12}}{L} = \frac{\mathcal{M}_{12}}{L} + \psi_{12} \;\Rightarrow$$

$$\varphi_{12} = M_{12}\int_0^L \frac{1}{EI}(1-\frac{x}{L})^2 dx - M_{21}\int_0^L \frac{1}{EI}\frac{x}{L}(1-\frac{x}{L})dx + \psi_{12} + \int_0^L [\frac{M_0(x)}{EI} + \kappa_0(x)](1-\frac{x}{L})dx$$

ja sitten käyristymäpintamenetelmän ensimmäistä yhtälöä saadaan

$$\varphi_{21} = \varphi_{12} - \mathcal{A}_{12}$$

$$= M_{12}\int_0^L \frac{1}{EI}(1-\frac{x}{L})^2 dx - M_{21}\int_0^L \frac{1}{EI}\frac{x}{L}(1-\frac{x}{L})dx + \psi_{12} + \int_0^L [\frac{M_0}{EI} + \kappa_0(x)](1-\frac{x}{L})dx$$

$$- M_{12}\int_0^L \frac{1}{EI}(1-\frac{x}{L})dx + M_{21}\int_0^L \frac{1}{EI}\frac{x}{L}dx - \int_0^L [\frac{M_0(x)}{EI} + \kappa_0(x)]dx \;\Rightarrow$$

$$\varphi_{21}=-M_{12}\int_0^L \frac{1}{EI}\frac{x}{L}(1-\frac{x}{L})dx+M_{21}\int_0^L \frac{1}{EI}(\frac{x}{L})^2 dx+\psi_{12}-\int_0^L [\frac{M_0(x)}{EI}+\kappa_0(x)]\frac{x}{L}dx\ .$$

Saadut kiertymien lausekkeet voidaan esittää muodossa

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_{12}&=\alpha_{12}M_{12}-\beta_{12}M_{21}+\psi_{12}+\alpha_{12}^0,\\ \varphi_{21}&=\alpha_{21}M_{21}-\beta_{21}M_{12}+\psi_{21}+\alpha_{21}^0,\end{aligned}} \tag{4.3}$$

jossa suureita

$$\boxed{\alpha_{12}=\int_0^L \frac{(1-\frac{x}{L})^2}{EI(x)}\mathrm{d}x,\quad \alpha_{21}=\int_0^L \frac{(\frac{x}{L})^2}{EI(x)}\mathrm{d}x,\quad \beta_{12}=\beta_{21}=\int_0^L \frac{(1-\frac{x}{L})\frac{x}{L}}{EI(x)}dx} \tag{4.4}$$

kutsutaan momenttimenetelmän **sauvavakioiksi**, suureita

$$\boxed{\alpha_{12}^0=\int_0^L (1-\frac{x}{L})[\frac{M_0(x)}{EI(x)}+\kappa_0(x)]dx,\quad \alpha_{21}^0=-\int_0^L \frac{x}{L}[\frac{M_0(x)}{EI(x)}+\kappa_0(x)]dx} \tag{4.5}$$

momenttimenetelmän **kuormitustermeiksi.**

Tulos (4.3) esitetään usein myös yhdellä kaavalla

$$\boxed{\varphi_{ij}=\alpha_{ij}M_{ij}-\beta_{ij}M_{ji}+\psi_{ij}+\alpha_{ij}^0,\quad i\neq j,} \tag{4.6}$$

missä i ja j ovat sauvan päiden numerot siten, että i on tarkasteltavan pään numero ja j on vastakkaisen pään numero.

Tasajäykän sauvan ($EI=\text{vakio}$) tapauksessa, sauvavakioille saadaan

$$\alpha_{12}=\frac{1}{EI}\int_0^L (1-\frac{x}{L})^2\mathrm{d}x=\frac{L}{EI}\int_0^1 (1-\xi)^2\mathrm{d}\xi=\frac{L}{EI}\int_0^1 (1-2\xi+\xi^2)\mathrm{d}\xi=\frac{L}{EI}\Big|_0^1(\xi-\xi^2+\frac{\xi^3}{3})$$

$$=\underline{\underline{\frac{L}{3EI}}},$$

$$\alpha_{21}=\frac{1}{EI}\int_0^L (\frac{x}{L})^2\mathrm{d}x=\frac{L}{EI}\int_0^1 \xi^2\mathrm{d}\xi=\frac{L}{EI}\Big|_0^1\frac{\xi^3}{3}=\underline{\underline{\frac{L}{3EI}}},$$

$$\beta_{12}=\beta_{21}=\frac{1}{EI}\int_0^L (1-\frac{x}{L})\frac{x}{L}\mathrm{d}x=\frac{L}{EI}\int_0^1 (1-\xi)\xi\mathrm{d}\xi=\frac{L}{EI}\int_0^1 (\xi-\xi^2)\mathrm{d}\xi=\frac{L}{EI}\Big|_0^1(\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3})$$

$$=\underline{\underline{\frac{L}{6EI}}}.$$

(Edellisissä kaavoissa vaihdettiin integrointimuuttujaksi $\xi = x / L$, jolloin $\mathrm{d}x = L\mathrm{d}\xi$ ja integroimisrajoiksi tuli 0 ja 1.)

Tasajäykän sauvan tapauksessa ($EI = \text{vakio}$), **momenttimenetelmän sauvavakiot** ovat siis

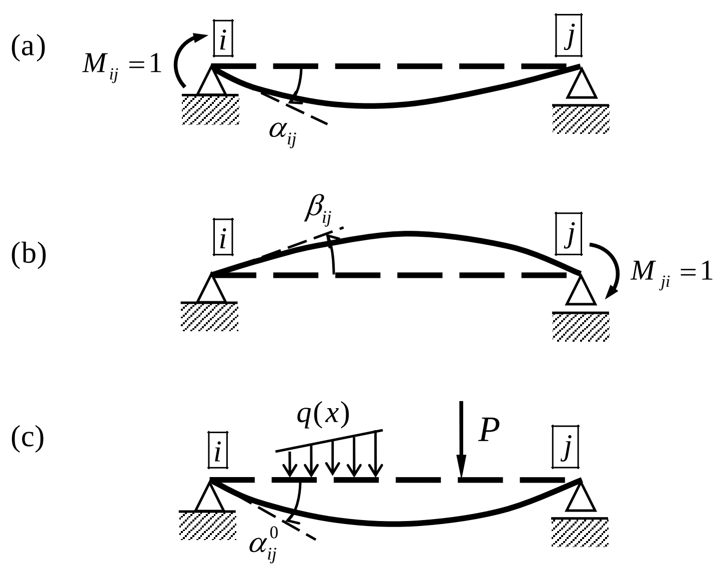
$$\boxed{\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{L}{3EI}, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = \frac{L}{6EI}.} \tag{4.7}$$

Momenttimenetelmän yhtälöt tasajäykälle sauvalle voidaan näin esittää muodossa

$$\boxed{\varphi_{ij} = \frac{L}{3EI} M_{ij} - \frac{L}{6EI} M_{ji} + \psi_{ij} + \alpha_{ij}^0, \quad i \neq j.} \tag{4.8}$$

Taulukossa 4.1 on esitetty **momenttimenetelmän kuormitustermejä tasajäykälle sauvalle** ($EI = \text{vakio}$) tavallisimmissa kuormitustapauksissa.

Seuraavassa tarkastellaan momenttimenetelmän sauvavakioiden ja kuormitustermien **fysikaalista merkitystä.** Tarkastellaan päistään **vapaasti tuettua palkkia** $\boxed{i}$ **-** $\boxed{j}$**.** Tällöin $v_i = v_j = \psi_{ij} = 0$. Kuormitetaan ensin palkkia sen päästä $\boxed{i}$ ykkösen suuruisella sauvanpäämomentilla. Tällöin $M_{ij} = 1$, $M_{ji} = 0$ ja $\alpha_{ij}^0 = \alpha_{ji}^0 = 0$. Kaavasta (4.6) seuraa $\varphi_{ij} = \alpha_{ij}$ (vrt. kuva 4.5a). Kuormitetaan sitten palkkia sen päästä $\boxed{j}$ ykkösen suuruisella sauvanpäämomentilla. Tällöin $M_{ij} = 0$, $M_{ji} = 1$ ja $\alpha_{ij}^0 = \alpha_{ji}^0 = 0$. Kaavasta (4.6) seuraa $\varphi_{ij} = -\beta_{ij}$ (vrt. kuva 4.5b). Kuormitetaan lopuksi palkkia ulkoisella kuormituksella ja/tai annetaan sille alkukäyristymä. Tällöin $M_{ij} = 0$, $M_{ji} = 0$ ja $\alpha_{ij}^0 \neq 0$. Kaavasta (4.6) seuraa $\varphi_{ij} = \alpha_{ij}^0$ (vrt. kuva 4.5c).

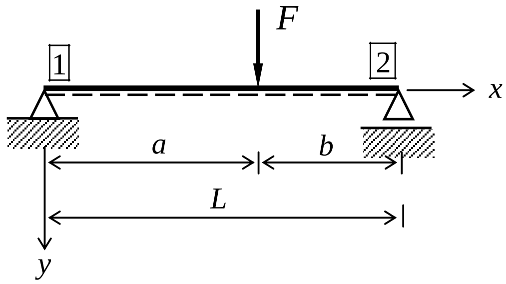


Kuva 4.5: Sauvavakioiden ja kuormitustermien fysikaalinen merkitys:
(a) sauvavakiot α_{ij}, (b) sauvavakio β_{ij} (c) ja kuormitustermit α_{ij}^0.

Sauvavakioille α_{ij} ja β_{ij} sekä kuormitustermille α_{ij}^{0} saadaan näin seuraavat fysikaaliset tulkinnat: Sauvavakio α_{ij} on **vapaasti tuetun palkin pään** $\boxed{i}$ **kiertymä samassa päässä** $\boxed{i}$ **vaikuttavasta ykkösen suuruisesta momentista** $M_{ij} = 1$. Sauvavakio β_{ij} on **vapaasti tuetun palkin pään** $\boxed{i}$ **kiertymä vastakkaisessa päässä** $\boxed{j}$ **vaikuttavasta ykkösen suuruisesta momentista** $M_{ji} = 1$ (kuitenkin siten, että sen positiivinen suunta momentin suuntaan nähden vastakkainen). Kuormitustermi α_{ij}^{0} on **vapaasti tuetun palkin pään** $\boxed{i}$ **kiertymä palkilla vaikuttavasta ulkoisesta kuormituksesta ja/tai alkukäyristymästä**.

Seuraavissa esimerkeissä tarkastellaan momenttimenetelmän sauvavakioiden ja kuormitustermien määrittämistä.

Esimerkki 4.1: Johda tasajäykän palkin ($EI = \text{vakio}$) momenttimenetelmän kuormitustermien arvot, kun sitä kuormittaa pistekuorma F pisteessä, jonka etäisyydet sauvan päistä ovat a ja b.



Ratkaisu:

Vapaasti tuetun palkin tukireaktiolle päässä $\boxed{1}$ saadaan helposti

$$R_1 = \frac{b}{L}F$$

ja taivutusmomentille

$$M_0(x) = R_1 x = Fb\frac{x}{L},\ \text{kun } x \le a,$$

$$M_0(x) = R_1 x - F(x-a) = \frac{b}{L}Fx - F(x-a) = Fa(1-\frac{x}{L}),\ \text{kun } x \ge a.$$

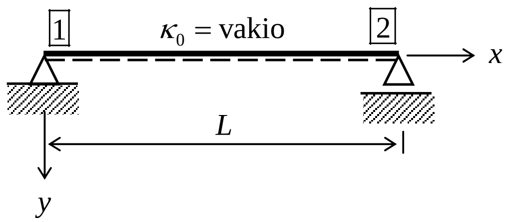
Kuormitustermeille saadaan

$$\begin{aligned}
\alpha_{12}^0 &= \frac{1}{EI}\int_0^L (1-\frac{x}{L})M_0(x)dx = \frac{1}{EI}[Fb\int_0^a (1-\frac{x}{L})\frac{x}{L}dx + Fa\int_a^L (1-\frac{x}{L})^2 dx] \\
&= \frac{FL}{EI}[b\int_0^{a/L}(\xi-\xi^2)d\xi + a\int_{a/L}^1 (1-2\xi+\xi^2)dx] = \frac{FL}{EI}[b\Big|_0^{a/L}(\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}) + a\Big|_{a/L}^1(\xi-\xi^2+\frac{\xi^3}{3})] \\
&= \frac{FL}{EI}[b(\frac{a^2}{2L^2}-\frac{a^3}{3L^3}) + a(\frac{1}{3}-\frac{a}{L}+\frac{a^2}{L^2}-\frac{a^3}{3L^3})] = \underline{\underline{\frac{Fab}{6EIL}(b+L)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{21}^0 &= -\frac{1}{EI}\int_0^L \frac{x}{L}M_0(x)dx = -\frac{1}{EI}[Fb\int_0^a (\frac{x}{L})^2 dx + Fa\int_a^L \frac{x}{L}(1-\frac{x}{L})dx] \\
&= -\frac{L}{EI}[Fb\int_0^{a/L}\xi^2 d\xi + Fa\int_{a/L}^1 (\xi-\xi^2)d\xi] = -\frac{FL}{EI}[b\Big|_0^{a/L}\frac{\xi^3}{3} + a\Big|_{a/L}^1(\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3})] \\
&= -\frac{FL}{EI}[b\frac{a^3}{3L^3} + a(\frac{1}{6}-\frac{a^2}{2L^2}+\frac{a^3}{3L^3})] = \underline{\underline{-\frac{Fab}{6EIL}(L+a)}}
\end{aligned}$$

Nähdään, että saatiin sama tulos kuin taulukossa 4.1 (N:o 7).

Esimerkki 4.2: Johda momenttimenetelmän kuormitustermien arvot, kun sauva saa vakiosuuruisen alkukäyristymän ($\kappa_0 = \text{vakio}$). Saadaan



Ratkaisu:

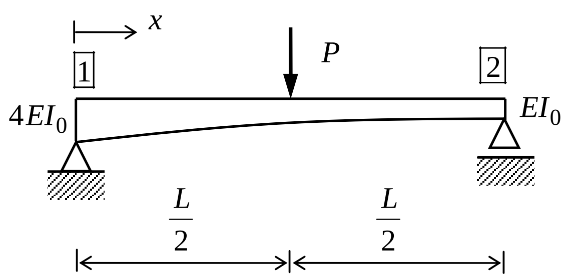
$$\alpha_{12}^0 = \kappa_0 \int_0^L (1 - \frac{x}{L}) \mathrm{d}x = \kappa_0 \Big|_0^L (x - \frac{x^2}{2L}) = \underline{\underline{\frac{\kappa_0 L}{2}}},$$

$$\alpha_{21}^0 = -\kappa_0 \int_0^L \frac{x}{L} \mathrm{d}x = -\kappa_0 \Big|_0^L \frac{x^2}{2L} = \underline{\underline{-\frac{\kappa_0 L}{2}}}.$$

Nähdään, että saatiin sama tulos kuin taulukossa 4.1 (N:o 11).

Esimerkki 4.3: Määritä momenttimenetelmän sauvavakiot ja kuormitustermit kuvan E4.3 jäykkyydeltään muuttuvalle sauvalle, jota kuormittaa pistekuorma P palkin keskellä. Palkin taivutusjäykkyydellä on lauseke

$$EI(x) = \frac{4EI_0}{1+3\dfrac{x}{L}}.$$



Kuva E4.3: Taivutusjäykkyydeltään muuttuva pistekuorman kuormittama sauva.

Ratkaisu:

Sauvavakioille saadaan aluksi

$$\alpha_{12} = \int_0^L \frac{(1-\frac{x}{L})^2}{EI}dx = \frac{1}{4EI_0}\int_0^L (1-\frac{x}{L})^2(1+3\frac{x}{\mathrm{L}})dx,$$

$$\alpha_{21} = \int_0^L \frac{(\frac{x}{L})^2}{EI}dx = \frac{1}{4EI_0}\int_0^L (\frac{x}{L})^2(1+3\frac{x}{\mathrm{L}})dx,$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \int_0^L \frac{(1-\frac{x}{L})\frac{x}{L}}{EI}dx = \frac{1}{4EI_0}\int_0^L (1-\frac{x}{L})\frac{x}{L}(1+3\frac{x}{\mathrm{L}})dx.$$

Vaihdetaan integrointimuuttujaksi $\xi = x/L$ ($\Rightarrow dx = Ld\xi$), jolloin saadaan

$$\alpha_{12} = \frac{L}{4EI_0}\int_0^1 (1-\xi)^2(1+3\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{L}{4EI_0}\int_0^1 (1+\xi-5\xi^2+3\xi^3)\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{L}{4EI_0}\Big|_0^1(\xi+\frac{\xi^2}{2}-\frac{5}{3}\xi^3+\frac{3}{4}\xi^4) = \frac{L}{4EI_0}(1+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+\frac{3}{4}) = \underline{\underline{\frac{7L}{48EI_0}}},$$

$$\alpha_{21} = \frac{L}{4EI_0}\int_0^1 \xi^2(1+3\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{L}{4EI_0}\int_0^1 (\xi^2+3\xi^3)\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{L}{4EI_0}\Big|_0^1(\frac{\xi^3}{3}+\frac{3}{4}\xi^4) = \frac{L}{4EI_0}(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}) = \underline{\underline{\frac{13L}{48EI_0}}},$$

$$\beta_{12}=\beta_{21}=\frac{L}{4EI_0}\int_0^1(1-\xi)\xi(1+3\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{L}{4EI_0}\int_0^1(\xi+2\xi^2-3\xi^3)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{L}{4EI_0}\Big|_0^1(\frac{\xi^2}{2}+\frac{2}{3}\xi^3-\frac{3}{4}\xi^4)=\frac{L}{4EI_0}(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4})=\underline{\underline{\frac{5L}{48EI_0}}}.$$

Taivutusmomentille $M_0(x)$ saadaan helposti

$$M_0(x)=\frac{P}{2}x,\quad 0\le x\le\frac{L}{2},$$
$$M_0(x)=\frac{P}{2}(L-x),\quad \frac{L}{2}\le x\le L,$$

joten kuormitustermeille saadaan

$$\alpha_{12}^0=\int_0^L(1-\frac{x}{L})\frac{M_0}{EI}\mathrm{d}x=\frac{PL}{8EI_0}\left[\int_0^{L/2}(1-\frac{x}{L})\frac{x}{L}(1+3\frac{x}{\mathrm{L}})\mathrm{d}x+\int_{L/2}^{L}(1-\frac{x}{L})^2(1+3\frac{x}{\mathrm{L}})\mathrm{d}x\right],$$

$$\alpha_{21}^0=-\int_0^L\frac{x}{L}\frac{M_0}{EI}\mathrm{d}x=-\frac{PL}{8EI_0}\left[\int_0^{L/2}(\frac{x}{L})^2(1+3\frac{x}{\mathrm{L}})\mathrm{d}x+\int_{L/2}^{L}(1-\frac{x}{L})\frac{x}{L}(1+3\frac{x}{\mathrm{L}})\mathrm{d}x\right]$$

ja integrointimuuttujien vaihdon jälkeen

$$\alpha_{12}^0=\frac{PL^2}{8EI_0}[\int_0^{1/2}(\xi+2\xi^2-3\xi^3)\mathrm{d}x+\int_{1/2}^{1}(1+\xi-5\xi^2+3\xi^3)\mathrm{d}x]$$

$$=\frac{PL^2}{8EI_0}[\Big|_0^{1/2}(\frac{\xi^2}{2}+\frac{2}{3}\xi^3-\frac{3}{4}\xi^4)+\Big|_{1/2}^{1}(\xi+\frac{\xi^2}{2}-\frac{5}{3}\xi^3+\frac{3}{4}\xi^4)]$$

$$=\frac{PL^2}{8EI_0}(\frac{1}{8}+\frac{2}{24}-\frac{3}{64}+1+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{5}{24}-\frac{3}{64})=\underline{\underline{\frac{3}{64}\frac{PL^2}{EI_0}}},$$

$$\alpha_{21}^0=-\frac{PL^2}{8EI_0}[\int_0^{1/2}(\xi^2+3\xi^3)\mathrm{d}x+\int_{1/2}^{1}(\xi+2\xi^2-3\xi^3)\mathrm{d}x]$$

$$=-\frac{PL^2}{8EI_0}[\Big|_0^{1/2}(\frac{\xi^3}{3}+\frac{3}{4}\xi^4)+\Big|_{1/2}^{1}(\frac{\xi^2}{2}+\frac{2}{3}\xi^3-\frac{3}{4}\xi^4)]$$

$$=-\frac{PL^2}{8EI_0}(\frac{1}{24}+\frac{3}{64}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-\frac{2}{24}+\frac{3}{64})=\underline{\underline{-\frac{11}{256}\frac{PL^2}{EI_0}}}.$$

4.3 Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt

Momenttimenetelmän yhtälöt (4.3)

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_{12} &= \alpha_{12} M_{12} - \beta_{12} M_{21} + \psi_{12} + \alpha_{12}^0,\\ \varphi_{21} &= \alpha_{21} M_{21} - \beta_{21} M_{12} + \psi_{21} + \alpha_{21}^0\end{aligned}}$$

ilmaisevat sauvanpääkiertymät φ_{12} ja φ_{21} lineaarisina lausekkeina sauvanpäämomenteista M_{12} ja M_{21} sekä sauvakiertymästä $\psi_{12} = \psi_{21}$.

Kulmanmuutosmenetelmää varten tarvitsemme vastaavasti yhtälöt, joissa sauvanpäämomentit M_{12} ja M_{21} ilmaistaan lineaarisina lausekkeina sauvanpääkiertymistä φ_{12} ja φ_{21} sekä sauvakiertymästä $\psi_{12} = \psi_{21}$. Ne saadaan helposti lähtemällä liikkeelle momenttimenetelmän yhtälöistä. Esitetään ne aluksi matriisimuodossa

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{12} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & \alpha_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \psi_{12} + \alpha_{12}^0 \\ \psi_{21} + \alpha_{21}^0 \end{Bmatrix}.$$

Ratkaisemalla tästä yhtälöstä sauvanpäämomenttien muodostama pystyvektori ja saadaan

$$\begin{Bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{12} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & \alpha_{21} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{21} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \psi_{12} + \alpha_{12}^0 \\ \psi_{21} + \alpha_{21}^0 \end{Bmatrix} \right).$$

Tässä kaavassa esiintyvälle käänteismatriisille on voimassa

$$\begin{bmatrix} \alpha_{12} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & \alpha_{21} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \alpha_{12} \end{bmatrix}$$

missä

$$\boxed{D = \det \begin{bmatrix} \alpha_{12} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & \alpha_{21} \end{bmatrix} = \alpha_{12}\alpha_{21} - \beta_{12}\beta_{21}.} \tag{4.9}$$

Sauvanpäämomenttien muodostamalle pystyvektorille saadaan nyt

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \alpha_{12} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{21} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \psi_{12} + \alpha_{12}^0 \\ \psi_{21} + \alpha_{21}^0 \end{Bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \alpha_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{21} \end{Bmatrix} - \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} \alpha_{21}\psi_{12} + \beta_{12}\psi_{21} + \alpha_{21}\alpha_{12}^0 + \beta_{12}\alpha_{21}^0 \\ \alpha_{12}\psi_{12} + \beta_{21}\psi_{21} + \alpha_{12}\alpha_{21}^0 + \beta_{21}\alpha_{12}^0 \end{Bmatrix}.\end{aligned}$$

Ottamalla vielä huomioon yhteys $\psi_{12} = \psi_{21}$ saadaan

$$\begin{Bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \alpha_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{21} \end{Bmatrix} - \frac{1}{D} \begin{Bmatrix} (\alpha_{21}+\beta_{12})\psi_{12} + \alpha_{21}\alpha_{12}^0 + \beta_{12}\alpha_{21}^0 \\ (\alpha_{12}+\beta_{21})\psi_{21} + \alpha_{12}\alpha_{21}^0 + \beta_{21}\alpha_{12}^0 \end{Bmatrix}$$

eli auki kirjoitettuna

$$M_{12} = \frac{\alpha_{21}}{D}\varphi_{12} + \frac{\beta_{12}}{D}\varphi_{21} - \frac{\alpha_{21}+\beta_{12}}{D}\psi_{12} - \frac{\alpha_{21}\alpha_{12}^0 + \beta_{12}\alpha_{21}^0}{D},$$
$$M_{21} = \frac{\alpha_{12}}{D}\varphi_{21} + \frac{\beta_{21}}{D}\varphi_{12} - \frac{\alpha_{12}+\beta_{21}}{D}\psi_{21} - \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}^0 + \beta_{21}\alpha_{12}^0}{D}.$$

Näin olemme muodostaneet **kulmanmuutosmenetelmän perusyhtälöt**

$$\boxed{\begin{aligned} M_{12} &= a_{12}\varphi_{12} + b_{12}\varphi_{21} - c_{12}\psi_{12} + MK_{12}, \\ M_{21} &= a_{21}\varphi_{21} + b_{21}\varphi_{12} - c_{21}\psi_{21} + MK_{21}. \end{aligned}} \tag{4.10}$$

eli

$$\boxed{M_{ij} = a_{ij}\varphi_{ij} + b_{ij}\varphi_{ji} - c_{ij}\psi_{ij} + MK_{ij},\ i \neq j.} \tag{4.11}$$

missä

$$\boxed{a_{ij} = \frac{\alpha_{ji}}{D},\ b_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{D},\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}} \tag{4.12}$$

ovat **kulmanmuutosmenetelmän sauvavakiot** ja

$$\boxed{MK_{ij} = -\frac{\alpha_{ji}\alpha_{ij}^0 + \beta_{ij}\alpha_{ji}^0}{D}} \tag{4.13}$$

ovat **kulmanmuutosmenetelmän kuormitustermit.** Kaavat (4.12) ja (4.13) ilmaisevat myös, kuinka kulmanmuutosmenetelmän sauvavakiot ja kuormitustermit voidaan määrittää, momenttimenetelmän sauvavakioiden ja kuormitustermien avulla.

Kulmanmuutosmenetelmässä esitetään vielä erityinen perusyhtälö sauvalle, jonka **jommankumman pään sauvanpäämomentti on nolla**. Asia ilmaistaan seuraavassa hieman epätäsmällisesti sanomalla, että **sauvan päässä on nivel**. Käytännössä sauvan pää on tällainen, jos se on vapaasti tai nivelellisesti tuettu tai se liittyy nivelen välityksellä rakenteeseen. Jos kuitenkin tuentaan tai liitokseen liittyy kierrejousi, ei tätä erityistä perusyhtälöä voida käyttää. Tällainen erityinen perusyhtälö ei ole välttämätön, mutta sen avulla voidaan lyhentää laskelmia kun laskelmat suoritetaan käsin.

Johdetaan nyt kulmanmuutosmenetelmän yhtälö tapauksessa, jossa sauvan $\boxed{i}-\boxed{j}$ päässä $\boxed{j}$ nivel (tarkemmin $M_{ji}=0$). Lähtemällä momenttimenetelmän yhtälöstä saadaan

$$\varphi_{ij}=\alpha_{ij}M_{ij}-\beta_{ij}\overbrace{M_{ji}}^{0}+\psi_{ij}+\alpha_{ij}^{0}.$$

Ratkaisemalla tästä sauvanpäämomentti M_{ij} saadaan

$$M_{ij}=\frac{1}{\alpha_{ij}}\varphi_{ij}-\frac{1}{\alpha_{ij}}\psi_{ij}-\frac{\alpha_{ij}^{0}}{\alpha_{ij}}.$$

Näin olemme muodostaneet **kulmanmuutosmenetelmän yhtälön**, kun **sauvan päässä *j* on nivel**:

$$\boxed{M_{ij}=a_{ij}^{0}\varphi_{ij}-c_{ij}^{0}\psi_{ij}+MK_{ij}^{0}.} \tag{4.14}$$

Vastaavat **sauvavakiot** ovat

$$\boxed{a_{ij}^{0}=c_{ij}^{0}=\frac{1}{\alpha_{ij}}} \tag{4.15}$$

ja **kuormitustermi** on

$$\boxed{MK_{ij}^{0}=-\frac{\alpha_{ij}^{0}}{\alpha_{ij}}.} \tag{4.16}$$

Kaavat (4.15 ja (4.16) ilmaisevat myös, kuinka nämä sauvavakiot ja kuormitustermit voidaan määrittää momenttimenetelmän sauvavakioiden ja kuormitustermien avulla.

Seuraavassa johdetaan kulmanmuutosmenetelmän sauvavakiot, kun **sauva on tasajäykkä** ($EI=\text{vakio}$). Lisäksi sievennetään kuormitustermien lausekkeita vastaavasti. Determinantin D arvoksi saadaan

$$D=\alpha_{12}\alpha_{21}-\beta_{12}\beta_{21}=\frac{L}{3EI}\frac{L}{3EI}-\frac{L}{6EI}\frac{L}{6EI}=\frac{L^{2}}{12(EI)^{2}}$$

ja tämän jälkeen sauvavakioille a_{ij}, b_{ij} ja c_{ij}

$$a_{ij}=\frac{\alpha_{ij}}{D}=\frac{L}{3EI}\frac{12(EI)^{2}}{L^{2}}=\underline{\underline{\frac{4EI}{L}}},\quad b_{ij}=\frac{\beta_{ij}}{D}=\frac{L}{6EI}\frac{12(EI)^{2}}{L^{2}}=\underline{\underline{\frac{2EI}{L}}},\quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=\underline{\underline{\frac{6EI}{L}}}$$

sekä sauvavakioille a_{ij}^{0} ja c_{ij}^{0}

$$a_{ij}^0 = c_{ij}^0 = \frac{1}{\alpha_{ij}} = \underline{\underline{\frac{3EI}{L}}}\,.$$

Kuormitustermien MK_{ij} ja MK_{ij}^0 lausekkeet saadaan muotoon

$$MK_{ij} = -\frac{\alpha_{ji}\alpha_{ij}^0 + \beta_{ij}\alpha_{ji}^0}{D} = -(\frac{L}{3EI}\alpha_{ij}^0 + \frac{L}{6EI}\alpha_{ji}^0)\frac{12(EI)^2}{L^2} = \underline{\underline{-\frac{2EI}{L}(2\alpha_{ij}^0 + \alpha_{ji}^0)}}$$

ja

$$MK_{ij}^0 = -\frac{\alpha_{ij}^0}{\alpha_{ij}} = \underline{\underline{-\frac{3EI}{L}}}\alpha_{ij}^0\,.$$

Tasajäykän palkin tapauksessa ($EI =$ vakio) **kulmanmuutosmenetelmän sauvavakioiksi** saatiin siis

$$\boxed{a_{ij} = \frac{4EI}{L},\quad b_{ij} = \frac{2EI}{L},\quad c_{ij} = \frac{6EI}{L},\quad a_{ij}^0 = c_{ij}^0\,\frac{3EI}{L}} \tag{4.17}$$

ja **kuormitustermien** lausekkeet yksinkertaistuivat muotoon

$$\boxed{MK_{ij} = -\frac{2EI}{L}(2\alpha_{ij}^0 + \alpha_{ji}^0),\quad MK_{ij}^0 = -\frac{3EI}{L}\alpha_{ij}^0.} \tag{4.18}$$

Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt tasajäykälle sauvalle voidaan näin esittää muodossa

$$\boxed{M_{ij} = \frac{4EI}{L}\varphi_{ij} + \frac{2EI}{L}\varphi_{ji} - \frac{6EI}{L}\psi_{ij} + MK_{ij},\ i \neq j} \tag{4.19}$$

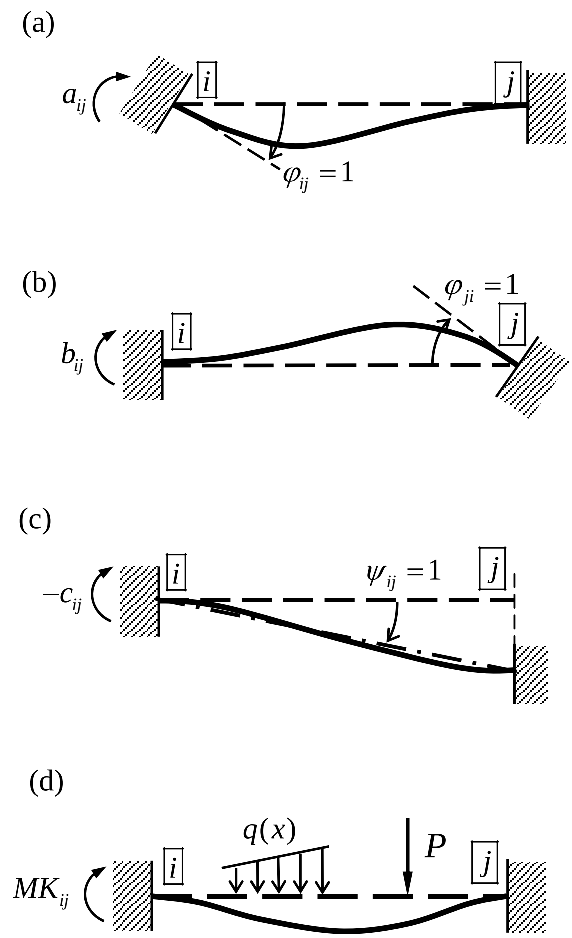
ja kun päässä *j* on nivel

$$\boxed{M_{ij} = \frac{3EI}{L}\varphi_{ij} - \frac{3EI}{L}\psi_{ij} + MK_{ij}^0.} \tag{4.20}$$

Taulukoissa 4.1 ja 4.2 on esitetty kulmanmuutosmenetelmän kuormitustermejä tasajäykälle sauvalle ($EI =$ vakio) tavallisimmissa kuormitustapauksissa.

Lopuksi tarkastellaan kulmanmuutosmenetelmän sauvavakioiden ja kuormitustermien **fysikaalista merkitystä.** Tarkastellaan ensin **päistään jäykästi kiinnitettyä palkkia** $\boxed{i}$-$\boxed{j}$. Annetaan päälle $\boxed{i}$ ykkösen suuruisen pakkokiertymä (kuva 4.6a), jolloin $v_i = v_j = \varphi_j = \psi_{ij} = 0$ ja $\varphi_i = 1$. Kaavasta (4.11) seuraa $M_{ij} = a_{ij}$ (vrt. kuva 4.6a). Annetaan päälle $\boxed{j}$ ykkösen suuruisen pakkokiertymä (kuva 4.6b), jolloin $v_i = v_j = \varphi_i = \psi_{ij} = 0$ ja $\varphi_j = 1$. Kaavasta (4.11) seuraa $M_{ij} = b_{ij}$ (vrt. kuva 4.6b). Pakotetaan sauvan päiden välille ykkösen suuruista sauvakiertymää vastaava korkeusero (kuva 4.6c**).** Tällöin

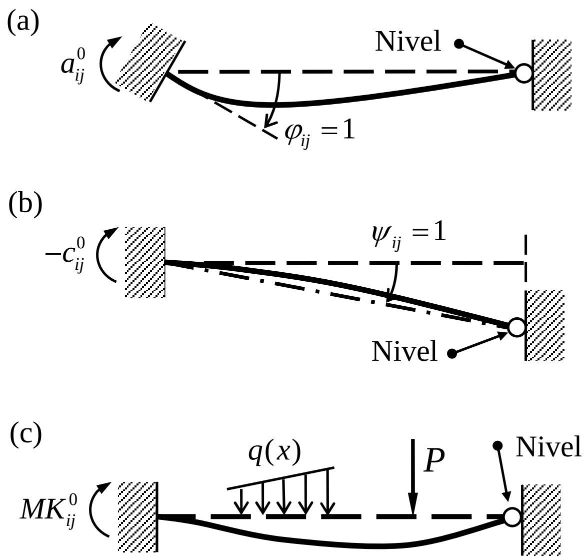
$\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = 0$, $\psi_{ij} = 1$. Kaavasta (4.11) seuraa $M_{ij} = -c_{ij}$ (vrt. kuva 4.6c). Kuormitetaan palkkia ulkoisella kuormituksella ja/tai annetaan sille alkukäyristymä (kuva 4.6d). Tällöin $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ij} = 0$ ja $MK_{ij} \neq 0$. Kaavasta (4.11) seuraa $M_{ij} = MK_{ij}$ (vrt. kuva 4.6d).



Kuva 4.6: Kulmanmuutosmenetelmän sauvavakioiden a_{ij}, b_{ij} ja c_{ij} sekä kuormitustermin MK_{ij} fysikaalinen merkitys.

Sauvavakioille a_{ij}, b_{ij} ja c_{ij} sekä kuormitustermille MK_{ij} saadaan näin seuraavat **fysikaaliset tulkinnat**: Sauvavakio a_{ij} on **jäykästi kiinnitetyn palkin päähän $\boxed{i}$ aiheutetusta ykkösen suuruisesta kiertymästä** $\varphi_{ij} = 1$ **samaan päähän $\boxed{i}$ syntyvä sauvanpäämomentti.** Sauvavakio b_{ij} on **palkin päähän $\boxed{j}$ aiheutetusta ykkösen suuruisesta kiertymästä** $\varphi_{ji} = 1$ **vastakkaiseen päähän $\boxed{i}$ syntyvä sauvanpää momentti.** Sauvavakio c_{ij} on **palkkiin aiheutetusta ykkösen suuruisesta sauvakiertymästä** $\psi_{ij} = 1$ **päähän $\boxed{i}$ syntyvä sauvanpäämomentti** (miinusmerkkisenä)**.** Kuormitustermi MK_{ij} on **palkin ulkoisesta kuormituksesta ja/tai alkukäyristymästä palkin päähän $\boxed{i}$ syntyvä sauvanpäämomentti**.

Tarkastellaan sitten **päästä $\boxed{i}$ jäykästi kiinnitettyä ja päästä $\boxed{j}$ nivelellisesti tuettua palkkia**. Annetaan päälle $\boxed{i}$ ykkösen suuruisen pakkokiertymä (kuva 4.7a), jolloin $v_i = v_j = \psi_{ij} = 0$ ja $\varphi_{ij} = 1$. Kaavasta (4.14) seuraa $M_{ij} = a_{ij}^0$ (vrt. kuva 4.7a). Aiheutetaan sauvan päiden välille ykkösen suuruista sauvakiertymää vastaava korkeusero (kuva 4.7b)**.** Tällöin $\varphi_{ij} = 0$ ja $\psi_{ij} = 1$. Kaavasta (4.14) seuraa $M_{ij} = -c_{ij}^0$ (vrt. kuva 4.7b). Kuormitetaan palkkia ulkoisella kuormituksella ja/tai annetaan sille alkukäyristymä (kuva 4.7c). Tällöin $\varphi_i = \psi_{ij} = 0$ ja $MK_{ij}^0 \neq 0$. Kaavasta (4.14) seuraa $M_{ij} = MK_{ij}^0$ (vrt. kuva 4.7c).

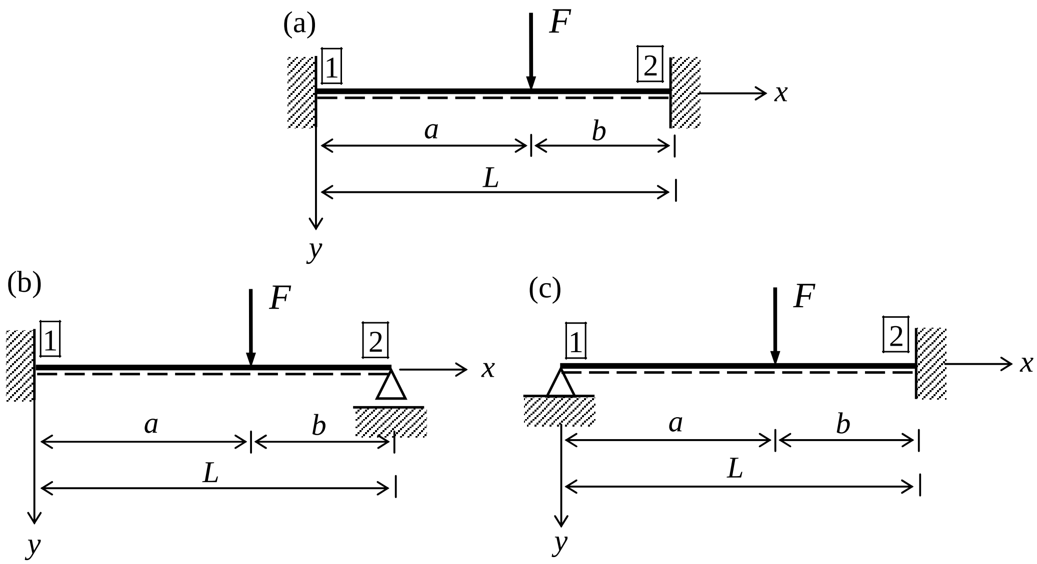


Kuva 4.7: Kulmanmuutosmenetelmän sauvavakioiden a_{ij}^0 ja c_{ij}^0 sekä kuormitus-termien MK_{ij}^0 fysikaalinen merkitys.

Sauvavakioille a_{ij}^0 ja c_{ij}^0 sekä kuormitustermille MK_{ij}^0 saadaan vastaavasti seuraavat **fysikaaliset tulkinnat**: Sauvavakio a_{ij}^0 on **päästä $\boxed{i}$ jäykästi kiinnitetyn ja päästä $\boxed{j}$ nivelellisesti tuetun palkin päähän $\boxed{i}$ aiheutetusta ykkösen suuruisesta kiertymästä $\varphi_{ij} = 1$ samaan päähän $\boxed{i}$ syntyvä sauvanpäämomentti.** Sauvavakio c_{ij} on samanlaiseen palkkiin **aiheutetusta ykkösen suuruisesta sauvakiertymästä $\psi_{ij} = 1$ palkin päähän $\boxed{i}$ syntyvä sauvanpäämomentti** (miinusmerkkisenä)**.** Kuormitustermi MK_{ij} on palkkiin **ulkoisesta kuormituksesta ja/tai alkukäyristymästä palkin päähän $\boxed{i}$ syntyvä sauvanpäämomentti**.

Seuraavissa esimerkeissä tarkastellaan kulmanmuutosmenetelmän sauvavakioiden ja kuormitustermien määrittämistä.

Esimerkki 4.4: Johda tasajäykän palkin ($EI = \text{vakio}$) kulmanmuutosmenetelmän kuormitustermien arvot, kun sitä kuormittaa pistekuorma F pisteessä, jonka etäisyydet sauvan päistä ovat a ja b. Tarkastele kuvien (a), (b) ja (c) tapaukset.



Käytetään hyväksi esimerkissä 4.1 saatuja momenttimenetelmän kuormitustermejä

$$\alpha_{12}^0 = \frac{Fab}{6EIL}(b+L)\,, \ \alpha_{21}^0 = -\frac{Fab}{6EIL}(a+L)\,.$$

Kuvan (a) sauva:

Kaavoista (4.21) saadaan

$$MK_{12} = -\frac{2EI}{L}(2\alpha_{12}^0 + \alpha_{21}^0) = -\frac{2EI}{L}\frac{Fab}{6EIL}[2(b+L)-a-L] = \underline{\underline{-\frac{Fab^2}{L^2}}},$$

$$MK_{21} = -\frac{2EI}{L}(2\alpha_{21}^0 + \alpha_{12}^0) = -\frac{2EI}{L}\frac{Fab}{6EIL}[-2(a+L)+b+L] = \underline{\underline{\frac{Fa^2b}{L^2}}}.$$

Kuvien (b) ja (c) sauvat:

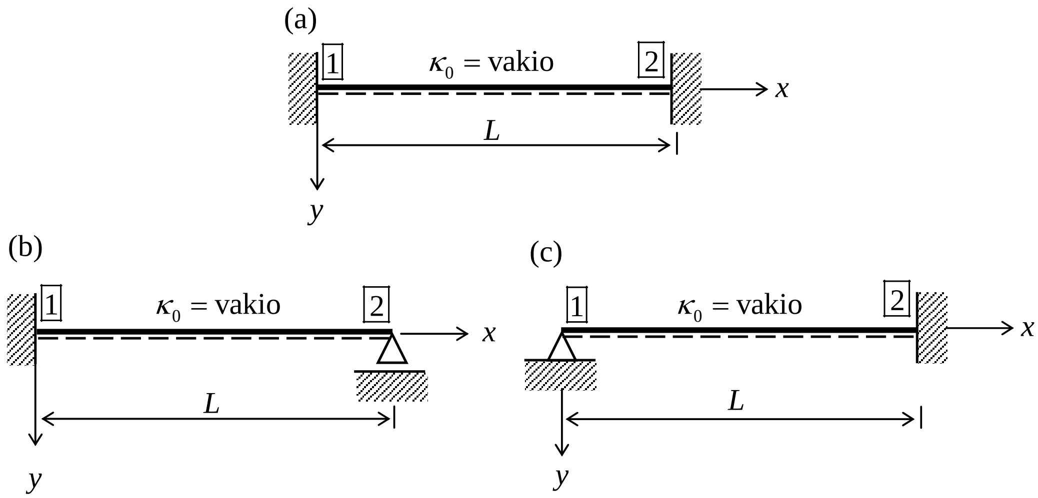
Kaavoista (4.21) saadaan

$$MK_{12}^0 = -\frac{3EI}{L}\alpha_{12}^0 = -\frac{3EI}{L}\frac{Fab}{6EIL}(b+L) = \underline{\underline{-\frac{Fab}{2L^2}(b+L)}},$$

$$MK_{21}^0 = -\frac{3EI}{L}\alpha_{21}^0 = -\frac{3EI}{L}[-\frac{Fab}{6EIL}(a+L)] = \underline{\underline{\frac{Fab}{2L^2}(a+L)}}.$$

Nähdään, että saatiin sama tulos kuin taulukoissa 4.1 ja 4.2 (N:o 7).

Esimerkki 4.5: Johda kulmanmuutosmenetelmän kuormitustermien arvot, kun sauva saa vakiosuuruisen alkukäyristymän ($\kappa_0 = \text{vakio}$).Tarkastele kuvien (a), (b) ja (c) tapaukset.



Ratkaisu:

Käytetään hyväksi esimerkissä 4.2 saatuja momenttimenetelmän kuormitustermejä

$$\alpha_{12}^0 = \frac{\kappa_0 L}{2}, \quad \alpha_{21}^0 = -\frac{\kappa_0 L}{2}.$$

<u>Kuvan (a) sauva:</u>

Kaavoista (4.21) saadaan

$$MK_{12} = -\frac{2EI}{L}(2\alpha_{12}^0 + \alpha_{21}^0) = -\frac{2EI}{L}(2\frac{\kappa_0 L}{2} - \frac{\kappa_0 L}{2}) = \underline{\underline{-EI\kappa_0}},$$

$$MK_{21} = -\frac{2EI}{L}(2\alpha_{21}^0 + \alpha_{12}^0) = -\frac{2EI}{L}(-2\frac{\kappa_0 L}{2} + \frac{\kappa_0 L}{2}) = \underline{\underline{EI\kappa_0}}.$$

<u>Kuvien (b) ja (c) sauvat:</u>

Kaavoista (4.21) saadaan

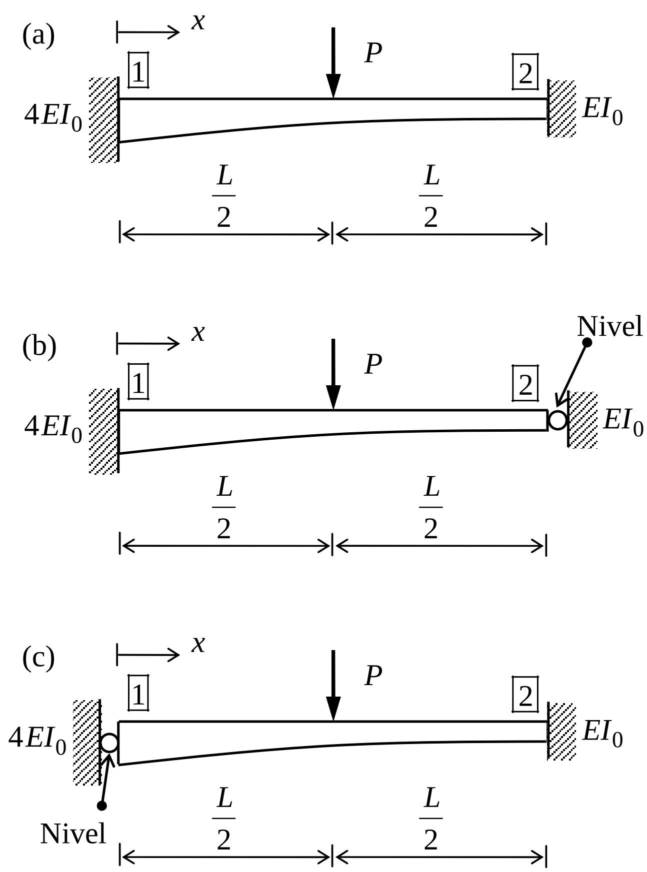
$$MK_{12}^0 = -\frac{3EI}{L}\alpha_{12}^0 = -\frac{3EI}{L}\frac{\kappa_0 L}{2} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}EI\kappa_0}},$$

$$MK_{21}^0 = -\frac{3EI}{L}\alpha_{21}^0 = -\frac{3EI}{L}(-\frac{\kappa_0 L}{2}) = \underline{\underline{\frac{3}{2}EI\kappa_0}}.$$

Nähdään, että saatiin sama tulos kuin taulukoissa 4.1 ja 4.2 (N:o 11).

Esimerkki 4.6: Määritä kulmanmuutosmenetelmän sauvavakiot ja kuormitustermit kuvien E4.6 jäykkyydeltään muuttuville sauvalle, joita kuormittaa pistekuorma P palkin keskellä. Palkin taivutusjäykkyydellä on lauseke

$$EI(x) = \frac{4EI_0}{1+3\dfrac{x}{L}}.$$



Kuva E4.6: Taivutusjäykkyydeltään muuttuva pistekuorman kuormittama sauva.

Ratkaisu:

Käytetään hyväksi esimerkissä 4.3 saatuja momenttimenetelmän sauvavakioita

$$\alpha_{12} = \frac{7L}{48EI_0}, \quad \alpha_{21} = \frac{13L}{48EI_0}, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = \frac{5L}{48EI_0}$$

ja kuormitustermejä

$$\alpha_{12}^0 = \frac{3}{64}\frac{PL^2}{EI_0}, \quad \alpha_{21}^0 = -\frac{11}{256}\frac{PL^2}{EI_0}.$$

Kuvan (a) sauva:

Kaavasta (4.8) saadaan

$$D = \alpha_{12}\alpha_{21} - \beta_{12}\beta_{21} = \frac{7L}{48EI_0} \cdot \frac{13L}{48EI_0} - (\frac{5L}{48EI_0}) = \frac{11}{384}\frac{L^2}{EI_0^2}.$$

Kaavoista (4.11) saadaan

$$a_{12} = \frac{\alpha_{21}}{D} = \frac{13L}{48EI_0} \cdot \frac{384}{11}\frac{EI_0^2}{L^2} = \underline{\underline{\frac{104}{11}\frac{EI_0}{L}}}, \qquad a_{21} = \frac{\alpha_{12}}{D} = \frac{7L}{48EI_0} \cdot \frac{384}{11}\frac{EI_0^2}{L^2} = \underline{\underline{\frac{56}{11}\frac{EI_0}{L}}},$$

$$b_{12} = b_{21} = \frac{\beta_{12}}{D} = \frac{5L}{48EI_0} \cdot \frac{384}{11}\frac{EI_0^2}{L^2} = \underline{\underline{\frac{40}{11}\frac{EI_0}{L}}},$$

$$c_{12} = a_{12} + b_{12} = \frac{104}{11}\frac{EI_0}{L} + \frac{40}{11}\frac{EI_0}{L} = \underline{\underline{\frac{144}{11}\frac{EI_0}{L}}}, \quad c_{21} = a_{21} + b_{21} = \frac{56}{11}\frac{EI_0}{L} + \frac{40}{11}\frac{EI_0}{L} = \underline{\underline{\frac{96}{11}\frac{EI_0}{L}}}.$$

Kaavoista (4.12) saadaan

$$MK_{12} = -\frac{1}{D}(\alpha_{21}\alpha_{12}^0 + \beta_{12}\alpha_{21}^0) = -\frac{384}{11}\frac{EI_0^2}{L^2}[\frac{13L}{48EI_0} \cdot \frac{3}{64}\frac{PL^2}{EI_0} + \frac{5L}{48EI_0} \cdot (-\frac{11}{256}\frac{PL^2}{EI_0})]$$

$$= \underline{\underline{-\frac{101}{352}PL}},$$

$$MK_{21} = -\frac{1}{D}(\alpha_{12}\alpha_{21}^0 + \beta_{21}\alpha_{12}^0) = -\frac{384}{11}\frac{EI_0^2}{L^2}[\frac{7L}{48EI_0} \cdot (-\frac{11}{256}\frac{PL^2}{EI_0}) + \frac{5L}{48EI_0} \cdot \frac{3}{64}\frac{PL^2}{EI_0}]$$

$$= \underline{\underline{\frac{17}{352}PL}}.$$

Kuvien (b) ja (c) sauvat:

Kaavoista (4.14) saadaan

$$a_{12}^0 = c_{12}^0 = \frac{1}{\alpha_{12}} = \underline{\underline{\frac{48EI_0}{7L}}},$$

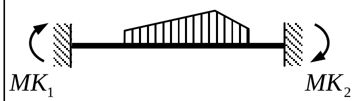
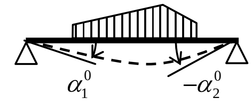
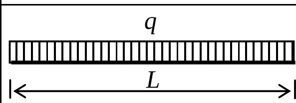
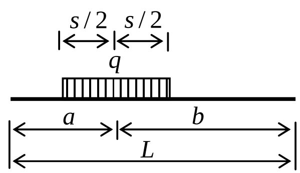
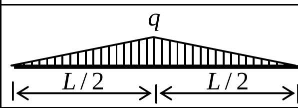
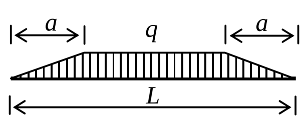
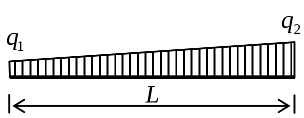
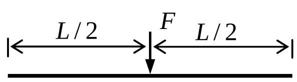
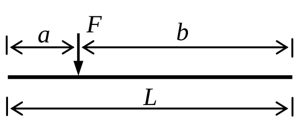
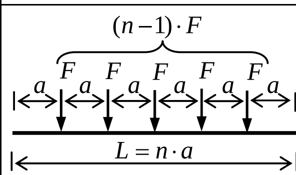
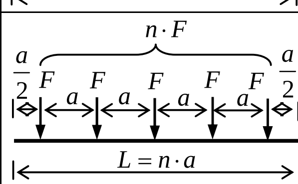
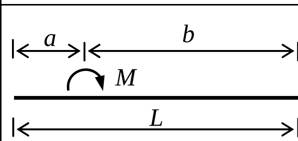
$$a_{21}^0 = c_{21}^0 = \frac{1}{\alpha_{21}} = \underline{\underline{\frac{48EI_0}{13L}}}.$$

Kaavoista (4.15) saadaan

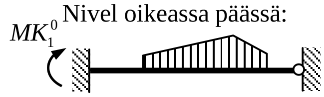
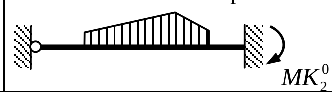
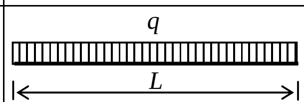
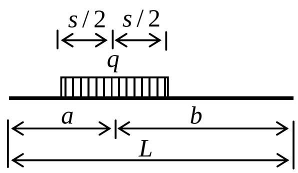
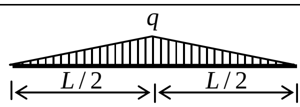
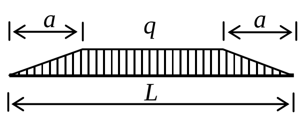
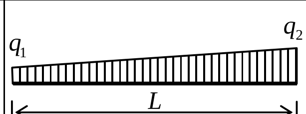
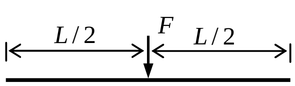
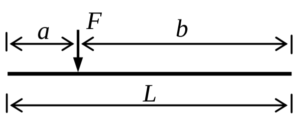
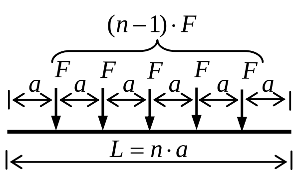
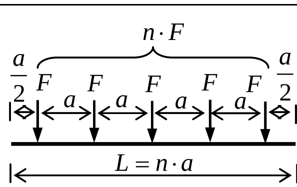
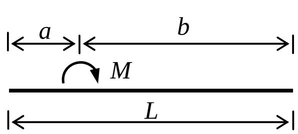
$$MK_{12}^0 = -\frac{\alpha_{12}^0}{\alpha_{12}} = -\frac{3}{64}\frac{PL^2}{EI_0}\frac{48EI_0}{7L} = \underline{\underline{-\frac{9}{28}PL}},$$

$$MK_{21}^0 = -\frac{\alpha_{21}^0}{\alpha_{21}} = -(-\frac{11}{256}\frac{PL^2}{EI_0})\frac{48EI_0}{13L} = \underline{\underline{\frac{33}{208}PL}}.$$

Taulukko 4.1: Kulmanmuutosmenetelmän ja momenttimenetelmän kuormitustermejä tasajäykälle palkille.

N:o	Kuormitus	Kiinnitysmomentit: 	Sauvanpääkiertymät: 
1		$MK_1=-\frac{qL^2}{12},\ MK_2=\frac{qL^2}{12}$	$\alpha_1^0=\frac{qL^3}{24EI},\ \alpha_2^0=-\frac{qL^3}{24EI}$
2		$MK_1=-\frac{qs}{12L^2}[12ab^2+s^2(L-3b)]$ $MK_2=\frac{qs}{12L^2}[12a^2b+s^2(L-3a)]$	$\alpha_1^0=\frac{qbs}{24EIL}[4a(b+L)-s^2]$ $\alpha_2^0=-\frac{qas}{24EIL}[4b(a+L)-s^2]$
3		$MK_1=-\frac{5qL^2}{96},\ MK_2=\frac{5qL^2}{96}$	$\alpha_1^0=\frac{5qL^3}{192EI},\ \alpha_2^0=-\frac{5qL^3}{192EI}$
4		$MK_1=-\frac{q}{12L}[L^3-a^2(2L-a)]$ $MK_2=\frac{q}{12L}[L^3-a^2(2L-a)]$	$\alpha_1^0=\frac{q}{24EI}[L^3-a^2(2L-a)]$ $\alpha_2^0=-\frac{q}{24EI}[L^3-a^2(2L-a)]$
5		$MK_1=-(\frac{q_1}{20}+\frac{q_2}{30})L^2$ $MK_2=(\frac{q_1}{30}+\frac{q_2}{20})L^2$	$\alpha_1^0=(\frac{q_1}{45}+\frac{7q_2}{360})\frac{L^3}{EI}$ $\alpha_2^0=-(\frac{7q_1}{360}+\frac{q_2}{45})\frac{L^3}{EI}$
6		$MK_1=-\frac{FL}{8},\ MK_2=\frac{FL}{8}$	$\alpha_1^0=\frac{FL^2}{16EI},\ \alpha_2^0=-\frac{FL^2}{16EI}$
7		$MK_1=-\frac{Fab^2}{L^2}$ $MK_2=\frac{Fa^2b}{L^2}$	$\alpha_1^0=\frac{Fab}{6EIL}(b+L)$ $\alpha_2^0=-\frac{Fab}{6EIL}(a+L)$
8		$MK_1=-\frac{FL}{12}\frac{n^2-1}{n}$ $MK_2=\frac{FL}{12}\frac{n^2-1}{n}$	$\alpha_1^0=\frac{FL^2}{24EI}\frac{n^2-1}{n}$ $\alpha_2^0=-\frac{FL^2}{24EI}\frac{n^2-1}{n}$
9		$MK_1=-\frac{FL}{24}\frac{2n^2+1}{n}$ $MK_2=\frac{FL}{24}\frac{2n^2+1}{n}$	$\alpha_1^0=\frac{FL^2}{48EI}\frac{2n^2+1}{n}$ $\alpha_2^0=-\frac{FL^2}{48EI}\frac{2n^2+1}{n}$
10		$MK_1=\frac{Mb}{L}(2-3\frac{b}{L})$ $MK_2=\frac{Ma}{L}(2-3\frac{a}{L})$	$\alpha_1^0=\frac{ML}{6EI}(3\frac{b^2}{L^2}-1)$ $\alpha_2^0=\frac{ML}{6EI}(3\frac{a^2}{L^2}-1)$
11	Alkukäyristymä κ_0 =vakio	$MK_1=-EI\kappa_0,\ MK_2=EI\kappa_0$	$\alpha_1^0=\frac{\kappa_0 L}{2},\ \alpha_2^0=-\frac{\kappa_0 L}{2}$

Taulukko 4.2: Kulmanmuutosmenetelmän kuormitustermejä tasajäykälle palkille, jonka toisessa päässä on nivel.

<table>
<tr><th>N:o</th><th>Kuormitus</th><th>Nivel oikeassa päässä:
</th><th>Nivel vasemmassa päässä:
</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td>$MK_1^0 = -\frac{qL^2}{8}$</td><td>$MK_2^0 = \frac{qL^2}{8}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>$MK_1^0 = -\frac{qbs}{8L^2}(4a^2 + 8ab - s^2)$</td><td>$MK_2^0 = \frac{qas}{8L^2}(4b^2 + 8ab - s^2)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>$MK_1^0 = -\frac{5qL^2}{64}$</td><td>$MK_2^0 = \frac{5qL^2}{64}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>$MK_1^0 = -\frac{q}{8L}[L^3 - a^2(2L - a)]$</td><td>$MK_2^0 = \frac{q}{8L}[L^3 - a^2(2L - a)]$</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>$MK_1^0 = -(\frac{q_1}{15} + \frac{7q_2}{120})L^2$</td><td>$MK_2^0 = (\frac{7q_1}{120} + \frac{q_2}{15})L^2$</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td>$MK_1^0 = -\frac{3}{16}FL$</td><td>$MK_2^0 = \frac{3}{16}FL$</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td>$MK_1^0 = -\frac{Fab}{2L^2}(b + L)$</td><td>$MK_2^0 = \frac{Fab}{2L^2}(a + L)$</td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td>$MK_1^0 = -\frac{FL}{8}\frac{n^2 - 1}{n}$</td><td>$MK_2^0 = \frac{FL}{8}\frac{n^2 - 1}{n}$</td></tr>
<tr><td>9</td><td></td><td>$MK_1^0 = -\frac{FL}{16}\frac{2n^2 + 1}{n}$</td><td>$MK_2^0 = \frac{FL}{16}\frac{2n^2 + 1}{n}$</td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td>$MK_1^0 = \frac{M}{2}(1 - 3\frac{b^2}{L^2})$</td><td>$MK_2^0 = \frac{M}{2}(1 - 3\frac{a^2}{L^2})$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Alkukäyristymä
κ_0 =vakio</td><td>$MK_1^0 = -\frac{3}{2}EI\kappa_0$</td><td>$MK_2^0 = \frac{3}{2}EI\kappa_0$</td></tr>
</table>

4.4 Sivusiirtyvyyden kertaluku

Momenttimenetelmään ja kulmanmuutosmenetelmään liittyy oleellisesti käsite **sivusiirtyvyys** tai lyhyemmin **siirtyvyys.** Kehärakennetta sanotaan **sivusiirtymättömäksi**, jos sen "nurkat" (sauvan päät ja niiden yhtymäkohdat) eivät pääse siirtymään. Muussa tapauksessa rakenne on **sivusiirtyvä**. Rakenteen **sivusiirtyvyyden kertaluku** on sen **nurkkien riippumattomien siirtymävapausasteiden lukumäärä**. Kehärakenteen sivusiirtyvyyttä voidaan havainnollistaa ajattelemalla sen sauvat korvatuiksi jäykillä nivelsauvoilla (ristikkosauvoilla) ja tutkimalla näin syntyneen **nivelmekanismin** kinematiikkaa. **Sivusiirtyvyyden kertaluku** n_{sii} on nivelmekanismin riippumattomien vapausasteiden (yleistettyjen siirtymien) lukumäärä.

Tasokehän kuhunkin nurkkaan $\boxed{i}$ liittyy kaksi siirtymävapausastetta nimittäin siirtymäkomponentit u_i ja v_i. Nurkkien siirtymäkomponentteja on siten yhteensä $2k$ kappaletta, missä k on nurkkien (=nivelmekanismin nivelten) lukumäärä. Kukin yksiarvoinen tuenta vähentää yhden siirtymävapausasteen, joten tuennoista aiheutuva siirtymävapausasteiden vähennys on yhtä suuri kuin yksiarvoisten tukien lukumäärä t. Koska sauvat otaksutaan aksiaalisesti jäykiksi ($EA = \infty$), jäljellä olevia nurkkien siirtymävapausasteita sitoo yksi rajoiteyhtälö kutakin sauvaa kohti. Jos sauvojen lukumäärää merkitään symbolilla s, tasokehärakenteen sivusiirtyvyyden kertaluvulle saadaan näin kaava

$$\boxed{n_{\text{sii}} = 2k - t - s.} \tag{4.21}$$

Vertaamalla tätä tasoristikon staattisen määräämättömyyden kertaluvun n_s kaavaan (1.10) nähdään, että $n_{\text{sii}} = -n_s$ eli tasokehän sivusiirtyvyyden kertaluku on yhtä suuri kuin vastaavan **tasoristikon staattisen määräämättömyyden kertaluvun vastaluku**.

Kuvassa 4.8 on esimerkkejä palkin ja kuvassa 4.9 tasokehän sivusiirtyvyyden kertaluvun määrittämisestä.

Palkki: Nivelmekanismi:

(a)

$$n_{sii} = 2k - t - s = 2\cdot 3 - 4 - 2 = \underline{\underline{0}} \;\Rightarrow\; \text{Sivusiirtymätön.}$$

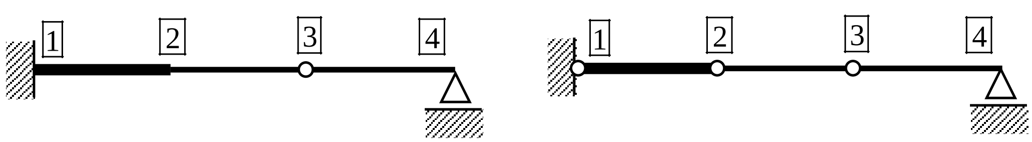
(b)

$$n_{sii} = 2k - t - s = 2\cdot 3 - 3 - 2 = \underline{\underline{1}}$$

(c)

$$n_{sii} = 2k - t - s = 2\cdot 3 - 3 - 2 = \underline{\underline{1}}$$

(d)



$$n_{sii} = 2k - t - s = 2\cdot 4 - 3 - 3 = \underline{\underline{2}}$$

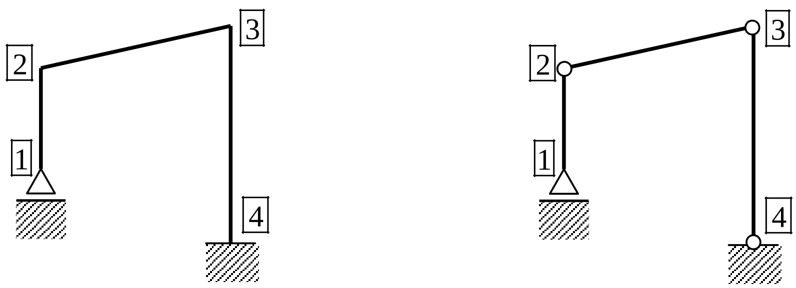
Kuva 4.8: Esimerkkejä palkin sivusiirtyvyyden kertaluvun määrittämisestä

Kehä: Nivelmekanismi:

(a)

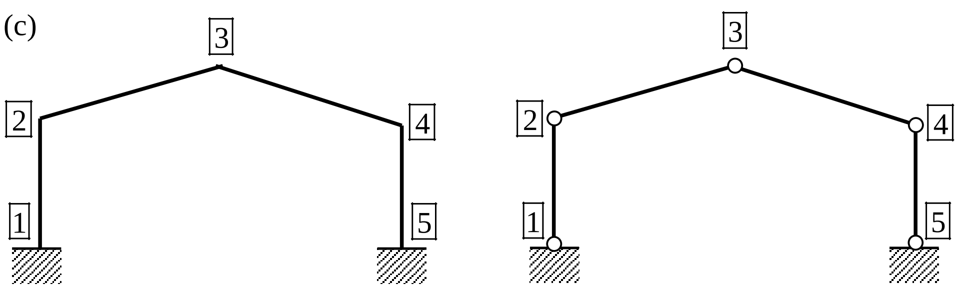
$n_{\mathrm{sii}} = 2k - t - s = 2\cdot 3 - 4 - 2 = \underline{\underline{0}} \;\Rightarrow\;$ Sivusiirtymätön.

(b)



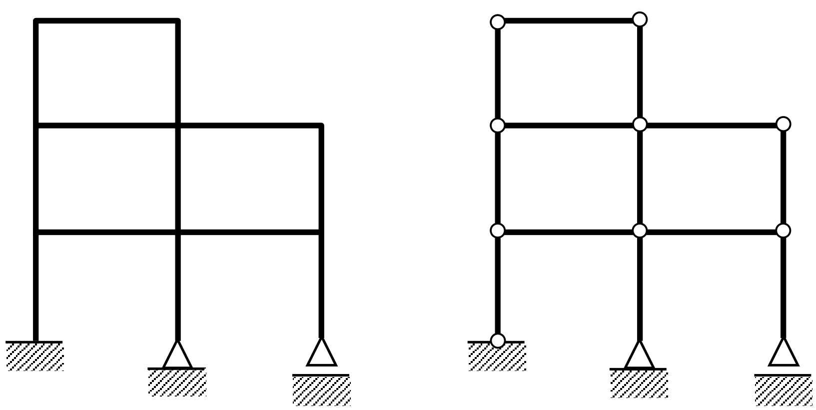
$n_{sii} = 2k - t - s = 2\cdot 4 - 3 - 3 = \underline{\underline{2}}$

(c)



$n_{\mathrm{sii}} = 2k - t - s = 2\cdot 5 - 4 - 4 = \underline{\underline{2}}$

(d)



$n_{\mathrm{sii}} = 2k - t - s = 2\cdot 11 - 5 - 13 = \underline{\underline{4}}$

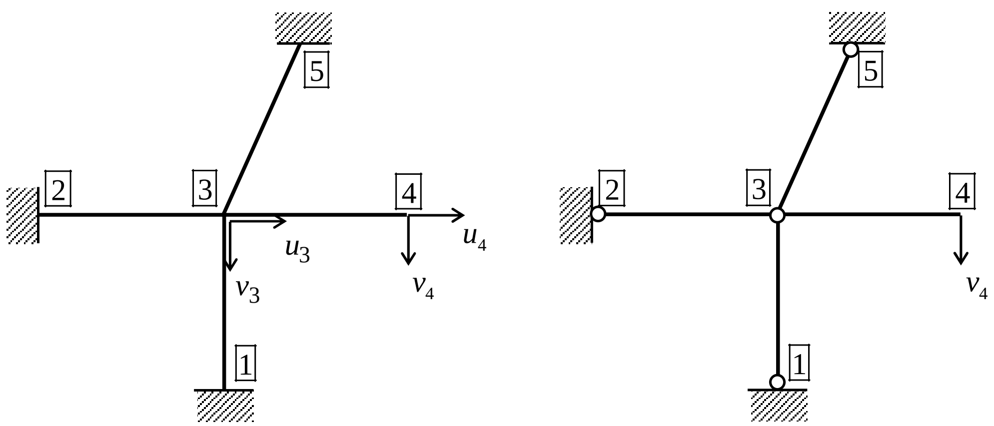
Kuva 4.9: Esimerkkejä tasokehän sivusiirtyvyyden kertaluvun määrittämisestä

Kaava (4.21) sivusiirtyvyyden kertaluvun määrittämiseksi ei kuitenkaan ole yleispätevä. Esimerkiksi kuvan 4.10 tapauksessa saataisiin

$$n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 5 - 6 - 4 = 0,$$

eli sivusiirtyvyyden kertaluvuksi tulisi 0. Sen oikea arvo on kuitenkin 1. Tämä voidaan selittää seuraavasti. Tuennat estävät nurkkien $\boxed{1}$, $\boxed{5}$ ja $\boxed{5}$ siirtymät. Nurkkaan $\boxed{3}$ liittyvät 3 (aksiaalisesti jäykkää) sauvaa estävä siirtymät u_3 ja v_3. Tämän lisäksi vaakasuora sauva $\boxed{3}-\boxed{4}$ estää vaakasiirtymän u_4. Pystysiirtymä v_4 jää kuitenkin jäljelle, joten kehän sivusiirtyvyyden kertaluvuksi tulee olla $n_{\text{sii}} = 1$.

Kehä: Nivelmekanismi:



Kuva 4.10: Nelisauvainen kehä

Jatkossa käy ilmi, että sivusiirtyvän kehän riippumattomiksi siirtymävapausasteiksi on tarkoituksenmukaista valita ns. **riippumattomat sauvakiertymät** ja niiden määrittäminen muodostaa osan siirtyvän kehän ratkaisuprosessia. Täten kehän siirtyvyyden kertaluku (=riippumattomien sauvakiertymien lukumäärä) määräytyy täsmällisemmin osana ratkaisuprosessia.

4.5 Sivusiirtymättömien rakenteiden ratkaiseminen momentti- ja kulmanmuutosmenetelmällä

4.51 Sivusiirtymättömyys

Jos rakenne on **sivusiirtymätön,** ts. sivusiirtyvyyden kertaluku n_{sii} on nolla, kaikkien sauvojen sauvanpääsiirtymille pätee $v_{ij} = 0$. Tällöin **kaikkien sauvojen sauvakiertymät** $\psi_{ij} = (v_{ij} - v_{ji}) / L$ **häviävät.** Momenttimenetelmän perusyhtälöt (4.6) ovat tällöin

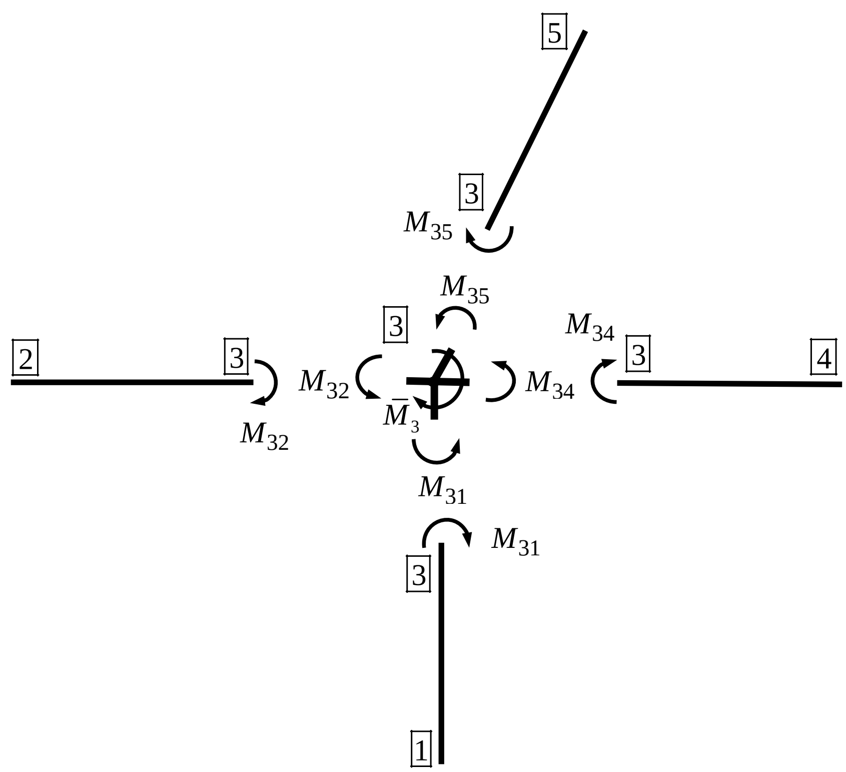
$$\varphi_{ij} = \alpha_{ij} M_{ij} - \beta_{ij} M_{ji} + \alpha_{ij}^{0}, \quad i \neq j$$

ja kulmanmuutosmenetelmän perusyhtälöt (4.11) ja (4.14) vastaavasti

$$M_{ij} = a_{ij}\varphi_{ij} + b_{ij}\varphi_{ji} + MK_{ij}, \quad i \neq j \text{, tai } M_{ij} = a_{ij}^{0}\varphi_{ij} + MK_{ij}^{0}, \quad i \neq j .$$

4.52 Muodostettavat yhtälöt

Yhtälöt siirtymättömän kehän ratkaisemiseksi saadaan (a) muodostamalla kehän nurkille **sauvanpäämomenttien** M_{ij} **välisiä tasapainoyhtälöitä**, (b) muodostamalla kehän nurkille **sauvanpääkiertymien** φ_{ij} **välisiä yhteensopivuusehtoja sekä** (c) kirjoittamalla kehän sauvoille **momenttimenetelmän tai kulmanmuutosmenetelmän perusyhtälöitä.**



Kuva 4.11: Sauvan nurkan tasapainoyhtälön muodostaminen

Kuvan 4.11 esimerkki valaisee kehän **nurkan tasapainoyhtälön syntymistä**. Nurkka $\boxed{3}$ ajatellaan irrotetuksi siihen liittyvistä sauvoista, jolloin sen momenttitasapaino-yhtälöksi tulee

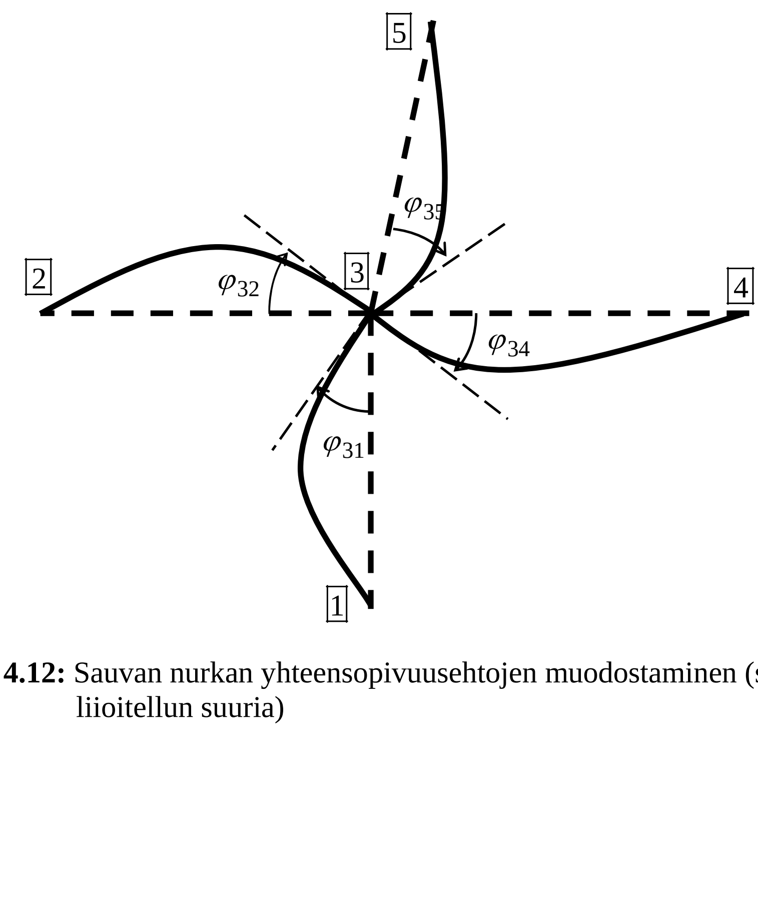
$$M_{31} + M_{32} + M_{34} + M_{35} = \bar{M}_3,$$

missä $\bar{M}_3$ on mahdollinen nurkkaan $\boxed{3}$ kohdistuva ulkoinen momentti. (Jos nurkkaan liittyy sauvojen lisäksi kierrejousi, jonka jousimomentti on M_J, nurkan momentti-tasapainoyhtälöksi tulee $M_{31} + M_{32} + M_{34} + M_{35} + M_J = \bar{M}_3$.)

Kuvan 4.12 esimerkki valaisee kehän **nurkan** sauvanpääkiertymien välisten **yhteensopivuusehtojen** syntymistä. Yhteensopivuusehdoiksi nurkassa $\boxed{3}$ saadaan

$$\varphi_{31} = \varphi_{32} = \varphi_{34} = \varphi_{35} = \varphi_3,$$

missä φ_3 nurkan kiertymä. (Jos nurkkaan liittyy sauvojen lisäksi kierrejousi, myös sen kiertymälle saadaan ehto $\varphi_J = \varphi_3$.)

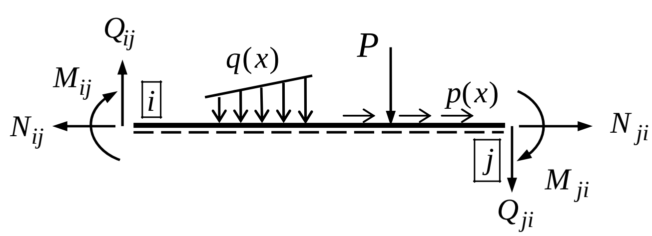


Kuva 4.12: Sauvan nurkan yhteensopivuusehtojen muodostaminen (siirtymät liioitellun suuria)

4.53 Taivutusmomentti- ja leikkausvoima- ja normaalivoimakuvioiden määrittäminen

Kun kehäprobleema on ratkaistu momenttimenetelmällä, kunkin sauvan $\boxed{i} - \boxed{j}$ **sauvanpäämomentit** M_{ij} **tunnetaan**. Myös kulmanmuutosmenetelmässä ne voidaan ko. perusyhtälöiden avulla helposti laskea. Seuraavassa kaavaillaan lyhyesti, kuinka sauvan taivutusmomentti- leikkausvoima- ja normaalivoimakuviot voidaan tämän jälkeen määrittää.

Tarkastelemalla sauvan vapaakappalekuviota (kuva 4.13) voidaan sen sauvanpääleikkausvoimat Q_{ij} ja Q_{ji} määrittää helposti kirjoittamalla momenttitasapainoehdot päiden $\boxed{j}$ ja $\boxed{i}$ suhteen. Kun nämä tunnetaan, meillä on sauva, jonka leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuviot voidaan määrittää tavanomaiseen tapaan. Sauvanpää-normaalivoimien N_{ij} ja N_{ji} määrittäminen ei yleisessä tapauksessa onnistu pelkkiä sauvojen tasapainoehtoja käyttäen, vaan joudutaan myös muodostamaan nurkkien tasapainoehtoja. Kun kunkin sauvan sauvanpäänormaalivoimat on saatu määritetyksi, sauvojen normaalivoimakuviot saadaan myös tavanomaiseen tapaan.



Kuva 4.13: Sauvan vapaakappalekuvio

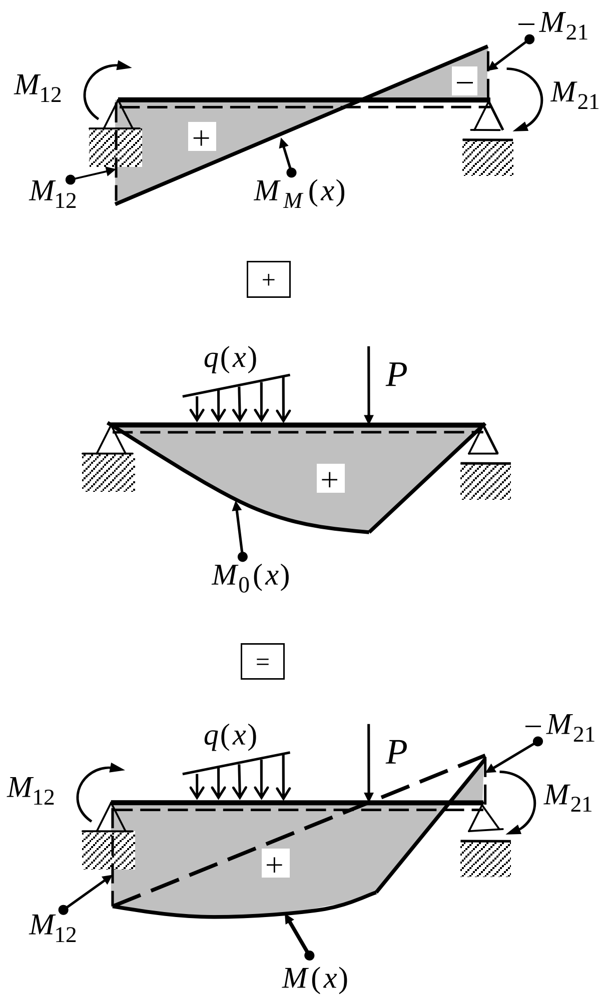
Jos määritettävänä on pelkkä **taivutusmomentti** $M(x)$, voidaan myös menetellä seuraavasti. Ajatellaan sen koostuvan kahdesta osasta: (a) sauvanpäämomenttien M_{12} ja M_{21} kuormittaman vapaastituetun palkin taivutusmomentista

$$M_M(x) = M(0)(1-\frac{x}{L}) + M(L)\frac{x}{L} = M_{12}(1-\frac{x}{L}) - M_{21}\frac{x}{L}$$

ja (b) ulkoisen kuormituksen kuormittaman vapaastituetun palkin taivutusmomentista $M_0(x)$. Sauvan taivutusmomentti on siis näiden summa ts.

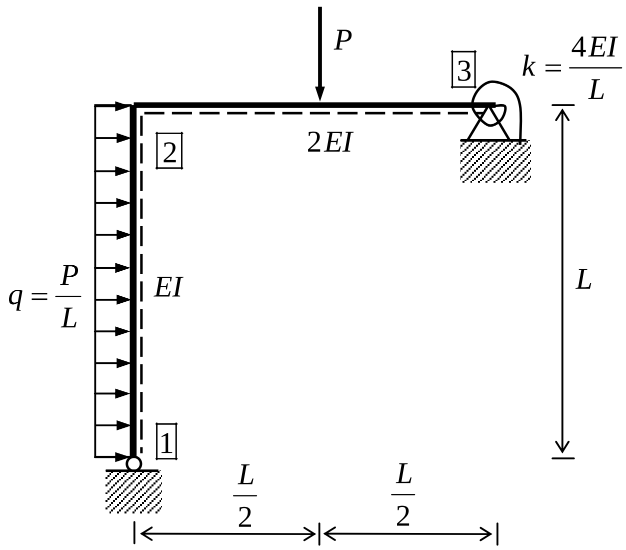
$$M(x) = M_{12}(1-\frac{x}{L}) - M_{21}\frac{x}{L} + M_0(x).$$

Kuva 4.14 havainnollistaa tilannetta. Nähdään, että taivutusmomentti saadaan käytännössä piirtämällä sauvanpäissä olevien taivutusmomentin arvojen $M(0) = M_{12}$ ja $M(L) = -M_{21}$ kautta suora (ns. sulkuviiva), joka kuvaa taivutusmomenttia $M_M(x)$. Siihen lisätään sitten ulkoisen kuormituksen kuormittaman vapaastituetun palkin taivutusmomenttikuvio $M_0(x)$.



Kuva 4.14: Taivutusmomenttikuvion määrittäminen momentti- ja kulmanmuutosmenetelmissä.

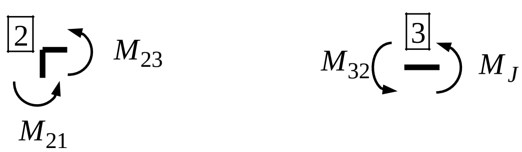
Esimerkki 4.7: Ratkaistaan oheinen kehä momenttimenetelmällä ja piirretään normaalivoima-, leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuviot.



Siirtyvyyden kertaluku: $n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 3 - 4 - 2 = 0 \;\Rightarrow$ siirtymätön.

Tasapainoehdot:

$$\begin{aligned} &\text{Nurkka } \boxed{1}\text{: } M_{12} = 0 \text{ (nivel)} \\ &\text{Nurkka } \boxed{2}\text{: } M_{21} + M_{23} = 0 \;\Rightarrow\; M_{21} = -M_{23} \\ &\text{Nurkka } \boxed{3}\text{: } M_{32} + M_J = 0 \;\Rightarrow\; M_J = -M_{32} \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$



Yhteensopivuusehdot:

$$\begin{aligned} &\text{Nurkka } \boxed{2}\text{: } \varphi_{21} = \varphi_{23} \\ &\text{Nurkka } \boxed{3}\text{: } \varphi_{32} = \varphi_J \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

Momenttimenetelmän yhtälöt (yhteensopivuusehdoissa esiintyville kiertymille):

Sauva $\boxed{1} - \boxed{2}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{21} &= \frac{L}{3EI} M_{21} - \frac{L}{6EI} M_{12} + \overbrace{\psi_{21}}^{0} + \alpha_{21}^{0} = \frac{L}{3EI} M_{21} - \frac{L}{6EI} M_{12} - \frac{\overbrace{q}^{P/L} L^3}{24EI} \\ &= \frac{L}{3EI} M_{21} - \frac{L}{6EI} M_{12} - \frac{PL^2}{24EI} \end{aligned} \qquad \text{(c1)}$$

Sauva $\boxed{2}-\boxed{3}$:

$$\varphi_{23}=\frac{L}{3\cdot 2EI}M_{23}-\frac{L}{6\cdot 2EI}M_{32}+\overbrace{\psi_{23}}^{0}+\alpha_{23}^{0}=\frac{L}{6EI}M_{23}-\frac{L}{12EI}M_{32}+\frac{PL^2}{16\cdot 2EI}$$
$$=\frac{L}{6EI}M_{23}-\frac{L}{12EI}M_{32}+\frac{PL^2}{32EI}$$
$$\varphi_{32}=\frac{L}{3\cdot 2EI}M_{32}-\frac{L}{6\cdot 2EI}M_{23}+\overbrace{\psi_{32}}^{0}+\alpha_{32}^{0}=\frac{L}{6EI}M_{32}-\frac{L}{12EI}M_{23}-\frac{PL^2}{16\cdot 2EI}$$
$$=\frac{L}{6EI}M_{32}-\frac{L}{12EI}M_{23}-\frac{PL^2}{32EI} \tag{c2}$$

Kierrejousen yhtälö:

$$\varphi_J=\frac{M_J}{k}=\frac{L}{4EI}M_J \tag{d}$$

Sijoittamalla kiertymien lausekkeet (c) ja (d) yhteensopivuusehtoihin (b) ja ottamalla huomioon tasapainoehdoista saadut momenttien M_{12}, M_{21} ja M_J lausekkeet (a) saadaan

$$\begin{cases}\dfrac{L}{3EI}\overbrace{M_{21}}^{-M_{23}}-\dfrac{L}{6EI}\overbrace{M_{12}}^{0}-\dfrac{PL^2}{24EI}=\dfrac{L}{6EI}M_{23}-\dfrac{L}{12EI}M_{32}+\dfrac{PL^2}{32EI}\\ \dfrac{L}{6EI}M_{32}-\dfrac{L}{12EI}M_{23}-\dfrac{PL^2}{32EI}=\dfrac{L}{4EI}\overbrace{M_J}^{-M_{32}}\end{cases}$$

$\Rightarrow$

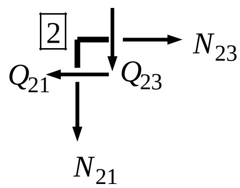
$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}M_{23}-\dfrac{1}{12}M_{32}=-\dfrac{7}{96}PL\\ -\dfrac{1}{12}M_{23}+\dfrac{5}{12}M_{32}=\dfrac{1}{32}PL\end{cases}$$

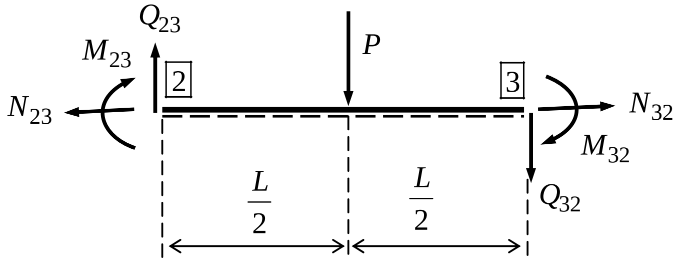
Ratkaisemalla yhtälöryhmä, saadaan sauvanpäämomenteille M_{23} ja M_{32} tulokset

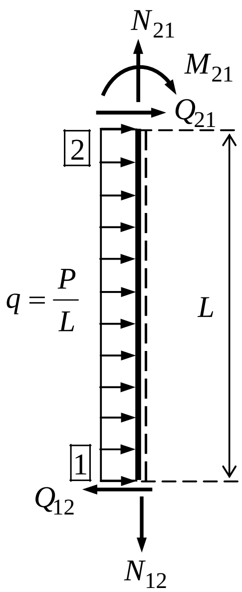
$$M_{23}=-\frac{4}{29}PL=\underline{\underline{-0{,}138PL}},\quad M_{32}=\frac{11}{232}PL=\underline{\underline{0{,}047PL}}.$$

Edelleen saadaan $M_{21}=-M_{23}=0{,}138PL$.

Määritetään sauvanpääleikkausvoimat ja sauvanpäänormaalivoimat:







Sauvanpääleikkausvoimat:

Sauva 1-2:

$$1\circlearrowright \quad Q_{21}L + \overbrace{M_{21}}^{0{,}138PL} + \overbrace{q}^{P}L \cdot \frac{L}{2} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{21} = -0{,}638P,$$

$$2\circlearrowright \quad Q_{12}L + \overbrace{M_{21}}^{0{,}138PL} - \overbrace{q}^{P}L \cdot \frac{L}{2} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{12} = 0{,}362P.$$

Sauva 2-3:

$$2\circlearrowright \quad Q_{32}L + \overbrace{M_{23}}^{-0{,}138PL} + \overbrace{M_{32}}^{0{,}047PL} + P \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\Rightarrow\; Q_{32} = -0{,}409P,$$

$$3\circlearrowright \quad Q_{23}L + \overbrace{M_{23}}^{-0{,}138PL} + \overbrace{M_{32}}^{0{,}047PL} + P \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\Rightarrow\; Q_{23} = 0{,}591P.$$

Sauvanpäänormaalivoimat:

Nurkka $\boxed{2}$:

$$\rightarrow\; N_{23} - \overbrace{Q_{21}}^{-0{,}638P} = 0 \;\Rightarrow\; N_{23} = -0{,}638P,$$

$$\downarrow\; N_{21} + \overbrace{Q_{23}}^{0{,}591P} = 0 \;\Rightarrow\; N_{21} = -0{,}591P.$$

Sauva $\boxed{1} - \boxed{2}$:

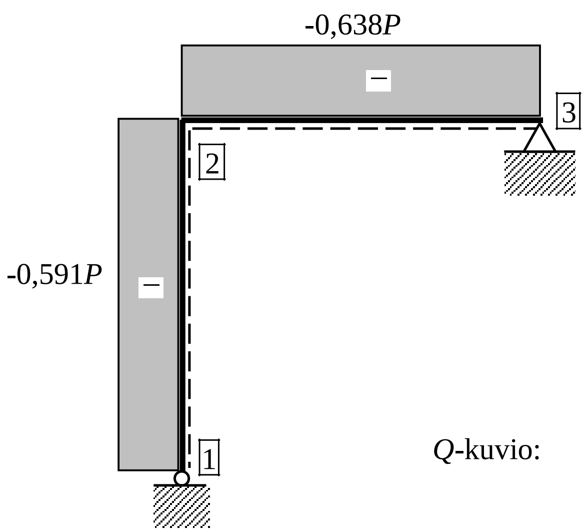
$$\downarrow\; \overbrace{N_{21}}^{-0{,}591P} - N_{12} = 0 \;\Rightarrow\; N_{12} = -0{,}591P.$$

Sauva $\boxed{2} - \boxed{3}$:

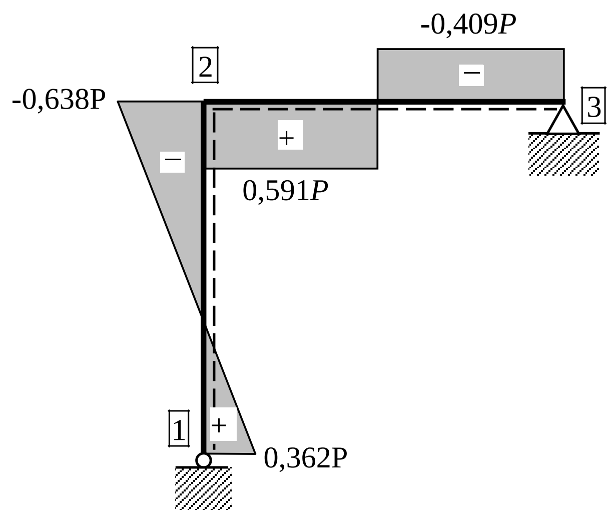
$$\rightarrow\; -\overbrace{N_{23}}^{-0{,}638P} + N_{32} = 0 \;\Rightarrow\; N_{32} = -0{,}638P.$$

Nyt, kun kaikki sauvanpäänormaalivoimat, sauvanpääleikkausvoimat ja sauvanpäämomentit tunnetaan, on normaalivoima-, leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuviot helppo määrittää käyttäen hyväksi sauvojen vapaakappalekuvioita.

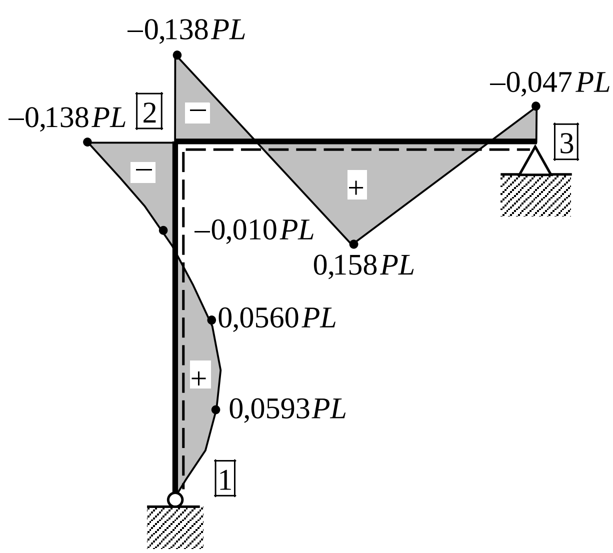
N-kuvio:



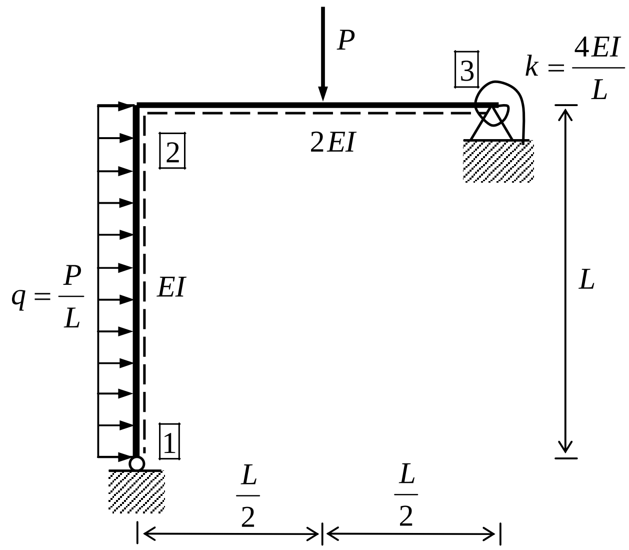
Q-kuvio:



M-kuvio:

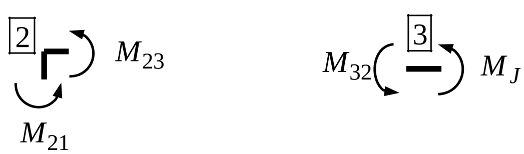


Esimerkki 4.8: Ratkaistaan oheinen kehä kulmanmuutosmenetelmällä ja piirretään taivutusmomenttikuvio.



Siirtyvyyden kertaluku: $n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 3 - 4 - 2 = 0 \;\Rightarrow$ siirtymätön.
Tasapainoehdot:

$$
\begin{aligned}
&\text{Nurkka } \boxed{1}\text{: } M_{12} = 0 \text{ (nivel)} \\
&\text{Nurkka } \boxed{2}\text{: } M_{21} + M_{23} = 0 \\
&\text{Nurkka } \boxed{3}\text{: } M_{32} + M_{j} = 0
\end{aligned}
\qquad \text{(a)}
$$



Yhteensopivuusehdot:

$$
\begin{aligned}
&\text{Nurkka } \boxed{2}\text{: } \varphi_{21} = \varphi_{23} = \varphi_2 \\
&\text{Nurkka } \boxed{3}\text{: } \varphi_{32} = \varphi_J = \varphi_3
\end{aligned}
\qquad \text{(b)}
$$

Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt (tasapainoehdoissa esiintyville momenteille):

Sauva $\boxed{1} - \boxed{2}$:

$$
\begin{aligned}
M_{21} &= \frac{3EI}{L}\varphi_{21} - \frac{3EI}{L}\overbrace{\psi_{21}}^{0} + MK_{21}^{0} = \frac{3EI}{L}\varphi_{21} + \frac{\overbrace{q}^{P/L}\,L^2}{8} \\
&= \frac{3EI}{L}\varphi_{21} - \frac{PL}{8}
\end{aligned}
\qquad \text{(c1)}
$$

Sauva $\boxed{2}-\boxed{3}$:

$$M_{23} = \frac{4\cdot 2EI}{L}\varphi_{23} + \frac{2\cdot 2EI}{L}\varphi_{32} - \frac{6\cdot 2EI}{L}\overbrace{\psi_{23}}^{0} + MK_{23} = \frac{8EI}{L}\varphi_{23} + \frac{4EI}{L}\varphi_{32} - \frac{PL}{8}$$
$$M_{32} = \frac{4\cdot 2EI}{L}\varphi_{32} + \frac{2\cdot 2EI}{L}\varphi_{23} - \frac{6\cdot 2EI}{L}\overbrace{\psi_{32}}^{0} + MK_{32} = \frac{8EI}{L}\varphi_{32} + \frac{4EI}{L}\varphi_{23} + \frac{PL}{8} \qquad \text{(c2)}$$

Kierrejousen yhtälö:

$$M_J = k\varphi_J = \frac{4EI}{L}\varphi_J \qquad \text{(d)}$$

Sijoittamalla momenttien lausekkeet (c) ja (d) tasapainoehtoihin (a) ja ottamalla huomioon yhteensopivuusehdot (b) saadaan

$$\frac{3EI}{L}\overbrace{\varphi_{21}}^{\varphi_2} + \frac{PL}{8} + \frac{8EI}{L}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2} + \frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_{32}}^{\varphi_3} - \frac{PL}{8} = 0$$
$$\frac{8EI}{L}\overbrace{\varphi_{32}}^{\varphi_3} + \frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2} + \frac{PL}{8} + \frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_J}^{\varphi_3} = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{11EI}{L}\varphi_2 + \frac{4EI}{L}\varphi_3 = 0$$
$$\frac{4EI}{L}\varphi_2 + \frac{12EI}{L}\varphi_3 = -\frac{PL}{8}$$

Ratkaisemalla yhtälöryhmä, saadaan nurkkakiertymille φ_2 ja φ_3 tulokset

$$\varphi_2 = \frac{1}{232}\frac{PL^2}{EI}, \ \varphi_3 = -\frac{11}{928}\frac{PL^2}{EI}.$$

Sijoittamalla lausekkeisiin (c) ja (d) saadaan sauvanpäämomenteille ja jousimomentille

$$M_{21} = \frac{3EI}{L}\overbrace{\varphi_{21}}^{\varphi_2} + \frac{PL}{8} = \frac{3EI}{L}\cdot\frac{1}{232}\frac{PL^2}{EI} + \frac{PL}{8} = \underline{\underline{\frac{4}{29}PL}}$$
$$M_{23} = \frac{8EI}{L}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2} + \frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_{32}}^{\varphi_3} - \frac{PL}{8} = \frac{8EI}{L}\cdot\frac{1}{232}\frac{PL^2}{EI} + \frac{4EI}{L}\cdot(-\frac{11}{928}\frac{PL^2}{EI}) - \frac{PL}{8} = \underline{\underline{-\frac{4}{29}PL}}$$
$$M_{32} = \frac{8EI}{L}\overbrace{\varphi_{32}}^{\varphi_3} + \frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_3} + \frac{PL}{8} = \frac{8EI}{L}\cdot(-\frac{11}{928}\frac{PL^2}{EI}) + \frac{4EI}{L}\cdot\frac{1}{232}\frac{PL^2}{EI} + \frac{PL}{8} = \underline{\underline{\frac{11}{232}PL}}$$
$$M_J = \frac{4EI}{L}\cdot(-\frac{11}{928}\frac{PL^2}{EI}) = \underline{\underline{-\frac{11}{232}PL}}$$

Nähdään, että saadut momentit toteuttavat tasapainoehdot (a).

Nyt voidaan taivutusmomenttikuvio piirtää. Tasaisen kuorman $q = P/L$ kuormittaman vapaastituetun palkin taivutusmomentin arvoille palkin neljännespisteissä saadaan helposti (ei määritetä tässä) arvot

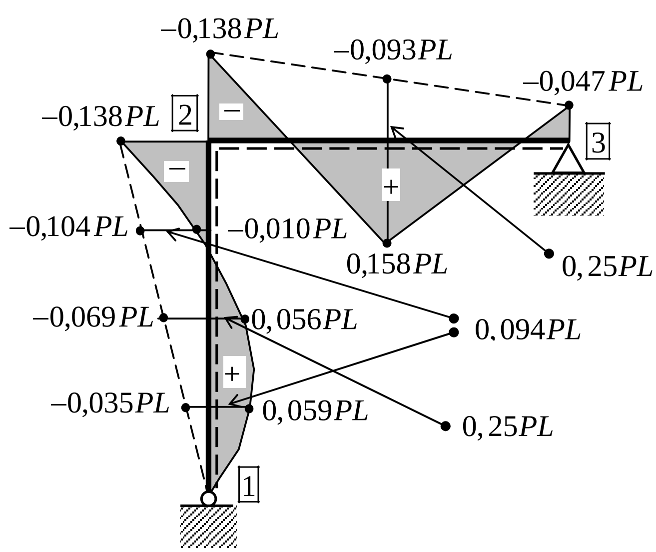
$$M(\frac{L}{4}) = M(\frac{3}{4}L) = \frac{3}{32}PL \approx 0{,}094PL\,,\quad M(\frac{L}{2}) = \frac{PL}{8} = 0{,}125PL$$

ja palkin keskipisteessä olevan pistekuorman P kuormittaman vapaastituetun palkin taivutusmomentin arvolle kuorman kohdalla saadaan

$$M(\frac{L}{2}) = \frac{PL}{4} = 0{,}25PL\,.$$

Lisäämällä nämä oordinaatat vastaaviin sulkuviivan oordinaattaarvoihin (merkitty kuvaan) sadaan taivutusmomentin arvot ko. pisteissä määritetyksi ja oheinen taivutusmomenttikuvio piirretyksi.

M-kuvion konstruointi:



4.4 Sivusiirtyvyyden kertaluku

Momenttimenetelmään ja kulmanmuutosmenetelmään liittyy oleellisesti käsite **sivusiirtyvyys** tai lyhyemmin **siirtyvyys.** Kehärakennetta sanotaan **sivusiirtymättömäksi**, jos sen ”nurkat” (sauvan päät ja niiden yhtymäkohdat) eivät pääse siirtymään. Muussa tapauksessa rakenne on **sivusiirtyvä**. Rakenteen **sivusiirtyvyyden kertaluku** on sen **nurkkien riippumattomien siirtymävapausasteiden lukumäärä**. Kehärakenteen sivusiirtyvyyttä voidaan havainnollistaa ajattelemalla sen sauvat korvatuiksi jäykillä nivelsauvoilla (ristikkosauvoilla) ja tutkimalla näin syntyneen **nivelmekanismin** kinematiikkaa. **Sivusiirtyvyyden kertaluku** n_{sii} on nivelmekanismin riippumattomien vapausasteiden (yleistettyjen siirtymien) lukumäärä.

Tasokehän kuhunkin nurkkaan $\boxed{i}$ liittyy kaksi siirtymävapausastetta nimittäin siirtymäkomponentit u_i ja v_i. Nurkkien siirtymäkomponentteja on siten yhteensä $2k$ kappaletta, missä k on nurkkien (=nivelmekanismin nivelten) lukumäärä. Kukin yksiarvoinen tuenta vähentää yhden siirtymävapausasteen, joten tuennoista aiheutuva siirtymävapausasteiden vähennys on yhtä suuri kuin yksiarvoisten tukien lukumäärä t. Koska sauvat otaksutaan aksiaalisesti jäykiksi ($EA = \infty$), jäljellä olevia nurkkien siirtymävapausasteita sitoo yksi rajoiteyhtälö kutakin sauvaa kohti. Jos sauvojen lukumäärää merkitään symbolilla s, tasokehärakenteen sivusiirtyvyyden kertaluvulle saadaan näin kaava

$$\boxed{n_{\text{sii}} = 2k - t - s.} \tag{4.21}$$

Vertaamalla tätä tasoristikon staattisen määräämättömyyden kertaluvun n_s kaavaan (1.10) nähdään, että $n_{\text{sii}} = -n_s$ eli tasokehän sivusiirtyvyyden kertaluku on yhtä suuri kuin vastaavan **tasoristikon staattisen määräämättömyyden kertaluvun vastaluku**.

Kuvassa 4.8 on esimerkkejä palkin ja kuvassa 4.9 tasokehän sivusiirtyvyyden kertaluvun määrittämisestä.

Palkki: Nivelmekanismi:

(a)

$$n_{sii} = 2k - t - s = 2 \cdot 3 - 4 - 2 = \underline{\underline{0}} \;\Rightarrow\; \text{Sivusiirtymätön.}$$

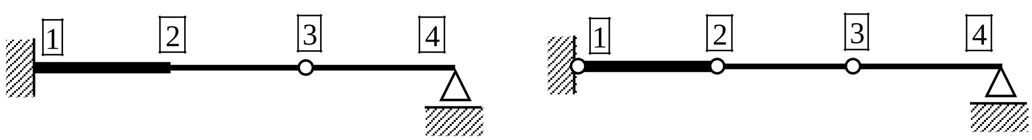
(b)

$$n_{sii} = 2k - t - s = 2 \cdot 3 - 3 - 2 = \underline{\underline{1}}$$

(c)

$$n_{sii} = 2k - t - s = 2 \cdot 3 - 3 - 2 = \underline{\underline{1}}$$

(d)



$$n_{sii} = 2k - t - s = 2 \cdot 4 - 3 - 3 = \underline{\underline{2}}$$

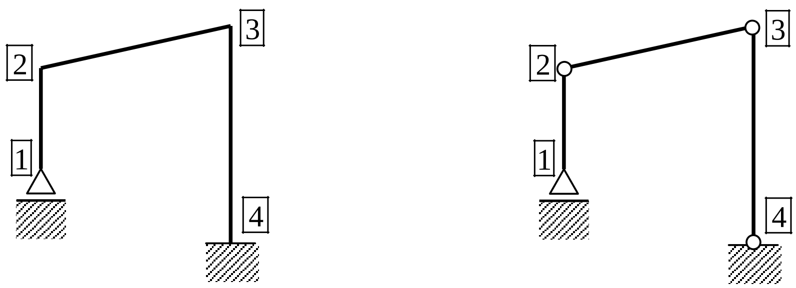
Kuva 4.8: Esimerkkejä palkin sivusiirtyvyyden kertaluvun määrittämisestä

Kehä: Nivelmekanismi:

(a)

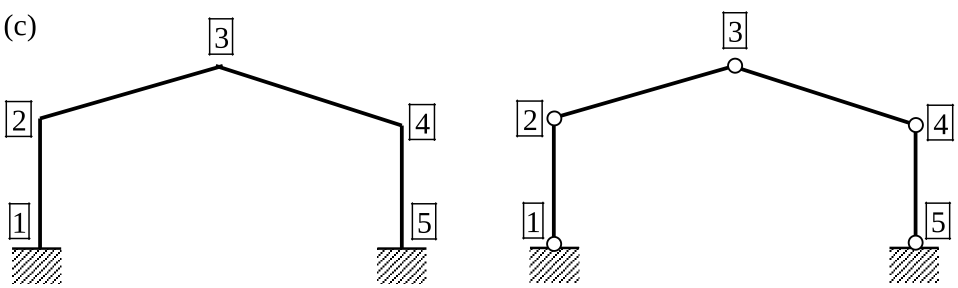
$$n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 3 - 4 - 2 = \underline{\underline{0}} \;\Rightarrow\; \text{Sivusiirtymätön.}$$

(b)



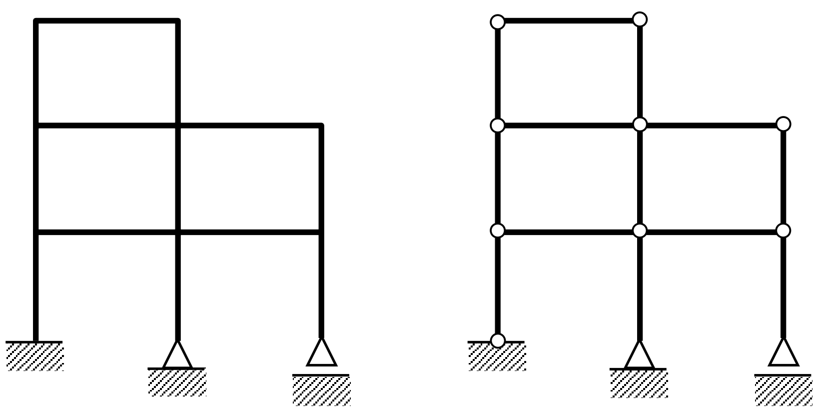
$$n_{sii} = 2k - t - s = 2 \cdot 4 - 3 - 3 = \underline{\underline{2}}$$

(c)



$$n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 5 - 4 - 4 = \underline{\underline{2}}$$

(d)



$$n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 11 - 5 - 13 = \underline{\underline{4}}$$

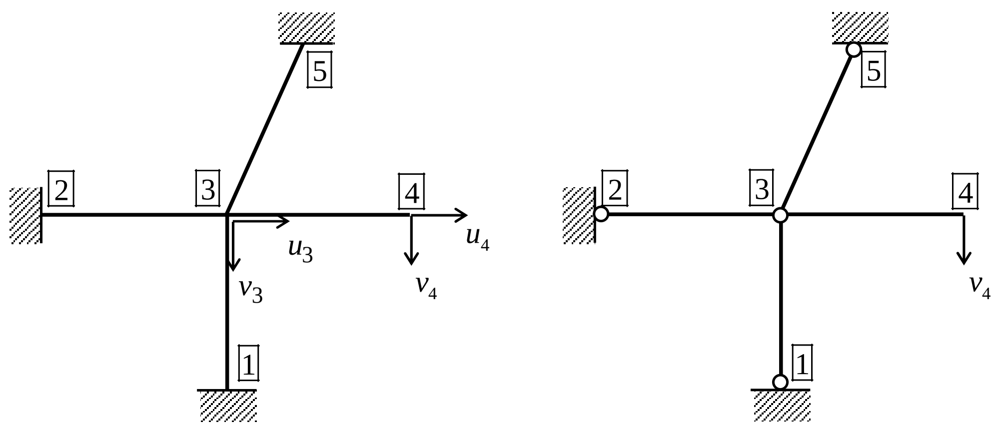
Kuva 4.9: Esimerkkejä tasokehän sivusiirtyvyyden kertaluvun määrittämisestä

Kaava (4.21) sivusiirtyvyyden kertaluvun määrittämiseksi ei kuitenkaan ole yleispätevä. Esimerkiksi kuvan 4.10 tapauksessa saataisiin

$$n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 5 - 6 - 4 = 0\,,$$

eli sivusiirtyvyyden kertaluvuksi tulisi 0. Sen oikea arvo on kuitenkin 1. Tämä voidaan selittää seuraavasti. Tuennat estävät nurkkien $\boxed{1}$, $\boxed{5}$ ja $\boxed{5}$ siirtymät. Nurkkaan $\boxed{3}$ liittyvät 3 (aksiaalisesti jäykkää) sauvaa estävä siirtymät u_3 ja v_3. Tämän lisäksi vaakasuora sauva $\boxed{3}-\boxed{4}$ estää vaakasiirtymän u_4. Pystysiirtymä v_4 jää kuitenkin jäljelle, joten kehän sivusiirtyvyyden kertaluvuksi tulee olla $n_{\text{sii}} = 1$.

Kehä: Nivelmekanismi:



Kuva 4.10: Nelisauvainen kehä

Jatkossa käy ilmi, että sivusiirtyvän kehän riippumattomiksi siirtymävapausasteiksi on tarkoituksenmukaista valita ns. **riippumattomat sauvakiertymät** ja niiden määrittäminen muodostaa osan siirtyvän kehän ratkaisuprosessia. Täten kehän siirtyvyyden kertaluku (=riippumattomien sauvakiertymien lukumäärä) määräytyy täsmällisemmin osana ratkaisuprosessia.

4.5 Sivusiirtymättömien rakenteiden ratkaiseminen momentti- ja kulmanmuutosmenetelmällä

4.51 Sivusiirtymättömyys

Jos rakenne on **sivusiirtymätön,** ts. sivusiirtyvyyden kertaluku n_{sii} on nolla, kaikkien sauvojen sauvanpääsiirtymille pätee $v_{ij} = 0$. Tällöin **kaikkien sauvojen sauvakiertymät** $\psi_{ij} = (v_{ij} - v_{ji}) / L$ **häviävät.** Momenttimenetelmän perusyhtälöt (4.6) ovat tällöin

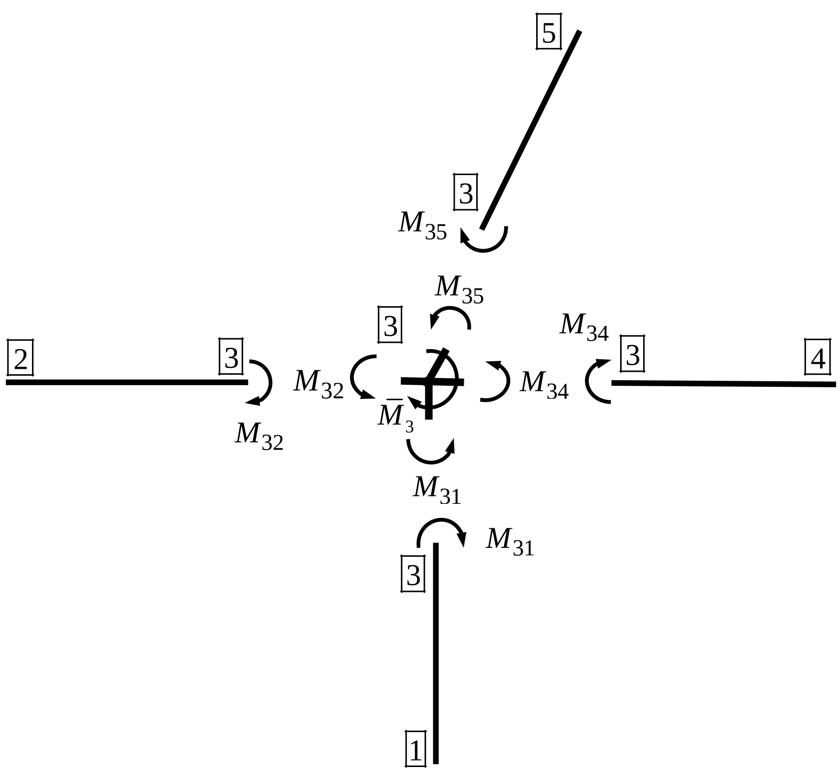
$$\varphi_{ij} = \alpha_{ij} M_{ij} - \beta_{ij} M_{ji} + \alpha_{ij}^{0}, \quad i \neq j$$

ja kulmanmuutosmenetelmän perusyhtälöt (4.11) ja (4.14) vastaavasti

$$M_{ij} = a_{ij}\varphi_{ij} + b_{ij}\varphi_{ji} + MK_{ij}, \quad i \neq j \text{ , tai } M_{ij} = a_{ij}^{0}\varphi_{ij} + MK_{ij}^{0}, \quad i \neq j \, .$$

4.52 Muodostettavat yhtälöt

Yhtälöt siirtymättömän kehän ratkaisemiseksi saadaan (a) muodostamalla kehän nurkille **sauvanpäämomenttien** M_{ij} **välisiä tasapainoyhtälöitä**, (b) muodostamalla kehän nurkille **sauvanpääkiertymien** φ_{ij} **välisiä yhteensopivuusehtoja sekä** (c) kirjoittamalla kehän sauvoille **momenttimenetelmän tai kulmanmuutosmenetelmän perusyhtälöitä.**



Kuva 4.11: Sauvan nurkan tasapainoyhtälön muodostaminen

Kuvan 4.11 esimerkki valaisee kehän **nurkan tasapainoyhtälön syntymistä**. Nurkka $\boxed{3}$ ajatellaan irrotetuksi siihen liittyvistä sauvoista, jolloin sen momenttitasapaino-yhtälöksi tulee

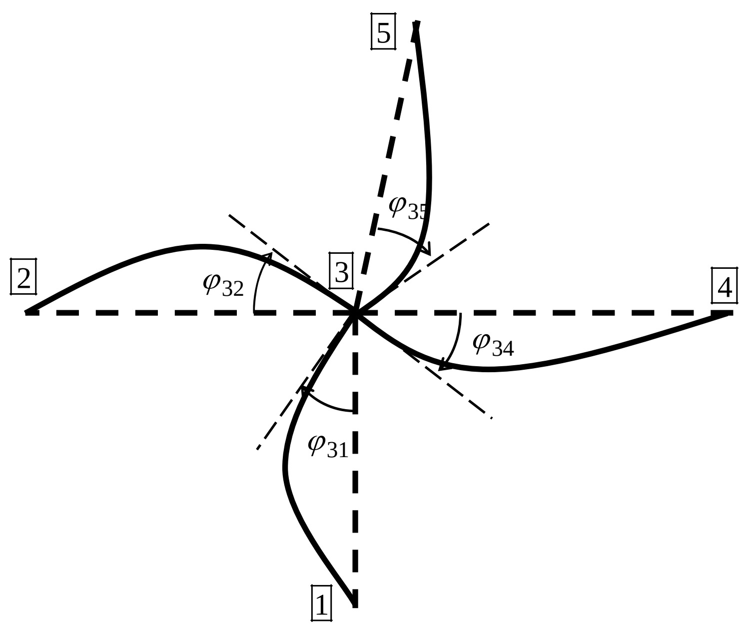
$$M_{31} + M_{32} + M_{34} + M_{35} = \bar{M}_3 ,$$

missä $\bar{M}_3$ on mahdollinen nurkkaan $\boxed{3}$ kohdistuva ulkoinen momentti. (Jos nurkkaan liittyy sauvojen lisäksi kierrejousi, jonka jousimomentti on M_J, nurkan momentti-tasapainoyhtälöksi tulee $M_{31} + M_{32} + M_{34} + M_{35} + M_J = \bar{M}_3$.)

Kuvan 4.12 esimerkki valaisee kehän **nurkan** sauvanpääkiertymien välisten **yhteensopivuusehtojen** syntymistä. Yhteensopivuusehdoiksi nurkassa $\boxed{3}$ saadaan

$$\varphi_{31} = \varphi_{32} = \varphi_{34} = \varphi_{35} = \varphi_3 ,$$

missä φ_3 nurkan kiertymä. (Jos nurkkaan liittyy sauvojen lisäksi kierrejousi, myös sen kiertymälle saadaan ehto $\varphi_J = \varphi_3$.)

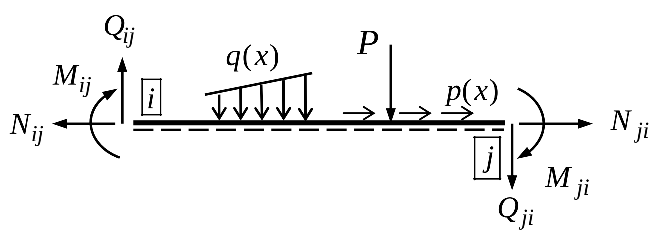


Kuva 4.12: Sauvan nurkan yhteensopivuusehtojen muodostaminen (siirtymät liioitellun suuria)

4.53 Taivutusmomentti- ja leikkausvoima- ja normaalivoimakuvioiden määrittäminen

Kun kehäprobleema on ratkaistu momenttimenetelmällä, kunkin sauvan $\boxed{i}-\boxed{j}$ **sauvanpäämomentit** M_{ij} **tunnetaan**. Myös kulmanmuutosmenetelmässä ne voidaan ko. perusyhtälöiden avulla helposti laskea. Seuraavassa kaavaillaan lyhyesti, kuinka sauvan taivutusmomentti- leikkausvoima- ja normaalivoimakuviot voidaan tämän jälkeen määrittää.

Tarkastelemalla sauvan vapaakappalekuviota (kuva 4.13) voidaan sen sauvanpääleikkausvoimat Q_{ij} ja Q_{ji} määrittää helposti kirjoittamalla momenttitasapainoehdot päiden $\boxed{j}$ ja $\boxed{i}$ suhteen. Kun nämä tunnetaan, meillä on sauva, jonka leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuviot voidaan määrittää tavanomaiseen tapaan. Sauvanpäänormaalivoimien N_{ij} ja N_{ji} määrittäminen ei yleisessä tapauksessa onnistu pelkkiä sauvojen tasapainoehtoja käyttäen, vaan joudutaan myös muodostamaan nurkkien tasapainoehtoja. Kun kunkin sauvan sauvanpäänormaalivoimat on saatu määritetyksi, sauvojen normaalivoimakuviot saadaan myös tavanomaiseen tapaan.



Kuva 4.13: Sauvan vapaakappalekuvio

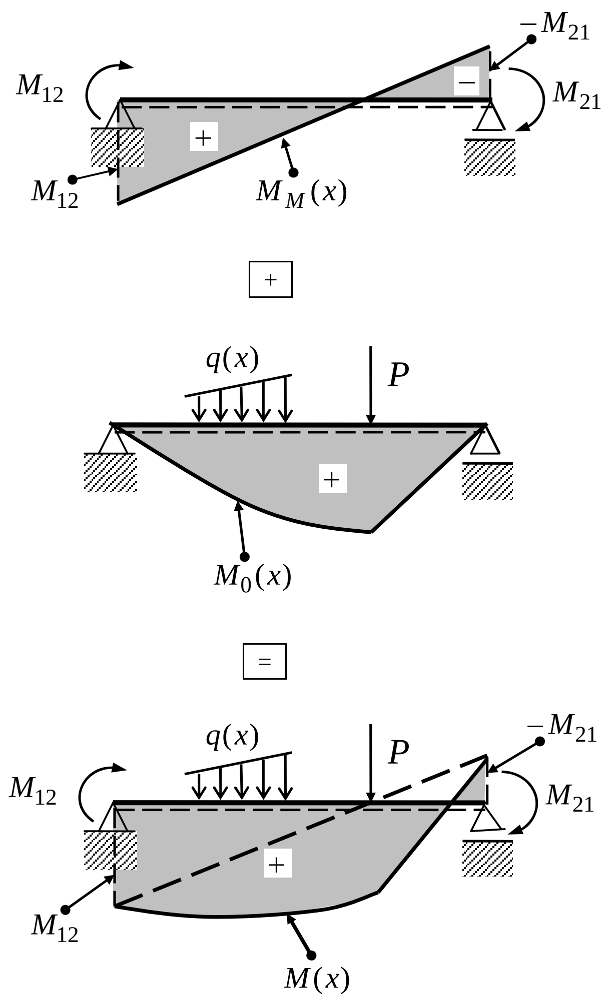
Jos määritettävänä on pelkkä **taivutusmomentti** $M(x)$, voidaan myös menetellä seuraavasti. Ajatellaan sen koostuvan kahdesta osasta: (a) sauvanpäämomenttien M_{12} ja M_{21} kuormittaman vapaastituetun palkin taivutusmomentista

$$M_M(x) = M(0)(1-\frac{x}{L}) + M(L)\frac{x}{L} = M_{12}(1-\frac{x}{L}) - M_{21}\frac{x}{L}$$

ja (b) ulkoisen kuormituksen kuormittaman vapaastituetun palkin taivutusmomentista $M_0(x)$. Sauvan taivutusmomentti on siis näiden summa ts.

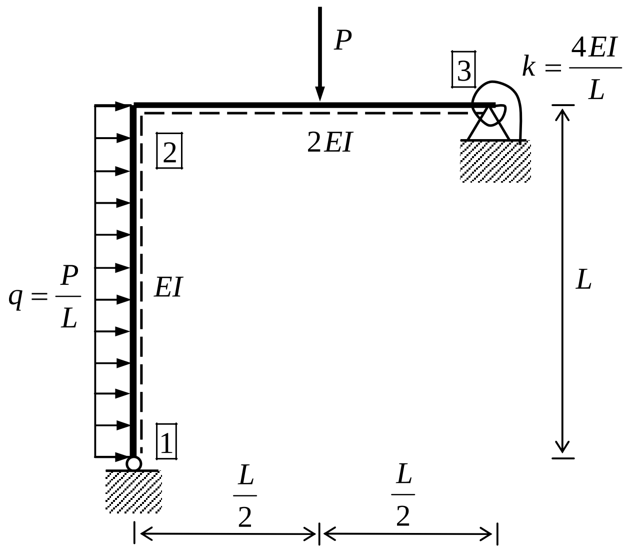
$$M(x) = M_{12}(1-\frac{x}{L}) - M_{21}\frac{x}{L} + M_0(x).$$

Kuva 4.14 havainnollistaa tilannetta. Nähdään, että taivutusmomentti saadaan käytännössä piirtämällä sauvanpäissä olevien taivutusmomentin arvojen $M(0) = M_{12}$ ja $M(L) = -M_{21}$ kautta suora (ns. sulkuviiva), joka kuvaa taivutusmomenttia $M_M(x)$. Siihen lisätään sitten ulkoisen kuormituksen kuormittaman vapaastituetun palkin taivutusmomenttikuvio $M_0(x)$.



Kuva 4.14: Taivutusmomenttikuvion määrittäminen momentti- ja kulmanmuutosmenetelmissä.

Esimerkki 4.7: Ratkaistaan oheinen kehä momenttimenetelmällä ja piirretään normaalivoima-, leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuviot.



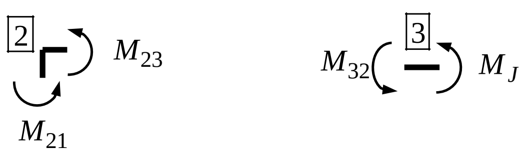
Siirtyvyyden kertaluku: $n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 3 - 4 - 2 = 0 \;\Rightarrow$ siirtymätön.

Tasapainoehdot:

Nurkka $\boxed{1}$: $M_{12} = 0$ (nivel)

Nurkka $\boxed{2}$: $M_{21} + M_{23} = 0 \;\Rightarrow\; M_{21} = -M_{23}$ (a)

Nurkka $\boxed{3}$: $M_{32} + M_J = 0 \;\Rightarrow\; M_J = -M_{32}$



Yhteensopivuusehdot:

Nurkka $\boxed{2}$: $\varphi_{21} = \varphi_{23}$

Nurkka $\boxed{3}$: $\varphi_{32} = \varphi_J$ (b)

Momenttimenetelmän yhtälöt (yhteensopivuusehdoissa esiintyville kiertymille):

Sauva $\boxed{1} - \boxed{2}$:

$$\varphi_{21} = \frac{L}{3EI} M_{21} - \frac{L}{6EI} M_{12} + \overbrace{\psi_{21}}^{0} + \alpha_{21}^{0} = \frac{L}{3EI} M_{21} - \frac{L}{6EI} M_{12} - \frac{\overbrace{q}^{P/L} L^3}{24EI} \qquad \text{(c1)}$$

$$= \frac{L}{3EI} M_{21} - \frac{L}{6EI} M_{12} - \frac{PL^2}{24EI}$$

Sauva $\boxed{2}-\boxed{3}$:

$$\varphi_{23}=\frac{L}{3\cdot 2EI}M_{23}-\frac{L}{6\cdot 2EI}M_{32}+\overbrace{\psi_{23}}^{0}+\alpha_{23}^{0}=\frac{L}{6EI}M_{23}-\frac{L}{12EI}M_{32}+\frac{PL^2}{16\cdot 2EI}$$
$$=\frac{L}{6EI}M_{23}-\frac{L}{12EI}M_{32}+\frac{PL^2}{32EI}$$
$$\varphi_{32}=\frac{L}{3\cdot 2EI}M_{32}-\frac{L}{6\cdot 2EI}M_{23}+\overbrace{\psi_{32}}^{0}+\alpha_{32}^{0}=\frac{L}{6EI}M_{32}-\frac{L}{12EI}M_{23}-\frac{PL^2}{16\cdot 2EI}$$
$$=\frac{L}{6EI}M_{32}-\frac{L}{12EI}M_{23}-\frac{PL^2}{32EI} \tag{c2}$$

Kierrejousen yhtälö:

$$\varphi_J=\frac{M_J}{k}=\frac{L}{4EI}M_J \tag{d}$$

Sijoittamalla kiertymien lausekkeet (c) ja (d) yhteensopivuusehtoihin (b) ja ottamalla huomioon tasapainoehdoista saadut momenttien M_{12}, M_{21} ja M_J lausekkeet (a) saadaan

$$\begin{cases}\dfrac{L}{3EI}\overbrace{M_{21}}^{-M_{23}}-\dfrac{L}{6EI}\overbrace{M_{12}}^{0}-\dfrac{PL^2}{24EI}=\dfrac{L}{6EI}M_{23}-\dfrac{L}{12EI}M_{32}+\dfrac{PL^2}{32EI}\\[2ex] \dfrac{L}{6EI}M_{32}-\dfrac{L}{12EI}M_{23}-\dfrac{PL^2}{32EI}=\dfrac{L}{4EI}\overbrace{M_J}^{-M_{32}}\end{cases}$$

$\Rightarrow$

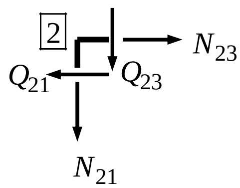
$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}M_{23}-\dfrac{1}{12}M_{32}=-\dfrac{7}{96}PL\\[2ex] -\dfrac{1}{12}M_{23}+\dfrac{5}{12}M_{32}=\dfrac{1}{32}PL\end{cases}$$

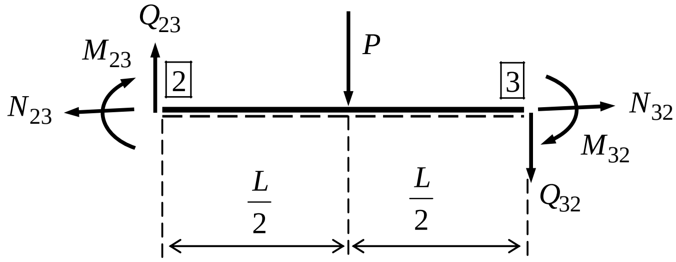
Ratkaisemalla yhtälöryhmä, saadaan sauvanpäämomenteille M_{23} ja M_{32} tulokset

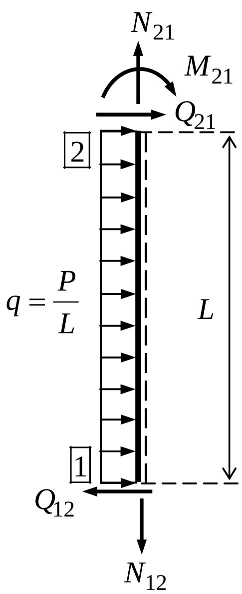
$$M_{23}=-\frac{4}{29}PL=\underline{\underline{-0{,}138PL}},\; M_{32}=\frac{11}{232}PL=\underline{\underline{0{,}047PL}}.$$

Edelleen saadaan $M_{21}=-M_{23}=0{,}138PL$.

Määritetään sauvanpääleikkausvoimat ja sauvanpäänormaalivoimat:







Sauvanpääleikkausvoimat:

Sauva 1-2:

$$1\circlearrowright \quad Q_{21}L + \overbrace{M_{21}}^{0,138PL} + \overbrace{q}^{P}L \cdot \frac{L}{2} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{21} = -0{,}638P,$$

$$2\circlearrowright \quad Q_{12}L + \overbrace{M_{21}}^{0,138PL} - \overbrace{q}^{P}L \cdot \frac{L}{2} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{12} = 0{,}362P.$$

Sauva 2-3:

$$2\circlearrowright \quad Q_{32}L + \overbrace{M_{23}}^{-0,138PL} + \overbrace{M_{32}}^{0,047PL} + P \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\Rightarrow\; Q_{32} = -0{,}409P,$$

$$3\circlearrowright \quad Q_{23}L + \overbrace{M_{23}}^{-0,138PL} + \overbrace{M_{32}}^{0,047PL} + P \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\Rightarrow\; Q_{23} = 0{,}591P.$$

Sauvanpäänormaalivoimat:

Nurkka $\boxed{2}$:

$$\rightarrow\; N_{23} - \overbrace{Q_{21}}^{-0,638P} = 0 \;\Rightarrow\; N_{23} = -0{,}638P,$$

$$\downarrow\; N_{21} + \overbrace{Q_{23}}^{0,591P} = 0 \;\Rightarrow\; N_{21} = -0{,}591P.$$

Sauva $\boxed{1} - \boxed{2}$:

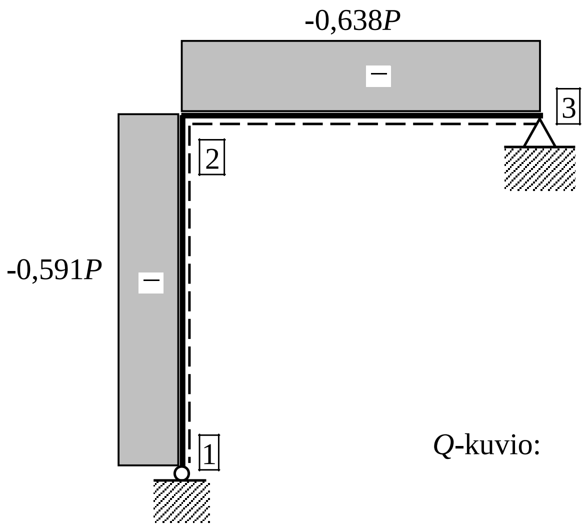
$$\downarrow\; \overbrace{N_{21}}^{-0,591P} - N_{12} = 0 \;\Rightarrow\; N_{12} = -0{,}591P.$$

Sauva $\boxed{2} - \boxed{3}$:

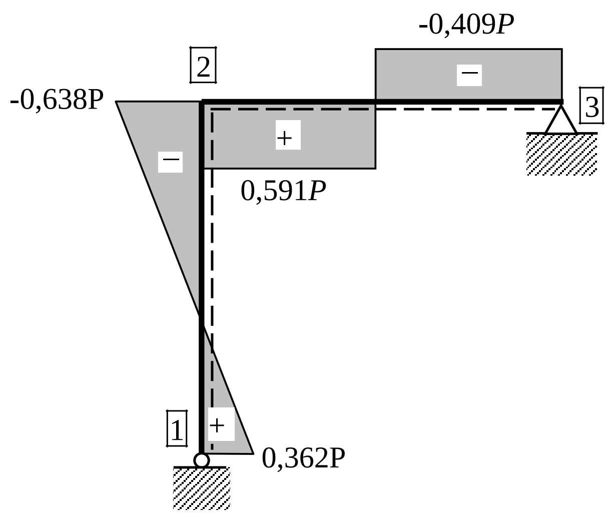
$$\rightarrow\; -\overbrace{N_{23}}^{-0,638P} + N_{32} = 0 \;\Rightarrow\; N_{32} = -0{,}638P.$$

Nyt, kun kaikki sauvanpäänormaalivoimat, sauvanpääleikkausvoimat ja sauvanpäämomentit tunnetaan, on normaalivoima-, leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuviot helppo määrittää käyttäen hyväksi sauvojen vapaakappalekuvioita.

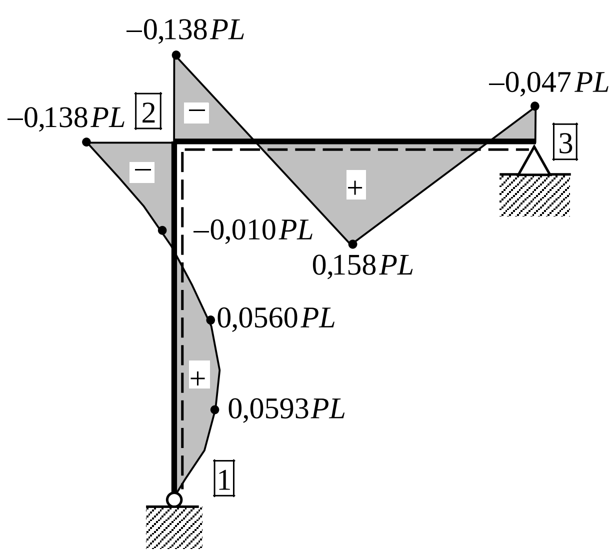
N-kuvio:



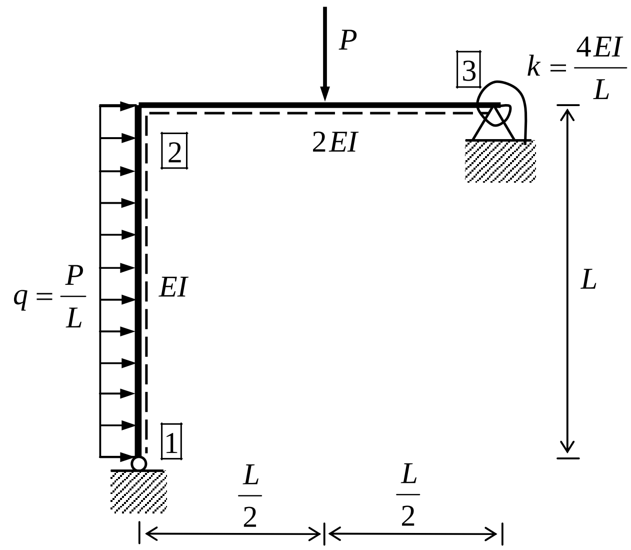
Q-kuvio:



M-kuvio:

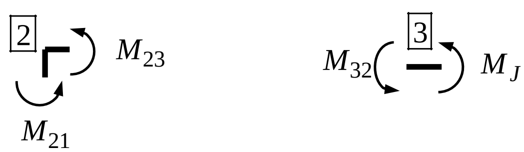


Esimerkki 4.8: Ratkaistaan oheinen kehä kulmanmuutosmenetelmällä ja piirretään taivutusmomenttikuvio.



Siirtyvyyden kertaluku: $n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 3 - 4 - 2 = 0 \;\Rightarrow$ siirtymätön.
Tasapainoehdot:

$$\begin{aligned} &\text{Nurkka } \boxed{1}: M_{12} = 0 \text{ (nivel)} \\ &\text{Nurkka } \boxed{2}: M_{21} + M_{23} = 0 \\ &\text{Nurkka } \boxed{3}: M_{32} + M_{j} = 0 \end{aligned} \tag{a}$$



Yhteensopivuusehdot:

$$\begin{aligned} &\text{Nurkka } \boxed{2}: \varphi_{21} = \varphi_{23} = \varphi_{2} \\ &\text{Nurkka } \boxed{3}: \varphi_{32} = \varphi_{J} = \varphi_{3} \end{aligned} \tag{b}$$

Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt (tasapainoehdoissa esiintyville momenteille):

Sauva $\boxed{1} - \boxed{2}$:

$$\begin{aligned} M_{21} &= \frac{3EI}{L}\varphi_{21} - \frac{3EI}{L}\overbrace{\psi_{21}}^{0} + MK_{21}^{0} = \frac{3EI}{L}\varphi_{21} + \frac{\overbrace{q}^{P/L}\, L^2}{8} \\ &= \frac{3EI}{L}\varphi_{21} - \frac{PL}{8} \end{aligned} \tag{c1}$$

Sauva $\boxed{2}-\boxed{3}$:

$$M_{23}=\frac{4\cdot 2EI}{L}\varphi_{23}+\frac{2\cdot 2EI}{L}\varphi_{32}-\frac{6\cdot 2EI}{L}\overbrace{\psi_{23}}^{0}+MK_{23}=\frac{8EI}{L}\varphi_{23}+\frac{4EI}{L}\varphi_{32}-\frac{PL}{8}$$
$$M_{32}=\frac{4\cdot 2EI}{L}\varphi_{32}+\frac{2\cdot 2EI}{L}\varphi_{23}-\frac{6\cdot 2EI}{L}\overbrace{\psi_{32}}^{0}+MK_{32}=\frac{8EI}{L}\varphi_{32}+\frac{4EI}{L}\varphi_{23}+\frac{PL}{8} \qquad \text{(c2)}$$

Kierrejousen yhtälö:

$$M_J=k\varphi_J=\frac{4EI}{L}\varphi_J \qquad \text{(d)}$$

Sijoittamalla momenttien lausekkeet (c) ja (d) tasapainoehtoihin (a) ja ottamalla huomioon yhteensopivuusehdot (b) saadaan

$$\frac{3EI}{L}\overbrace{\varphi_{21}}^{\varphi_2}+\frac{PL}{8}+\frac{8EI}{L}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2}+\frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_{32}}^{\varphi_3}-\frac{PL}{8}=0$$
$$\frac{8EI}{L}\overbrace{\varphi_{32}}^{\varphi_3}+\frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2}+\frac{PL}{8}+\frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_J}^{\varphi_3}=0$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{11EI}{L}\varphi_2+\frac{4EI}{L}\varphi_3=0$$
$$\frac{4EI}{L}\varphi_2+\frac{12EI}{L}\varphi_3=-\frac{PL}{8}$$

Ratkaisemalla yhtälöryhmä, saadaan nurkkakiertymille φ_2 ja φ_3 tulokset

$$\varphi_2=\frac{1}{232}\frac{PL^2}{EI},\ \varphi_3=-\frac{11}{928}\frac{PL^2}{EI}.$$

Sijoittamalla lausekkeisiin (c) ja (d) saadaan sauvanpäämomenteille ja jousimomentille

$$M_{21}=\frac{3EI}{L}\overbrace{\varphi_{21}}^{\varphi_2}+\frac{PL}{8}=\frac{3EI}{L}\cdot\frac{1}{232}\frac{PL^2}{EI}+\frac{PL}{8}=\underline{\underline{\frac{4}{29}PL}}$$
$$M_{23}=\frac{8EI}{L}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_2}+\frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_{32}}^{\varphi_3}-\frac{PL}{8}=\frac{8EI}{L}\cdot\frac{1}{232}\frac{PL^2}{EI}+\frac{4EI}{L}\cdot(-\frac{11}{928}\frac{PL^2}{EI})-\frac{PL}{8}=\underline{\underline{-\frac{4}{29}PL}}$$
$$M_{32}=\frac{8EI}{L}\overbrace{\varphi_{32}}^{\varphi_3}+\frac{4EI}{L}\overbrace{\varphi_{23}}^{\varphi_3}+\frac{PL}{8}=\frac{8EI}{L}\cdot(-\frac{11}{928}\frac{PL^2}{EI})+\frac{4EI}{L}\cdot\frac{1}{232}\frac{PL^2}{EI}+\frac{PL}{8}=\underline{\underline{\frac{11}{232}PL}}$$
$$M_J=\frac{4EI}{L}\cdot(-\frac{11}{928}\frac{PL^2}{EI})=\underline{\underline{-\frac{11}{232}PL}}$$

Nähdään, että saadut momentit toteuttavat tasapainoehdot (a).

Nyt voidaan taivutusmomenttikuvio piirtää. Tasaisen kuorman $q = P / L$ kuormittaman vapaastituetun palkin taivutusmomentin arvoille palkin neljännespisteissä saadaan helposti (ei määritetä tässä) arvot

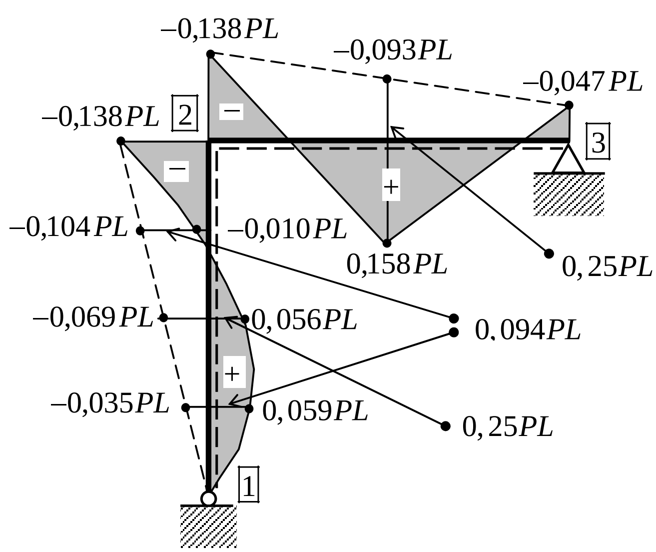
$$M(\frac{L}{4}) = M(\frac{3}{4}L) = \frac{3}{32}PL \approx 0{,}094PL\,,\;\; M(\frac{L}{2}) = \frac{PL}{8} = 0{,}125PL$$

ja palkin keskipisteessä olevan pistekuorman P kuormittaman vapaastituetun palkin taivutusmomentin arvolle kuorman kohdalla saadaan

$$M(\frac{L}{2}) = \frac{PL}{4} = 0{,}25PL\,.$$

Lisäämällä nämä oordinaatat vastaaviin sulkuviivan oordinaattaarvoihin (merkitty kuvaan) sadaan taivutusmomentin arvot ko. pisteissä määritetyksi ja oheinen taivutusmomenttikuvio piirretyksi.

M-kuvion konstruointi:



4.6 Sivusiirtyvien rakenteiden ratkaiseminen

4.61 Aksiaalisesti jäykän sauvan kinematiikkaa

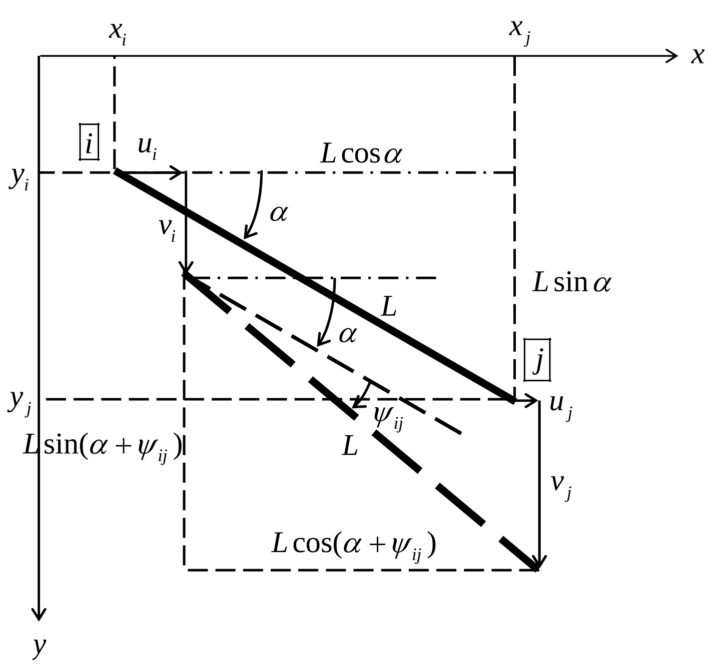
Tarkastellaan kuvan 4.15 aksiaalisesti jäykkää ($EA = \infty$) suoraa sauvaa $\boxed{i} - \boxed{j}$, jolla **ei ole alkuvenymää** (ts. $\varepsilon_0 = 0$) ja jonka pituus L ei näin ollen muutu. Määritetään yhtälöt sen päiden siirtymien u_i, u_j, v_i ja v_j sekä sauvakiertymän ψ_{ij} välille. Kuvan 4.15 perusteella saadaan

$$
\begin{aligned}
L\cos\alpha + u_j &= u_i + L\cos(\alpha + \psi_{ij}),\\
L\sin\alpha + v_j &= v_i + L\sin(\alpha + \psi_{ij})
\end{aligned}
$$

ja edelleen soveltamalla trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavoja

$$
\begin{aligned}
u_j - u_i &= L\cos(\alpha + \psi_{ij}) - L\cos\alpha\\
&= L(\cos\alpha\cos\psi_{ij} - \sin\alpha\sin\psi_{ij}) - L\cos\alpha,\\
v_j - v_i &= L\sin(\alpha + \psi_{ij}) - L\sin\alpha\\
&= L(\sin\alpha\cos\psi_{ij} + \cos\alpha\sin\psi_{ij}) - L\sin\alpha.
\end{aligned}
$$

Otaksumalla sauvakiertymä ψ_{ij} niin pieneksi, että voidaan kirjoittaa $\cos\psi_{ij} \approx 1$ ja $\sin\psi_{ij} \approx \psi_{ij}$**,** saadaan edelleen

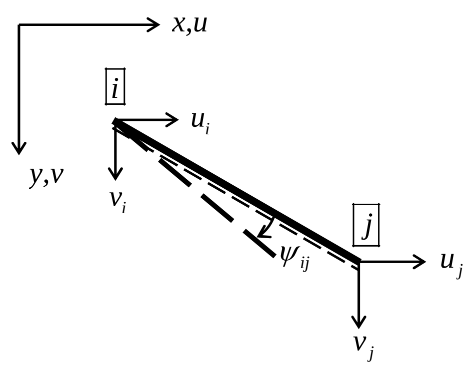


Kuva 4.15: Aksiaalisesti jäykän, venymättömän suoran sauvan kinematiikkaa

$$u_j - u_i = -L\sin\alpha\psi_{ij},$$
$$v_j - v_i = L\cos\alpha\psi_{ij}.$$

Kuvan 4.15 perusteella saadaan lopulta

$$\boxed{\begin{aligned} u_j - u_i &= -(y_j - y_i)\psi_{ij}, \\ v_j - v_i &= (x_j - x_i)\psi_{ij}. \end{aligned}} \tag{4.21}$$



Kuva 4.16: Aksiaalisesti jäykän sauvan päiden siirtymät ja sauvakiertymä.

Kuva 4.16 on kaavojen (4.21) käyttöä selventävä kuva. Siinä on esitetty koordinaattien x ja y, siirtymien u_i, u_j, v_i ja v_j sekä sauvakiertymän ψ_{ij} positiiviset suunnat.

Tarkastellaan vielä aksiaalisesti jäykkää ($EA = \infty$) suoraa sauvaa $\boxed{i} - \boxed{j}$, joka saa vakiosuuruisen[1] **alkuvenymän** ε_0. Tällöin sauva saa **pituudenmuutoksen** $\Delta L = \varepsilon_0 L$ ja sauvan uusi pituus on $L + \Delta L = L(1+\varepsilon_0)$.

Määritetään myös tässä tapauksessa kaavoja (4.21) vastaavat yhtälöt sauvan päiden siirtymien u_i, u_j, v_i ja v_j sekä sauvakiertymän ψ_{ij} välille. Kuvan 4.17 perusteella saadaan

$$L\cos\alpha + u_j = u_i + L(1+\varepsilon_0)\cos(\alpha + \psi_{ij}),$$
$$L\sin\alpha + v_j = v_i + L(1+\varepsilon_0)\sin(\alpha + \psi_{ij})$$

ja edelleen soveltamalla trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavoja

$$\begin{aligned} u_j - u_i &= L(1+\varepsilon_0)\cos(\alpha + \psi_{ij}) - L\cos\alpha \\ &= L(1+\varepsilon_0)(\cos\alpha\cos\psi_{ij} - \sin\alpha\sin\psi_{ij}) - L\cos\alpha, \end{aligned}$$

---

[1] Tarkasteluun voidaan sisällyttää myös alkuvenymä $\varepsilon_0(x)$, joka ei ole vakio, korvaamalla ε_0, alkuvenymän keskimääräisellä arvolla $\bar{\varepsilon}_0$, joka saadaan kaavalla

$$\bar{\varepsilon}_0 = [\int_0^L \varepsilon_0(x)dx]/L.$$

$$
\begin{aligned}
v_j - v_i &= L(1+\varepsilon_0)\sin(\alpha+\psi_{ij}) - L\sin\alpha \\
&= L(1+\varepsilon_0)(\sin\alpha\cos\psi_{ij} + \cos\alpha\sin\psi_{ij}) - L\sin\alpha.
\end{aligned}
$$

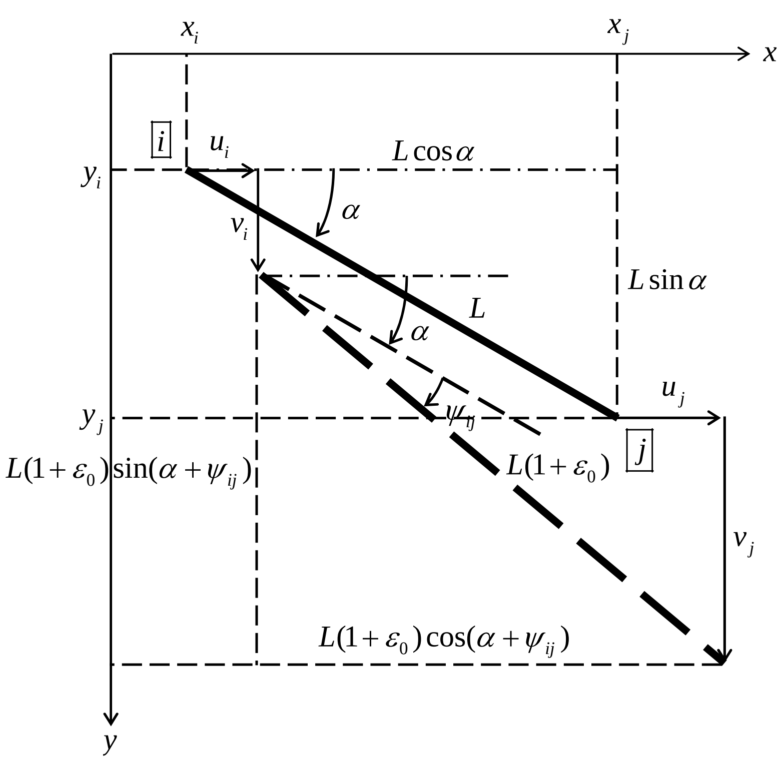
Otaksumalla ψ_{ij} taas niin pieneksi, että voidaan kirjoittaa $\cos\psi_{ij} \approx 1$ ja $\sin\psi_{ij} \approx \psi_{ij}$, sekä otaksumalla sauvan alkuvenymä ykkösen rinnalla pieneksi ts. $\varepsilon_0 << 1$ saadaan edelleen

$$
\begin{aligned}
u_j - u_i &= -L\sin\alpha\psi_{ij} + \varepsilon_0 L\cos\alpha, \\
v_j - v_i &= L\cos\alpha\psi_{ij} + \varepsilon_0 L\sin\alpha.
\end{aligned}
$$

Kuvan 4.17 perusteella saadaan lopulta

$$
\boxed{
\begin{aligned}
u_j - u_i &= -(y_j - y_i)\psi_{ij} + (x_j - x_i)\varepsilon_0, \\
v_j - v_i &= (x_j - x_i)\psi_{ij} + (y_j - y_i)\varepsilon_0.
\end{aligned}
}
\tag{4.22}
$$

Kaava (4.22) on kaavan (4.21) yleistys tapaukseen, jossa sauvoilla voi olla alkuvenymiä.



Kuva 4.17: Aksiaalisesti jäykän suoran sauvan kinematiikkaa, kun sauva saa alkuvenymän

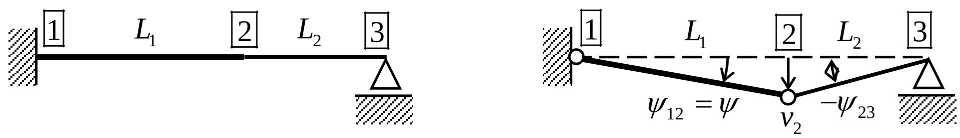
Kaavat (4.21) ja (4.22) ovat erittäin käyttökelpoisia aksiaalisesti jäykistä, venymättömistä sauvoista koostuvan siirtyvän kehärakenteen analysoinnissa. Niitä käyttämällä yhdessä tuki- ja yhteensopivuusehtojen kanssa voidaan aluksi muodostaa rakenteen **nurkkien siirtymien** sekä sen sauvojen **sauvakiertymien välisiä rajoiteyhtälöitä**. Näiden yhtälöiden ansiosta vain pieni osa rakenteen nurkkien siirtymistä ja sauvakiertymistä voidaan valita rakenteen nurkkien siirtymätilaa kuvaaviksi riippumattomiksi vapausasteiksi. Näiksi vapausasteiksi on tarkoituksenmukaista valita pelkästään sauvakiertymiä, joita kutsutaan jatkossa **riippumattomiksi sauvakiertymiksi.** Rakenteen nurkkien siirtymät sekä muut sauvakiertymät voidaan lausua näiden riippumattomien sauvakiertymien lineaarisina lausekkeina.

4.62 Sivusiirtyvän rakenteen siirtymätilan esittäminen riippumattomien sauvakiertymien avulla

4.621 Palkki

<u>(a) Geometrinen tarkastelu:</u> Tarkastellaan esimerkkinä kuvan 4.18a kahdesta osasauvasta koostuvaa palkkia, jonka sivusiirtyvyyden kertaluku on $n_{sii} = 2k - t - s = 2 \cdot 3 - 3 - 2 = 1$. Palkilla on siten 1 riippumaton sauvakiertymä.

(a) Palkki: (b) Nivelmekanismi:



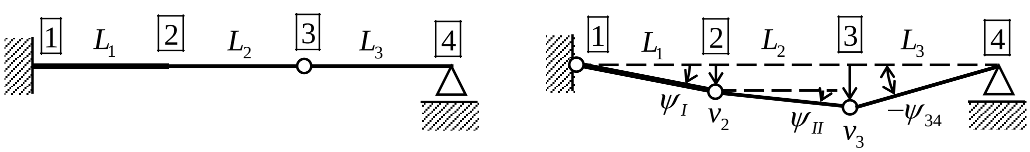
Kuva 4.18: Kaksisauvaisen, kaksitukisen palkin sivusiirtyvyyden kertaluvun määrittäminen

Valitaan riippumattomaksi sauvakiertymäksi sauvan $\boxed{1}-\boxed{2}$ sauvakiertymä ψ_{12} ja merkitään sitä symbolilla ψ. Kuvan 4.18b perusteella saadaan[2] toisaalta $v_2 = L_1\psi$ ja toisaalta $v_2 = L_2(-\psi_{23}) = -L_2\psi_{23}$, Vertaamalla taipuman v_2 lausekkeita saadaan $\psi_{23} = -L_1\psi / L_2$. Nyt voimme ilmaista kaikki palkin siirtymätilan kuvaavat siirtymäsuureet riippumattoman sauvakiertymän avulla seuraavasti:

$$\psi_{12} = \psi,\ \psi_{23} = -\frac{L_1}{L_2}\psi,\ v_2 = L_1\psi.$$

Tarkastellaan kuvan 4.19a kolmesta osasauvasta koostuvaa palkkia, jonka sivusiirtyvyyden kertaluku on $n_{sii} = 2k - t - s = 2 \cdot 4 - 3 - 3 = 2$. Riippumattomia sauvakertymiä tulee siis olemaan 2 kpl.

(a) Palkki: (b) Nivelmekanismi:



Kuva 4.19: Kolmisauvaisen, kaksitukisen palkin sivusiirtyvyyden kertaluvun määrittäminen

---

[2] Tehdään samanlainen yksinkertaistus, kuin kaavoja (4.21) ja (4.23) johdettaessa. Koska ψ on pieni $\cos\psi \approx 1$ ja $\sin\psi \approx \psi$, joten $v_1 = L_1 \sin\psi \approx L_1\psi$.

Valitaan riippumattomiksi sauvakiertymiksi sauvojen $\boxed{1}-\boxed{2}$ ja $\boxed{2}-\boxed{3}$ sauvakiertymät ψ_{12} ja ψ_{23} sekä merkitään niitä symboleilla ψ_I ja ψ_{II}. Kuvan 4.19b perusteella saadaan $v_2 = L_1\psi_I$, $v_3 = v_2 + L_2\psi_{II} = L_1\psi_I + L_2\psi_{II}$ ja toisaalta taipumalle v_3 saadaan $v_3 = L_2(-\psi_{34})$. Vertaamalla taipuman v_3 lausekkeita saadaan $\psi_{34} = -L_1\psi_I / L_3 - L_2\psi_{II} / L_3$. Nyt voimme ilmaista kaikki palkin siirtymätilan kuvaavat siirtymäsuureet riippumattomien sauvakiertymien avulla seuraavasti:

$$\underline{\underline{\psi_{12} = \psi_I\,,\ \psi_{23} = \psi_{II}\,,\ \psi_{34} = -\frac{L_1}{L_3}\psi_I - \frac{L_2}{L_3}\psi_{II}\,,\ v_2 = L_1\psi_I\,,\ v_3 = L_1\psi_I + L_2\psi_{II}\,.}}$$

<u>(b) Kinemaattinen ketju:</u> Palkin taipumien v_i ja v_j sekä sauvakiertymän ψ_{ij} välille saadaan kaavan (4.21) (tai (4.22)) alemmasta yhtälöstä

$$\boxed{v_j - v_i = (x_j - x_i)\psi_{ij}\,.} \qquad (4.23)$$

Probleema voidaan myös ratkaista muodostamalla **kinemaattinen ketju** palkin **tukien välille** kaavaa (4.23) soveltamalla ja ottamalla huomioon tukiehdot. Tarkastellaan kuvan 4.19a palkkia. Valitaan riippumattomiksi sauvakiertymiksi $\psi_{12} = \psi_I$ ja $\psi_{23} = \psi_{II}$ sekä muodostetaan kinemaattinen ketju:

Sauva $\boxed{1}$-$\boxed{2}$: $v_2 - \overbrace{v_1}^{0} = L_1\overbrace{\psi_{12}}^{\psi_I} \quad \Rightarrow \quad v_2 = L_1\psi_I$

Sauva $\boxed{2}$-$\boxed{3}$: $v_3 - v_2 = L_2\overbrace{\psi_{23}}^{\psi_{II}} \quad \Rightarrow \quad v_3 = v_2 + L_2\psi_{II} = L_1\psi_I + L_2\psi_{II}$

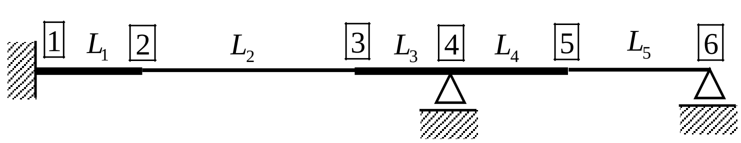
Sauva $\boxed{3}$-$\boxed{4}$: $v_4 - v_3 = L_3\psi_{34} \quad \Rightarrow \quad v_4 = v_3 + L_3\psi_{34} = \underline{L_1\psi_I + L_2\psi_{II} + L_3\psi_{34} = 0}$

(Viimeinen yhtäsuuruusmerkki saatiin soveltamalla nurkan $\boxed{4}$ tukiehtoa $v_4 = 0$.) Näin saadaan

$$L_1\psi_I + L_2\psi_{II} + L_3\psi_{34} = 0 \ \Rightarrow \ \psi_{34} = -\frac{L_1}{L_3}\psi_I - \frac{L_2}{L_3}\psi_{II}$$

ja tarkastelu etenee kuten edellä.

Yleistetään käsittelyä tarkastelemalla kuvan 4.20 palkkia, jonka sivusiirtyvyyden kertaluku on $n_{sii} = 2k - t - s = 2\cdot 6 - 4 - 5 = 3$.



Kuva 4.20: Viisisauvainen, kolmitukinen palkki.

Kirjoitetaan kinemaattinen ketju tukien $\boxed{1}$ ja $\boxed{4}$ välille ja huomioidaan tukiehdot:

Sauva $\boxed{1}$-$\boxed{2}$: $v_2 - \overbrace{v_1}^{0} = L_1\psi_{12} \quad \Rightarrow \quad v_2 = L_1\psi_{12}$

Sauva $\boxed{2}$-$\boxed{3}$: $v_3 - v_2 = L_2\psi_{23} \quad \Rightarrow \quad v_3 = v_2 + L_2\psi_{23} = L_1\psi_{12} + L_2\psi_{23}$

Sauva $\boxed{3}$-$\boxed{4}$: $v_4 - v_3 = L_3\psi_{34} \quad \Rightarrow \quad v_4 = v_3 + L_3\psi_{34} = \underline{L_1\psi_{12} + L_2\psi_{23} + L_3\psi_{34} = 0}$

Sauvakiertymille ψ_{12}, ψ_{23} ja ψ_{34} saatiin siis yhtälö

$$L_1\psi_{12} + L_2\psi_{23} + L_3\psi_{34} = 0.$$

Näistä kaksi voidaan valita riippumattomiksi ja kolmas ratkaista tästä yhtälöstä. Valitaan $\psi_{12} = \psi_I$ ja $\psi_{23} = \psi_{II}$, jolloin saadaan

$$\psi_{34} = -\frac{L_1}{L_3}\psi_I - \frac{L_2}{L_3}\psi_{II}.$$

Kirjoitetaan kinemaattinen ketju tukien $\boxed{4}$ ja $\boxed{6}$ välille:

Sauva $\boxed{4}$-$\boxed{5}$: $v_5 - \overbrace{v_4}^{0} = L_4\psi_{45} \quad \Rightarrow \quad v_5 = L_4\psi_{45}$

Sauva $\boxed{5}$-$\boxed{6}$: $v_6 - v_5 = L_5\psi_{56} \quad \Rightarrow \quad v_6 = v_5 + L_5\psi_{56} = \underline{L_4\psi_{45} + L_5\psi_{56} = 0}$

Sauvakiertymille ψ_{45} ja ψ_{56} saatiin siis yhtälö

$$L_4\psi_{45} + L_5\psi_{56} = 0.$$

Näistä toinen voidaan valita riippumattomiksi ja toinen ratkaista tästä yhtälöstä. Valitaan $\psi_{45} = \psi_{III}$, jolloin saadaan

$$\psi_{56} = -\frac{L_4}{L_5}\psi_{III}.$$

Nyt voimme ilmaista kaikki palkin siirtymätilan kuvaavat siirtymäsuureet riippumattomien sauvakiertymien avulla seuraavasti: Sauvakiertymät

$$\underline{\underline{\psi_{12} = \psi_I,\ \psi_{23} = \psi_{II},\ \psi_{34} = -\frac{L_1}{L_3}\psi_I - \frac{L_2}{L_3}\psi_{II},\ \psi_{45} = \psi_{III},\ \psi_{56} = -\frac{L_4}{L_5}\psi_{III}}}$$

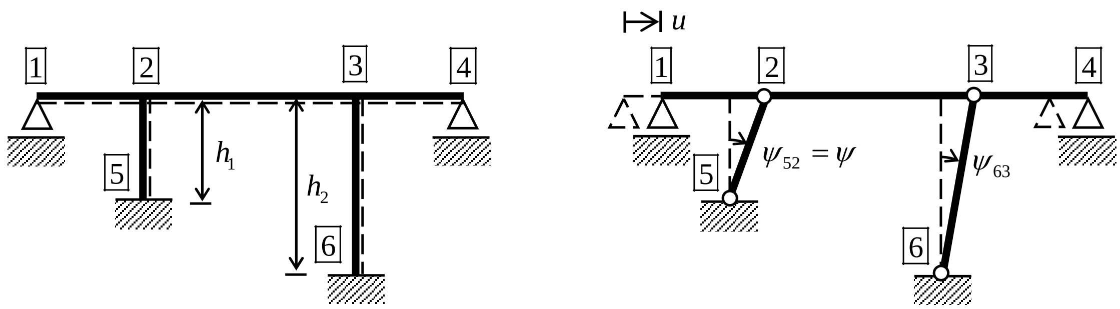
ja taipumat

$$\underline{\underline{v_2 = L_1\psi_I,\ v_3 = L_1\psi_I + L_2\psi_{II},\ v_5 = L_4\psi_{III}.}}$$

4.622 Kehä, joka muodostuu vaaka- ja pystysuuntaisista sauvoista

Jos kehässä on vain vaaka- ja pystysuuntaisia sauvoja, sen riippumattomien sauvakiertymien määrittäminen on usein varsin helppo tehtävä. Jos kehää rasittaa vain mekaaninen kuormitus $(\varepsilon_0 = 0)$, saavat kunkin **vaakasauvan nurkat saman vaakasiirtymän** ja kunkin **pystysauvan nurkat saman pystysiirtymän**.

(a) Kehä: (b) Nivelmekanismi:

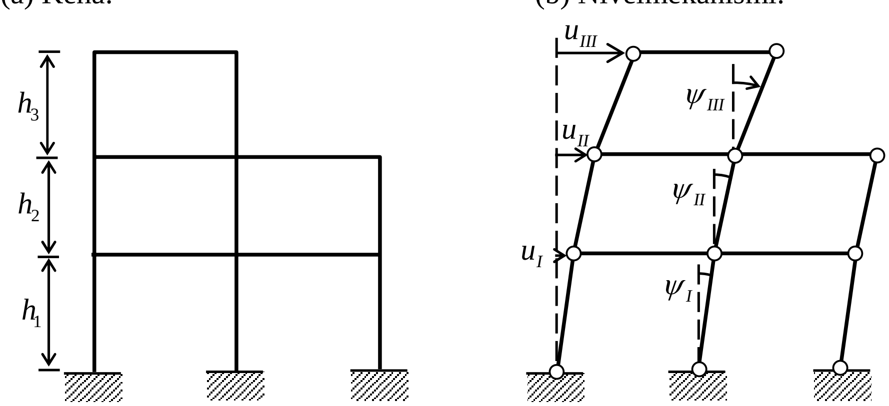


Kuva 4.21: Palkista ja kahdesta pilarista muodostuva kehä

Tarkastellaan aluksi kuvan 4.21a kehää. Sen sivusiirtyvyyden kertaluku on $n_{\text{sii}} = 2k - t - s$ $= 2 \cdot 6 - 6 - 5 = 1$. Nähdään helposti, että nivelmekanismin (kuva 4.20b) ainoa siirtymämahdollisuus on vaakapalkin vaakasiirtymä u, joka on sen kaikissa nurkissa yhtä suuri. Tälle siirtymälle saadaan tarkastelemalla sauvaa $\boxed{2} - \boxed{5}$ $u = h_1\psi_{25}$ ja sauvaa $\boxed{3} - \boxed{6}$ $u = h_2\psi_{36}$, joten pystysauvojen sauvakiertymille saadaan yhteys $h_1\psi_{25} = h_2\psi_{36}$. Valitsemalla riippumattomaksi sauvakiertymäksi $\psi_{25} = \psi$, saadaan $\psi_{36} = (h_1 / h_2)\psi$. Näin kehän sauvakiertymille ja nollasta eroaville nurkkien siirtymille saadaan

$$\underline{\underline{\psi_{12} = \psi_{23} = \psi_{34} = 0, \;\; \psi_{25} = \psi, \;\; \psi_{36} = \frac{h_1}{h_2}\psi, \quad u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = h_1\psi}}$$

(a) Kehä: (b) Nivelmekanismi:



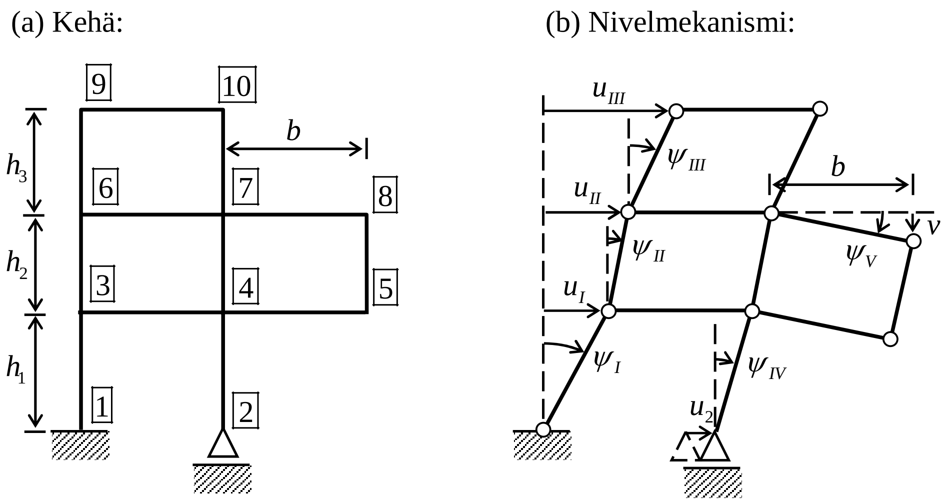
Kuva 4.22: Kerroskehä

Tarkastellaan toiseksi kuvan 4.22a kerroskehää. Sen sivusiirtyvyyden kertaluku on $n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 11 - 6 - 13 = 3$. Kunkin vaakapalkin nurkilla on sama vaakasiirtymä, joita merkitään tässä u_I, u_{II} ja u_{III} kuvan 4.22b mukaisesti. Koska pilarien korkeudet kussakin kerroksessa ovat yhtäsuuret, ovat sauvakiertymät kunkin kerroksen pilareissa myös yhtäsuuret ja ne otetaan riippumattomiksi sauvakiertymiksi ψ_I, ψ_{II} ja ψ_{III}. Näin voidaan kirjoittaa

$$u_I = h_1\psi_I\,,\; u_{II} = u_I + h_2\psi_{II} = h_1\psi_I + h_2\psi_{II}\,,\; u_{III} = u_{II} + h_3\psi_{III} = h_1\psi_I + h_2\psi_{II} + h_3\psi_{III}\,.$$

Nyt siis ensimmäisen, toisen ja kolmannen kerroksen pilarien sauvakiertymät ovat ψ_I, ψ_{II} ja ψ_{III} sekä ensimmäisen, toisen ja kolmannen vaakapalkin nurkkien vaakasiirtymät ovat

$$\underline{\underline{u_I = h_1\psi_I\,,\; u_{II} = h_1\psi_I + h_2\psi_{II}\,,\; u_{III} = h_1\psi_I + h_2\psi_{II} + h_3\psi_{III}\,.}}$$



Kuva 4.23: Kerroskehä, jossa uloke ja siirtyvä niveltuki

Tarkastellaan kolmanneksi kuvan 4.23a kehää. Sen sivusiirtyvyyden kertaluku on $n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 10 - 3 - 12 = 5$. Kunkin vaakapalkin nurkilla on nytkin sama vaakasiirtymä u_I, u_{II} ja u_{III}. Jos sauvojen $\boxed{1}-\boxed{3}$, $\boxed{3}-\boxed{6}$ ja $\boxed{6}-\boxed{9}$ sauvakiertymät otetaan riippumattomiksi ja merkitään ψ_I, ψ_{II} ja ψ_{III}, voidaan kirjoittaa

$$u_I = h_1\psi_I\,,\; u_{II} = u_I + h_2\psi_{II} = h_1\psi_I + h_2\psi_{II}\,,\; u_{III} = u_I + u_{II} + h_3\psi_{III} = h_1\psi_I + h_2\psi_{II} + h_3\psi_{III}\,.$$

Myös sauvojen $\boxed{4}-\boxed{7}$ ja $\boxed{5}-\boxed{8}$ sauvakiertymillä on arvo ψ_{II} ja sauvan $\boxed{7}-\boxed{10}$ sauvakiertymällä on arvo ψ_{III}. Nurkka $\boxed{2}$ pääsee siirtymään vapaasti vaakasuunnassa, joten sen vaakasiirtymä u_2 on riippumaton ja sauvan $\boxed{2}-\boxed{4}$ sauvakiertymä voidaan ottaa riippumattomaksi ja merkitä $\psi_{24} = \psi_{IV}$. Kuvan 4.23b perusteella voidaan kirjoittaa $u_2 - u_I = h_1(-\psi_{IV})$, josta saadaan nurkan $\boxed{2}$ vaakasiirtymälle $u_2 = u_I - h_1\psi_{IV} = h_1(\psi_I - \psi_{IV})$. Sauva $\boxed{5}-\boxed{8}$ pääsee siirtymään vapaasti pystysuunnassa, joten sen pystysiirtymä v on riippumaton ja yhteinen nurkille $\boxed{5}$ ja $\boxed{8}$. Valitsemalla sauvojen $\boxed{4}-\boxed{5}$ ja $\boxed{7}-\boxed{8}$ yhtäsuuri sauvakiertymä riippumattomaksi ja merkitsemällä sitä ψ_V, voidaan kirjoittaa $v = b\psi_V$. Koottu tulos nollasta eroaville sauvakiertymille ja nurkkien siirtymille on

$$\psi_{13} = \psi_I,\ \psi_{24} = \psi_{IV},\ \psi_{36} = \psi_{47} = \psi_{58} = \psi_{II},\ \psi_{69} = \psi_{7,10} = \psi_{III},\ \psi_{45} = \psi_{78} = \psi_V$$

$$u_2 = h_1(\psi_I - \psi_{IV}),\ u_3 = u_4 = u_5 = h_1\psi_I,\ u_6 = u_7 = u_8 = h_1\psi_I + h_2\psi_{II},$$

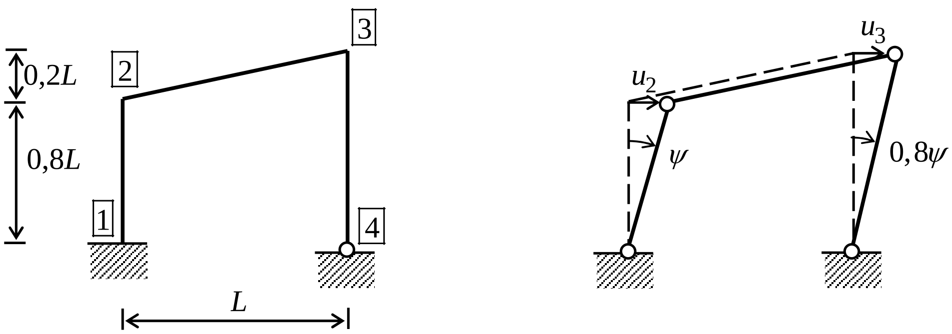
$$u_9 = u_{10} = h_1\psi_I + h_2\psi_{II} + h_3\psi_{III},\ v_5 = v_8 = b\psi_V.$$

4.623 Kehä, jossa vinoja sauvoja

Jos kehässä on vinoja sauvoja, sen riippumattomien sauvakiertymien määrittäminen ja siirtymätilan esittäminen näiden avulla on mukavin suorittaa muodostamalla kinemaattinen ketju kehän tukien välille kaavaa (4.22) (tai (4.23)) soveltamalla ja ottamalla huomioon tukiehdot.

Esimerkki 4.9: Määritetään kuvan E4.5a aksiaalisesti jäykistä sauvoista koostuvan kehän siirtymätila riippumattomien sauvakiertymien avulla lausuttuna.

(a) Kehä: (b) Nivelmekanismi:



Kuva E4.9: Kehä, jossa yksi vino sauva

Sivusiirtyvyyden kertaluku:

$n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 4 - 4 - 3 = 1 \ \Rightarrow$ 1 riippumaton sauvakiertymä.

Muodostetaan kinemaattinen ketju ja huomioidaan tukiehdot:

Sauva $\boxed{1}$-$\boxed{2}$:
$$\begin{cases} u_2 - \overbrace{u_1}^{0} = -\overbrace{(y_2 - y_1)}^{-0,8L}\psi_{12} & \Rightarrow\ u_2 = 0,8L\psi_{12} \\ v_2 - \overbrace{v_1}^{0} = \overbrace{(x_2 - x_1)}^{0}\psi_{12} & \Rightarrow\ v_2 = 0 \end{cases}$$

Sauva $\boxed{2}$-$\boxed{3}$:
$$\begin{cases} u_3 - \overbrace{u_2}^{0,8L\psi_{12}} = -\overbrace{(y_3 - y_2)}^{-0,2L}\psi_{23} & \Rightarrow\ u_3 = 0,8L\psi_{12} + 0,2L\psi_{23} \\ v_3 - \overbrace{v_2}^{0} = \overbrace{(x_3 - x_2)}^{L}\psi_{23} & \Rightarrow\ v_3 = L\psi_{23} \end{cases}$$

$$\text{Sauva } \boxed{3}\text{-}\boxed{4}: \begin{cases} u_4 - \overbrace{u_3}^{0,8L\psi_{12}+0,2\psi_{23}} = -\overbrace{(y_4 - y_3)}^{L}\psi_{34} \;\Rightarrow\; u_4 = \underline{0,8L\psi_{12}+0,2L\psi_{23} - L\psi_{34} = 0} \\ v_4 - \overbrace{v_3}^{L\psi_{23}} = \overbrace{(x_4 - x_3)}^{0}\psi_{34} \;\Rightarrow\; v_4 = \underline{L\psi_{23} = 0} \end{cases}$$

Saatiin yhtälöt:

$$\begin{cases} 0,8L\psi_{12}+0,2L\psi_{23} - L\psi_{34} = 0 \\ L\psi_{23} = 0 \end{cases}$$

Valitaan riippumattomaksi sauvakiertymäksi $\psi_{12} = \psi$, jolloin muille sauvakiertymille saadaan

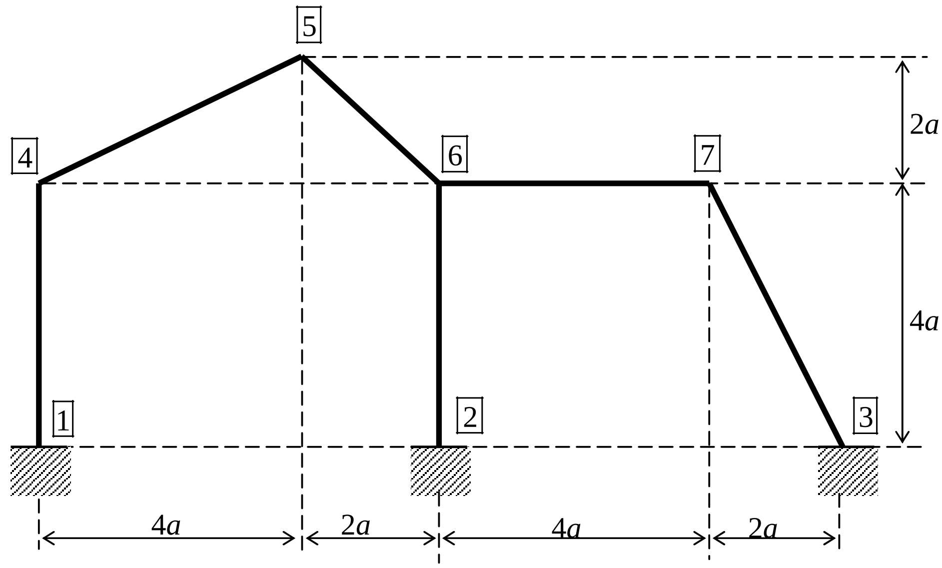
$$\begin{cases} -0,2\psi_{23} + \psi_{34} = 0,8\psi \\ \psi_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_{23} = 0 \\ \psi_{34} = 0,8\psi \end{cases}$$

Sauvakiertymät ja siirtymät riippumattoman sauvakiertymän avulla lausuttuina ovat nyt:

$$\underline{\underline{\psi_{12} = \psi,\ \psi_{23} = 0,\ \psi_{34} = 0,8\psi,\ u_2 = 0,8L\psi,\ v_2 = 0,\ u_3 = 0,8L\psi,\ v_3 = 0.}}$$

Kuva E4.9 (b) havainnollistaa tulosta.

Esimerkki 4.10: Määritetään oheisen kehän siirtymätila riippumattomien sauvakiertymien avulla lausuttuna.



Sivusiirtyvyyden kertaluku:
$n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 7 - 6 - 6 = 2 \;\Rightarrow\;$ Kaksi riippumatonta sauvakiertymää

Muodostetaan kinemaattinen ketju tukien $\boxed{1}$ ja $\boxed{2}$ välillä ja huomioidaan tukiehdot:

$$\text{Sauva } \boxed{1} - \boxed{4}: \begin{cases} u_4 - \overbrace{u_1}^{0} = -\overbrace{(y_4 - y_1)}^{-4a}\psi_{14} \;\Rightarrow\; u_4 = 4a\psi_{14} \\ v_4 - \overbrace{v_1}^{0} = \overbrace{(x_4 - x_1)}^{0}\psi_{14} \;\Rightarrow\; v_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Sauva } \boxed{4} - \boxed{5}: \begin{cases} u_5 - \overbrace{u_4}^{4a\psi_{14}} = -\overbrace{(y_5 - y_4)}^{-2a}\psi_{45} \;\Rightarrow\; u_5 = 4a\psi_{14} + 2a\psi_{45} \\ v_5 - \overbrace{v_4}^{0} = \overbrace{(x_5 - x_4)}^{4a}\psi_{45} \;\Rightarrow\; v_5 = 4a\psi_{45} \end{cases}$$

$$\text{Sauva } \boxed{5} - \boxed{6}: \begin{cases} u_6 - u_5 = -\overbrace{(y_6 - y_5)}^{2a}\psi_{56} \;\Rightarrow\; u_6 = 4a\psi_{14} + 2a\psi_{45} - 2a\psi_{56} \\ v_6 - v_5 = \overbrace{(x_6 - x_5)}^{2a}\psi_{56} \;\Rightarrow\; v_6 = 4a\psi_{45} + 2a\psi_{56} \end{cases}$$

$$\text{Sauva } \boxed{6} - \boxed{2}: \begin{cases} u_2 - u_6 = -\overbrace{(y_2 - y_6)}^{4a}\psi_{62} \;\Rightarrow\; u_2 = \underline{4a\psi_{14} + 2a\psi_{45} - 2a\psi_{56} - 4a\psi_{26} = 0} \\ v_2 - v_6 = \overbrace{(x_2 - x_6)}^{0}\psi_{62} \;\Rightarrow\; v_2 = \underline{4a\psi_{45} + 2a\psi_{56} = 0} \end{cases}$$

Sauvakiertymien välille saatiin yhtälöt:

$$\begin{cases} 2\psi_{14} + \psi_{45} - \psi_{56} - 2\psi_{26} = 0 \\ 2\psi_{45} + \psi_{56} = 0 \end{cases} \tag{a}$$

Muodostetaan kinemaattinen ketju tukien $\boxed{2}$ ja $\boxed{3}$ välillä ja huomioidaan tukiehdot:

$$\text{Sauva } \boxed{2} - \boxed{6}: \begin{cases} u_6 - \overbrace{u_2}^{0} = -\overbrace{(y_6 - y_2)}^{-4a}\psi_{26} \;\Rightarrow\; u_6 = 4a\psi_{26} \\ v_6 - \overbrace{v_2}^{0} = \overbrace{(x_6 - x_2)}^{0}\psi_{26} \;\Rightarrow\; v_6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Sauva } \boxed{6} - \boxed{7}: \begin{cases} u_7 - u_6 = -\overbrace{(y_7 - y_6)}^{0}\psi_{67} \;\Rightarrow\; u_7 = 4a\psi_{26} \\ v_7 - \overbrace{v_6}^{0} = \overbrace{(x_7 - x_6)}^{4a}\psi_{67} \;\Rightarrow\; v_7 = 4a\psi_{67} \end{cases}$$

$$\text{Sauva } \boxed{6} - \boxed{7}: \begin{cases} u_3 - u_7 = -\overbrace{(y_3 - y_7)}^{4a}\psi_{73} \;\Rightarrow\; u_3 = \underline{4a\psi_{26} - 4a\psi_{37} = 0} \\ v_3 - v_7 = \overbrace{(x_3 - x_7)}^{2a}\psi_{73} \;\Rightarrow\; v_3 = \underline{4a\psi_{67} + 2a\psi_{37} = 0} \end{cases}$$

Sauvakiertymien välille saatiin yhtälöt:

$$\begin{cases} \psi_{26} - \psi_{37} = 0 \\ 2\psi_{67} + \psi_{37} = 0 \end{cases} \tag{b}$$

Kuuden sauvakiertymän välille saatiin siis neljä yhtälöä. Näin kaksi sauvakiertymää voidaan valita riippumattomiksi ja muut sauvakiertymät määrittää niiden avulla. Valitaan näiksi $\psi_{14} = \psi_I$ ja $\psi_{26} = \psi_{II}$, jolloin kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä (a) saadaan:

$$\begin{cases} \psi_{45} - \psi_{56} = -2(\psi_I - \psi_{II}) \\ 2\psi_{45} + \psi_{56} = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \psi_{45} = -\dfrac{2}{3}(\psi_I - \psi_{II}) \\ \psi_{56} = \dfrac{4}{3}(\psi_I - \psi_{II}) \end{cases}$$

ja kahdesta jälkimmäisestä (b) saadaan

$$\begin{cases} \psi_{II} - \psi_{37} = 0 \\ 2\psi_{67} + \psi_{37} = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \psi_{37} = \psi_{II} \\ \psi_{67} = -\dfrac{\psi_{II}}{2} \end{cases}$$

Kaikki sauvakiertymät koottuna ovat nyt

$$\underline{\underline{\psi_{14} = \psi_I,\; \psi_{45} = -\frac{2}{3}(\psi_I - \psi_{II}),\; \psi_{56} = \frac{4}{3}(\psi_I - \psi_{II}),\; \psi_{26} = \psi_{II},\; \psi_{67} = -\frac{1}{2}\psi_{II},\; \psi_{37} = \psi_{II}.}}$$

Nurkkien siirtymäkomponenteille saadaan:

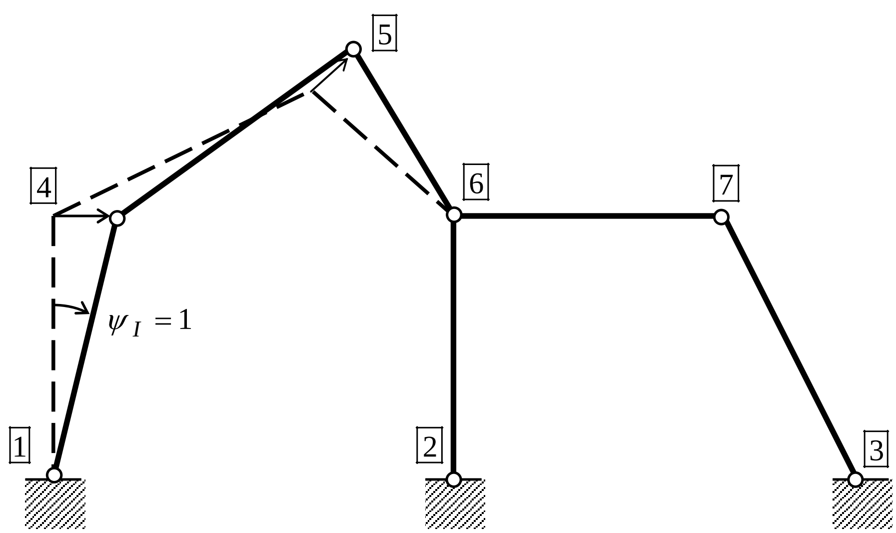
$$\begin{cases} u_4 = 4a\psi_{14} = \underline{\underline{4a\psi_I}}, \\ v_4 = \underline{\underline{0}}, \end{cases}$$

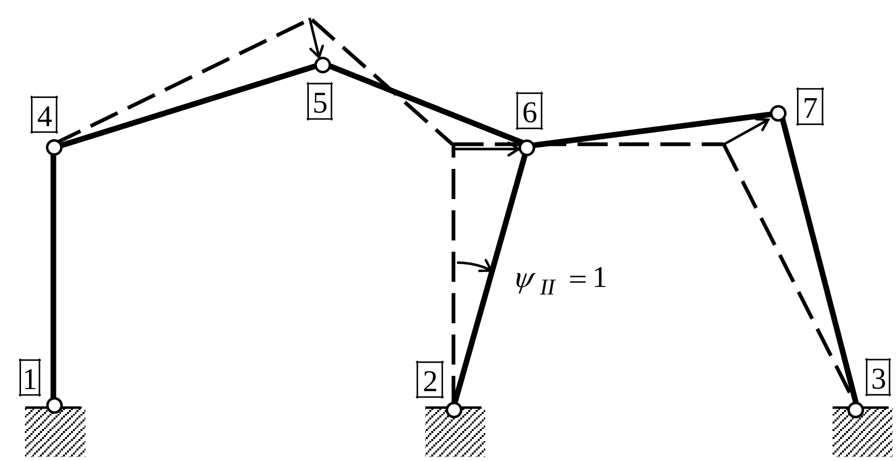
$$\begin{cases} u_5 = 4a\psi_{14} + 2a\psi_{45} = \underline{\underline{\frac{4}{3}a(2\psi_I + \psi_{II})}}, \\ v_5 = 4a\psi_{45} = \underline{\underline{-\frac{8}{3}a(\psi_I - \psi_{II})}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_6 = \underline{\underline{4a\psi_{II}}}, \\ v_6 = \underline{\underline{0}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_7 = \underline{\underline{4a\psi_{II}}}, \\ v_7 = \underline{\underline{-2a\psi_{II}}}. \end{cases}$$

Seuraavat kuvat demonstroivat riippumattomia sauvakiertymiä vastaavia siirtymämuotoja. Ne on saatu panemalla ensin $\psi_I = 1$ ja $\psi_{II} = 0$ ja sitten $\psi_I = 0$ ja $\psi_{II} = 1$.





4.63 Siirtymäyhtälöiden muodostaminen

Kehän ollessa siirtyvä, sen sauvojen sauvakiertymät eivät häviä. Ne ilmaistaan edellä kuvatulla tavalla riippumattomien sauvakiertymien avulla, ja tulevat näin mukaan momenttimenetelmän ja kulmanmuutosmenetelmän yhtälöihin. Näin nurkkien yhteensopivuus- ja momenttitasapainoehtoihin sekä momentti- tai kulmanmuutosmenetelmän yhtälöihin perustuvaan yhtälöryhmään tulee tuntemattomiksi sauvanpäämomenttien tai -kiertymien lisäksi myös riippumattomat sauvakiertymät. Näin tuntemattomia on enemmän kuin yhtälöitä. Jotta probleema voitaisiin ratkaista, tarvitaan siis sama määrä lisäyhtälöitä kun probleemassa on riippumattomia sauvakiertymiä. Näitä yhtälöitä kutsutaan tässä **siirtymäyhtälöiksi**.

Siirtymäyhtälöt ovat **tasapainoyhtälöitä**, jotka voidaan saada aikaan (a) **muodostamalla** sopivia nurkkien, yksittäisten sauvojen ja/tai sopivasti irtileikattujen kehän osien **tasapainoehtoja** tai (b) käyttämällä sopivasti **virtuaalisen työn periaatetta**. Seuraavassa tarkastellaan yksityiskohtaisemmin näitä menettelytapoja.

(a) Siirtymäyhtälöiden muodostaminen tasapainoehtojen avulla

Koska momentti- ja kulmanmuutosmenetelmässä nurkkien tasapainoehdot on jo käytetty, lisäyhtälöt pyritään saamaan aikaan nurkkien voimatasapainoehdoista ja sauvojen tasapainoehdoista. Tavoitteena on saada yhtälöt, joissa esiintyy **pelkästään sauvanpäämomentteja**. Tämän vuoksi alkuperäisistä yhtälöistä, pyritään ensiksi eliminoimaan sauvanpäänormaalivoimat ja sen jälkeen sauvanpääleikkausvoimat. Erityisesti sauvanpäänormaalivoimien eliminointi voi olla työlästä. Sauvanpääleikkausvoimien ilmaiseminen sauvanpäämomenttien avulla on helpompaa, koska sauvanpääleikkausvoima Q_{ij} saadaan aina kirjoittamalla sauvan $\boxed{i}-\boxed{j}$ momenttitasapainoyhtälö pään $\boxed{j}$ suhteen.

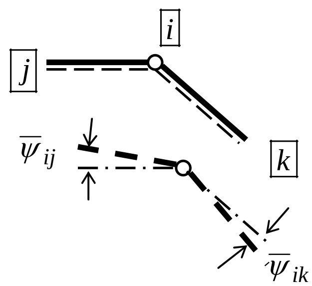
Kätevä tapa muodostaa yhtälöitä, joihin ei tule mukaan sauvanpäänormaalivoimia (tai niiden lukumäärää voidaan vähentää) on eräänlainen **leikkausmenetelmä**, jossa muodostetaan sopivasti irtileikattujen kehän osien tasapainoehtoja. Leikkaaminen suoritetaan sauvan päiden ja nurkkien liitoskohdista, jolloin leikkauksiin jäävät voimasuureet ovat sauvanpää-normaalivoimia, -leikkausvoimia ja -momentteja. Leikkaamalla kehää sopivasti ja muodostamalla voimatasapainoehto sopivaan suuntaan tai momenttitasapainoehto sopivan pisteen suhteen saadaan usein suoraan yhtälö, jossa ei esiinny sauvanpäänormaalivoimia. Ilmaisemalla tässä yhtälössä esiintyvät sauvanpääleikkausvoimat ko. sauvan sauvanpäämomenttien avulla saadaan lopullinen, pelkästään sauvanpäämomentteja sisältävä yhtälö.

(b) Siirtymäyhtälöiden muodostaminen virtuaalisen työn periaatteella.

Erittäin kätevä tapa muodostaa siirtymäyhtälöt on käyttää virtuaalisen työn periaatetta seuraavasti. Otetaan **virtuaalisiksi siirtymätiloiksi** vuorotellen **kutakin riippumatonta sauvakiertymää vastaavat** nivelmekanismin **siirtymätilat**. Ajattelemme siis virtuaalirakenteen sauvojen olevan jäykkiä ja liittyvät toisiinsa nivelten välityksellä. Antamalla yhdelle riippumattomalle sauvakiertymälle arvo 1 ja muille arvot 0 saadaan ko. sauvakiertymää vastaava virtuaalinen siirtymätila määritetyksi (vrt. esimerkki 4.10).

Tarkastellaan aluksi niveltä $\boxed{i}$, johon liittyvät kaksi sauvaa $\boxed{j}-\boxed{i}$ ja $\boxed{i}-\boxed{k}$ saavat virtuaaliset sauvakiertymät $\overline{\psi}_{ij}$ ja $\overline{\psi}_{ik}$ (kuva 4.24). Nivelen i virtuaaliselle kiertymäerolle $\Delta\overline{\varphi}_i$ saadaan

$$\Delta\overline{\varphi}_i = \overline{\psi}_{ij} - \overline{\psi}_{ik} \,.$$



Kuva 4.24: Virtuaalinen kulmanmuutos nivelessä $\boxed{i}$

Jos todellinen taivutusmomentti nivelen kohdalla on M_i, sen tekemä sisäinen virtuaalinen työ on

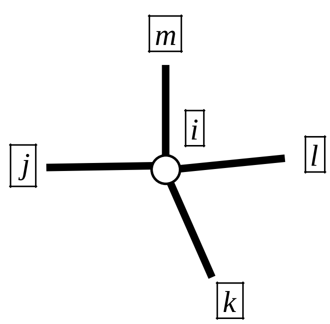
$$(\overline{W}_{\text{int}})_i = -M_i\Delta\overline{\varphi}_i = -M_i(\overline{\psi}_{ij} - \overline{\psi}_{ik}) \,.$$

Toisaalta taivutusmomentin M_i ja sauvojen $j-i$ ja $i-k$ sauvanpäämomenttien yhteydet ovat

$$M_i = -M_{ij} \,,\; M_i = M_{ik} \,.$$

Yhdistämällä edelliset lausekkeet, nivelen i sisäiselle virtuaaliselle työlle saadaan lauseke

$$(\overline{W}_{\text{int}})_i = M_{ij}\overline{\psi}_{ij} + M_{ik}\overline{\psi}_{ik} \,.$$



Kuva 4.25: Nurkka, johon liittyy neljä sauvaa.

Tarkastellaan sitten kuvan 4.25 nurkkaa $\boxed{i}$, johon liittyy neljä sauvaa. Sauvojen $\boxed{i}-\boxed{j}$, $\boxed{i}-\boxed{k}$, jne. osuudet nivelen virtuaalisesta työstä ovat $M_{ij}\overline{\psi}_{ij}$, $M_{ik}\overline{\psi}_{ik}$, jne., joten saadaan

$$(\overline{W}_{\text{int}})_i = M_{ij}\overline{\psi}_{ij} + M_{ik}\overline{\psi}_{ik} + M_{il}\overline{\psi}_{il} + M_{im}\overline{\psi}_{im}.$$

Voimme luonnollisesti yleistää tämän tuloksen. Näin saamme nurkan $\boxed{i}$ sisäiselle virtuaaliselle työlle lopullisen kaavan

$$(\overline{W}_{\text{int}})_i = \sum_j M_{ij}\overline{\psi}_{ij},$$

missä summaus käy yli nurkkaan i liittyvien sauvojen vastakkaisten päiden numeroiden j. Tältä pohjalta saamme lopputulokseksi: Koko rakenteen sisäinen virtuaalinen työ $\overline{W}_{\text{int}}$ saadaan **kertomalla rakenteen kaikkien sauvanpäiden sauvanpäämomentit** M_{ij} **vastaavilla virtuaalisilla sauvanpääkiertymillä** $\overline{\psi}_{ij}$ **ja laskemalla tulokset yhteen.**

Kaavan muodossa lopputulos on

$$\boxed{\overline{W}_{\text{int}} = \sum_{ij} M_{ij}\overline{\psi}_{ij},} \tag{4.24}$$

missä summaus käy yli rakenteen kaikkien sauvanpäiden.

Kaava (4.24) käyttäen voidaan valittuihin virtuaalisiin siirtymätiloihin liittyvät **rakenteen sisäiset virtuaaliset työt** $\overline{W}_{\text{int}}$ helposti määrittää.

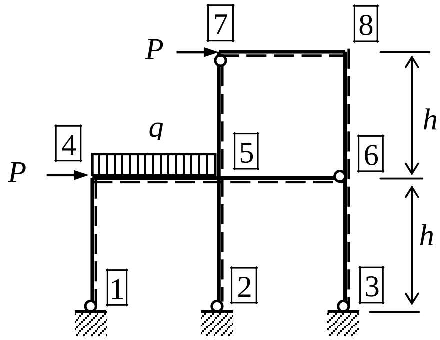
Kirjoittamalla kutakin riippumatonta sauvakiertymää vastaavat virtuaalisen työn yhtälöt

$$\boxed{\overline{W} \equiv \overline{W}_{\text{int}} + \overline{W}_{ext} = 0,} \tag{4.25}$$

saadaan siirtymäyhtälöt luontevasti muodostettua. Menettelyn etuna on myös se, että yhtälöt tulevat suoraan sauvanpäämomenteissa ilmaistuina, joten välivaiheet jäävät lyhyiksi ja virhemahdollisuus vähenee.

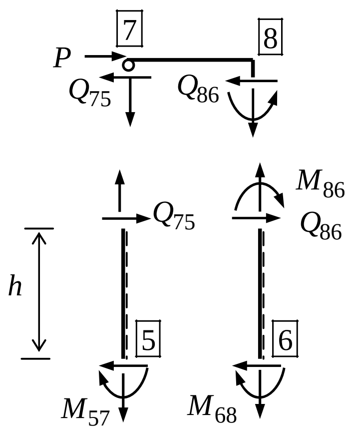
Sauvanpäämomenttien avulla lausutut siirtymäyhtälöt voidaan momenttimenetelmässä lisätä sellaisenaan lopulliseen yhtälöryhmään. Kulmanmuutosmenetelmässä lopulliset siirtymäyhtälöt saadaan, kun niissä esiintyvät sauvanpäämomentit on ensin lausuttu kulmanmuutosmenetelmän yhtälöitä käyttäen sauvanpääkiertymien ja riippumattomien sauvakiertymien avulla.

4.64 Esimerkkejä siirtymäyhtälöiden muodostamisesta



Esimerkki 4.11: Määritetään oheisen kehän sirtymäyhtälöt.

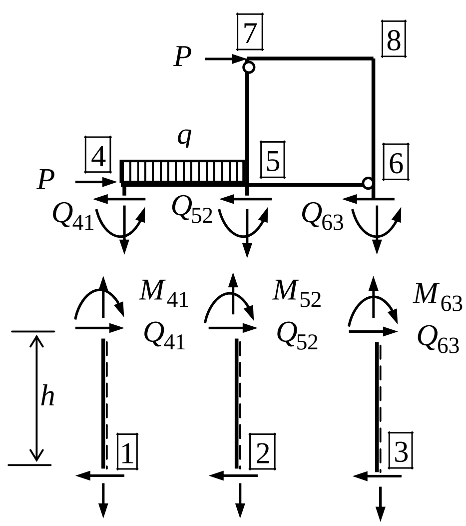
(a) Leikkausmenetelmä:



$$\rightarrow \; P - Q_{75} - Q_{86} = 0$$

$$5) \; Q_{75}h + M_{57} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{75} = -\frac{M_{57}}{h}$$

$$6) \; Q_{86}h + M_{68} + M_{86} = 0$$
$$\Rightarrow\; Q_{86} = -\frac{M_{68} + M_{86}}{h}$$



$$\rightarrow \; P + P - Q_{41} - Q_{52} - Q_{63} = 0$$

$$1) \; Q_{41}h + M_{41} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{41} = -\frac{M_{41}}{h}$$

$$2) \; Q_{52}h + M_{52} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{52} = -\frac{M_{52}}{h}$$

$$3) \; Q_{63}h + M_{63} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{63} = -\frac{M_{63}}{h}$$

Saadaan:

$$P + \frac{M_{57}}{h} + \frac{M_{68} + M_{86}}{h} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{M_{57} + M_{68} + M_{86} + Ph = 0}},$$

$$2P + \frac{M_{41}}{h} + \frac{M_{52}}{h} + \frac{M_{63}}{h} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{M_{41} + M_{52} + M_{63} + 2Ph = 0.}}$$

(b) Virtuaalisen työn periaate:

Kysymyksessä on kerroskehä. Jos kerrosten pilarien sauvakiertymät otetaan riippumattomiksi, saadaan vaakapalkkien vaakasiirtymille ja sauvakiertymille:

$$u_I = h\psi_I,\; u_{II} = h(\psi_I + \psi_{II}),$$
$$\psi_{14} = \psi_{25} = \psi_{36} = \psi_I,\; \psi_{57} = \psi_{68} = \psi_{II},\; \psi_{45} = \psi_{56} = \psi_{67} = 0.$$

Virtuaalinen siirtymätila $\bar{\psi}_I = 1,\; \bar{\psi}_{II} = 0$:

$$\bar{u}_I = h,\; \bar{u}_{II} = h,\; \bar{\psi}_{14} = \bar{\psi}_{41} = \bar{\psi}_{25} = \bar{\psi}_{52} = \bar{\psi}_{36} = \bar{\psi}_{63} = 1,\; \text{muut} = 0.$$

$$\begin{aligned}\bar{W}_{\text{int}} &= \overbrace{M_{14}}^{0}\bar{\psi}_{14} + M_{41}\bar{\psi}_{41} + \overbrace{M_{25}}^{0}\bar{\psi}_{25} + M_{52}\bar{\psi}_{52} + \overbrace{M_{36}}^{0}\bar{\psi}_{36} + M_{63}\bar{\psi}_{63}\\ &= M_{41} + M_{52} + M_{63}\\ \bar{W}_{\text{ext}} &= P\bar{u}_I + P\bar{u}_{II} = 2Ph\end{aligned}$$

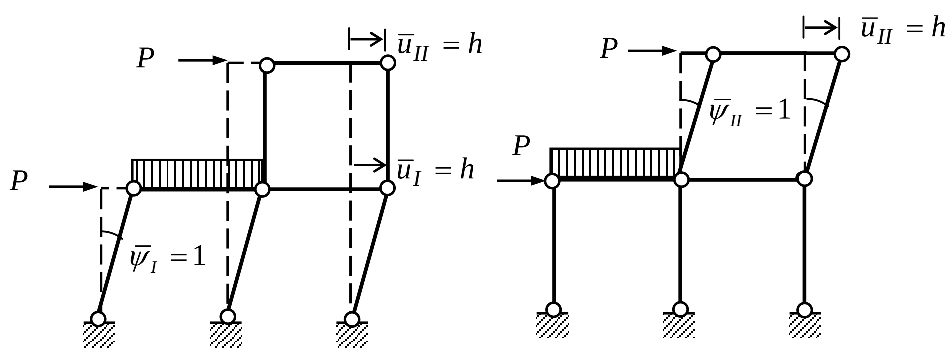
$$\bar{W} \equiv \bar{W}_{\text{int}} + \bar{W}_{ext} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{M_{41} + M_{52} + M_{63} + 2Ph = 0.}}$$

Virtuaalinen siirtymätila $\bar{\psi}_I = 0,\; \bar{\psi}_{II} = 1$:

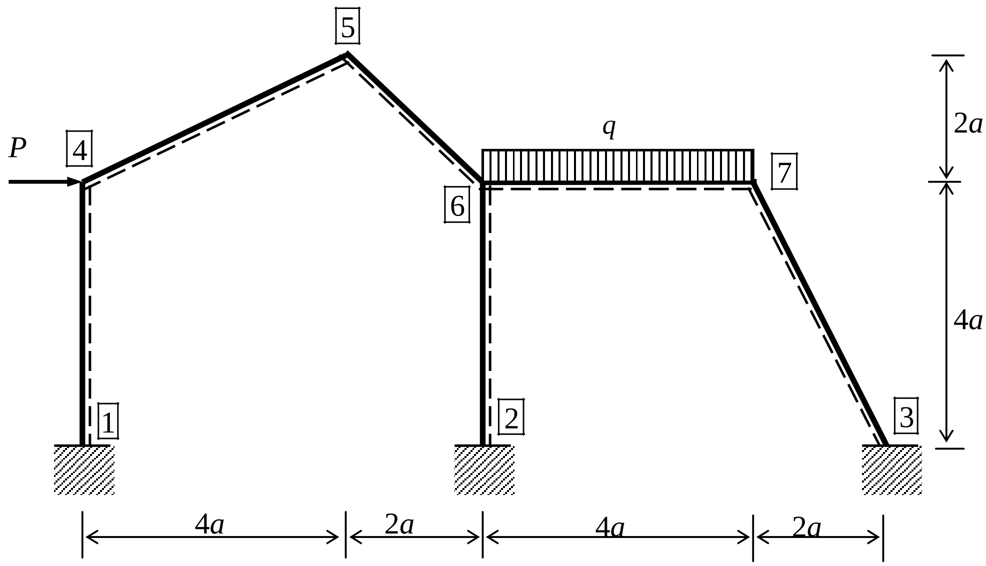
$$\bar{u}_I = 0,\; \bar{u}_{II} = h,\; \bar{\psi}_{57} = \bar{\psi}_{75} = \bar{\psi}_{68} = \bar{\psi}_{86} = 1,\; \text{muut} = 0.$$

$$\bar{W}_{\text{int}} = M_{57}\bar{\psi}_{57} + \overbrace{M_{75}}^{0}\bar{\psi}_{75} + M_{68}\bar{\psi}_{68} + M_{86}\bar{\psi}_{86} = M_{57} + M_{68} + M_{86}.$$
$$\bar{W}_{ext} = P\bar{u}_I + P\bar{u}_{II} = Ph.$$

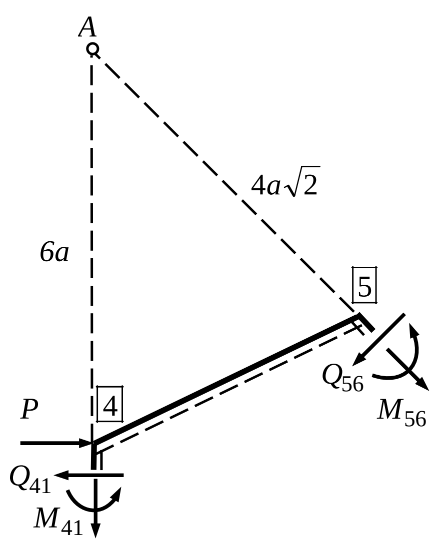
$$\bar{W} \equiv \bar{W}_{\text{int}} + \bar{W}_{ext} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{M_{57} + M_{68} + M_{86} + Ph = 0.}}$$



Esimerkki 4.12: Määritetään oheisen kehän siirtymäyhtälöt.



(a) Leikkausmenetelmä:

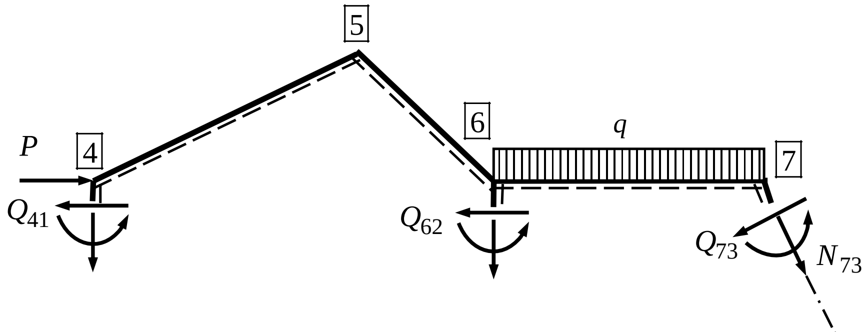


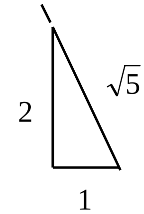
$$A \curvearrowright \quad Q_{41} \cdot 6a + Q_{56} \cdot 4a\sqrt{2} - M_{41} - M_{56} - P \cdot 6a = 0$$

$$\text{Sauva } \boxed{4} - \boxed{1}: \; Q_{41} \cdot 4a + M_{14} + M_{41} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{41} = -\frac{M_{14} + M_{41}}{4a}$$

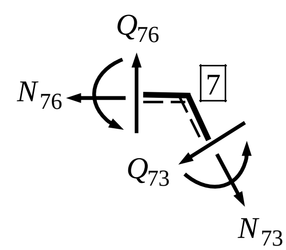
$$\text{Sauva } \boxed{5} - \boxed{6}: \; Q_{56} \cdot 2a\sqrt{2} + M_{56} + M_{65} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{56} = -\frac{M_{56} + M_{65}}{2a\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \; \underline{\underline{3M_{14} + 5M_{41} + 6M_{56} + 4M_{65} + 12Pa = 0.}} \qquad \text{(a)}$$





$$\rightarrow \; P - Q_{41} - Q_{62} - \frac{2}{\sqrt{5}} Q_{73} + \frac{1}{\sqrt{5}} N_{73} = 0$$



$$\downarrow \; -Q_{76} + \frac{1}{\sqrt{5}} Q_{73} + \frac{2}{\sqrt{5}} N_{73} = 0$$

$$\Rightarrow \; N_{73} = \frac{\sqrt{5}}{2} Q_{76} - \frac{1}{2} Q_{73}$$

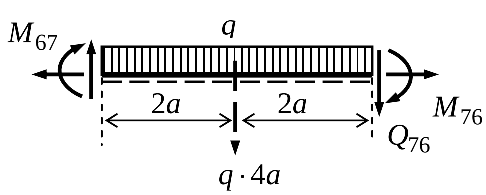
Saadaan leikkausvoimien avulla lausuttu yhtälö:

$$-Q_{41} - Q_{62} - \frac{\sqrt{5}}{2} Q_{73} + \frac{1}{2} Q_{76} + P = 0$$

Sauva $\boxed{4} - \boxed{1}$: $Q_{41} \cdot 4a + M_{14} + M_{41} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{41} = -\dfrac{M_{14} + M_{41}}{4a}$

Sauva $\boxed{6} - \boxed{2}$: $Q_{62} \cdot 4a + M_{26} + M_{62} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{62} = -\dfrac{M_{26} + M_{62}}{4a}$

Sauva $\boxed{7} - \boxed{3}$: $Q_{73} \cdot 2a\sqrt{5} + M_{37} + M_{73} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{73} = -\dfrac{M_{37} + M_{73}}{2a\sqrt{5}}$



Sauva $\boxed{7} - \boxed{6}$: $Q_{76} \cdot 4a + M_{67} + M_{76} + q \cdot 4a \cdot 2a = 0$

$$\Rightarrow \; Q_{76} = -\frac{M_{67} + M_{76}}{4a} - 2aq$$

$$\Rightarrow \; \underline{\underline{M_{14} + M_{41} + M_{26} + M_{62} + M_{37} + M_{73} - \frac{1}{2} M_{67} - \frac{1}{2} M_{76} + 4Pa - 4qa^2 = 0.}} \quad \text{(b)}$$

(b) Virtuaalisen työn periaate:

Tehtävän 4.10 tuloksena saatiin esimerkkikehälle mm. seuraavat siirtymien lausekkeet

$$u_4 = 4a\psi_I,$$
$$v_6 = 0,$$
$$v_7 = -2a\psi_{II},$$

sekä seuraavat sauvakiertymen lausekkeet

$$\psi_{14} = \psi_I,$$
$$\psi_{45} = \frac{2}{3}(-\psi_I + \psi_{II}),$$
$$\psi_{56} = \frac{4}{3}(\psi_I - \psi_{II}),$$
$$\psi_{26} = \psi_{II},$$
$$\psi_{67} = -\frac{1}{2}\psi_{II},$$
$$\psi_{37} = \psi_{II}.$$

Virtuaalinen siirtymätila $\overline{\psi}_I = 1,\ \overline{\psi}_{\mathrm{II}} = 0$:

$$\overline{u}_4 = 4a,\ \overline{v}_6 = 0,\ \overline{v}_7 = 0.$$

$$\overline{\psi}_{14} = \overline{\psi}_{41} = 1,\ \overline{\psi}_{45} = \overline{\psi}_{54} = -\frac{2}{3},\ \overline{\psi}_{56} = \overline{\psi}_{65} = \frac{4}{3},\ \text{muut} = 0.$$

$$\begin{aligned}\overline{W}_{\mathrm{int}} &= M_{14}\overline{\psi}_{14} + M_{41}\overline{\psi}_{41} + M_{45}\overline{\psi}_{45} + M_{54}\overline{\psi}_{54} + M_{56}\overline{\psi}_{56} + M_{65}\overline{\psi}_{65} \\ &= M_{14} + M_{41} - \frac{2}{3}M_{45} - \frac{2}{3}M_{54} + \frac{4}{3}M_{56} + \frac{4}{3}M_{65}.\end{aligned}$$

$$\overline{W}_{ext} = P\overline{u}_4 + q\cdot 4a\cdot\frac{\overline{v}_6 + \overline{v}_7}{2} = 4Pa.$$

$$\overline{W} \equiv \overline{W}_{\mathrm{int}} + \overline{W}_{ext} = 0$$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{3M_{14} + 3M_{41} - 2M_{45} - 2M_{54} + 4M_{56} + 4M_{65} + 12Pa = 0.}} \qquad \text{(c)}$$

(Tämä yhtälö vastaa yhtälöä (a), vaikkakaan se ei ole aivan saman näköinen. Vähentämällä yhtälöiden (a) ja (c) vasemmat puolet saadaan lauseke

$$2(M_{41} + M_{45} + M_{54} + M_{56}),$$

joka häviää nurkkien 4 ja 5 momenttitasapainoehtojen $M_{41} + M_{45} = 0$ ja $M_{54} + M_{56} = 0$ perusteella.)

Virtuaalinen siirtymätila $\overline{\psi}_I = 0,\ \overline{\psi}_{\mathrm{II}} = 1$:

$\bar{u}_4 = 0,\ \bar{v}_6 = 0,\ \bar{v}_7 = -2a.$

$$\overline{\psi}_{45} = \overline{\psi}_{45} = \frac{2}{3},\ \overline{\psi}_{56} = \overline{\psi}_{65} = -\frac{4}{3},\ \overline{\psi}_{26} = \overline{\psi}_{62} = 1,\ \overline{\psi}_{67} = \overline{\psi}_{76} = -\frac{1}{2},\ \overline{\psi}_{37} = \overline{\psi}_{73} = 1.$$

$$\overline{W}_{\mathrm{int}} = \frac{2}{3}M_{45} + \frac{2}{3}M_{54} - \frac{4}{3}M_{56} - \frac{4}{3}M_{65} + M_{26} + M_{62} - \frac{1}{2}M_{67} - \frac{1}{2}M_{76} + M_{37} + M_{73}$$

$$\overline{W}_{ext} = P\bar{u}_4 + q \cdot 4a \cdot \frac{\bar{v}_6 + \bar{v}_7}{2} = -4qa^2.$$

$$\overline{W} \equiv \overline{W}_{\mathrm{int}} + \overline{W}_{ext} = 0$$

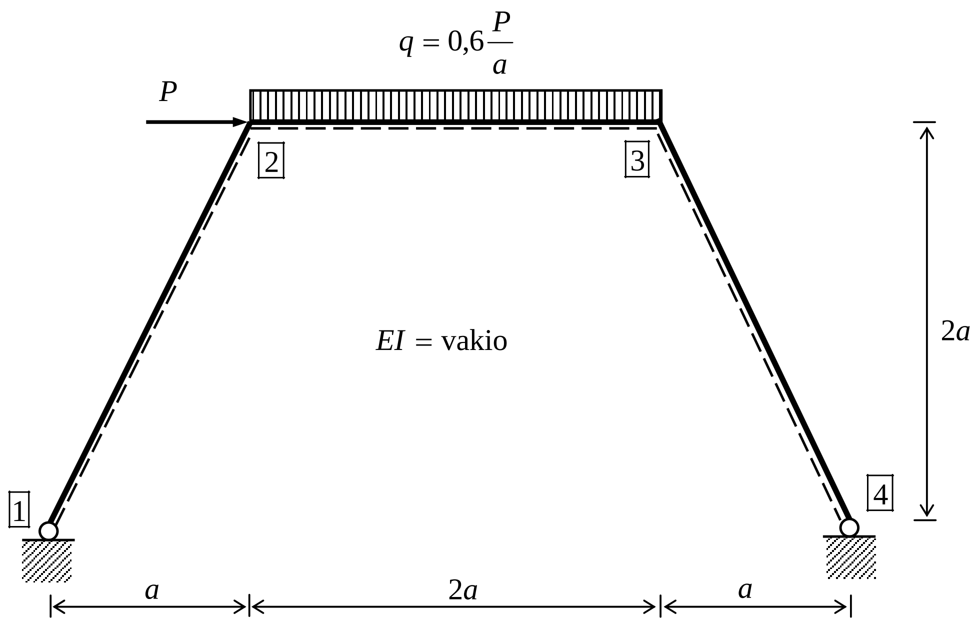
$$\Rightarrow \underline{\underline{2M_{45} + 2M_{54} - 4M_{56} - 4M_{65} + 3M_{26} + 3M_{62}}}$$
$$\underline{\underline{-\frac{3}{2}M_{67} - \frac{3}{2}M_{76} + 3M_{37} + 3M_{73} - 12qa^2 = 0.}} \qquad \text{(d)}$$

(Tämä yhtälö on yhtälöiden (a) ja (b) lineaarikombinaatio: Kertomalla yhtälön (b) vasen puoli kolmella ja vähentämällä siitä yhtälön (a) vasen puoli, saadaan lauseke:

$$-2M_{41} + 2M_{54} - 4M_{56} - 4M_{65} + 3M_{26} + 3M_{62}$$
$$-\frac{3}{2}M_{67} - \frac{3}{2}M_{76} + 3M_{37} + 3M_{73} - 12qa^2.$$

Ottamalla huomioon nurkan 4 momenttitasapainoehto $M_{41} + M_{45} = 0$, siitä tulee yhtälön (d) vasen puoli.)

Esimerkki 4.13: Muodostetaan yhtälöryhmä oheisen kehän ratkaisemiseksi momenttimenetelmällä.



Sivusiirtyvyyden kertaluku: $n_{sii} = 2k - t - s = 2 \cdot 4 - 4 - 3 = 1$.

Nurkkasiirtymät ja sauvakiertymät riippumattoman sauvakiertymän avulla:

$$\text{Sauva } \boxed{1}\text{-}\boxed{2}: \begin{cases} u_2 - \overbrace{u_1}^{0} = -(\overbrace{y_2 - y_1}^{-2a})\psi_{12} & \Rightarrow\ u_2 = 2a\psi_{12} \\ v_2 - \overbrace{v_1}^{0} = (\overbrace{x_2 - x_1}^{a})\psi_{12} & \Rightarrow\ v_2 = a\psi_{12} \end{cases}$$

$$\text{Sauva } \boxed{2}\text{-}\boxed{3}: \begin{cases} u_3 - u_2 = -(\overbrace{y_3 - y_2}^{0})\psi_{23} & \Rightarrow\ u_3 = 2a\psi_{12} \\ v_3 - v_2 = (\overbrace{x_3 - x_2}^{2a})\psi_{23} & \Rightarrow\ v_3 = a\psi_{12} + 2a\psi_{23} \end{cases}$$

$$\text{Sauva } \boxed{3}\text{-}\boxed{4}: \begin{cases} u_4 - u_3 = -(\overbrace{y_4 - y_3}^{2a})\psi_{34} & \Rightarrow\ u_4 = \underline{2a\psi_{12} - 2a\psi_{34} = 0} \\ v_4 - v_3 = (\overbrace{x_4 - x_3}^{a})\psi_{34} & \Rightarrow\ v_4 = \underline{a\psi_{12} + 2a\psi_{23} + a\psi_{34} = 0} \end{cases}$$

Saatiin yhtälöpari: $\begin{cases} \psi_{12} - \psi_{34} = 0 \\ \psi_{12} + 2\psi_{23} + \psi_{34} = 0 \end{cases}$

Valitsemalla riippumattomaksi sauvakiertymäksi $\psi_{12} = \psi$, saadaan sauvakiertymille ja nollasta eroaville siirtymäkomponenteille

$$\underline{\psi_{12} = \psi,\ \psi_{23} = -\psi,\ \psi_{34} = \psi,}\quad \underline{u_2 = 2a\psi,\ v_2 = a\psi,\ u_3 = 2a\psi,\ v_3 = -a\psi.} \qquad \text{(a)}$$

Momenttitasapainoehdot:

$$
\begin{aligned}
&M_{12} = 0, \\
&M_{21} + M_{23} = 0 \;\Rightarrow\; M_{21} = -M_{23}, \\
&M_{32} + M_{34} = 0 \;\Rightarrow\; M_{32} = -M_{34}, \\
&M_{43} = 0.
\end{aligned}
\tag{b}
$$

Yhteensopivuusehot:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{21} = \varphi_{23}, \\
&\varphi_{32} = \varphi_{34}.
\end{aligned}
\tag{c}
$$

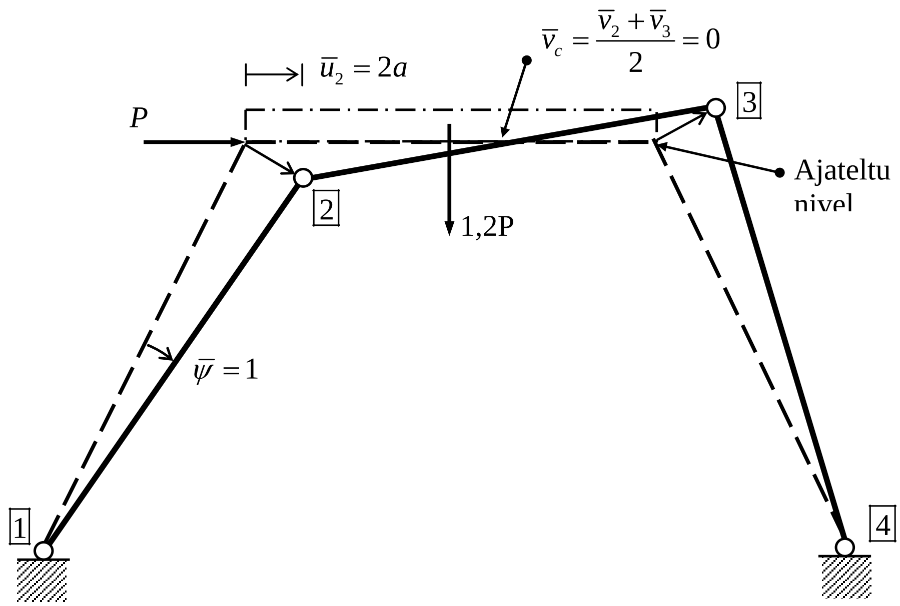
Momenttimenetelmän yhtälöt:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{21} = \alpha_{21}\overbrace{M_{21}}^{-M_{23}} - \beta_{21}\overbrace{M_{12}}^{0} + \overbrace{\psi_{12}}^{\psi} + \overbrace{\alpha_{12}^{0}}^{0} = -\alpha_{21}M_{23} + \psi, \\
&\varphi_{23} = \alpha_{23}M_{23} - \beta_{23}\overbrace{M_{32}}^{-M_{34}} + \overbrace{\psi_{23}}^{-\psi} + \alpha_{23}^{0} = \alpha_{23}M_{23} + \beta_{23}M_{34} - \psi + \alpha_{23}^{0}, \\
&\varphi_{32} = \alpha_{32}\overbrace{M_{32}}^{-M_{34}} - \beta_{32}M_{23} + \overbrace{\psi_{32}}^{-\psi} + \alpha_{32}^{0} = -\alpha_{32}M_{34} - \beta_{32}M_{23} - \psi + \alpha_{32}^{0}, \\
&\varphi_{34} = \alpha_{34}M_{34} - \beta_{34}\overbrace{M_{43}}^{0} + \overbrace{\psi_{34}}^{\psi} + \overbrace{\alpha_{34}^{0}}^{0} = \alpha_{34}M_{34} + \psi,
\end{aligned}
\tag{d}
$$

Sijoitetaan (d) yhteensopivuusehtoihin (c) $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{21} = \varphi_{23} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{(\alpha_{21} + \alpha_{23})M_{23} + \beta_{23}M_{34} - 2\psi = -\alpha_{23}^{0}}}, \\
&\varphi_{32} = \varphi_{34} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\beta_{32}M_{23} + (\alpha_{32} + \alpha_{34})M_{23} + 2\psi = \alpha_{32}^{0}}}.
\end{aligned}
\tag{e}
$$

Siirtymäyhtälö **virtuaalisen työn periaatteella**:



Virtuaalinen siirtymätila $\bar{\psi} = 1$:

$$\begin{cases} \bar{u}_2 = 2a, \\ \bar{v}_2 = a, \\ \bar{u}_3 = 2a, \\ \bar{v}_3 = -a \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} \bar{\psi}_{12} = \bar{\psi}_{21} = 1, \\ \bar{\psi}_{23} = \bar{\psi}_{32} = -1, \\ \bar{\psi}_{34} = \bar{\psi}_{34} = 1.. \end{cases}$$

$$\bar{W}_{\text{int}} = \overbrace{\bar{M}_{12}}^{0}\psi_{12} + \overbrace{M_{21}}^{-M_{23}}\overbrace{\bar{\psi}_{21}}^{1} + M_{23}\overbrace{\bar{\psi}_{23}}^{-1} + \overbrace{M_{32}}^{-M34}\overbrace{\bar{\psi}_{32}}^{-1} + M_{34}\overbrace{\bar{\psi}_{34}}^{1} + \overbrace{M_{43}}^{0}\bar{\psi}_{43} = -2M_{23} + 2M_{34}.$$

$$\bar{W}_{ext} = P \cdot \bar{u}_2 + 1,2P \cdot \bar{v}_c = 2Pa.$$

$$\bar{W} \equiv \bar{W}_{\text{int}} + \bar{W}_{ext} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{M_{23} - M_{34} - Pa = 0.}}$$

Yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} (\alpha_{21} + \alpha_{23})M_{23} + \beta_{23}M_{34} - 2\psi = -\alpha^0_{23,}, \\ \beta_{32}M_{23} + (\alpha_{32} + \alpha_{34})M_{23} + 2\psi = \alpha^0_{32}, \\ M_{23} - M_{34} = Pa. \end{cases}$$

Sauvavakiot:

$$
\begin{cases}
\alpha_{21} = \alpha_{34} = \dfrac{a\sqrt{5}}{3EI}, \\
\alpha_{23} = \alpha_{32} = \dfrac{2a}{3EI}, \\
\beta_{23} = \beta_{32} = \dfrac{2a}{6EI} = \dfrac{a}{3EI}, \\
\alpha_{23}^{0} = -\alpha_{32}^{0} = \dfrac{0{,}6P/a(2a)^3}{24EI} = 0{,}2\dfrac{Pa^3}{EI}.
\end{cases}
$$

Sijoittamalla saadaan:

$$
\begin{cases}
\dfrac{a}{3EI}(\sqrt{5}+2)M_{23} + \dfrac{a}{3EI}M_{34} - 2\psi = -0{,}2\dfrac{Pa^3}{EI}, \\
\dfrac{a}{3EI}M_{23} + \dfrac{a}{3EI}(\sqrt{5}+2)M_{34} + 2\psi = -0{,}2\dfrac{Pa^3}{EI}, \\
M_{23} - M_{34} = Pa.
\end{cases}
$$

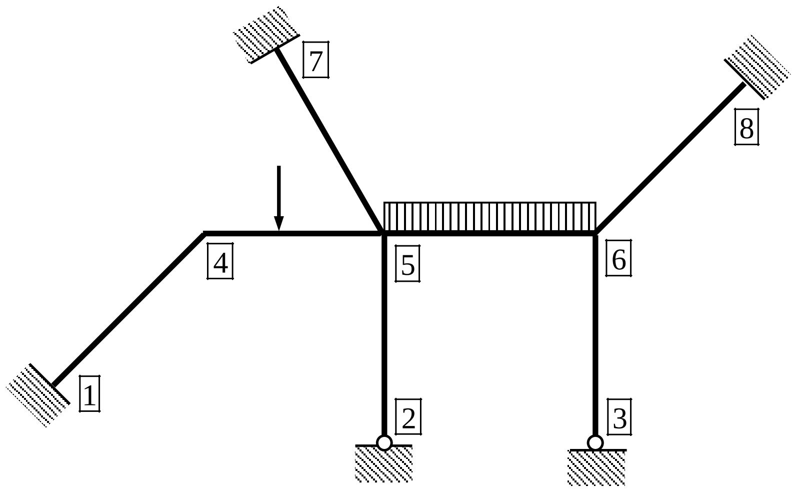
Kertomalla kolmas yhtälö puolittain -2:lla saadaan matriisimuodossa

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{a}{EI}(\dfrac{\sqrt{5}}{3}+\dfrac{2}{3}) & \dfrac{a}{3EI} & -2 \\
\dfrac{a}{3EI} & \dfrac{a}{EI}(\dfrac{\sqrt{5}}{3}+\dfrac{2}{3}) & 2 \\
-2 & 2 & 0
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} M_{23} \\ M_{34} \\ \psi \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} -0{,}2\dfrac{Pa^2}{EI} \\ -0{,}2\dfrac{Pa^2}{EI} \\ -2Pa \end{Bmatrix}.
$$

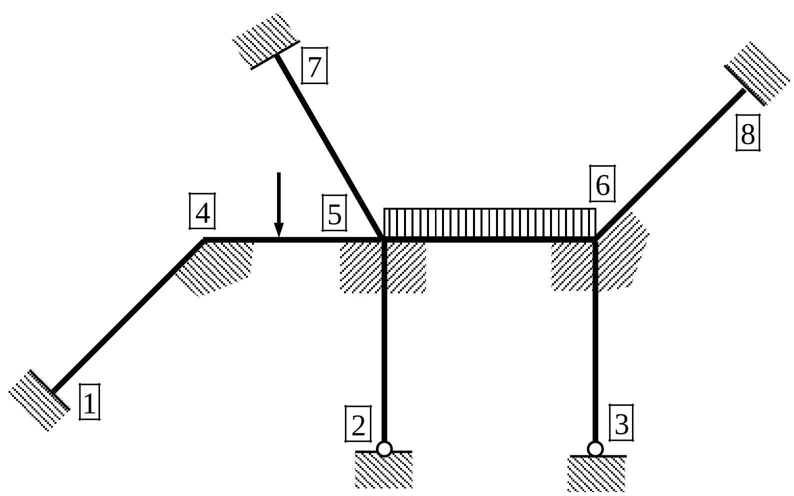
Tästä nähdään, että **yhtälöryhmän kerroinmatriisi on symmetrinen.** Tämä on momentti- ja kulmanmuutosmenetelmien yleinen ominaisuus. Symmetrisyyden toteamista voidaan käyttää tarkistuskeinona.

4.7 Crossin momentintasausmenetelmä

Crossin momentintasausmenetelmä on havainnollinen tapa ratkaista jatkuvia palkkeja ja tasokehiä iteratiivisesti. Se perustuu kulmanmuutosmenetelmän yhtälöihin. Vaikka menetelmää voidaan käyttää myös sivusiirtyvien kehien analysointiin, rajoitumme tässä vain **siirtymättömiin rakenteisiin**. Tarkastellaan kuvan 4.26 tasokehää.



Kuva 4.26: Tasokehä.



Kuva 4.27: Tasokehä, jonka nurkkien kiertyminen on estetty.

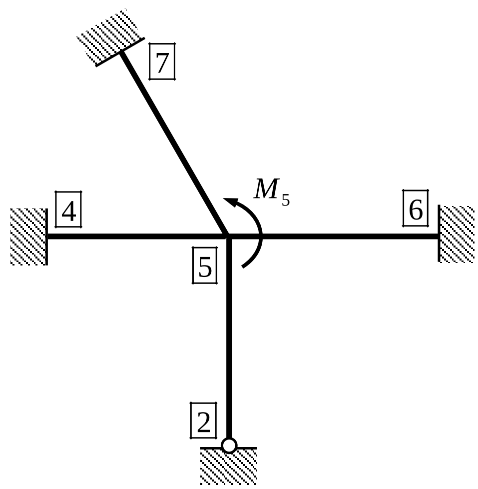
Ajatellaan aluksi kehän nurkkien kiertyminen kuvan 4.27 mukaisesti estetyksi. Tällöin $\varphi_{ij} = 0$ kaikilla *ij* ja kulmanmuutosmenetelmän perusyhtälöistä (4.13) ja (4.17) (siirtymätön kehä: $\psi_{ij} = 0$) seuraa sauvanpäämomenteille

$$\left.\begin{aligned} M_{ij} &= MK_{ij}, \\ M_{ij} &= MK_{ij}^{0}, \quad \text{(päässä } j \text{ nivel).} \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

Merkitään nurkkaan *i* liittyvien sauvojen sauvanpäämomenttien summaa M_i :llä, ts.

$$\boxed{M_i = \sum_j M_{ij}}. \tag{4.27}$$

Nurkan *i* momenttitasapainoehdon mukaan tulisi olla $M_i = 0$. Rakenteella, jonka nurkkien kiertyminen on estetty, tämä sauvanpäämomenttien tasapainoehto ei ole voimassa, vaan $M_i = T_i$, missä $T_i \neq 0$ nurkan kiertymisen estävä tukireaktiomomentti. Ajatellaan sitten, että yksi nurkka *i* vapautetaan, jolloin tukireaktio häviää ja momentti M_i voidaan ymmärtää nurkkaa *i* rasittavaksi kuormaksi. Tarkastellaan tilannetta esimerkiksi nurkassa 5.



Kuva 4.28: Nurkan 5 vapauttaminen.

Nurkan 5 vapauttamisesta johtuvat muutokset siihen liittyvien sauvojen sauvapäämomentteihin saadaan tarkastelemalla kuvan 4.28 ulkoisen momentin M_5 kuormittamaa kehää. Kulmanmuutosmenetelmän perusyhtälöistä (4.13) ja (4.17) saadaan aluksi

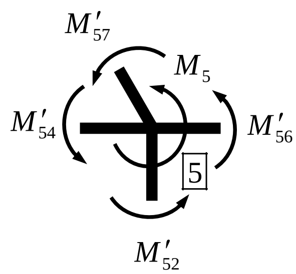
$$\left.\begin{aligned} M'_{52} &= a^0_{52}\varphi_5, \\ M'_{54} &= a_{54}\varphi_5, \\ M'_{56} &= a_{56}\varphi_5, \\ M'_{57} &= a_{57}\varphi_5, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} M''_{25} &= 0, \\ M''_{45} &= b_{45}\varphi_5, \\ M''_{65} &= b_{65}\varphi_5, \\ M''_{75} &= b_{75}\varphi_5, \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

missä φ_5 on nurkan 5 kiertymä. Nurkan momenttitasapainoehdosta (kuva 4.29) seuraa

$$\circlearrowleft 5 \quad \sum_j M'_{5j} + M_5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \overbrace{(a^0_{52} + a_{54} + a_{56} + a_{57})}^{d_5}\varphi_5 + M_5 = 0 \tag{4.29}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_5 = -\frac{M_5}{d_5},$$



Kuva 4.29: Nurkan 5 VKK.

missä suuretta $d_5 = a^0_{52} + a_{54} + a_{56} + a_{57}$ kutsutaan nurkan 5 **nurkkajäykkyydeksi**. Sijoittamalla tämä tulos lausekkeisiin (4.27) saadaan

$$\left.\begin{aligned} M'_{52} &= -\mu_{52} M_5, \\ M'_{54} &= -\mu_{54} M_5, \\ M'_{56} &= -\mu_{56} M_5, \\ M'_{57} &= -\mu_{57} M_5, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} M''_{25} &= 0, \\ M''_{45} &= \gamma_{45} M'_{54}, \\ M''_{65} &= \gamma_{65} M'_{56}, \\ M''_{75} &= \gamma_{75} M'_{57}, \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

missä

$$\begin{aligned} &\mu_{52} = \frac{a^0_{52}}{d_5}, \ \mu_{54} = \frac{a_{54}}{d_5}, \ \mu_{56} = \frac{a_{56}}{d_5}, \ \mu_{57} = \frac{a_{57}}{d_5}, \\ &\gamma_{25} = 0, \quad \gamma_{45} = \frac{b_{45}}{a_{54}}, \ \gamma_{65} = \frac{b_{65}}{a_{56}}, \ \gamma_{75} = \frac{b_{75}}{a_{57}}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Ensimmäinen kaavaryhmä (4.30) ilmaisee, kuinka momenttikuorman M_5 vaikutus jaetaan nurkkaan 5 liittyvien sauvojen kesken sauvanpäämomenttien lisäyksiksi, ns. **jakomomenteiksi** M'_{5j}. Tämän vuoksi kertoimia μ_{5j} kutsutaan **jakoluvuiksi**. Toinen kaavaryhmä (4.30) ilmaisee, kuinka momenttikuorman M_5 vaikutus lisäksi siirretään nurkkaan 5 liittyvien sauvojen vastakkaisten päiden *j* sauvanpäämomenttien lisäyksiksi ns. **siirtomomenteiksi** M''_{j5}. Tämän vuoksi kertoimia γ_{j5} kutsutaan **siirtoluvuiksi.**

Laskennan vaiheet ovat pääpiirtein seuraavat: Määritetään aluksi jako- ja siirtoluvut kaavoilla

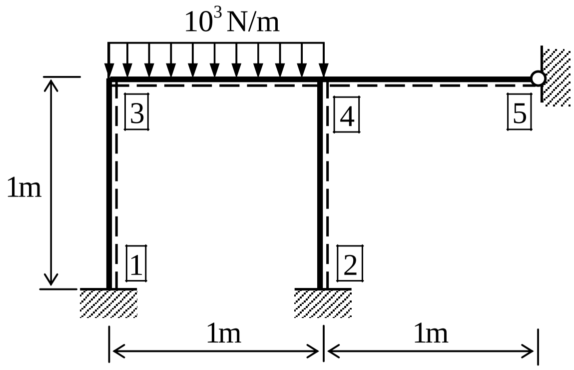
$$\mu_{ij} = \frac{a_{ij}}{d_i} \text{ tai } \mu_{ij} = \frac{a_{ij}^0}{d_i}, \text{ kun sauvan päässä } j \text{ on nivel,}$$
$$\gamma_{ji} = \frac{b_{ji}}{a_{ij}} \text{ tai } \gamma_{ji} = 0, \text{ kun sauvan päässä on nivel.} \tag{4.32}$$

Määritetään lähtömomentit: $M_{ij} = MK_{ij}$ tai $M_{ij} = MK_{ij}^0$, kun päässä j on nivel. Lasketaan **epätasapainomomentit** M_i kaavalla (4.27). Aloitusnurkaksi valitaan nurkka, jonka $|M_i|$ on suurin. Suoritetaan tasaus:

- jako: $M'_{ij} = -\mu_{ij} M_i$,
- siirto: $M''_{ji} = \gamma_{ji} M_{ij}$. (4.33)

Lisätään saadut jako- ja siirtomomentit ao. sauvanpäämomentteihin ja lasketaan ao. nurkissa uudet epätasapainomomentit M_i. Valitaan seuraava tasausnurkka ($|M_i|$ suurin) ja suoritetaan uusi tasaus, jne. Jatketaan, kunnes epätasapainomomentit M_i ovat riittävän pieniä.

Esimerkki 4.14: Määritetään oheisen kehän taivutusmomenttikuvio Crossin momentintasausmenetelmällä



Nurkkajäykkyydet:

$$d_3 = a_{31} + a_{34} = 8EI$$

$$d_4 = a_{43} + a_{42} + a_{45}^0 = 11EI$$

Jako- ja siirtoluvut:

$$\left.\begin{aligned}
\mu_{31} &= \frac{a_{31}}{d_3} = 0,5 \\
\mu_{34} &= \frac{a_{34}}{d_3} = 0,5 \\
\mu_{43} &= \frac{a_{43}}{d_4} = 0,3636 \\
\mu_{42} &= \frac{a_{42}}{d_4} = 0,3636 \\
\mu_{45} &= \frac{a_{45}^0}{d_4} = 0,2727
\end{aligned}\right\}
\qquad
\left.\begin{aligned}
\gamma_{13} &= \frac{b_{13}}{a_{31}} = 0,5 \\
\gamma_{43} &= \frac{b_{43}}{a_{34}} = 0,5 \\
\gamma_{34} &= \frac{b_{34}}{a_{43}} = 0,5 \\
\gamma_{24} &= \frac{b_{24}}{a_{42}} = 0,5 \\
\gamma_{54} &= 0
\end{aligned}\right\}$$

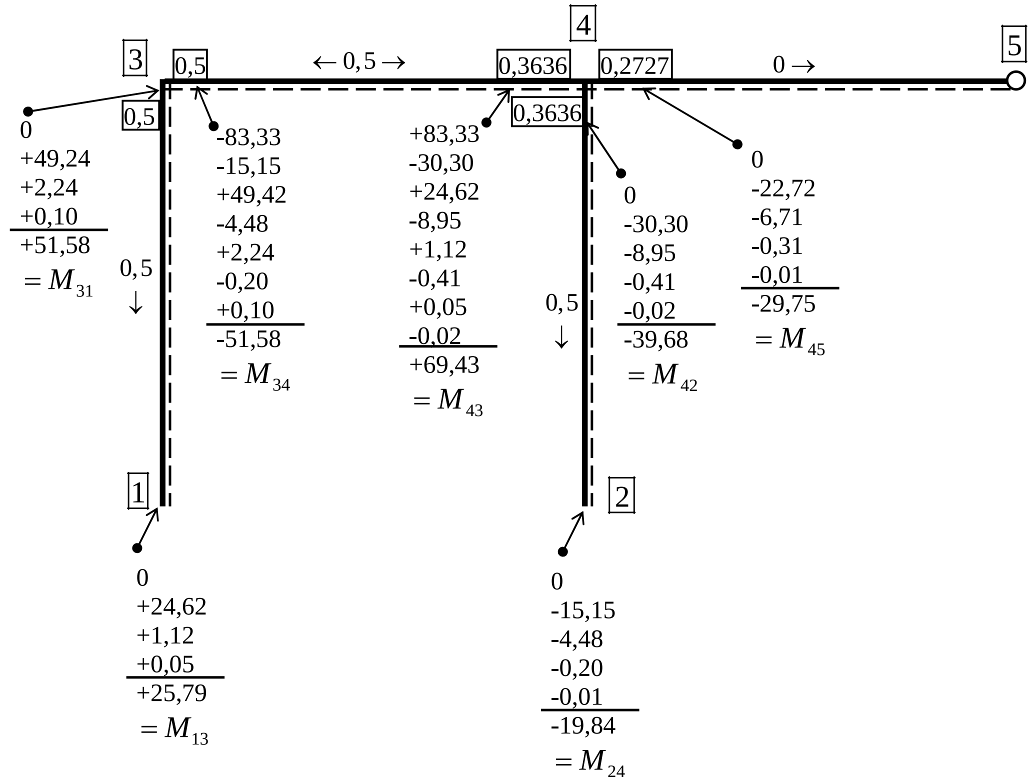
Alkumomentit:

$$MK_{34} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{10^2 \cdot 1^2}{12} = -83,33$$

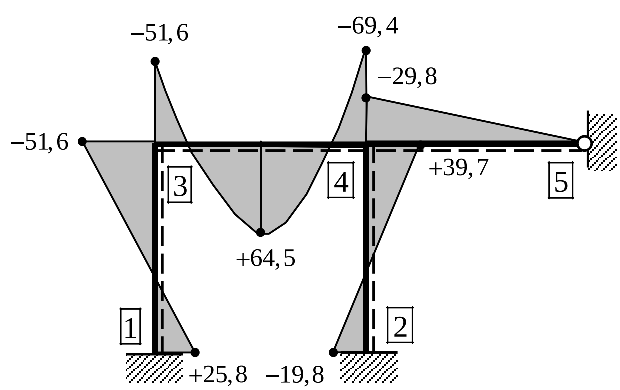
$$MK_{43} = +83,33$$

Muut $MK_{ij} = 0$

Laskelma:



Taivutusmomenttikuvio:



5. SAUVARAKENTEIDEN SIIRTYMÄMENETELMÄ JA ELEMENTTIMENETELMÄ

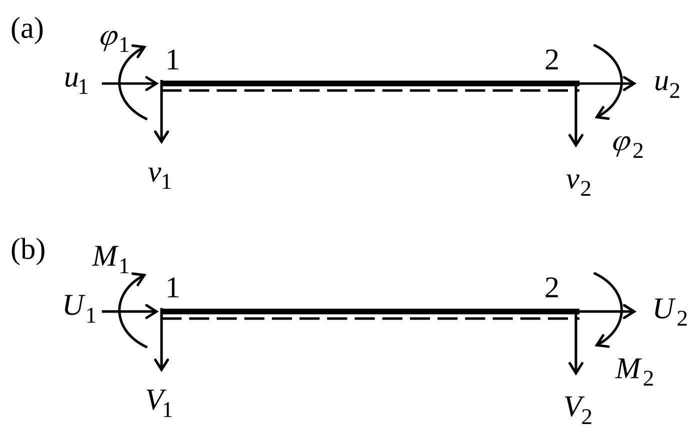
Tässä luvussa käsitellään suorista sauvoista koostuvan sauvarakenteen analysoimista **siirtymämenetelmällä**. Siirtymämenetelmän yhtälöt formuloidaan muotoon, jossa käytetään **elementtimenetelmän systematiikkaa ja formalismia**. Luvussa tarkastellaan myös **elementtimenetelmän** soveltamista kimmoisten sauvarakenteiden staattiseen analyysiin. Nähdään, että vaikka elementtimenetelmä on likimenetelmä, sen soveltaminen tasajäykistä sauvoista koostuvaan sauvarakenteeseen johtaa identtisiin yhtälöihin tarkan siirtymämenetelmän yhtälöiden kanssa.

Kulmanmuutosmenetelmä oli siirtymämenetelmä, jossa kehärakenteen sauvat otaksuttiin aksiaalisesti jäykiksi ($EA = \infty$) ja jossa tuntemattomina siirtymäsuureina olivat kiertymät ja riippumattomat sauvakiertymät. Kun tässä käsiteltävää siirtymämenetelmää sovelletaan kehärakenteisiin, sauvojen aksiaaliset muodonmuutokset otetaan huomioon ($EA \neq \infty$) ja tuntemattomiksi siirtymäsuureiksi valitaan sauvanpääsiirtymät ja sauvanpääkiertymät.

Tässä esitettävä siirtymämenetelmä ei kuitenkaan rajoitu pelkästään tasokehärakenteisiin kuten kulmanmuutosmenetelmä. Se on itse asiassa yhtenäinen menettelytapa, johon voidaan sisällyttää monenlaisia rakenneosia eli **elementtejä**. Tällaisiksi elementeiksi otetaan tässä jouset, palkit, ristikkosauvat ja kehäsauvat. Systeemiin voidaan helposti lisätä myös muunlaisia elementtejä, kuten esimerkiksi kimmoisella alustalla olevat palkit tai vaikkapa kaaret. Vaikka tässä käsitellään pääasiassa tasorakenteita, yleistys avaruusrakenteisiin on suoraviivaista.

5.1 Suoran sauvan peruskuormitustapaukset

5.11 Sauvanpäiden voima- ja siirtymäsuureet



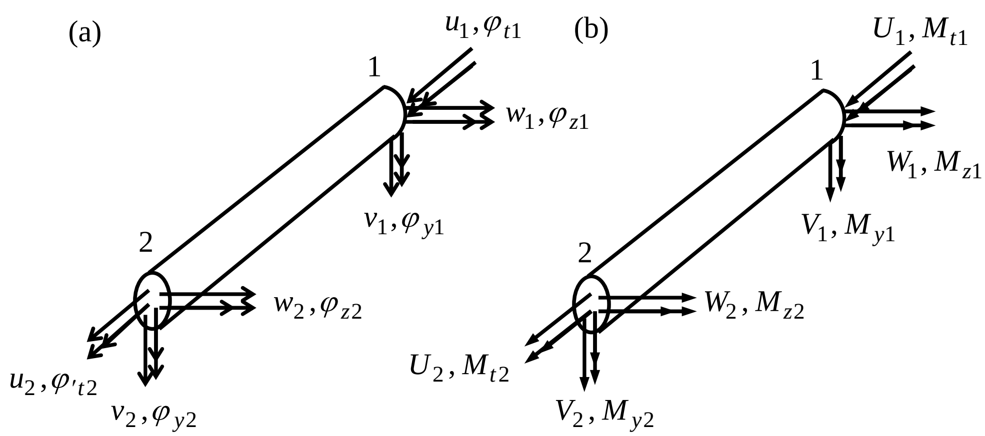
Kuva 5.1: Sauvanpäiden (a) siirtymä- ja (b) voimasuureet tasotapauksessa

Sauvan päiden siirtymäsuureet tasotapauksessa on esitetty kuvassa 5.1 (a). Ne ovat sauvanpääsiirtymät $u_i, v_i \ (i = 1,2)$ ja sauvanpääkiertymät $\varphi_i \ (i = 1,2)$. Vastaavat voimasuureet on esitetty kuvassa 5.1 (b). Ne ovat sauvanpäävoimat $U_i, V_i \ (i = 1,2)$ ja sauvanpäämomentit $M_i \ (i = 1,2)$. Sauvanpäävoimat $U_i, V_i \ (i = 1,2)$ poikkeavat momentti- ja kulmanmuutosmenetelmien yhteydessä käytetyistä sauvanpäänormaalivoimista ja sauvanpääleikkausvoimista N_i, Q_i $(i = 1,2)$ siinä, että niiden positiiviset suunnat yhtyvät nyt sauvanpääsiirtymien positiivisiin suuntiin. Näin sauvan päiden siirtymä- ja voimasuureita voidaan haluttaessa kuvata samanlaisilla nuolilla (kuva 5.1). Jatkossa ryhdytäänkin käyttämään nimitystä vapausaste, johon liittyy sekä voima, että siirtymäsuure. Puhumme siirtymä ja kiertymävapausasteista. Edellisiin liittyvät siirtymä- ja voimasuureet ovat siirtymiä ja voimia sekä jälkimmäisiin liittyvät ovat kiertymiä ja momentteja.

Sauvanpäiden voimasuureiden ja jännitysresultanttien väliset yhteydet tasotapauksessa ovat:

$$\begin{cases} U_1 = -N(0), \\ U_2 = N(L), \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = -Q(0), \\ V_2 = Q(L), \end{cases} \quad \begin{cases} M_1 = M(0), \\ M_2 = -M(L). \end{cases} \tag{5.1}$$

Sauvan päiden siirtymäsuureet kolmidimensioisessa tapauksessa on esitetty kuvassa 5.2 (a). Ne ovat sauvanpääsiirtymät u_i, v_i, w_i $(i = 1,2)$ ja sauvanpääkiertymät $\varphi_{ti}, \varphi_{yi}, \varphi_{zi}$, $(i = 1,2)$. Vastaavat voimasuureet on esitetty kuvassa 5.2 (b). Ne ovat sauvanpäävoimat U_i, V_i, W_i $(i = 1,2)$ ja sauvanpäämomentit M_{ti}, M_{yi}, M_{zi} $(i = 1,2)$.

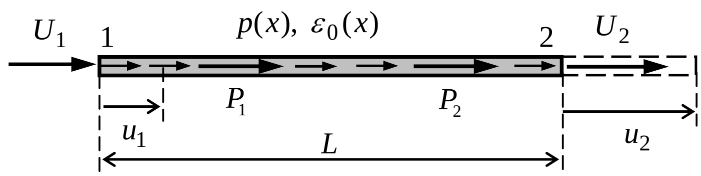


Kuva 5.2: Sauvanpäiden (a) siirtymä- ja (b) voimasuureet kolmidimensioisessa tapauksessa.

Sauvanpäiden voimasuureiden ja jännitysresultanttien väliset yhteydet kolmidimensioisessa tapauksessa ovat:

$$\begin{cases} U_1 = -N(0), \\ U_2 = N(L), \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = -Q_y(0), \\ V_2 = Q_y(L), \end{cases} \quad \begin{cases} W_1 = -Q_z(0), \\ W_2 = Q_z(L), \end{cases}$$
$$\begin{cases} M_{t1} = -M_t(0), \\ M_{t2} = M_t(L), \end{cases} \quad \begin{cases} M_{y1} = -M_y(0), \\ M_{y2} = M_y(L), \end{cases} \quad \begin{cases} M_{z1} = M_z(0), \\ M_{z2} = -M_z(L). \end{cases} \tag{5.2}$$

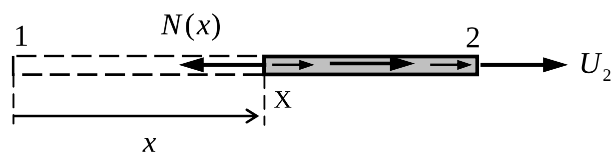
Seuraavassa määritetään **sauvanpäiden voima- ja siirtymäsuureiden väliset yhteydet** suoran sauvan peruskuormitustapauksille, jotka ovat **aksiaalinen kuormitus, vääntö** ja **taivutus**.



Kuva 5.3: Aksiaalisesti kuormitettu sauva

5.12 Aksiaalisesti kuormitettu sauva

Tarkastellaan kuvan 5.3 aksiaalisesti kuormitettua sauvaa. Sauvan kuormitus muodostuu sauvanpäävoimista U_1 ja U_2, jakautuneesta kuormituksesta $p(x)$ ja pistekuormista P_1, P_2, jne. Sauva voi lisäksi saada alkuvenymän $\varepsilon_0(x)$. Otaksutaan, että sauva on tasajäykkä ($EA = \text{vakio}$). Tämä otaksuma on tehty pedagogisista syistä. Jäykkyydeltään muuttuvien sauvojen käsittely ei ajatuksellisesti poikkea tässä esitettävästä.



Kuva 5.4: Sauvan 1-2 osan X-2 vapaakappalekuvio

Sauvan normaalivoiman $N(x)$ voidaan ymmärtää olevan alkupäästään 1 kiinnitetyn sauvan normaalivoima (vrt. kuva 5.4). Se koostuu sauvaa rasittavan ulkoisen kuorman aiheuttamasta normaalivoimasta $N^0(x)$ ja sauvanpäänvoiman U_2 aiheuttamasta normaalivoimasta, jonka suuruus on U_2, joten

$$N(x) = U_2 + N^0(x)\,. \tag{5.3}$$

Sauvanpäävoimalle $U_1 = -N(0)$ saadaan tästä

$$U_1 = -U_2 - N^0(0) = -U_2 + U_1^0 \tag{5.4}$$

missä $U_1^0 = -N^0(0)$ on alkupäästään kiinnitetyn sauvan sauvanpäävoima U_1 ulkoisesta kuormituksesta. Sauvan venymälle saadaan

$$\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA} + \varepsilon_0(x) = \frac{U_2}{EA} + \frac{N^0(x)}{EA} + \varepsilon_0(x)\,, \tag{5.5}$$

missä $\varepsilon_0(x)$ on sauvan alkuvenymä.

Määritetään sauvanpään 2 siirtymä u_2 laskemalla yhteen sauvanpään 1 siirtymä u_1 ja sauvan pituuden muutos. Saadaan

$$u_2 = u_1 + \Delta L = u_1 + \int_0^L \varepsilon(x)dx = u_1 + \int_0^L [\frac{U_2}{EA} + \frac{N^0(x)}{EA} + \varepsilon_0(x)]dx$$
$$= u_1 + \frac{U_2 L}{EA} + \frac{1}{EA}\int_0^L N^0(x)dx + \int_0^L \varepsilon_0(x)dx \; .$$

Käytettiin yhteyttä (5.5). Ratkaisemalla tästä sauvanpäävoima U_2 saadaan

$$U_2 = -\frac{EA}{L}u_1 + \frac{EA}{L}u_2 - \frac{1}{L}\int_0^L N^0(x)dx - \frac{EA}{L}\int_0^L \varepsilon_0(x)dx \, . \tag{5.6a}$$

Sijoittamalla tulos (5.6a) lausekkeeseen (5.4) saadaan sauvanpäävoimalle U_1 lauseke

$$U_1 = \frac{EA}{L}u_1 - \frac{EA}{L}u_2 + U_1^0 + \frac{1}{L}\int_0^L N^0(x)dx + \frac{EA}{L}\int_0^L \varepsilon_0(x)dx \tag{5.6b}$$

Yhdistämällä lausekkeet (5.6) saadaan tulos

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{EA}{L}u_1 - \frac{EA}{L}u_2 + UK_1, \\ U_2 &= -\frac{EA}{L}u_1 + \frac{EA}{L}u_2 + UK_2, \end{aligned} \tag{5.7}$$

eli matriisimuodossa

$$\boxed{\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} UK_1 \\ UK_2 \end{Bmatrix},} \tag{5.8}$$

missä **kuormitustermit** UK_1 ja UK_2 ovat

$$\boxed{\begin{aligned} UK_1 &= U_1^0 + \frac{1}{L}\int_0^L N^0(x)dx + \frac{EA}{L}\int_0^L \varepsilon_0(x)dx \\ UK_2 &= -\frac{1}{L}\int_0^L N^0(x)dx - \frac{EA}{L}\int_0^L \varepsilon_0(x)dx \end{aligned}} \tag{5.9}$$

Esitetään yhtälöryhmän (5.7) vielä muodossa

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S & -S \\ -S & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} UK_1 \\ UK_2 \end{Bmatrix}, \tag{5.10}$$

missä on käytetty lyhennysmerkintää

$$S = \frac{EA}{L}. \tag{5.11}$$

Taulukossa 5.1 on esitetty aksiaalisesti kuormitetun, tasajäykän ($EA = \text{vakio}$) sauvan kuormitustermejä UK_1 ja UK_2 tyypillisille kuormitustapauksille. Seuraavissa esimerkeissä johdetaan joitakin niistä.

Esimerkki 5.1: Määritetään kuormitustermit UK_1 ja UK_2, kun kuormituksena on etäisyyksillä *a* ja *b* sauvan päistä 1 ja 2 sijaitseva aksiaalinen pistekuorma *P*. Alkuvenymää ei ole.

Ratkaisu:

Normaalivoima $N^0(x)$ on päästään 1 kiinnitetyn sauvan normaalivoima ulkoisesta kuormituksesta *P*, ja sille saadaan helposti

$$N^0(x) = P, \text{ kun } 0 \le x \le a,$$
$$N^0(x) = 0, \text{ kun } a \le x \le L.$$

Sauvanpäävoimalle U_1^0 saadaan

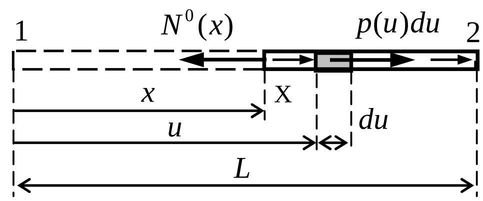
$$U_1^0 = -N^0(0) = -P$$

Kuormitustermeille saadaan

$$\boxed{\begin{aligned} UK_1 &= U_1^0 + \frac{1}{L}\int_0^L N^0(x)dx = -P + \frac{1}{L}\int_0^a Pdx = -P + \frac{Pa}{L} = \underline{\underline{-\frac{Pb}{L}}} \\ UK_2 &= -\frac{1}{L}\int_0^L N^0(x)dx = -\frac{1}{L}\int_0^a Pdx = \underline{\underline{-\frac{Pa}{L}}} \end{aligned}}$$

Esimerkki 5.2: Ulkoisena mekaanisena kuormituksena on pelkästään jakautunut aksiaalinen kuorma $p(x)$. Sievennetään kuormitustermien UK_1 ja UK_2 lausekkeita (5.9) tässä tapauksessa.

Ratkaisu:



Normaalivoimalle $N^0(x)$ saadaan helposti lauseke

$$N^0(x) = \int_x^L p(u)du$$

Sauvanpäävoimalle U_1^0 saadaan

$$U_1^0 = -N^0(0) = -\int_0^L p(x)dx$$

Kuormitustermeille saadaan

$$UK_1 = U_1^0 + \frac{1}{L}\int_0^L N^0(x)dx + \frac{EA}{L}\int_0^L \varepsilon_0(x)dx = -\int_0^L p(x)dx + \frac{1}{L}\int_0^L\int_x^L p(u)dudx + \frac{EA}{L}\int_0^L \varepsilon_0(x)dx$$

$$= -\frac{1}{L}\int_0^L (L-x)p(x)dx + \frac{EA}{L}\int_0^L \varepsilon_0(x)dx$$

$$UK_2 = -\frac{1}{L}\int_0^L N^0(x)dx + \frac{EA}{L}\int_0^L \varepsilon_0(x)dx = -\frac{1}{L}\int_0^L\int_x^L p(u)dudx + \frac{EA}{L}\int_0^L \varepsilon_0(x)dx$$

$$= -\frac{1}{L}\int_0^L xp(x)dx + \frac{EA}{L}\int_0^L \varepsilon_0(x)dx$$

Käytettiin hyväksi osittaisintegrointia seuraavasti:

$$\int_0^L\int_x^L p(u)dudx = \int_0^L 1\int_x^L p(u)dudx = \Big|_0^L [x\int_x^L p(u)du] + \int_0^L xp(x)dx = \int_0^L xp(x)dx$$

Esimerkki 5.3: Määritetään kuormitustermit puolisuunnikaskuormalle

$$p(x) = p_1 + (p_2 - p_1)\frac{x}{L}\,,$$

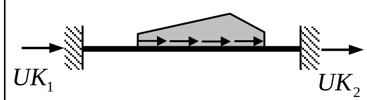
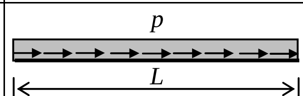
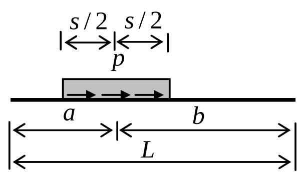
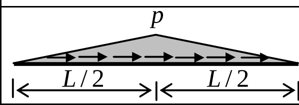
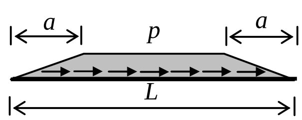
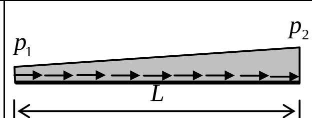
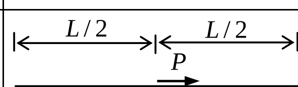
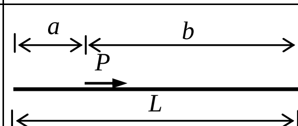
kun sauvan saa myös alkuvenymän $\varepsilon_0 = \text{vakio}$.

Integroimalla saadaan

$$\begin{aligned}
UK_1 &= -\int_0^L (1-\frac{x}{L})[p_1 + (p_2 - p_1)\frac{x}{L}]dx + \frac{EA}{L}\varepsilon_0 \underbrace{\int_0^L dx}_{L} \\
&= -\int_0^L [p_1 + (p_2 - 2p_1)\frac{x}{L} - (p_2 - p_1)\frac{x^2}{L^2}]dx + EA\varepsilon_0 \\
&= -\Big|_0^L [p_1 x + (p_2 - 2p_1)\frac{x^2}{2L} - (p_2 - p_1)\frac{x^3}{3L^2}] + EA\varepsilon_0 \\
&= \underline{\underline{-\frac{(2p_1 + p_2)L}{6} + EA\varepsilon_0}}\,,
\end{aligned}$$

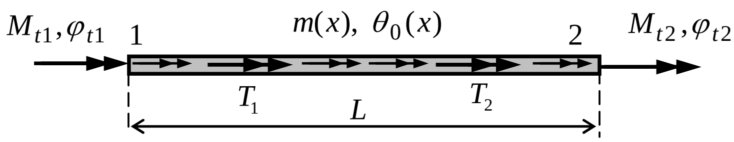
$$\begin{aligned}
UK_2 &= -\int_0^L \frac{x}{L}[p_1 + (p_2 - p_1)\frac{x}{L}]dx - \frac{EA}{L}\varepsilon_0 \underbrace{\int_0^L dx}_{L} \\
&= -\int_0^L [p_1\frac{x}{L} + (p_2 - p_1)\frac{x^2}{L^2}]dx - EA\varepsilon_0 \\
&= -\Big|_0^L [p_1\frac{x^2}{2L} + (p_2 - p_1)\frac{x^3}{3L^2}] - EA\varepsilon_0 \\
&= \underline{\underline{-\frac{(p_1 + 2p_2)L}{6} - EA\varepsilon_0}}\,.
\end{aligned}$$

Taulukko 5.1: Sauvarakenteiden siirtymämenetelmän kuormitustermit tasajäykälle sauvalle; **aksiaalinen kuormitus**

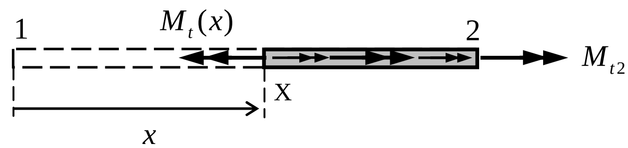
No	Aksiaalinen kuormitus:	
1		$UK_1 = -\frac{pL}{2},\; UK_2 = -\frac{pL}{2}$
2		$UK_1 = -\frac{psb}{L},$ $UK_2 = -\frac{psa}{L}$
3		$UK_1 = -\frac{pL}{4},\; UK_2 = -\frac{pL}{4}$
4		$UK_1 = -\frac{p}{2}(L-a),$ $UK_2 = -\frac{p}{2}(L-a)$
5		$UK_1 = -\frac{2p_1 + p_2}{6}L,$ $UK_2 = -\frac{p_1 + 2p_2}{6}L$
6		$UK_1 = -\frac{P}{2},\; UK_2 = -\frac{P}{2}$
7		$UK_1 = -\frac{Pb}{L},$ $UK_2 = -\frac{Pa}{L}$
9	Alkuvenymä: $\varepsilon_0 =$ vakio	$UK_1 = EA\varepsilon_0,\; UK_2 = -EA\varepsilon_0$

5.13 Väännetty sauva

Tarkastellaan kuvan 5.5 vääntökuormituksen kuormittamaa sauvaa. Sauvan kuormitus muodostuu sauvanpäämomenteista M_{t1} ja M_{t2}, jakautuneesta vääntävästä momentista $m(x)$ ja vääntävistä pistemomenteista T_1, T_2, jne. Sauva voi lisäksi saada alkuvääntymän $\theta_0(x)$. Otaksutaan, että sauva on tasajäykkä ($GI_t = \text{vakio}$).



Kuva 5.5: Väännetty sauva



Kuva 5.6: Sauvan 1-2 osan X-2 vapaakappalekuvio

Sauvan vääntömomentin $M_t(x)$ voidaan ymmärtää olevan alkupäästään 1 kiinnitetyn sauvan vääntömomentti (vrt. kuva 5.6). Se koostuu sauvaa rasittavan ulkoisen kuorman aiheuttamasta vääntömomentista $M_t^0(x)$ ja sauvanpäämomentin M_{t2} aiheuttamasta vääntömomentista, jonka suuruus on M_{t2}, joten

$$M_t(x) = M_{t2} + M_t^0(x)\,, \tag{5.12}$$

Sauvanpäämomentille $M_{t1} = -M_t(0)$ saadaan tästä

$$M_{t1} = -M_{t2} - M_t^0(0) = -M_{t2} + M_{t1}^0\,. \tag{5.13}$$

missä $M_{t1}^0 = -M_t^0(0)$ on alkupäästään kiinnitetyn sauvan sauvanpäämomentti M_{t1} ulkoisesta kuormituksesta. Sauvan vääntymälle saadaan

$$\theta(x) = \frac{M_t(x)}{GI_t} + \theta_0(x) = \frac{M_{t2}}{GI_t} + \frac{M_t^0(x)}{GI_t} + \theta_0(x)\,, \tag{5.14}$$

missä $\theta_0(x)$ on sauvan alkuvääntymä.

Määritetään sauvanpään 2 vääntökulma φ_{t2} laskemalla yhteen sauvanpään 1 vääntökulma φ_{t1} ja sauvan vääntökulman muutos. Saadaan

$$\varphi_{t2} = \varphi_{t1} + \Delta\varphi = \varphi_{t1} + \int_0^L \theta(x)dx = \varphi_{t1} + \int_0^L [\frac{M_{t2}}{GI_t} + \frac{M_t^0(x)}{GI_t} + \theta_0(x)]dx$$

$$= \varphi_{t1} + \frac{M_{t2}L}{GI_t} + \frac{1}{GI_t}\int_0^L M_t^0(x)dx + \int_0^L \theta_0(x)dx$$

Käytettiin yhteyttä (5.14). Ratkaisemalla tästä sauvanpäämomentti M_{t2} saadaan

$$M_{t2} = -\frac{GI_t}{L}\varphi_{t1} + \frac{GI_t}{L}\varphi_{t2} - \frac{1}{L}\int_0^L M_t^0(x)dx - \frac{GI_t}{L}\int_0^L \theta_0(x)dx\,. \tag{5.15a}$$

Sijoittamalla tulos (5.15a) lausekkeeseen (5.13) saadaan sauvanpäämomentille M_{t1} lauseke

$$M_{t1} = \frac{GI_t}{L}\varphi_{t1} - \frac{GI_t}{L}\varphi_{t2} + M_{t1}^0 + \frac{1}{L}\int_0^L M_t^0(x)dx + \frac{GI_t}{L}\int_0^L \theta_0(x)dx\,. \tag{5.15b}$$

Yhdistämällä lausekkeet (5.15) saadaan tulos:

$$\begin{aligned} M_{t1} &= \frac{GI_t}{L}\varphi_{t1} - \frac{GI_t}{L}\varphi_{t2} + MK_{t1}, \\ M_{t2} &= -\frac{GI_t}{L}\varphi_{t1} + \frac{GI_t}{L}\varphi_{t2} + MK_{t2}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

eli matriisimuodossa

$$\boxed{\begin{Bmatrix} M_{t1} \\ M_{t2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GI_t}{L} & -\frac{GI_t}{L} \\ -\frac{GI_t}{L} & \frac{GI_t}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{t1} \\ \varphi_{t2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} MK_{t1} \\ MK_{t2} \end{Bmatrix},} \tag{5.17}$$

missä **kuormitustermien** MK_{t1} ja MK_{t2} lausekkeet ovat

$$\boxed{\begin{aligned} MK_{t1} &= M_{t1}^0 + \frac{1}{L}\int_0^L M_t^0(x)dx + \frac{GI_t}{L}\int_0^L \theta_0(x)dx \\ MK_{t2} &= -\frac{1}{L}\int_0^L M_t^0(x)dx - \frac{GI_t}{L}\int_0^L \theta_0(x)dx \end{aligned}} \tag{5.18}$$

Esitetään yhtälöryhmän (5.17) vielä muodossa

$$\begin{Bmatrix} M_{t1} \\ M_{t2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T & -T \\ -T & T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{t1} \\ \varphi_{t2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} MK_{t1} \\ MK_{t2} \end{Bmatrix}, \tag{5.19}$$

missä on käytetty lyhennysmerkintää

$$T = \frac{GI_t}{L} \,. \tag{5.20}$$

Huomautus: Symboli T on tässä lyhennysmerkintä, eikä ulkoinen vääntävä pistemomentti, kuten seuraavassa esimerkissä ja muualla tässä luvussa.

Taulukossa 5.2 on esitetty väännetyn, tasajäykän ($GI_t = \text{vakio}$) sauvan kuormitustermejä MK_{t1} ja MK_{t2} tyypillisille kuormitustapauksille. Seuraavissa esimerkeissä johdetaan joitakin niistä.

Esimerkki 5.4: Määritetään kuormitustermit MK_{t1} ja MK_{t2}, kun kuormituksena on etäisyyksillä a ja b sauvan päistä 1 ja 2 sijaitseva vääntävä pistemomentti T. Alkuvääntymää ei ole.

Ratkaisu:

Vääntömomentti $M_t^0(x)$ on päästään 1 kiinnitetyn sauvan vääntömomentti ulkoisesta kuormituksesta T, ja sille saadaan helposti

$$M_t^0(x) = 0, \text{ kun } 0 \le x \le a,$$
$$M_t^0(x) = T, \text{ kun } a \le x \le L.$$

Sauvanpäämomentille M_{t1}^0 saadaan

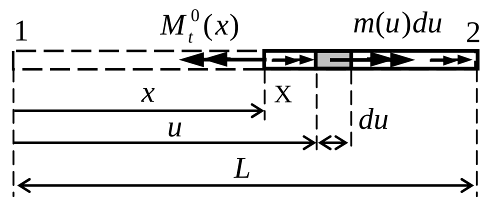
$$M_{t1}^0 = -M_t^0(0) = -T$$

Kuormitustermeille saadaan

$$MK_{t1} = M_{t1}^0 + \frac{1}{L}\int_0^L M_t^0(x)dx = -T + \frac{1}{L}\int_0^a Tdx = -T + \frac{Ta}{L} = \underline{\underline{-\frac{Tb}{L}}}$$
$$MK_{t2} = -\frac{1}{L}\int_0^L M_t^0(x)dx = -\frac{1}{L}\int_0^a Tdx = \underline{\underline{-\frac{Ta}{L}}}$$

Esimerkki 5.5: Ulkoisena mekaanisena kuormituksena on pelkästään jakautunut vääntävä momentti $m(x)$. Sievennetään kuormitustermien MK_{t1} ja MK_{t2} lausekkeita (5.18) tässä tapauksessa.

Ratkaisu:



Vääntömomentille $M_t^0(x)$ saadaan helposti lauseke

$$M_t^0(x) = \int_x^L m(u)du$$

Sauvanpäämomentille M_{t1}^0 saadaan

$$M_{t1}^0 = -M_t^0(0) = -\int_0^L m(x)dx$$

Kuormitustermeille saadaan

$$MK_{t1} = M_{t1}^0 + \frac{1}{L}\int_0^L M_t^0(x)dx + \frac{GA}{L}\int_0^L \theta_0(x)dx = -\int_0^L m(x)dx + \frac{1}{L}\int_0^L\int_x^L m(u)dudx + \frac{GA}{L}\int_0^L \theta_0(x)dx$$

$$= \text{jne.} = \underline{\underline{-\frac{1}{L}\int_0^L (L-x)\,p(x)dx + \frac{GA}{L}\int_0^L \theta_0(x)dx}}$$

$$MK_{t2} = -\frac{1}{L}\int_0^L M_t^0(x)dx + \frac{GA}{L}\int_0^L \theta_0(x)dx = -\frac{1}{L}\int_0^L\int_x^L m(u)dudx + \frac{GA}{L}\int_0^L \theta_0(x)dx = \text{jne.}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{L}\int_0^L xm(x)dx + \frac{GA}{L}\int_0^L \theta_0(x)dx}}$$

Sovellettiin osittaisintegrointia, kuten esimerkissä 5.2.

Esimerkki 5.6: Määritetään kuormitustermit puolisuunnikaskuormalle

$$m(x) = m_1 + (m_2 - m_1)\frac{x}{L},$$

kun sauva saa lisäksi alkuvääntymän $\theta_0 = \text{vakio}$.

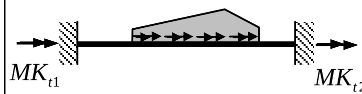
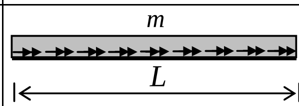
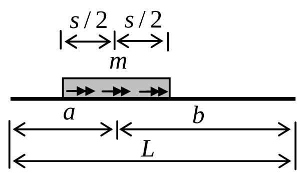
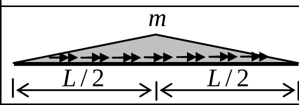
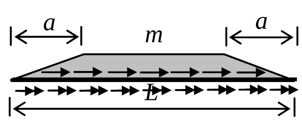
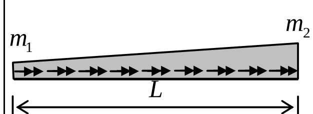
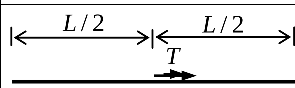
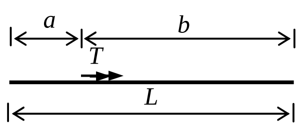
Ratkaisu:

Vastaavanlainen integrointi kuin esimerkissä 5.3 johtaa tulokseen

$$MK_{t1} = \underline{\underline{-\frac{(2m_1 + m_2)L}{6} + GI_t\theta_0}},$$

$$MK_{t2} = \underline{\underline{-\frac{(m_1 + 2m_2)L}{6} - GI_t\theta_0}}.$$

Taulukko 5.2: Sauvarakenteiden siirtymämenetelmän kuormitustermit tasajäykälle sauvalle; **vääntö**

No	Vääntävä kuormitus:	
1		$MK_{t1} = -\frac{mL}{2}$, $\mathrm{MK}_{t2} = -\frac{mL}{2}$
2		$MK_{t1} = -\frac{msb}{L}$, $MK_{t2} = -\frac{msa}{L}$
3		$MK_{t1} = -\frac{mL}{4}$, $MK_{t2} = -\frac{mL}{4}$
4		$MK_{t1} = -\frac{m}{2}(L-a)$, $MK_{t2} = -\frac{m}{2}(L-a)$
5		$MK_{t1} = -\frac{2m_1 + m_2}{6}L$, $MK_{t2} = -\frac{m_1 + 2m_2}{6}L$
6		$MK_{t1} = -\frac{T}{2}$, $\mathrm{MK}_{t2} = -\frac{T}{2}$
7		$MK_{t1} = -\frac{Tb}{L}$, $MK_{t2} = -\frac{Ta}{L}$
9	Alkuvääntymä: θ_0 = vakio	$MK_{t1} = GA\theta_0$, $\mathrm{MK}_{t2} = -GA\theta_0$

5.14 Taivutettu sauva

Sovelletaan kulmanmuutosmenetelmän (EI =vakio) yhtälöitä

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L}\varphi_{ij} + \frac{2EI}{L}\varphi_{ji} - \frac{6EI}{L}\psi_{ij} + MK_{ij}\,. \tag{5.21}$$

Saadaan aluksi

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{4EI}{L}\varphi_1 + \frac{2EI}{L}\varphi_2 - \frac{6EI}{L}\psi + MK_1, \\ M_2 &= \frac{2EI}{L}\varphi_1 + \frac{4EI}{L}\varphi_2 - \frac{6EI}{L^2}\psi + MK_2. \end{aligned} \tag{5.22}$$

missä

$$\psi = \frac{v_2 - v_1}{L}\,. \tag{5.23}$$

on sauvan sauvakiertymä ja kuormitustermien toiset alaindeksit on jätetty pois. Sijoittamalla sauvakiertymän lauseke (5.23) lausekkeeseen (5.22) saadaan edelleen

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{6EI}{L^2}v_1 + \frac{4EI}{L}\varphi_1 - \frac{6EI}{L^2}v_2 + \frac{2EI}{L}\varphi_2 + MK_1, \\ M_2 &= \frac{6EI}{L^2}v_1 + \frac{2EI}{L}\varphi_1 - \frac{6EI}{L^2}v_2 + \frac{4EI}{L}\varphi_2 + MK_2. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Sauvanpäävoimien V_1 ja V_2 voidaan ymmärtää muodostuvan vapaasti tuetun palkin sauvanpäävoimista V_1^0 ja V_2^0 sekä sauvanpäämomenteista M_1 ja M_2 aiheutuvista sauvanpäävoimista

$$V_1^M = \frac{M_1 + M_2}{L},\ V_2^M = -\frac{M_1 + M_2}{L}\,, \tag{5.25}$$

joten

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1^0 + V_1^M = V_1^0 + \frac{M_1 + M_2}{L}, \\ V_2 &= V_2^0 + V_2^M = V_2^0 - \frac{M_1 + M_2}{L}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Sijoittamalla sauvanpäämomenttien lausekkeet (5.24) sauvanpääleikkausvoimien lausekkeisiin (5.26) saadaan

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \frac{12EI}{L^3} v_1 + \frac{6EI}{L^2} \varphi_1 - \frac{12EI}{L^3} v_2 + \frac{6EI}{L^2} \varphi_2 + VK_1, \\
V_2 &= -\frac{12EI}{L^3} v_1 - \frac{6EI}{L^2} \varphi_1 + \frac{12EI}{L^3} v_2 - \frac{6EI}{L^2} \varphi_2 + VK_2,
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

missä

$$
\begin{aligned}
VK_1 &= V_1^0 + \frac{MK_1 + MK_2}{L}, \\
VK_2 &= V_2^0 - \frac{MK_1 + MK_2}{L}.
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

Kirjoittamalla lausekkeet (5.24) ja (5.27) matriisimuotoon saadaan

$$
\boxed{
\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
-\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} +
\begin{Bmatrix} VK_1 \\ MK_1 \\ VK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix}
}.
\tag{5.29}
$$

Käyttämällä lyhennysmerkintöjä

$$
A = \frac{4EI}{L}, \; B = \frac{2EI}{L}, \; C = \frac{12EI}{L^3}, \; D = \frac{6EI}{L^2}
\tag{5.30}
$$

yhtälö (5.29) saa vielä muodon

$$
\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
D & C & -D & C \\
C & A & -C & B \\
-D & -C & D & -C \\
C & B & -C & A
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} +
\begin{Bmatrix} VK_1 \\ MK_1 \\ VK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix}.
\tag{5.31}
$$

Taulukossa 5.3 on esitetty taivutetun, tasajäykän ($EI = \text{vakio}$) palkin kuormitustermejä MK_1, MK_2, VK_1 ja VK_2 tyypillisille kuormitustapauksille. Seuraavissa esimerkeissä johdetaan joitakin niistä.

Esimerkki 5.7: Johda tasajäykän palkin (EI = vakio) kuormitustermien VK_1 ja VK_2, kun sitä kuormittaa pistekuorma F pisteessä, jonka etäisyydet sauvan päistä ovat a ja b.

Ratkaisu:

Kuormitustermit MK_1 ja MK_2 on ratkaistu jo tehtävässä 4.4a. Niille saatiin.

$$MK_1 = -\frac{Fab^2}{L^2}, \; MK_2 = \frac{Fa^2b}{L^2}$$

Vapaasti tuetun palkin sauvanpäävoimille V_1^0 ja V_2^0 saadaan helposti

$$V_1^0 = -\frac{Fb}{L}, \; V_2^0 = -\frac{Fa}{L} \quad .$$

Kuormitustermeille saadaan

$$VK_1 = V_1^0 + \frac{MK_1 + MK_2}{L} = -\frac{Fb}{L} - \frac{Fab^2}{L^3} + \frac{Fa^2b}{L^3} = \underline{\underline{-\frac{Fb}{L}[1 - \frac{a(a-b)}{L^2}]}}$$

$$VK_2 = V_2^0 - \frac{MK_1 + MK_2}{L} = -\frac{Fa}{L} + \frac{Fab^2}{L^3} - \frac{Fa^2b}{L^3} = \underline{\underline{-\frac{Fa}{L}[1 - \frac{b(b-a)}{L^2}]}}$$

Esimerkki 5.8: Ulkoisena mekaanisena kuormituksena on pelkästään jakautunut poikittainen kuorma $q(x)$. Sievennetään kuormitustermien MK_1, MK_2, VK_1 ja VK_2 lausekkeita tässä tapauksessa.

Huomautus: Tämä esimerkki ei ole kurssin oppimisen kannalta oleellinen. Sen tarkoituksena on vain johtaa tulokset (5.32), joita tarvitaan myöhemmin kun tarkastellaan sauvarakenteiden siirtymämenetelmän ja elementtimenetelmän välitä yhteyttä.

Ratkaisu:

Sovelletaan ensin kulmanmuutosmenetelmän kuormitustermien lausekkeita (4.18) (*EI*=vakio) ja momenttimenetelmän ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvien kuormitustermien lausekkeita (4.5). Saadaan

$$MK_1 = -\frac{2EI}{L}(2\alpha_{12}^0 + \alpha_{21}^0) = -\frac{2EI}{L}\{2\int_0^L(1-\frac{x}{L})[\frac{M_0(x)}{EI} + \kappa_0(x)]dx - \int_0^L \frac{x}{L}[\frac{M_0(x)}{EI} + \kappa_0(x)]dx\}$$

$$= -\frac{2}{L}\int_0^L(2-3\frac{x}{L})M_0(x)dx - \frac{2EI}{L}\int_0^L(2-3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx,$$

$$MK_2 = -\frac{2EI}{L}(\alpha_{12}^0 + 2\alpha_{21}^0) = -\frac{2EI}{L}\{\int_0^L(1-\frac{x}{L})[\frac{M_0(x)}{EI} + \kappa_0(x)]dx - 2\frac{1}{EI}\int_0^L \frac{x}{L}[\frac{M_0(x)}{EI} + \kappa_0(x)]dx\}$$

$$= -\frac{2}{L}\int_0^L(1-3\frac{x}{L})M_0(x)dx - \frac{2EI}{L}\int_0^L(1-3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx.$$

Soveltamalla osittaisintegrointia oikeiden puolien ensimmäisiin termeihin saadaan

$$MK_1 = -\frac{2}{L}[\Big|_0^L(2x-\frac{3}{2}\frac{x^2}{L})M_0(x) - \int_0^L(2x-\frac{3}{2}\frac{x^2}{L})M_0'(x)dx] - \frac{2EI}{L}\int_0^L(2-3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx,$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L(2x-\frac{3}{2}\frac{x^2}{L})Q_0(x)dx - \frac{2EI}{L}\int_0^L(2-3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx,$$

$$MK_2 = -\frac{2}{L}[\Big|_0^L(x-\frac{3}{2}\frac{x^2}{L})M_0(x) - \int_0^L(x-\frac{3}{2}\frac{x^2}{L})M_0'(x)dx] - \frac{2EI}{L}\int_0^L(1-3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx.$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L(x-\frac{3}{2}\frac{x^2}{L})Q_0(x)dx - \frac{2EI}{L}\int_0^L(1-3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx.$$

Sijoitustermit hävisivät, koska vapaastituetun palkin taivutusmomentti $M_0(x)$ palkin tuilla $x = 0$ ja $x = L$ häviää. Lisäksi käytettiin hyväksi palkin momenttitasapainoyhtälöä $Q_0(x) = M_0'(x)$. Soveltamalla uudelleen osittaisintegrointia saadaan

$$MK_1 = \frac{2}{L}[\Big|_0^L (x^2 - \frac{1}{2}\frac{x^3}{L})Q_0(x) + \int_0^L (x^2 - \frac{1}{2}\frac{x^3}{L})q(x)dx] - \frac{2EI}{L}\int_0^L (2 - 3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx$$

$$= \frac{2}{L}[\frac{L^2}{2}Q_0(L) + \int_0^L (x^2 - \frac{1}{2}\frac{x^3}{L})q(x)dx] - \frac{2EI}{L}\int_0^L (2 - 3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx,$$

$$MK_2 = \frac{2}{L}[\Big|_0^L (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{L})Q_0(x) + \int_0^L (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{L})q(x)dx] - \frac{2EI}{L}\int_0^L (1 - 3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx.$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{L})q(x)dx - \frac{2EI}{L}\int_0^L (1 - 3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx.$$

Nyt käytettiin hyväksi palkin poikittaista voimatasapainoyhtälöä $Q_0'(x) = -q(x)$. Ottamalla lopuksi huomioon, että vapaastituetun palkin leikkausvoimalle palkin päässä 2 $(x = L)$ pätee

$$Q_0(L) = -\frac{1}{L}\int_0^L q(x)x dx,$$

saadaan

$$\underline{\underline{MK_1 = -L\int_0^L (\frac{x}{L} - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3})q(x)dx - \frac{2EI}{L}\int_0^L (2 - 3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx,}}$$

$$\underline{\underline{MK_2 = -L\int_0^L (-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3})q(x)dx - \frac{2EI}{L}\int_0^L (1 - 3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx.}}$$

Kaavoista (5.28) saadaan nyt

$$VK_1 = V_1^0 + \frac{MK_1 + MK_2}{L}$$

$$= -\int_0^L (1 - \frac{x}{L})q(x)dx - \int_0^L (\frac{x}{L} - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3})q(x)dx - \frac{2EI}{L^2}\int_0^L (2 - 3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx$$

$$- \int_0^L (-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3})q(x)dx - \frac{2EI}{L^2}\int_0^L (1 - 3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx.$$

$$\underline{\underline{= -\int_0^L (1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3})q(x)dx - \frac{6EI}{L^2}\int_0^L (1 - 2\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx,}}$$

$$VK_2 = -\int_0^L \frac{x}{L}q(x)dx + \int_0^L (\frac{x}{L} - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3})q(x)dx + \frac{2EI}{L}\int_0^L (2 - 3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx$$

$$+ \int_0^L (-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3})q(x)dx + \frac{2EI}{L}\int_0^L (1 - 3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx$$

$$\underline{\underline{= -\int_0^L (3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3})q(x)dx + \frac{6EI}{L^2}\int_0^L (1 - 2\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx.}}$$

Juuri käsitellyssä esimerkissä 5.8 saatiin siten kuormitustermien lausekkeet sauvalle jota kuormittaa **ulkoinen jakautunut kuormitus** $q(x)$ ja jonka **alkukäyristymä** on $\kappa_0(x)$. Ne ovat

$$\boxed{\begin{aligned} VK_1 &= -\int_0^L (1-3\frac{x^2}{L^2}+2\frac{x^3}{L^3})q(x)dx - \frac{6EI}{L^2}\int_0^L (1-2\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx, \\ MK_1 &= -L\int_0^L (\frac{x}{L}-2\frac{x^2}{L^2}+\frac{x^3}{L^3})q(x)dx - \frac{2EI}{L}\int_0^L (2-3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx, \\ VK_2 &= -\int_0^L (3\frac{x^2}{L^2}-2\frac{x^3}{L^3})q(x)dx + \frac{6EI}{L^2}\int_0^L (1-2\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx, \\ MK_2 &= -L\int_0^L (-\frac{x^2}{L^2}+\frac{x^3}{L^3})q(x)dx - \frac{2EI}{L}\int_0^L (1-3\frac{x}{L})\kappa_0(x)dx. \end{aligned}} \tag{5.32}$$

Esimerkki 5.9: Määritetään kuormitustermit puolisuunnikaskuormalle

$$q(x) = q_1 + (q_2 - q_1)\frac{x}{L},$$

kun palkki saa lisäksi alkukäyristymän $\kappa_0 = \text{vakio}$.

Ratkaisu:

Saadaan

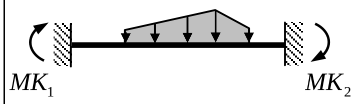
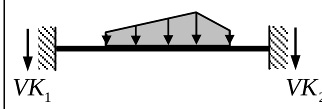
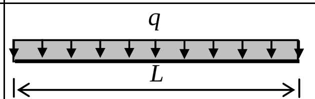
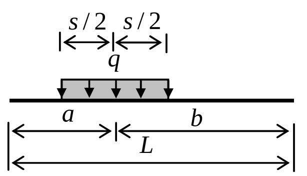
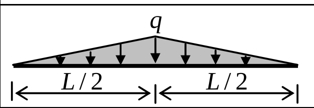
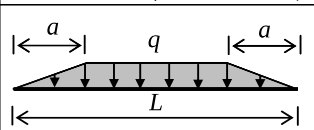
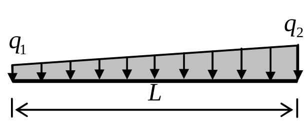
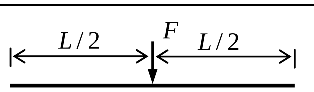
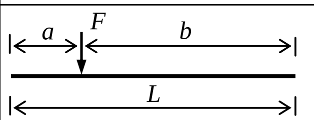
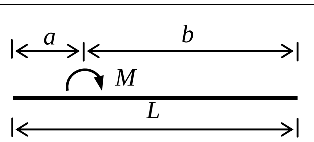
$$\begin{aligned} VK_1 &= -\int_0^L (1-3\frac{x^2}{L^2}+2\frac{x^3}{L^3})[q_1+(q_2-q_1)\frac{x}{L}]dx - \frac{6EI\kappa_0}{L^2}\int_0^L (1-2\frac{x}{L})dx \\ &= -\int_0^L [q_1+(q_2-q_1)\frac{x}{L} - 3q_1\frac{x^2}{L^2} - (3q_2-5q_1)\frac{x^3}{L^3} + 2(q_2-q_1)\frac{x^4}{L^4}]dx - \frac{6EI\kappa_0}{L^2}\int_0^L (1-2\frac{x}{L})dx \\ &= -\Big|_0^L [q_1x + (q_2-q_1)\frac{x^2}{2L} - q_1\frac{x^3}{L^2} - (3q_2-5q_1)\frac{x^4}{4L^3} + 2(q_2-q_1)\frac{x^5}{5L^4}] - \frac{6EI\kappa_0}{L^2}\Big|_0^L (x-x^2) \\ &= \underline{\underline{-\frac{7q_1+3q_2}{20}L.}} \end{aligned}$$

Vastaavasti menetellen saadaan myös muut puolisuunnikaskuormasta aiheutuvat kuormitustermit. Tulos on

$$\underline{\underline{VK_1 = -\frac{7q_1+3q_2}{20}L,\; MK_1 = -(\frac{q_1}{20}+\frac{q_2}{30})L^2 - EI\kappa_0,}}$$

$$\underline{\underline{VK_2 = -\frac{3q_1+7q_2}{20}L,\; MK_2 = (\frac{q_1}{30}+\frac{q_2}{20})L^2 + EI\kappa_0.}}$$

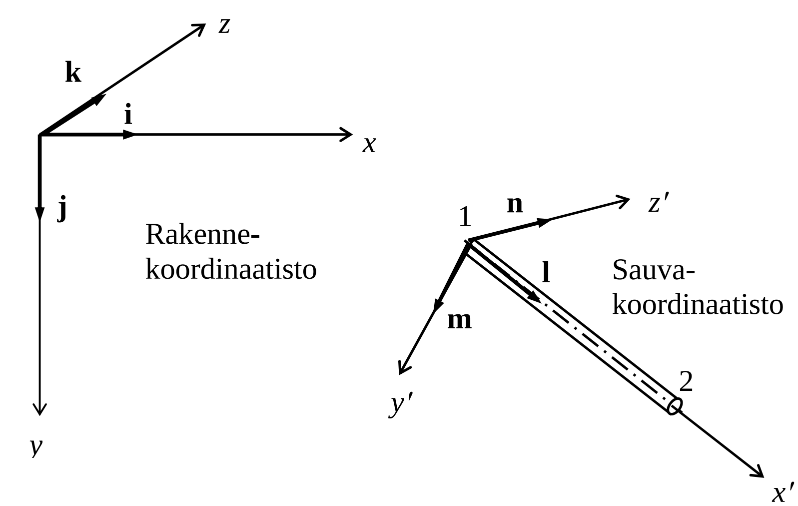
Taulukko 5.3: Sauvarakenteiden siirtymämenetelmän kuormitustermit tasajäykälle sauvalle; **taivutus**

No	Poikittainen kuormitus:		
1		$MK_1 = -\frac{qL^2}{12},\ MK_2 = \frac{qL^2}{12}$	$VK_1 = -\frac{qL}{2},\ VK_2 = -\frac{qL}{2}$
2		$MK_1 = -\frac{qs}{12L^2}[12ab^2 + s^2(L-3b)]$ $MK_2 = \frac{qs}{12L^2}[12a^2b + s^2(L-3a)]$	$VK_1 = -\frac{qs}{L}[b + \frac{a-b}{12L^2}(12ab-3s^2)],$ $VK_2 = -\frac{qs}{L}[a + \frac{b-a}{12L^2}(12ab-3s^2)]$
3		$MK_1 = -\frac{5qL^2}{96},\ MK_2 = \frac{5qL^2}{96}$	$VK_1 = -\frac{qL}{4},\ VK_2 = -\frac{qL}{4}$
4		$MK_1 = -\frac{q}{12L}[L^3 - a^2(2L-a)]$ $MK_2 = \frac{q}{12L}[L^3 - a^2(2L-a)]$	$VK_1 = -\frac{q}{2}(L-a),$ $VK_2 = -\frac{q}{2}(L-a)$
5		$MK_1 = -(\frac{q_1}{20} + \frac{q_2}{30})L^2$ $MK_2 = (\frac{q_1}{30} + \frac{q_2}{20})L^2$	$VK_1 = -\frac{7q_1 + 3q_2}{20}L,$ $VK_2 = -\frac{3q_1 + 7q_2}{20}L$
6		$MK_1 = -\frac{FL}{8},\ MK_2 = \frac{FL}{8}$	$VK_1 = -\frac{F}{2},\ VK_2 = -\frac{F}{2}$
7		$MK_1 = -\frac{Fab^2}{L^2},$ $MK_2 = \frac{Fa^2b}{L^2}$	$VK_1 = -\frac{Fb}{L}[1 + \frac{a(b-a)}{L^2}],$ $VK_2 = -\frac{Fa}{L}[1 + \frac{b(a-b)}{L^2}]$
8		$MK_1 = \frac{Mb}{L}(2 - 3\frac{b}{L})$ $MK_2 = \frac{Ma}{L}(2 - 3\frac{a}{L})$	$VK_1 = \frac{M}{L}(2 - 3\frac{a^2+b^2}{L^2})$ $VK_2 = -\frac{M}{L}(2 - 3\frac{a^2+b^2}{L^2})$
9	Alkukäyristymä: κ_0 = vakio	$MK_1 = -EI\kappa_0,\ MK_2 = EI\kappa_0$	$VK_1 = 0,\ VK_2 = 0$

5.2 Sauvakoordinaatisto ja rakennekoordinaatisto

Sauvakoordinaatistoksi olemme edellä nimittäneet sauvakohtaista koordinaatistoa, jonka *x*-(tai *s*-)akseli yhtyy sauvan akseliin ja muut akselit (*y* ja *z*) ovat sitä vastaan kohtisuorassa. Yhtä yhteistä koordinaatistoa, jossa koko rakenne esitetään, kutsutaan seuraavassa **rakennekoordinaatistoksi**. Aikaisemmasta poiketen suoran sauvan sauvakoordinaatteja merkitään tässä luvussa x', y', z' ja rakennekoordinaatteja merkitään *x*,*y*,*z*. Rakennekoordinaatiston kantavektorit ovat $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ja sauvakoordinaatiston kantavektorit ovat $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$.

Seuraavassa esitämme aluksi sauva- ja rakennekoordinaatiston välisen koordinaatiston muunnoksen sekä tarkastelemme kuinka mielivaltainen vektori käyttäytyy tässä muunnoksessa. Sen jälkeen esitämme, kuinka voimme muuntaa sauvaelementin jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin sauvakoordinaatistosta rakennekoordinaatistoon.



Kuva 5.7: Sauva- ja rakennekoordinaatisto

5.21 3-dimensioinen tapaus

Sauvakoordinaatiston kantavektorit rakennekoordinaatiston kantavektoreiden avulla lausuttuina (kuva 5.7) ovat

$$\mathbf{l} = l_x \mathbf{i} + l_y \mathbf{j} + l_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{m} = m_x \mathbf{i} + m_y \mathbf{j} + m_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}.$$

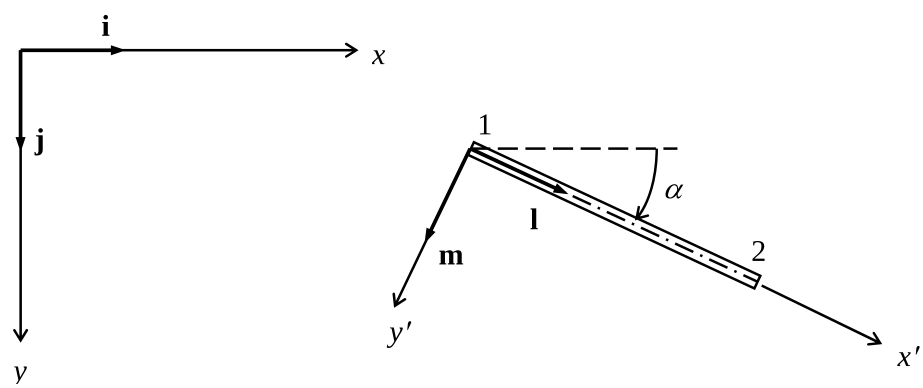
missä

$l_x = \cos(x', x),\ l_y = \cos(x', y),\ l_z = \cos(x', z),$
$m_x = \cos(y', x),\ m_y = \cos(y', y),\ m_z = \cos(y', z),$
$n_x = \cos(z', x),\ m_y = \cos(z', y),\ n_z = \cos(z', z).$

x'-akseli yhtyy sauvan akseliin ja y'- ja z'-akselit yhtyvät sauvan poikkipinnan pääakseleihin. Yksikkövektorin $\mathbf{l}$ komponenteille saadaan

$$l_x = \cos(x', x) = \frac{x_2 - x_1}{L},$$
$$l_y = \cos(x', y) = \frac{y_2 - y_1}{L},$$
$$l_z = \cos(x', z) = \frac{z_2 - z_1}{L},$$

missä $x_i, y_i, z_i,\ (i = 1,2)$ ovat sauvan päiden koordinaatit.



Kuva 5.8: Sauva- ja rakennekoordinaatisto tasotapauksessa.

5.22 Tasotapaus

Tasotapauksessa (kuva 5.8)

$l_x = \cos\alpha,\ l_y = \sin\alpha,\ m_x = -\sin\alpha,\ m_y = \cos\alpha$

ja

$\mathbf{l} = \cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha\mathbf{j},\ \mathbf{m} = -\sin\alpha\mathbf{i} + \cos\alpha\mathbf{j}$

ja edelleen

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{L},\ \sin\alpha = \frac{y_2 - y_1}{L}. \qquad (5.33)$$

5.23 Vektorin käyttäytymien koordinaatiston muunnoksessa

Tarkastellaan vektoria **A**, jonka komponentit rakennekoordinaatistossa ovat A_x, A_y, A_z ja sauvakoordinaatistossa ovat A'_x, A'_y, A'_z. Tämä vektori on siis toisaalta

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

ja toisaalta

$$\mathbf{A} = A'_x\mathbf{l} + A'_y\mathbf{m} + A'_z\mathbf{n}\,.$$

Sen komponenteille sauvakoordinaatistossa saadaan

$$\begin{aligned}
A'_x &= \mathbf{l}\bullet\mathbf{A} = \mathbf{l}\bullet(A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) = \mathbf{l}\bullet\mathbf{i}A_x + \mathbf{l}\bullet\mathbf{j}A_y + \mathbf{l}\bullet\mathbf{k}A_z = l_x A_x + l_y A_y + l_z A_z\,,\\
A'_y &= \mathbf{m}\bullet\mathbf{A} = \mathbf{m}\bullet(A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) = m_x A_x + m_y A_y + m_z A_z\,,\\
A'_z &= \mathbf{n}\bullet\mathbf{A} = \mathbf{n}\bullet(A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) = n_x A_x + n_y A_y + n_z A_z
\end{aligned}$$

eli

$$\{A'\} = [L]\{A\}, \tag{5.34}$$

missä

$$\{A'\} = \begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{Bmatrix}, \quad \{A\} = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \tag{5.35}$$

ja

$$[L] = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \tag{5.36}$$

on muunnosmatriisi. Vektorin **A** komponenteille rakennekoordinaatistossa saadaan

$$\begin{aligned}
A_x &= \mathbf{i}\bullet\mathbf{A} = \mathbf{i}\bullet(A'_x\mathbf{l} + A'_y\mathbf{m} + A'_z\mathbf{n}) = \mathbf{i}\bullet\mathbf{l}A'_x + \mathbf{i}\bullet\mathbf{m}A'_y + \mathbf{i}\bullet\mathbf{n}A'_z = l_x A'_x + m_x A'_y + n_x A'_z\,,\\
A_y &= \mathbf{j}\bullet\mathbf{A} = \mathbf{j}\bullet(A'_x\mathbf{l} + A'_y\mathbf{m} + A'_z\mathbf{n}) = l_y A'_x + m_y A'_y + n_y A'_z\,,\\
A_z &= \mathbf{k}\bullet\mathbf{A} = \mathbf{k}\bullet(A'_x\mathbf{l} + A'_y\mathbf{m} + A'_z\mathbf{n}) = l_z A'_x + m_z A'_y + n_z A'_z
\end{aligned}$$

eli

$$\{A\} = [L]^T\{A'\}. \tag{5.37}$$

Vertaamalla tuloksia (5.34) ja (5.37) havaitaan suorakulmaisten koordinaatistojen muunnosmatriisille $[L]$ tyypillinen ominaisuus $[L]^{-1} = [L]^T$.

Tasotapauksessa saadaan luonnollisesti myös kaavat (5.34) ja (5.37), joissa

$$\{A'\} = \begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \end{Bmatrix}, \quad \{A\} = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \end{Bmatrix} \tag{5.38}$$

ja

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}. \tag{5.39}$$

5.24 Elementin jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin käyttäytyminen koordinaatiston muunnoksessa

Seuraavassa ryhdytään käyttämään elementtimenetelmän terminologiaa. Sauvoja kutsumme **sauvaelementeiksi** ja sauvan päitä **elementtisolmuiksi**. Sauvanpäiden siirtymiä ja kiertymiä kutsutaan elementin **solmusiirtymiksi** ja **solmukiertymiksi** sekä yhteisellä nimellä elementin **yleistetyiksi solmusiirtymiksi**. Vastaavasti sauvan päiden voimia ja momentteja kutsutaan elementin **solmuvoimiksi** ja **solmumomenteiksi** ja yhteisellä nimellä elementin **yleistetyiksi solmuvoimiksi**.

Sauvaelementin *e* **yleistettyjen solmuvoimien ja solmusiirtymien** välinen **yhteys sauvakoordinaatistossa** on

$$\{F'\}^e = [K']^e \{a'\}^e + \{FK'\}^e, \tag{5.40}$$

missä $\{F'\}^e$ ja $\{a'\}^e$ ovat **sauvaelementin** *e* **yleistettyjen solmuvoimien** ja **solmusiirtymien** muodostamat **pystyvektorit sauvakoordinaatistossa**, $[K']^e$ on **sauvaelementin** *e* **jäykkyysmatriisi sauvakoordinaatistossa** ja $\{FK'\}^e$ on **sauvaelementin** *e* **kuormitustermivektori sauvakoordinaatistossa**. Yläindeksi *e* viittaa siis tarkasteltavaan elementtiin *e* ja yläpilkku viittaa sauvakoordinaatistoon.

Erilaisten sauvaelementtien yleistettyjen solmuvoimien ja solmusiirtymien välinen yhteys on tarkoituksenmukaista muodostaa aluksi juuri sauvakoordinaatistossa. Suorien sauvojen tapauksessa tehtävä on verrattain helppo. Haluttu yhteys saadaan näet aikaan **yhdistelemällä sopivien suoran sauvan peruskuormitustapausten yleistettyjen solmuvoimien ja solmusiirtymien välisiä yhteyksiä**.

Jotta voisimme systemaattisesti muodostaa yhtälöryhmän sauvarakenteen ratkaisemi-seksi siirtymämenetelmällä, kunkin elementin yleistetyt solmuvoimat ja solmusiirty-mät ilmaistaan **komponentteina rakennekoordinaatistossa**.

Olkoon tarkasteltavan **sauvaelementin** e **yleistettyjen solmusiirtymien** muodostama **pystyvektori rakennekoordinaatistossa** $\{a\}^e$ ja sen **yleistettyjen solmuvoimien** muodostama **pystyvektori rakennekoordinaatistossa** $\{F\}^e$. Koska pystyvektorit $\{a'\}^e$ ja $\{a\}^e$ sekä pystyvektorit $\{F'\}^e$ ja $\{F\}^e$ muodostuvat samojen fysikaalisten vektorien komponenteista sauva- ja rakennekoordinaatistossa, niiden väliset yhteydet voidaan helposti muodostaa ja ne ovat muotoa

$$\begin{aligned}\{a'\}^e &= [T]\{a\}^e, \quad \{a\}^e = [T]^T\{a'\}^e, \\ \{F'\}^e &= [T]\{F\}^e, \quad \{F\}^e = [T]^T\{F'\}^e,\end{aligned} \tag{5.41}$$

missä muunnosmatriisin $[T]$ muoto riippuu elementtityypistä.

Elementin e solmuvoimien muodostamalle pystyvektorille rakennekoordinaatistossa voimme nyt kirjoittaa

$$\begin{aligned}\{F\}^e &= [T]^T\{F'\}^e = [T]^T([K']^e\{a'\}^e + \{FK'\}^e) = [T]^T[K']^e\{a'\}^e + [T]^T\{FK'\}^e \\ &= [T]^T[K']^e[T]\{a\}^e + [T]^T\{FK'\}^e,\end{aligned}$$

joten saamme **sauvaelementin** e **yleistettyjen solmuvoimien ja solmusiirtymien** väliseksi **yhteydeksi rakennekoordinaatistossa**

$$\{F\}^e = [K]^e\{a\}^e + \{FK\}^e, \tag{5.42}$$

missä

$$\boxed{[K]^e = [T]^T[K']^e[T]} \tag{5.43}$$

on **sauvaelementin** e **jäykkyysmatriisi rakennekoordinaatistossa** ja

$$\boxed{\{FK\}^e = [T]^T\{FK'\}^e} \tag{5.44}$$

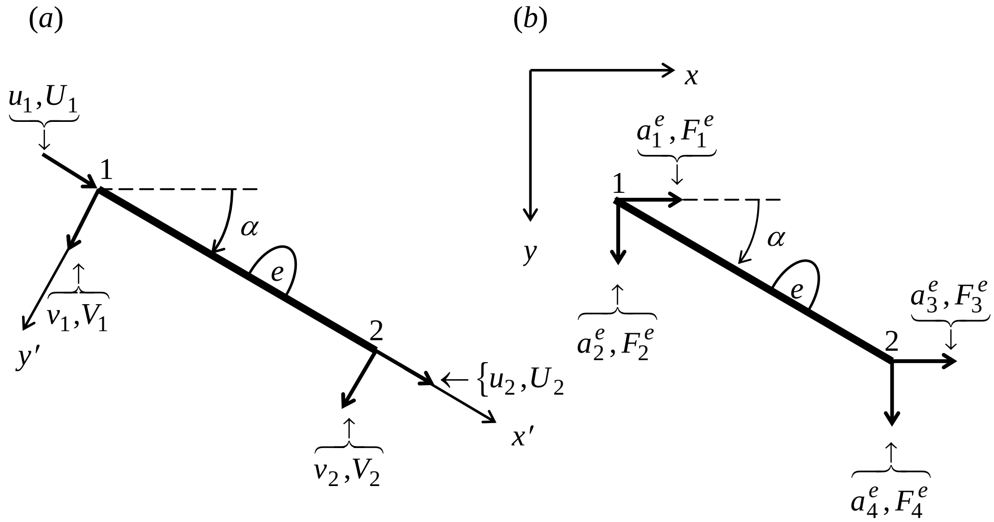
on **sauvaelementin** e **kuormitustermivektori rakennekoordinaatistossa**.

Kaavojen (5.43) ja (5.44) avulla voidaan siis määrittää sauvaelementin jäykkyysmatriisi ja kuormitustermivektori rakennekoordinaatistossa, kun ne sauvakoordinaatistossa tunnetaan.

5.3 Sauvaelementtejä

5.31 Tasoristikkoelementti

Tasoristikkoelementillä (kuva 5.9) ymmärrämme tässä tasoristikon sauvaa tai päistään nivelellisesti muuhun rakenteeseen ja/tai tukeen liittyvää sauvaa.



Kuva 5.9: Tasoristikkoelementti (a) sauvakoordinaatistossa (b) rakennekoordinaatistossa.

Tasoristikkoelementti sauvakoordinaatistossa on **aksiaalisesti kuormitettu sauva**, jonka aksiaalisten solmuvoimien U_1, U_2 ja solmusiirtymien u_1, u_2 väliset yhteydet (kaava 5.7) ovat

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{EA}{L}u_1 - \frac{EA}{L}u_2 + UK_1, \\ U_2 &= -\frac{EA}{L}u_1 + \frac{EA}{L}u_2 + UK_2. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Ristikkosauva otaksutaan tavallisesti painottomaksi ja sen alkuvenymä ε_0 vakioksi, jolloin kuormitustermeiksi saadaan taulukosta 5.1

$$\begin{aligned} UK_1 &= EA\varepsilon_0, \\ UK_2 &= -EA\varepsilon_0. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Koska ristikkosauvaan ei kohdistu ulkoista kuomaa, poikittaisille solmuvoimille on voimassa

$$\begin{aligned} V_1 &= 0, \\ V_2 &= 0. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Yhdistämällä lausekkeet (5.46) ja (5.47) saadaan tasoristikkoelementin solmuvoimien ja solmusiirtymien välisiksi yhteyksiksi sauvankoordinaatistossa matriisiyhtälö

$$\{F'\}^e = [K']^e \{a'\}^e + \{FK'\}^e , \tag{5.48}$$

missä

$$\{F'\}^e = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}, \quad \{a'\}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}, \tag{5.49}$$

ovat solmuvoimien ja solmusiirtymien muodostamat pystyvektorit ja

$$\boxed{[K']^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{FK'\}^e = EA\varepsilon_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}} \tag{5.50}$$

ovat tasoristikkoelementin jäykkyysmatriisi ja kuormitustermivektori sauvakoordinaatistossa.

Jotta voisimme muodostaa elementin jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin rakennekoordinaatistossa tarvitsemme muunnosmatriisin $[T]$. Sen muodostamiseksi kirjoitamme sauvakoordinaatiston solmusiirtymien u_1, v_1, u_2, v_2 ja rakennekoordinaatiston solmusiirtymien $a_1^e, a_2^e, a_3^e, a_4^e$ väliset yhteydet. Koska u_1, v_1 ja a_1^e, a_2^e ovat solmun 1 siirtymävektorin komponentit sauva- ja rakennekoordinaatistossa sekä u_2, v_2 ja a_3^e, a_4^e ovat solmun 2 siirtymävektorin vastaavat komponentit voimme kaavojen (5.34) ja (5.39) perusteella kirjoittaa

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3^e \\ a_4^e \end{Bmatrix}.$$

Yhdistämällä nämä tulokset saamme

$$\{a'\}^e = [T]\{a\}^e ,$$

missä

$$\{a\}^e = \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \\ a_4^e \end{Bmatrix} \tag{5.51}$$

on ristikkoelementin solmusiirtymistä muodostettu pystyvektori rakennekoordinaatistossa sekä

$$\boxed{[T]=\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0\\ -s & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & s\\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}} \tag{5.52}$$

on etsitty muunnosmatriisi. Tässä lausekkeessa on käytetty lyhennysmerkintöjä

$$c=\cos\alpha,\quad s=\sin\alpha\,. \tag{5.53}$$

Kun tasoristikkoelementin muunnosmatriisi $[T]$ nyt tunnetaan, voimme määrittää elementin jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin rakennekoordinaatistossa käyttäen kaavoja (5.43) ja (5.44). Saamme

$$[K]^e=[T]^T[K']^e[T]=\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0\\ s & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & -s\\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0\\ -s & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & s\\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

ja kun matriisikertolaskut on suoritettu, **tasoristikkoelementin jäykkyysmatriisille rakennekoordinaatistossa** saamme tuloksen

$$\boxed{[K]^e=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc\\ sc & s^2 & -sc & -s^2\\ -c^2 & -sc & c^2 & sc\\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}.} \tag{5.54}$$

Saamme edelleen

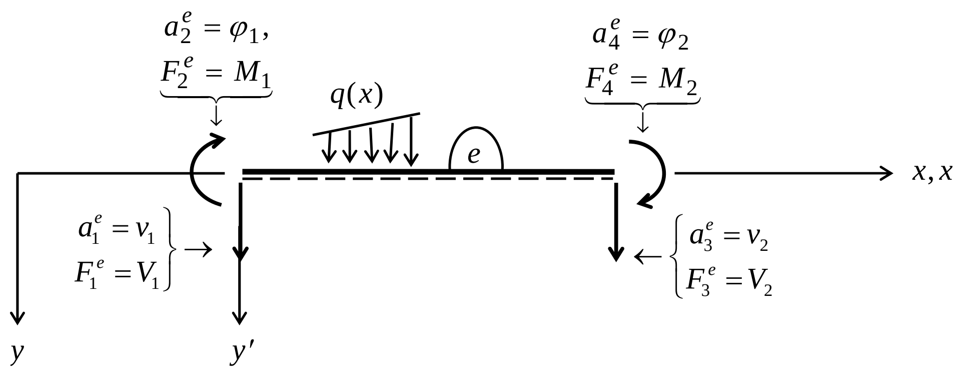
$$\{FK\}^e=[T]^T\{FK'\}^e=\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0\\ s & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & -s\\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}EA\varepsilon_0\begin{Bmatrix} 1\\ 0\\ -1\\ 0 \end{Bmatrix}$$

ja kun matriisikertolasku on suoritettu **tasoristikkoelementin kuormitustermivektorille rakennekoordinaatistossa** tuloksen

$$\boxed{\{FK\}^e=EA\varepsilon_0\begin{Bmatrix} c\\ s\\ -c\\ -s \end{Bmatrix}.} \tag{5.55}$$

5.32 Palkkielementti

Palkkielementillä (kuva 5.10) ymmärrämme tässä puhtaan yksiakselisen taivutuksen rasittamaa sauvaa, jota kuormittaa vain poikittainen kuormitus. Palkkielementtiä käytetään tavallisesti vaakasuorien palkkien ratkaisemisessa. Jos palkki saa alkumuodonmuutoksia (alkuvenymän ε_0 ja alkukäyristymän κ_0) esimerkiksi lämpötilan muutoksesta, tulee sen akselilla olla mahdollisuus venyä vapaasti. Palkkielementtiä voidaan myös ratkaista sivusiirtymättömiä kehiä. Myös sellaisten aksiaalisesti jäykkien sivusiirtyvien kehien, joissa on vain vaaka- ja pystysuoria sauvoja, analysointi on mahdollista.



Kuva 5.10: Palkkielementti.

Palkkielementin yleistettyjen solmuvoimien ja solmusiirtymien välisiksi yhteyksiksi otetaan suoraan **taivutetun sauvan** yhteydet (5.29). Sauvan sauvakoordinaatisto ja rakennekoordinaatisto otetaan samaksi, jolloin

$$[K]^e = [K']^e, \quad \{FK\}^e = \{FK'\}^e .$$

Näin **palkkielementin jäykkyysmatriisi ja kuormitustermivektori** (rakennekoordinaatis-tossa) ovat

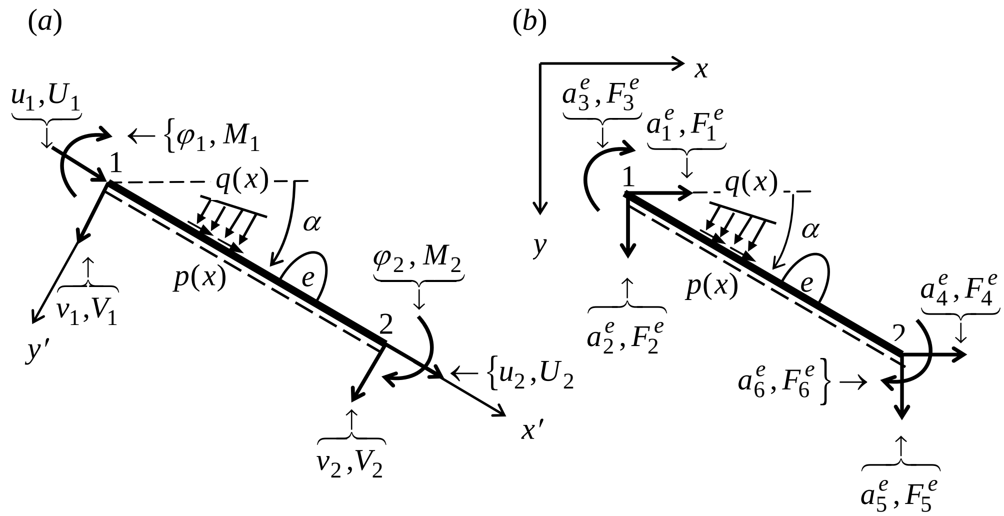
$$\boxed{[K]^e = \begin{bmatrix} D & C & -D & C \\ C & A & -C & B \\ -D & -C & D & -C \\ C & B & -C & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}} \tag{5.56}$$

ja

$$\boxed{\{FK\}^e = \begin{Bmatrix} VK_1 \\ MK_1 \\ VK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix}}. \tag{5.57}$$

5.33 Tasokehäelementti

Tasokehäelementti (kuva 5.11) soveltuu nimensä mukaisesti suorista tasajäykistä sauvoista koostuvien tasokehien analysointiin. Myös kaarevia sauvoja voidaan analysoida likimääräisesti, jakamalla sauva riittävään määrään elementtejä. Sama koskee jäykkyydeltään muuttuvia sauvoja.



Kuva 5.11: Tasokehäelementti (a) sauvakoordinaatistossa (b) rakennekoordinaatistossa.

Tasokehäelementti sauvakoordinaatistossa on **aksiaalisesti kuormitettu ja taivutettu sauva**, jonka aksiaalisten solmuvoimien U_1, U_2 ja solmusiirtymien u_1, u_2 väliset yhteydet (kaava 5.10) ovat

$$\begin{aligned} U_1 &= Su_1 - Su_2 + UK_1, \\ U_2 &= -Su_1 + Su_2 + UK_2 \end{aligned} \tag{5.58}$$

ja jonka poikittaisten solmuvoimien ja solmumomenttien V_1, M_1, V_2, M_2 sekä poikittaisten solmusiirtymien ja solmukiertymien $v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2$ väliset yhteydet (kaava 5.31) ovat

$$\begin{aligned} V_1 &= Dv_1 + C\varphi_1 - Dv_2 + C\varphi_2 + VK_1, \\ M_1 &= Cv_1 + A\varphi_1 - Cv_2 + B\varphi_2 + MK_1, \\ V_2 &= -Dv_1 - C\varphi_1 + Dv_2 - C\varphi_2 + VK_2, \\ M_2 &= Cv_1 + B\varphi_1 - Cv_2 + A\varphi_2 + MK_2. \end{aligned} \tag{5.59}$$

Yhdistämällä lausekkeet (5.58) ja (5.59) saadaan tasokehäelementin yleistettyjen solmuvoimien ja yleistettyjen solmusiirtymien välisiksi yhteyksiksi sauvakoordinaatistossa matriisiyhtälö

$$\{F'\}^e = [K']^e \{a'\}^e + \{FK'\}^e, \tag{5.60}$$

missä

$$\{F'\}^e = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}, \quad \{a'\}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \tag{5.61}$$

ja

$$\boxed{[K']^e = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & -S & 0 & 0 \\ 0 & D & C & 0 & -D & C \\ 0 & C & A & 0 & -C & B \\ -S & 0 & 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & -D & -C & 0 & D & -C \\ 0 & C & B & 0 & -C & A \end{bmatrix}, \quad \{FK'\}^{\mathrm{e}} = \begin{Bmatrix} UK_1 \\ VK_1 \\ MK_1 \\ UK_2 \\ VK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix}} \tag{5.62}$$

ovat tasokehäelementin jäykkyysmatriisi ja kuormitustermivektori sauvakoordinaatistossa. Käytetyt lyhennysmerkinnät olivat

$$\boxed{S = \frac{EA}{L},\ A = \frac{4EI}{L},\ B = \frac{2EI}{L},\ \mathrm{C} = \frac{6EI}{L^2},\ \mathrm{D} = \frac{12EI}{L^3}}. \tag{5.63}$$

Jotta voisimme muodostaa elementin jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin rakennekoordinaatistossa tarvitsemme muunnosmatriisin $[T]$. Sen muodostamiseksi kirjoitamme sauvakoordinaatiston yleistettyjen solmusiirtymien $u_1, v_1, \varphi_1, u_2, v_2, \varphi_2$ ja rakennekoordinaatiston yleistettyjen solmusiirtymien $a_1^e, a_2^e, a_3^e, a_4^e, a_5^e, a_6^e$ väliset yhteydet. Koska u_1, v_1 ja a_1^e, a_2^e ovat solmun 1 siirtymävektorin komponentit sauva- ja rakennekoordinaatistossa sekä u_2, v_2 ja a_4^e, a_5^e ovat solmun 2 siirtymävektorin vastaavat komponentit voimme kaavojen (5.34) ja (5.39) perusteella kirjoittaa

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4^e \\ a_5^e \end{Bmatrix}.$$

Koska lisäksi tasotapauksessa kiertymä on skalaarisuure eikä siis riipu koordinaatistosta solmukiertymät sauva- ja rakennekoordinaatistossa ovat yhtä suuret ts.

$$\varphi_1 = a_3^e,$$
$$\varphi_2 = a_6^e,$$

Yhdistämällä nämä tulokset saamme

$$\{a'\}^e = [T]\{a\}^e,$$

missä

$$\{a'\}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}, \quad \{a\}^e = \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \\ a_4^e \\ a_5^e \\ a_6^e \end{Bmatrix} \tag{5.64}$$

ovat tasokehäelementin yleistetyistä solmusiirtymistä muodostetut pystyvektorit sauva- ja rakennekoordinaatistossa sekä

$$\boxed{[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \tag{5.65}$$

on etsitty muunnosmatriisi. Kun tasokehäelementin muunnosmatriisi $[T]$ nyt tunnetaan, voimme määrittää elementin jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin rakennekoordinaatistossa käyttäen kaavoja (5.43) ja (5.44). Saamme

$$\begin{aligned}[K]^e &= [T]^T [K']^e [T] \\ &= \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & -S & 0 & 0 \\ 0 & D & C & 0 & -D & C \\ 0 & C & A & 0 & -C & B \\ -S & 0 & 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & -D & -C & 0 & D & -C \\ 0 & C & B & 0 & -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ja kun matriisikertolaskut on suoritettu **tasokehäelementin jäykkyysmatriisille rakennekoordinaatistossa** saamme tuloksen

$$\boxed{[K]^e = \begin{bmatrix} F & G & H & -F & -G & H \\ G & P & Q & -G & -P & Q \\ H & Q & A & -H & -Q & B \\ -F & -G & -H & F & G & -H \\ -G & -P & -Q & G & P & -Q \\ H & Q & B & -H & -Q & A \end{bmatrix}}, \tag{5.66}$$

missä on otettu käyttöön seuraavat uudet lyhennysmerkinnät.

$$\boxed{F = Sc^2 + Ds^2,\ G = (S - D)sc,\ H = -Cs,\ P = Ss^2 + Dc^2,\ Q = Cc.} \tag{5.67}$$

Saamme edelleen

$$\{FK\}^e = [T]^T\{FK'\}^e = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} UK_1 \\ VK_1 \\ MK_1 \\ UK_2 \\ VK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix}$$

ja kun matriisikertolasku on suoritettu **tasokehäelementin kuormitustermivektorille rakennekoordinaatistossa** tuloksen

$$\boxed{\{FK\}^e = \begin{Bmatrix} cUK_1 - sVK_1 \\ sUK_1 + cVK_1 \\ MK_1 \\ cUK_2 - sVK_2 \\ sUK_2 + cVK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix}}. \tag{5.68}$$

5.34 Avaruusristikkoelementti

Esimerkkinä kolmidimensioisesta sauvaelementistä käsittelemme avaruusristikkoelementtiä. Avaruusristikkoelementti sauvakoordinaatistossa on **aksiaalisesti kuormitettu sauva**, jonka aksiaalisten solmuvoimien U_1, U_2 ja solmusiirtymien u_1, u_2 väliset yhteydet (kaava 5.7) ovat

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{EA}{L}u_1 - \frac{EA}{L}u_2 + UK_1, \\ U_2 &= -\frac{EA}{L}u_1 + \frac{EA}{L}u_2 + UK_2. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Koska ristikkosauvaan ei kohdistu ulkoista kuomaa, poikittaisille solmuvoimille on voimassa

$$V_1 = 0,\ V_2 = 0,\ W_1 = 0,\ W_2 = 0. \tag{5.70}$$

Yhdistämällä lausekkeet (5.69) ja (5.70) sekä ottamalla lisäksi huomioon kuormitustermien lausekkeet (5.36) saadaan avaruusristikkoelementin solmuvoimien ja solmusiirtymien välisiksi yhteyksiksi sauvankoordinaatistossa matriisiyhtälö

$$\{F'\}^e = [K']^e\{a'\}^e + \{FK'\}^e, \tag{5.71}$$

missä

$$\{F'\}^e = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{Bmatrix}, \quad \{a'\}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} \tag{5.72}$$

ovat solmuvoimien ja solmusiirtymien muodostamat pystyvektorit ja

$$\boxed{[K']^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{FK'\}^e = EA\varepsilon_0 \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}} \tag{5.73}$$

ovat **avaruusristikkoelementin jäykkyysmatriisi ja kuormitustermivektori sauvakoordinaatistossa**.

Jotta voisimme muodostaa elementin jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin rakennekoordinaatistossa tarvitsemme muunnosmatriisin $[T]$. Sen muodostamiseksi kirjoitamme sauvakoordinaatiston solmusiirtymien $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ ja rakennekoordinaatiston solmusiirtymien $a_1^e, a_2^e, a_3^e, a_4^e, a_5^e, a_6^e$ väliset yhteydet. Koska u_1, v_1, w_1 ja a_1^e, a_2^e, a_3^e ovat solmun 1 siirtymävektorin komponentit sauva- ja rakennekoordinaatistossa sekä u_2, v_2, w_2 ja a_4^e, a_5^e, a_6^e ovat solmun 2 siirtymävektorin vastaavat komponentit voimme kaavojen (5.34) ja (5.36) perusteella kirjoittaa

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4^e \\ a_5^e \\ a_6^e \end{Bmatrix}$$

Yhdistämällä nämä tulokset saamme

$$\{a'\}^e = [T]\{a\}^e,$$

missä

$$\{a\}^e = \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \\ a_4^e \\ a_5^e \\ a_6^e \end{Bmatrix}. \tag{5.74}$$

on avaruusristikkoelementin solmusiirtymistä muodostettu pystyvektori rakenne-koordinaatistossa sekä

$$\boxed{[T] = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & 0 & 0 & 0 \\ m_x & m_y & m_z & 0 & 0 & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & l_y & l_z \\ 0 & 0 & 0 & m_x & m_y & m_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}} \tag{5.75}$$

on etsitty muunnosmatriisi. Kun avaruusristikkoelementin muunnosmatriisi $[T]$ nyt tunnetaan, voimme määrittää elementin jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin rakennekoordinaatistossa käyttäen kaavoja (5.43) ja (5.44).

Saamme **avaruusristikkoelementin jäykkyysmatriisille rakennekoordinaatistossa** tuloksen

$$\boxed{[K]^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & l_z l_x & -l_x^2 & -l_x l_y & -l_z l_x \\ l_x l_y & l_y^2 & l_y l_z & -l_x l_y & -l_y^2 & -l_y l_z \\ l_z l_x & l_y l_z & l_z^2 & -l_z l_x & -l_y l_z & -l_z^2 \\ -l_x^2 & -l_x l_y & -l_z l_x & l_x^2 & l_x l_y & l_z l_x \\ -l_x l_y & -l_y^2 & -l_y l_z & l_x l_y & l_y^2 & l_y l_z \\ -l_z l_x & -l_y l_z & -l_z^2 & l_z l_x & l_y l_z & l_z^2 \end{bmatrix}} \tag{5.76}$$

ja **avaruusristikkoelementin kuormitustermivektorille rakennekoordinaatistossa** tuloksen

$$\boxed{\{FK\}^e = EA\varepsilon_0 \begin{Bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \\ -l_x \\ -l_y \\ -l_z \end{Bmatrix}.} \tag{5.77}$$

5.35 Avaruuskehäelementti

Lopuksi tarkastelemme lyhyesti avaruuskehäelementtiä. Se soveltuu suorista tasajäykistä sauvoista koostuvien avaruuskehien analysointiin. Myös kaarevia avaruussauvoja voidaan analysoida likimääräisesti, jakamalla sauva riittävään määrään elementtejä. Sama koskee jäykkyydeltään muuttuvia sauvoja.

Avaruuskehäelementti sauvakoordinaatistossa on **aksiaalisesti kuormitettu, väännetty ja kaksiakselisesti taivutettu sauva.** Sen aksiaalisten solmuvoimien U_1, U_2 ja solmusiirtymien u_1, u_2 väliset yhteydet (kaava 5.10) ovat

$$\begin{aligned} U_1 &= Su_1 - Su_2 + UK_1, \\ U_2 &= -Su_1 + Su_2 + UK_2. \end{aligned} \tag{5.78}$$

Avaruuskehäelementin solmumomenttien M_{t1}, M_{t2} ja solmukiertymien $\varphi_{t1}, \varphi_{t2}$ väliset yhteydet (kaava 5.19) ovat

$$\begin{aligned} M_{t1} &= T\varphi_{t1} - T\varphi_{t2} + MK_{t1}, \\ M_{t2} &= -T\varphi_{t1} + T\varphi_{t2} + MK_{t2}. \end{aligned} \tag{5.79}$$

Avaruuskehäelementin x', y'-tasossa tapahtuvaan taivutukseen liittyvien poikittaisten solmuvoimien ja solmumomenttien V_1, M_{z1}, V_2, M_{z2} sekä poikittaisten solmusiirtymien ja solmukiertymien $v_1, \varphi_{z1}, v_2, \varphi_{z2}$ väliset yhteydet (vrt. kaava 5.31) ovat

$$\begin{aligned} V_1 &= D_z v_1 + C_z \varphi_{z1} - D_z v_2 + C_z \varphi_{z2} + VK_1, \\ M_{z1} &= C_z v_1 + A_z \varphi_{z1} - C_z v_2 + B_z \varphi_{z2} + MK_{z1}, \\ V_2 &= -D_z v_1 - C_z \varphi_{z1} + D_z v_2 - C_z \varphi_{z2} + VK_2, \\ M_{z2} &= C_z v_1 + B_z \varphi_{z1} - C_z v_2 + A_z \varphi_{z2} + MK_{z2}, \end{aligned} \tag{5.80}$$

missä lyhennysmerkinnät *A*, *B*, *C* ja *D* liittyvät nyt taivutukseen x', y'-tasossa ja ne on varustettu alaindeksillä *z*.

Avaruuskehäelementin x', z'-tasossa tapahtuvaan taivutukseen liittyvien poikittaisten solmuvoimien ja solmumomenttien W_1, M_{y1}, W_2, M_{y2} sekä poikittaisten solmusiirtymien ja solmukiertymien $w_1, \varphi_{y1}\ w_2, \varphi_{y2}$ väliset yhteydet (vrt. kaava 5.34) ovat

$$\begin{aligned} W_1 &= D_y w_1 + C_y \varphi_{y1} - D_y w_2 + C_y \varphi_{y2} + WK_1, \\ M_{y1} &= C_y w_1 + A_y \varphi_{y1} - C_y w_2 + B_y \varphi_{y2} + MK_{y1}, \\ W_2 &= -D_y w_1 - C_y \varphi_{y1} + D_y w_2 - C_y \varphi_{y2} + WK_2, \\ M_{y2} &= C_y w_1 + B_y \varphi_{y1} - C_y w_2 + A_y \varphi_{y2} + MK_{y2}, \end{aligned} \tag{5.81}$$

missä lyhennysmerkinnät *A*, *B*, *C*, *D* liittyvät nyt taivutukseen x', z'-tasossa ja ne on varustettu alaindeksillä *y*.

Yhdistämällä lausekkeet (5.78)-(5.81) saadaan avaruuskehäelementin yleistettyjen solmuvoimien ja yleistettyjen solmusiirtymien välisiksi yhteyksiksi sauvakoordinaatistossa matriisiyhtälö

$$\{F'\}^e = [K']^e \{a'\}^e + \{FK'\}^e , \tag{5.82}$$

missä

$$\{F'\}^e = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ M_{t1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ M_{t2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}, \quad \{a'\}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_{t1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \varphi_{t2} \\ \varphi_{y2} \\ \varphi_{z2} \end{Bmatrix}, \boxed{\{FK'\}^e = \begin{Bmatrix} UK_1 \\ VK_1 \\ WK_1 \\ MK_{t1} \\ MK_{y1} \\ MK_{z1} \\ UK_2 \\ VK_2 \\ WK_2 \\ MK_{t2} \\ MK_{y2} \\ MK_{z2} \end{Bmatrix}}, \tag{5.83}$$

$$\boxed{[K']^e = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_z & 0 & 0 & C_z & 0 & 0 & -D_z & 0 & 0 & C_z & 0 \\ 0 & 0 & D_y & 0 & 0 & C_y & 0 & 0 & -D_y & 0 & 0 & C_y \\ 0 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T & 0 & 0 \\ 0 & C_y & 0 & 0 & A_y & 0 & 0 & -C_y & 0 & 0 & B_y & 0 \\ 0 & 0 & C_z & 0 & 0 & A_z & 0 & 0 & -C_z & 0 & 0 & B_z \\ -S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D_z & 0 & 0 & -C_z & 0 & 0 & D_z & 0 & 0 & -C_z & 0 \\ 0 & 0 & -D_y & 0 & 0 & -C_y & 0 & 0 & D_y & 0 & 0 & -C_y \\ 0 & 0 & 0 & -T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & C_y & 0 & 0 & B_y & 0 & 0 & -C_y & 0 & 0 & A_y & 0 \\ 0 & 0 & C_z & 0 & 0 & B_z & 0 & 0 & -C_z & 0 & 0 & A_z \end{bmatrix}}. \tag{5.84}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & S = \frac{EA}{L}, \; T = \frac{4GI_t}{L}, \\ & A_y = \frac{4EI_y}{L}, \; B_y = \frac{2EI_y}{L}, \; C_y = \frac{6EI_y}{L^2}, \; D_y = \frac{12EI_y}{L^3}, \\ & A_z = \frac{4EI_z}{L}, \; B_z = \frac{2EI_z}{L}, \; C_z = \frac{6EI_z}{L^2}, \; D_z = \frac{12EI_z}{L^3}. \end{aligned}} \tag{5.85}$$

Saatiin siis kaavat elementin jäykkyysmatriisi $[K']^e$ ja kuormitustermivektori $\{FK'\}^e$ alkioiden määrittämiseksi sauvakoordinaatistossa.

Muunnosmatriisin $[T]$ muodostamiseksi kirjoitamme sauvakoordinaatiston yleistettyjen solmusiirtymien $u_1, v_1, w_1, \varphi_{t1}, \varphi_{y1}, \varphi_{z1}, u_2, v_2, w_2, \varphi_{t2}, \varphi_{y2}, \varphi_{z2}$ ja rakennekoordinaatiston yleistettyjen solmusiirtymien $a_1^e, \ldots, a_{12}^e$ väliset yhteydet. Koska nämä suureet kolmen ryhmissä muodostavat saman vektorin komponentit sauva- ja rakennekoordinaatistossa voimme kaavojen (5.34) ja (5.36) perusteella kirjoittaa

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varphi_{t1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4^e \\ a_5^e \\ a_6^e \end{Bmatrix},$$
$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_7^e \\ a_8^e \\ a_9^e \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varphi_{t2} \\ \varphi_{y2} \\ \varphi_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{10}^e \\ a_{11}^e \\ a_{12}^e \end{Bmatrix}. \tag{5.86}$$

Yhdistämällä nämä tulokset saamme

$$\{a'\}^e = [T]\{a\}^e,$$

missä

$$\{a\}^e = \begin{Bmatrix} a_1^e \\ \vdots \\ a_{12}^e \end{Bmatrix} \tag{5.87}$$

on avaruuskehäelementin yleistetyistä solmusiirtymistä muodostettu pystyvektori rakennekoordinaatistossa ja

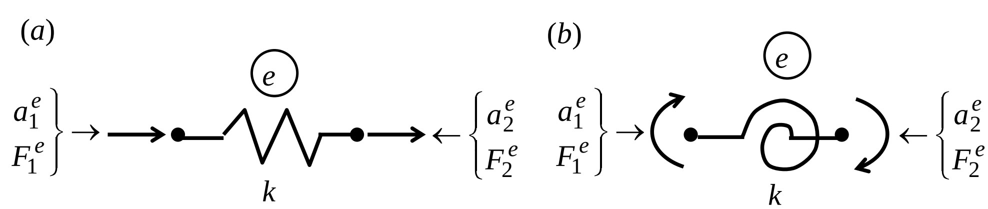
$$[T]=\begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_x & m_y & m_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & l_y & l_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_x & m_y & m_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_x & l_y & l_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_x & m_y & m_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_x & l_y & l_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_x & m_y & m_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \qquad (5.88)$$

on etsitty muunnosmatriisi. Näin olemme saaneet käsiteltyä oleelliset piirteet avaruuskehäelementistä ja päätämme sen käsittelyn tähän.

5.4 Yleistetty jousielementti

Edellä käsittelimme sauvaelementtejä. Lopuksi lisäämme elementtikokoelmaamme vielä ns. yleistetyn jousielementin (kuva 5.12). Yleistetyssä jousielementissä on kaksi vapausastetta, jotka ovat joko kiertymä- tai siirtymävapausasteita. Sen vapausasteiden 2 ja 1 yleistetylle siirtymäerolle (siirtymäero tai kiertymäero) saadaan

$$\Delta^e = a_2^e - a_1^e \qquad (5.89)$$



Kuva 5.12: Yleistetty jousielementti: (a) jousielementti, (b) kierrejousielementti

voimme kirjoittaa

$$\Delta^e = \frac{J^e}{k} + \Delta_0^e \ , \qquad (5.90)$$

missä J^e on yleistetty jousivoima (voima tai momentti), k on yleistetty jousivakio ja Δ_0^e on yleistetty alkusiirtymäero (alkusiirtymäero tai alkukiertymäero). (Tavallisesti $\Delta_0^e = 0.$)

Tarkastelemalla katkaistun jousen tasapainoa, yleistetylle jousivoimalle ja jousen yleistetyille vapausastevoimille saadaan yhteydet

$$J^e = -F_1^e = F_2^e . \tag{5.91}$$

Yhtälöistä (5.89)-(5.91) saadaan helposti

$$\begin{aligned} F_1^e &= ka_1^e - ka_2^e + k\Delta_0^e , \\ F_2^e &= -ka_1^e + ka_2^e - k\Delta_0^e , \end{aligned} \tag{5.92}$$

eli

$$\{F\}^e = [K]^e \{a\}^e + \{FK\}^e , \tag{5.93}$$

missä

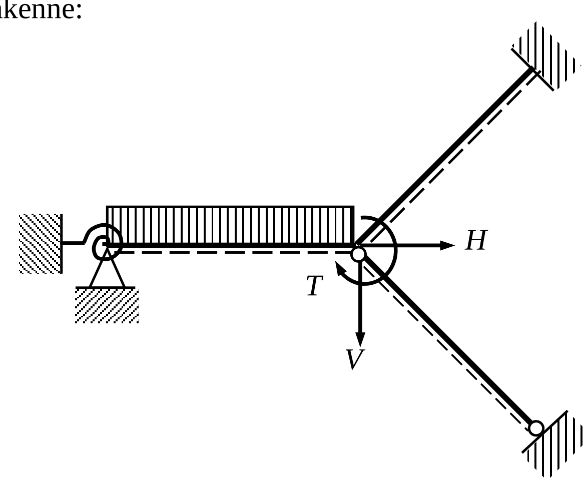
$$\boxed{[K]^e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}} \tag{5.94}$$

on **yleistetyn jousielementin jäykkyysmatriisi** ja

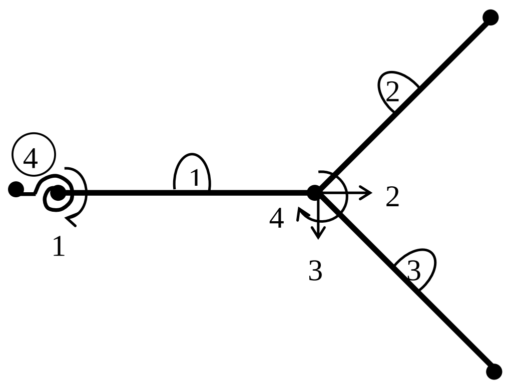
$$\{FK\}^e = k\Delta_0^e \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{5.95}$$

on **yleistetyn jousielementin kuormitustermivektori,** jolle siis tavallisesti pätee $\{FK\}^e = \{0\}$.

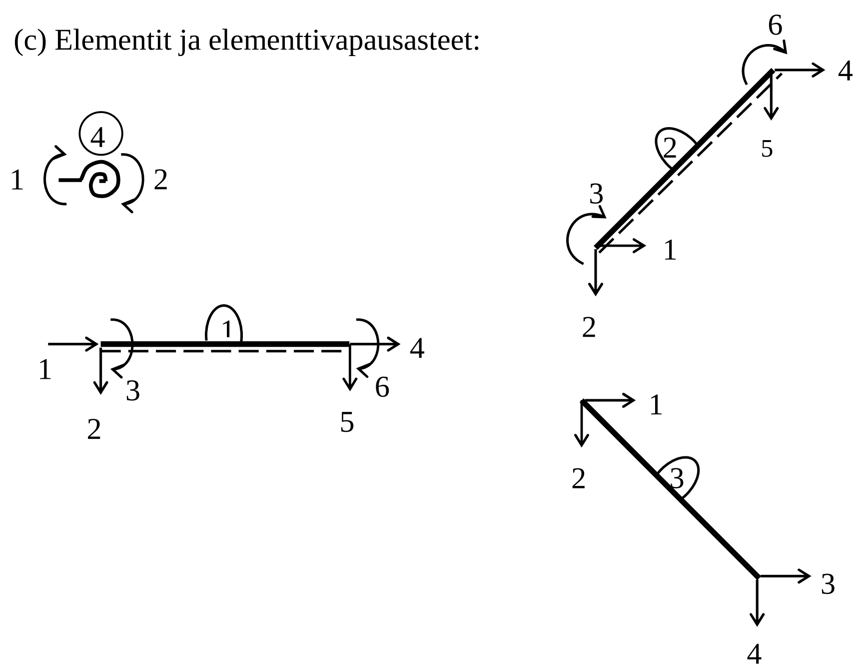
(a) Rakenne:



(b) Elementit ja systeemivapausasteet:



(c) Elementit ja elementtivapausasteet:



Kuva 5.13: Systeemiyhtälöryhmän muodostamisesimerkki

5.5 Systeemiyhtälöryhmän muodostaminen

Demonstroidaan aluksi systeemiyhtälöiden muodostamista esimerkin avulla ja esitetään lopuksi yleinen systemaattinen käsittelytapa.

Demonstraatiosimerkki: Kuvan 5.14 tasosauvarakenne.

- Elementit 1 ja 2 tasokehäelementtejä (6 vapausastetta/elementti)
- Elementit 3 tasoristikkoelementti (4 vapausastetta/elementti)
- Elementti 4 kierrejousielementti ((2 vapausastetta/elementti)

Yhteensopivuusehdot:

Elementti 1:

$$a_1^1 = 0,\ a_2^1 = 0,\ a_3^1 = a_1,\ a_4^1 = a_2,\ a_5^1 = a_3,\ a_6^1 = a_4 .$$

Elementti 2:

$$a_1^2 = a_2,\ a_2^2 = a_3,\ a_3^2 = a_4,\ a_4^2 = 0,\ a_5^2 = 0,\ a_6^2 = 0 .$$

Elementti 3:

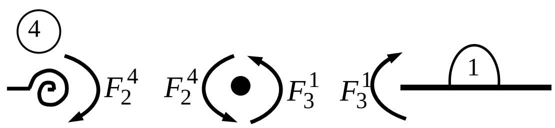
$$a_1^3 = a_2,\ a_2^3 = a_3,\ a_3^3 = 0,\ a_4^3 = 0 .$$

Elementti 4:

$$a_1^4 = 0,\ a_2^4 = a_1 .$$

Tasapainoehdot:

Systeemivapausaste 1:



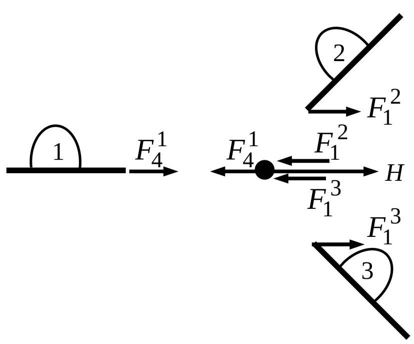
Vapausaste 1 on kiertymä ja ao. solmun momenttitasapainoehto on

$$F_2^4 + F_3^1 = 0\,.$$

Käytetään solmuun siihen liittyvistä elementeistä aiheutuvien momenttien summalle merkintää F_1, ts. $F_1 = F_2^4 + F_3^1$. Näin tasapainoehto saa muodon

$$F_1 = 0\,.$$

Systeemivapausaste 2:



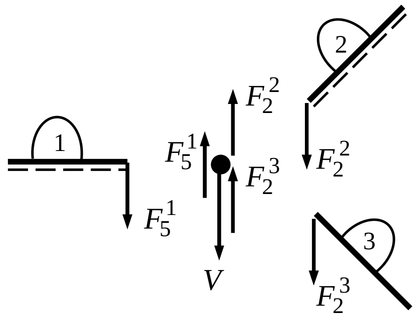
Vapausaste 2 on vaakasiirtymä ja ao. solmun vaakasuora voimatasapainoehto on

$$F_4^1 + F_1^2 + F_1^3 - H = 0$$

Käytetään solmuun siihen liittyvistä elementeistä aiheutuvien vaakavoimien summalle merkintää F_2, ts. $F_2 = F_4^1 + F_1^2 + F_1^3$. Näin tasapainoehto saa muodon

$$F_2 - H = 0\,.$$

Systeemivapausaste 3:



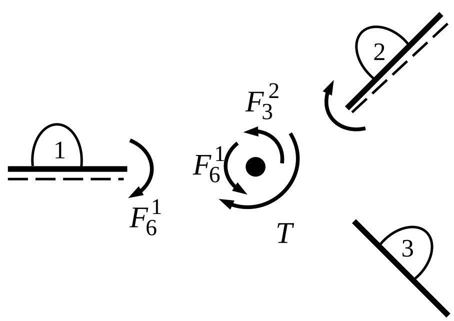
Vapausaste 3 on pystysiirtymä ja ao. solmun pystysuora voimatasapainoehto on

$$F_5^1 + F_2^2 + F_2^3 - V = 0$$

Käytetään solmuun siihen liittyvistä elementeistä aiheutuvien pystyvoimien summalle merkintää F_3, ts. $F_3 = F_5^1 + F_2^2 + F_2^3$. Näin tasapainoehto saa muodon

$$F_3 - V = 0\,.$$

Systeemivapausaste 4:



Vapausaste 4 on kiertymä ja ao. solmun momenttitasapainoehto on

$$F_6^1 + F_3^2 - T = 0\,.$$

Käytetään solmuun siihen liittyvistä elementeistä aiheutuvien momenttien summalle merkintää F_4, ts. $F_4 = F_6^1 + F_3^2$. Näin tasapainoehto saa muodon

$$F_4 - T = 0\,.$$

Yhteenveto:

Havaitaan, että vapausasteeseen *i* liittyvä tasapainoyhtälö voidaan esittää muodossa

$$F_i - P_i = 0\,,$$

missä F_i on vapausasteeseen liittyvistä elementeistä ko. solmuun kohdistuvien yleistettyjen voimien summa ja P_i on siihen kohdistuva yleistetty pistekuorma. Esimerkin tapauksessa siis $P_1 = 0$, $P_2 = H$, $P_3 = V$ ja $P_4 = T$. Voimaa F_i nimitetään jatkossa vapausasteeseen *i* liittyväksi ***systeemivapausastevoimaksi*.**

Systeemin vapausastevoimien ja -siirtymien väliset yhteydet:

Soveltamalla elementtien vapausastevoimien ja vapausastesiirtymien välisiä yhteyksiä, yhteensopivuusehtoja ja systeemin vapausastevoimien määrittelyä saadaan

$$F_2^4 = K_{21}^4 \overbrace{a_1^4}^{0} + K_{22}^4 \overbrace{a_2^4}^{a_1} + FK_2^4,$$

$$F_3^1 = K_{31}^1 \overbrace{a_1^1}^{0} + K_{32}^1 \overbrace{a_2^1}^{0} + K_{33}^1 \overbrace{a_3^1}^{a_1} + K_{34}^1 \overbrace{a_4^1}^{a_2} + K_{35}^1 \overbrace{a_5^1}^{a_3} + K_{36}^1 \overbrace{a_6^1}^{a_4} + FK_3^1,$$

$$F_1 \equiv F_2^4 + F_3^1 = (K_{22}^4 + K_{33}^1)a_1 + K_{34}^1 a_2 + K_{35}^1 a_3 + K_{36}^1 a_4 + FK_2^4 + FK_3^1.$$

$$F_4^1 = K_{41}^1 \overbrace{a_1^1}^{0} + K_{42}^1 \overbrace{a_2^1}^{0} + K_{43}^1 \overbrace{a_3^1}^{a_1} + K_{44}^1 \overbrace{a_4^1}^{a_2} + K_{45}^1 \overbrace{a_5^1}^{a_3} + K_{46}^1 \overbrace{a_6^1}^{a_4} + FK_4^1,$$

$$F_1^2 = K_{11}^2 \overbrace{a_1^2}^{a_2} + K_{12}^2 \overbrace{a_2^2}^{a_3} + K_{13}^2 \overbrace{a_3^2}^{a_4} + K_{14}^2 \overbrace{a_4^2}^{0} + K_{15}^2 \overbrace{a_5^2}^{0} + K_{16}^2 \overbrace{a_6^2}^{0} + FK_1^2,$$

$$F_1^3 = K_{11}^3 \overbrace{a_1^3}^{a_2} + K_{12}^3 \overbrace{a_2^3}^{a_3} + K_{13}^3 \overbrace{a_3^3}^{0} + K_{14}^3 \overbrace{a_4^3}^{0} + FK_1^3,$$

$$F_2 \equiv F_4^1 + F_1^2 + F_1^3 = K_{43}^1 a_1 + (K_{44}^1 + K_{11}^2 + K_{11}^3)a_2 + (K_{45}^1 + K_{12}^2 + K_{12}^3)a_3 + (K_{46}^1 + K_{13}^2)a_4 + FK_4^1 + FK_1^2 + FK_1^3.$$

$$F_5^1 = K_{51}^1 \overbrace{a_1^1}^{0} + K_{52}^1 \overbrace{a_2^1}^{0} + K_{53}^1 \overbrace{a_3^1}^{a_1} + K_{54}^1 \overbrace{a_4^1}^{a_2} + K_{55}^1 \overbrace{a_5^1}^{a_3} + K_{56}^1 \overbrace{a_6^1}^{a_4} + FK_5^1,$$

$$F_2^2 = K_{21}^2 \overbrace{a_1^2}^{a_2} + K_{22}^2 \overbrace{a_2^2}^{a_3} + K_{23}^2 \overbrace{a_3^2}^{a_4} + K_{24}^2 \overbrace{a_4^2}^{0} + K_{25}^2 \overbrace{a_5^2}^{0} + K_{26}^2 \overbrace{a_6^2}^{0} + FK_2^2,$$

$$F_2^3 = K_{21}^3 \overbrace{a_1^3}^{a_2} + K_{22}^3 \overbrace{a_2^3}^{a_3} + K_{23}^3 \overbrace{a_3^3}^{0} + K_{24}^3 \overbrace{a_4^3}^{0} + FK_2^3,$$

$$F_3 \equiv F_5^1 + F_2^2 + F_2^3 = K_{53}^1 a_1 + (K_{54}^1 + K_{21}^2 + K_{21}^3)a_2 + (K_{55}^1 + K_{22}^2 + K_{22}^3)a_3 + (K_{56}^1 + K_{23}^2)a_4 + FK_5^1 + FK_2^2 + FK_2^3.$$

$$F_6^1 = K_{61}^1 \overbrace{a_1^1}^{0} + K_{62}^1 \overbrace{a_2^1}^{0} + K_{63}^1 \overbrace{a_3^1}^{a_1} + K_{64}^1 \overbrace{a_4^1}^{a_2} + K_{65}^1 \overbrace{a_5^1}^{a_3} + K_{66}^1 \overbrace{a_6^1}^{a_4} + FK_6^1,$$

$$F_3^2 = K_{31}^2 \overbrace{a_1^2}^{a_2} + K_{32}^2 \overbrace{a_2^2}^{a_3} + K_{33}^2 \overbrace{a_3^2}^{a_4} + K_{34}^2 \overbrace{a_4^2}^{0} + K_{35}^2 \overbrace{a_5^2}^{0} + K_{36}^2 \overbrace{a_6^2}^{0} + FK_3^2,$$

$$F_4 \equiv F_6^1 + F_3^2 = K_{63}^1 a_1 + (K_{64}^1 + K_{31}^2)a_2 + (K_{65}^1 + K_{32}^2)a_3 + (K_{66}^1 + K_{33}^2)a_4 + FK_6^1 + FK_3^2.$$

Saadut systeemin vapausastevoimien ja -siirtymien yhteydet voidaan esittää muodossa

$$
\begin{aligned}
F_1 &= K_{11}a_1 + K_{12}a_2 + K_{13}a_3 + K_{14}a_4 + FK_1,\\
F_2 &= K_{21}a_1 + K_{22}a_2 + K_{23}a_3 + K_{24}a_4 + FK_2,\\
F_3 &= K_{31}a_1 + K_{32}a_2 + K_{33}a_3 + K_{34}a_4 + FK_3,\\
F_4 &= K_{41}a_1 + K_{42}a_2 + K_{43}a_3 + K_{44}a_4 + FK_4.
\end{aligned}
$$

tai

$$\{F\} = [K]\{a\} + \{FK\}$$

missä

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}$$

on ***systeemin jäykkyysmatriisi*** ja

$$\{FK\} = \begin{Bmatrix} FK_1 \\ FK_2 \\ FK_3 \\ FK_4 \end{Bmatrix}$$

on ***systeemin kuormitustermivektori.***

Systeemin jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin alkioille syntyi samalla lausekkeet:

$$
\begin{aligned}
&K_{11} = K_{33}^1 + K_{22}^4, && K_{12} = K_{34}^1, && K_{13} = K_{35}^1, && K_{14} = K_{36}^1,\\
&K_{21} = K_{43}^1, && K_{22} = K_{44}^1 + K_{11}^2 + K_{11}^3, && K_{23} = K_{45}^1 + K_{12}^2 + K_{12}^3, && K_{24} = K_{46}^1 + K_{13}^2,\\
&K_{31} = K_{53}^1, && K_{32} = K_{54}^1 + K_{21}^2 + K_{21}^3, && K_{33} = K_{55}^1 + K_{22}^2 + K_{22}^3, && K_{34} = K_{56}^1 + K_{23}^2,\\
&K_{41} = K_{63}^1, && K_{42} = K_{64}^1 + K_{31}^2, && K_{43} = K_{65}^1 + K_{32}^2, && K_{44} = K_{66}^1 + K_{63}^2.
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
FK_1 &= FK_3^1 + FK_1^4,\\
FK_2 &= FK_1^2 + FK_1^3,\\
FK_3 &= FK_4^1 + FK_1^2 + FK_1^3,\\
FK_4 &= FK_5^1 + FK_2^2 + FK_2^3.
\end{aligned}
$$

Systeemiyhtälöryhmä:

Matriisimuodossa tasapainoyhtälö ovat

$$\{F\}-\{P\}=\{0\},$$

missä vapausastekuormien muodostama pystyvektori tarkasteltavan esimerkkiprobleeman tapauksessa on

$$\{P\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ H \\ V \\ T \end{Bmatrix}.$$

Ottamalla huomioon systeemin vapausastevoimien ja -siirtymien yhteydet, tasapainoyhtälöt saavat muodon

$$[K]\{a\}+\{FK\}-\{P\}=\{0\}$$

eli

$$[K]\{a\}=\{R\},$$

missä

$$\{R\}=\{P\}-\{FK\}.$$

5.6 Elementtimenetelmän kokoamismenettely

Seuraavassa esitetään systemaattinen tapa, jolla systeemin jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin alkiot voidaan koota elementin jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin alkioista. Toimenpide on siis mahdollista suorittaa suoraan ilman edellä esitetyssä johdattelevassa esimerkissä esitettyjä havainnollisia, mutta työläitä vaiheita. Koska menettelytavan käyttöalue ei rajoitu pelkästään sauvarakenteisiin vaan se on tyypillinen kaikissa elementtimenetelmän sovellutuksissa, käytämme sille nimitystä **elementtimenetelmän kokoamismenettely.**

Rakenteen jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin alkiot K_{ij} ja FK_i voidaan **koota** elementtien jäykkyysmatriisien ja kuormitustermivektorien alkioista K_{ij}^e ja FK_i^e **alkio kerrallaan** käyttäen seuraavia kaavoja:

Rakenteen jäykkyysmatriisin kokoamiskaava:

$$K_{ij} = \sum_e K_{rs}^e \tag{5.96}$$

- summaus käy yli niiden elementtien, jotka liittyvät systeemivapausasteisiin i ja j (jos tällaisia elementtejä ei ole K_{ij} :stä tulee nolla-alkio)
- r ja s ovat elementin e systeemivapausasteita i ja j vastaavat elementtivapausastenumerot

Rakenteen kuormitustermivektorin kokoamiskaava:

$$FK_i = \sum_e FK_r^e . \tag{5.97}$$

- summaus käy yli niiden elementtien, jotka liittyvät systeemivapausasteeseen i
- r on elementin e systeemivapausastetta i vastaava elementtivapausastenumero

Kokoamiskaavojen (5.96) ja (5.97) johto:

Vapausasteeseen *i* liittyvälle ***systeemivapausastevoimalle*** voidaan kirjoittaa

$$F_i = \sum_e F_r^e \ , \tag{5.98}$$

missä F_r^e on elementin *e* vapausastetta *r* vastaava elementtivapausastevoima. Kaavan oikean puolen summamerkki tarkoittaa summausta yli niiden elementtien *e*, jotka liittyvät systeemivapausasteeseen *i*, ja summauksen aikana *r* on systeemivapausastetta *i* vastaava elementtivapausastenumero. Käyttäen hyväksi elementin *e* vapausastevoimien F_r^e ja vapausastesiirtymien a_r^e välisiä yhteyksiä

$$F_r^e = \sum_{s=1}^{m} K_{rs}^e a_s^e + FK_r^e \ , \tag{5.99}$$

missä K_{rs}^e ja FK_r^e ovat elementin jäykkyysmatriisin ja elementin kuormitustermivektorin alkoita ja *m* on elementtivapausasteiden lukumäärä, systeemimapausastevoimalle F_i saadaan

$$F_i = \sum_e (\sum_{s=1}^{m} K_{rs}^e a_s^e + FK_r^e) = \sum_e \sum_{s=1}^{m} K_{rs}^e a_s^e + \sum_e FK_r^e \ . \tag{5.100}$$

Merkitään nyt elementin *e* elementtivapausastenumeroa *s* vastaavaa systeemivapausaste-numeroa *j*:llä. Tällöin voidaan yhteensopivuusehdon perusteella elementin *e* ko. vapausaste-siirtymälle kirjoittaa $a_s^e = a_j$, jolloin yhtälö (5.100) saa muodon

$$F_i = \sum_j (\sum_e K_{rs}^e) a_j + \sum_e FK_r^e \ . \tag{5.101}$$

Tässä lausekkeessa ensimmäisen summamerkin tarkoittama summaus käy yli kaikkien systeemivapausasteeseen *i* liittyviin elementteihin *e* liittyvien systeemivapausasteiden *j* ja summauksen aikana *s* on systeemivapausastenumeroa *j* vastaava elementin *e* elementti-vapausastenumero.

Kaavan (5.101) tulos voidaan lopulta esittää muodossa

$$F_i = \sum_{j=1}^{M} K_{ij} a_j + FK_i \ , \tag{5.102}$$

missä K_{ij} ovat ns. ***systeemin jäykkyysmatriisin*** rivin *i* alkiot, FK_i on ns. ***systeemin kuormitustermivektorin*** *i*:s alkio, a_j ovat ***systeemin siirtymävapausasteet*** ja *M* on systeemivapausasteiden lukumäärä. Vertaamalla lausekkeita (5.101) ja (5.102) toisiinsa saadaan kokoamiskaavat (5.96) ja (5.97).

5.7 Yhteenveto sauvarakenteen laskemisesta elementtimenetelmällä

Laskennan vaiheet:

1. Piirretään kuvio, jossa näkyvät systeemivapausasteet ja kunkin elementin elementtivapausasteet.
2. Kootaan ja määritetään rakenteen jäykkyysmatriisi $[K]$ ja kuormitustermivektori $\{FK\}$:
   $K_{ij} = \sum_e K_{rs}^e$, $FK_i = \sum_e FK_r^e$.
3. Muodostetaan vapausastekuormien muodostama pystyvektori $\{P\}$.
4. Ratkaistaan yhtälöryhmä: $[K]\{a\} + \{FK\} = \{P\}$
5. Määritetään kunkin elementin elementtivapausasteet: $\{a\}^e$.
6. Määritetään kunkin elementin elementtivapausasteet: $\{a'\}^e = [T]\{a\}^e$.
7. Määritetään kunkin elementin vapausastevoimat: $\{F'\}^e = [K']^e\{a'\}^e + \{FK'\}^e$.
8. Määritetään rasituskuviot (normaalivoima, leikkausvoima ja taivutusmomentti).

Yhteenveto kaavoista:

Yleistetty jousielementti:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{Bmatrix}, \quad \{a\}^e = \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \end{Bmatrix}, \quad [K]^e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad \{FK\}^e = k\Delta_0^e \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$J^e = -F_1^e = F_2^e$$

Tasoristikkoelementti:

$$\{F'\}^e = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}, \quad \{a'\}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$$[K']^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{FK'\}^e = EA\varepsilon_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Nollasta eroava} \\ \text{vain, jos sauvalla} \\ \text{on alkuvenymä!} \end{array} \right.$$

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \qquad c = \cos\alpha, \ s = \sin\alpha$$

$$[K]^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}, \quad \{FK\}^e = EA\varepsilon_0 \begin{Bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{Bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Nollasta eroava} \\ \text{vain, jos sauvalla} \\ \text{on alkuvenymä!} \end{array} \right.$$

$$N(0) = -U_1,\ N(L) = U_2$$

<u>Palkkielementti:</u>

$$\{F\}^e = \{F'\}^e = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}, \quad \{a\}^e = \{a'\}^e = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}, \quad \{FK\}^e = \{FK'\}^e = \begin{Bmatrix} VK_1 \\ MK_1 \\ VK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix}$$

Kuormitustermit VK_1, VK_2, MK_1 ja MK_2 löytyvät taulukosta 5.3.

$$[K']^e = [K]^e = \begin{bmatrix} D & C & -D & C \\ C & A & -C & B \\ -D & -C & D & -C \\ C & B & -C & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix},$$

$$Q(0) = -V_1,\ Q(L) = V_2,\ M(0) = M_1,\ M(L) = -M_2$$

Tasokehäelementti:

$$\{F'\}^e = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}, \quad \{a'\}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

$$[K']^e = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & -S & 0 & 0 \\ 0 & D & C & 0 & -D & C \\ 0 & C & A & 0 & -C & B \\ -S & 0 & 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & -D & -C & 0 & D & -C \\ 0 & C & B & 0 & -C & A \end{bmatrix}, \quad \{FK'\}^{\mathrm{e}} = \begin{Bmatrix} UK_1 \\ VK_1 \\ MK_1 \\ UK_2 \\ VK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix}$$

$$S = \frac{EA}{L},\ A = \frac{4EI}{L},\ B = \frac{2EI}{L},\ \mathrm{C} = \frac{6EI}{L^2},\ \mathrm{D} = \frac{12EI}{L^2}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^e = \begin{bmatrix} F & G & H & -F & -G & H \\ G & P & Q & -G & -P & Q \\ H & Q & A & -H & -Q & B \\ -F & -G & -H & F & G & -H \\ -G & -P & -Q & G & P & -Q \\ H & Q & B & -H & -Q & A \end{bmatrix}, \quad \{FK\}^e = \begin{Bmatrix} cUK_1 - sVK_1 \\ sUK_1 + cVK_1 \\ MK_1 \\ cUK_2 - sVK_2 \\ sUK_2 + cVK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix}$$

Kuormitustermit UK_1, UK_2, VK_1, VK_2, MK_1 ja MK_2 löytyvät taulukoista 5.1 ja 5.3.

$$F = Sc^2 + Ds^2,\ G = (S - D)sc,\ H = -Cs,\ P = Ss^2 + Dc^2,\ Q = Cc$$

$$N(0) = -U_1,\ N(L) = U_2,\ Q(0) = -V_1,\ Q(L) = V_2,\ M(0) = M_1,\ M(L) = -M_2$$

Avaruusristikkoelementti:

$$\{F'\}^e = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{Bmatrix}, \quad \{a'\}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

$$[K']^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{FK'\}^e = EA\varepsilon_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Nollasta eroava} \\ \text{vain, jos sauvalla} \\ \text{on alkuvenymä!} \end{array} \right.$$

$$[T] = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & 0 & 0 & 0 \\ m_x & m_y & m_z & 0 & 0 & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & l_y & l_z \\ 0 & 0 & 0 & m_x & m_y & m_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}$$

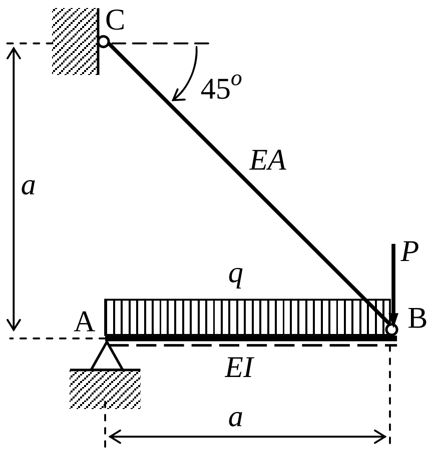
$$[K]^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & l_z l_x & -l_x^2 & -l_x l_y & -l_z l_x \\ l_x l_y & l_y^2 & l_y l_z & -l_x l_y & -l_y^2 & -l_y l_z \\ l_z l_x & l_y l_z & l_z^2 & -l_z l_x & -l_y l_z & -l_z^2 \\ -l_x^2 & -l_x l_y & -l_z l_x & l_x^2 & l_x l_y & l_z l_x \\ -l_x l_y & -l_y^2 & -l_y l_z & l_x l_y & l_y^2 & l_y l_z \\ -l_z l_x & -l_y l_z & -l_z^2 & l_z l_x & l_y l_z & l_z^2 \end{bmatrix}$$

$$\{FK\}^e = EA\varepsilon_0 \begin{Bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \\ -l_x \\ -l_y \\ -l_z \end{Bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Nollasta eroava} \\ \text{vain, jos sauvalla} \\ \text{on alkuvenymä!} \end{array} \right.$$

$$N(0) = -U_1, \; N(L) = U_2$$

5.8 Esimerkkiprobleema

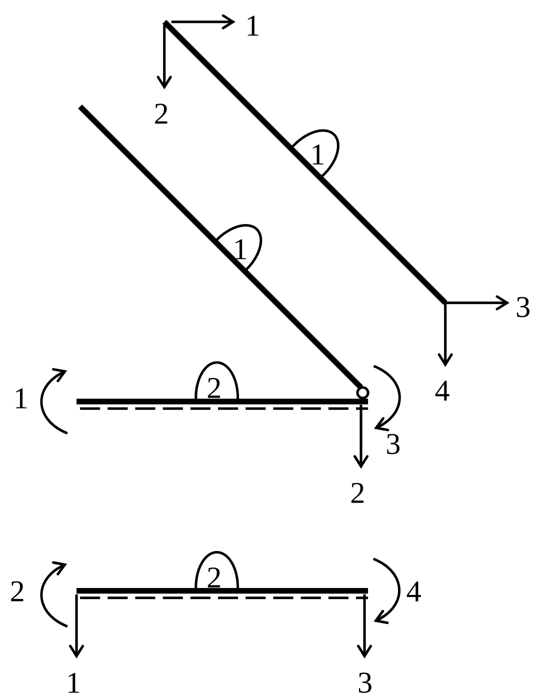
Määritetään oheisen sauvarakenteen kaikki rasituskuviot käyttäen sauvarakenteiden elementtimenetelmää (sauvarakenteiden siirtymämenetelmää). Vino sauva BC on tasoristikkoelementti ja vaakasuora sauva AB on palkkielementti. Sauvojen oma paino otaksutaan nollaksi. (Probleema on staattisesti määrätty ja ratkaisu löytyy helposti myös tasapainotarkasteluja käyttäen.)



$$q = \frac{P}{a},$$

$$EA = 30\frac{EI}{a^2}.$$

Vapausastekuvio:



Kootaan rakenteen jäykkyysmatriisin alkiot:

$$K_{11} = K_{22}^2 = \frac{4EI}{a},$$

$$K_{12} = K_{23}^2 = -\frac{6EI}{a^2},$$

$$K_{13} = K_{24}^2 = \frac{2EI}{a},$$

$$K_{21} = K_{32}^2 = -\frac{6EI}{a^2},$$

$$K_{22} = K_{44}^1 + K_{33}^2 = \frac{\overbrace{EA}^{30EI/a^2}}{a\sqrt{2}}\overbrace{\sin^2 45^o}^{1/2} + \frac{12EI}{a^3} = (\frac{15}{\sqrt{2}} + 12)\frac{EI}{a^3},$$

$$K_{23} = K_{34}^2 = -\frac{6EI}{a^2},$$

$$K_{31} = K_{42}^2 = \frac{2EI}{a},$$

$$K_{32} = K_{43}^2 = -\frac{6EI}{a^2},$$

$$K_{33} = K_{44}^2 = \frac{4EI}{a}.$$

Rakenteen jäykkyysmatriisi:

$$[K] = \frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ -6a & \frac{15}{\sqrt{2}} + 12 & -6a \\ 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix}.$$

Kootaan rakenteen kuormitustermivektorin alkiot:

$$FK_1 = FK_2^2 = MK_1 = -\frac{\overbrace{q}^{P/a}\, a^2}{12} = -\frac{Pa}{12},$$

$$FK_2 = FK_4^1 + FK_3^2 = 0 + VK_2 = -\frac{\overbrace{q}^{P/a}\, a}{2} = -\frac{P}{2},$$

$$FK_3 = FK_4^2 = MK_2 = \frac{\overbrace{q}^{P/a}\, a^2}{12} = \frac{Pa}{12}.$$

Rakenteen kuormitustermivektori:

$$\{FK\} = \frac{P}{12}\begin{Bmatrix} -a \\ -6 \\ a \end{Bmatrix}$$

Vapausastekuormien muodostama pystyvektori:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Yhtälöryhmä:

$$[K]\{a\} + \{FK\} = \{P\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ -6a & \frac{15}{\sqrt{2}} + 12 & -6a \\ 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} + \frac{P}{12}\begin{Bmatrix} -a \\ -6 \\ a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ -6a & \frac{15}{\sqrt{2}} + 12 & -6a \\ 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{Pa^3}{12EI}\begin{Bmatrix} a \\ 18 \\ -a \end{Bmatrix}$$

Ratkaisu:

$$\{a\} = \frac{Pa^2}{EI}\begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{1}{24} \\ \frac{a\sqrt{2}}{10} \\ \frac{\sqrt{2}}{10} - \frac{1}{24} \end{Bmatrix} = \frac{Pa^2}{EI}\begin{Bmatrix} 0{,}1831 \\ 0{,}1414a \\ 0{,}0998 \end{Bmatrix}.$$

Elementin 1 rasitukset:

Elementtivapausasteet rakennekoordinaatistossa:

$$a_1^1 = 0,\ a_2^1 = 0,\ a_3^1 = 0,\ a_4^1 = a_2 = \frac{\sqrt{2}}{10}\frac{Pa^3}{EI}.$$

Elementtivapausasteet sauvakoordinaatistossa:

$$\{a'\}^1 = [T]\{a\}^1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \\ a_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{10}\frac{Pa^3}{EI} \end{Bmatrix} = \frac{Pa^3}{10EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Elementin vapausastevoimat sauvakoordinaatistossa:

$$\{F'\}^1 = [K']^1\{a'\}^1 + \overbrace{\{FK'\}^1}^{\{0\}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{\overbrace{EA}^{30EI/a^2}}{a\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{Pa^3}{10EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} P \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Normaalivoima (sauvavoima):

$$N = U_2 = \underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{2}} P}}.$$

Elementin 2 rasitukset:

Elementtivapausasteet rakennekoordinaatistossa:

$$a_1^2 = 0,\ a_2^2 = a_1 = (\frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{1}{24})\frac{Pa^2}{EI},\ a_3^2 = a_2 = \frac{\sqrt{2}}{10}\frac{Pa^3}{EI},\ a_4^2 = a_3 = (\frac{\sqrt{2}}{10} - \frac{1}{24})\frac{Pa^2}{EI}.$$

Palkkielementillä nämä ovat myös elementtivapausasteet sauvakoordinaatistossa, ts.

$$v_1 = 0,\ \varphi_1 = (\frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{1}{24})\frac{Pa^2}{EI},\ v_2 = \frac{\sqrt{2}}{10}\frac{Pa^3}{EI},\ \varphi_2 = (\frac{\sqrt{2}}{10} - \frac{1}{24})\frac{Pa^2}{EI}.$$

Elementin vapausastevoimat sauvakoordinaatistossa:

$$\{F'\}^2 = [K']^2\{a'\}^2 + \{FK'\}^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} VK_1 \\ MK_1 \\ VK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ -12 & -6a & 12 & -6a \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix}\frac{Pa^2}{EI}\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{1}{24} \\ \frac{a\sqrt{2}}{10} \\ \frac{\sqrt{2}}{10} - \frac{1}{24} \end{Bmatrix} + \frac{P}{12}\begin{Bmatrix} -6 \\ -a \\ -6 \\ a \end{Bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \\ 0 \\ -\frac{P}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}}}.$$

Leikkausvoimat ja taivutusmomentit sauvan päissä:

$$Q(0) = -V_1 = \underline{\underline{\frac{P}{2}}},\quad M(0) = M_1 = \underline{\underline{0}},\quad Q(L) = V_2 = \underline{\underline{-\frac{P}{2}}},\quad M(L) = -M_2 = \underline{\underline{0}}.$$

Nyt on sauvan leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuvio helppo piirtää.

5.9 Elementtimenetelmän ja sauvarakenteiden siirtymämentelmän yhteys

5.91 Johdanto

Seuraavassa esitellään, kuinka sauvarakenteiden ratkaisemiseen voidaan käyttää elementtimenetelmää ja mitkä ovat elementtimenetelmän ja sauvarakenteiden siirtymämenetelmän yhtäläisyydet ja eroavuudet. Elementtimenetelmä on luonteeltaan likimenetemä, jossa probleeman määrittelyalue (tässä rakenne) jaetaan osiin, joita kutsutaan elementeiksi (sauvan osa) ja jotka liittyvät toisiinsa solmujen välityksellä. Probleeman tuntemattomalle funktiolle käytetään kunkin elementin alueella yksinkertaista, tavallisesti polynomimuotoista approksimaatiota, johin liittyvät tuntemattomat parametrit liittyvät solmuihin ja niitä kutsutaan solmuparametreiksi (solmusiirtymät ja kiertymät). Tässä rajoitutaan tarkastelemaan pelkästään palkkielementtiä, koska sen yhteydessä jo tärkeimmät päätelmät voidaan tehdä.

Elementtimenetelmä on yleinen numeerinen analysointimentelmä, jolla voidaan ratkoa mitä moninaisimpia matemaattisen fysiikan probleemia. Sen kehitys on alkanut kiinteän aineen mekaniikan, erityisesti rakenteiden mekaniikan, alueelta ja monet sen tunnetuimmista kehittäjistä ovatkin olleet rakennusinsinöörejä. Koska elementtimenetelmän käyttö edellyttää raskasta laskentaa, sen kehitys on tapahtunut rinnan tietokoneiden kehityksen kanssa ja alkoi noin puoli vuosisataa sitten.

5.92 Palkkielementti ja sen approksimaatio

Yleisin teknistä taivutusteoriaa (Bernoulli-Euler palkkiteoriaa) noudattavan palkin elementtimenetelmäformulaatio perustuu ns. Bernoulli-Euler palkkielementtiin. Tässä elementissä perustuntemattomana funktiona on palkin taipuma $v(x)$ ja sille käytetään kunkin elementin alueella kolmannen asteen polynomiapproksimaatiota. Tämä elementti osoittautuu, kuten pian näemme, olevan ainakin tavanomaisten rakenteiden analysoinnissa esiintyvien lineaaristen probleeminen yhteydessä paras mahdollinen. Muunkinlaisia palkkielementtejä siis on, mutta niitä emme käsittele tässä.

Seuraavassa tarkastelemme yhtä elementtiä *e*. Jätämme kuitenkin käytännön syistä yläindeksin *e*, joka tavallisesti liitetään kaikkiin elementin suureisiin, merkitsemättä.

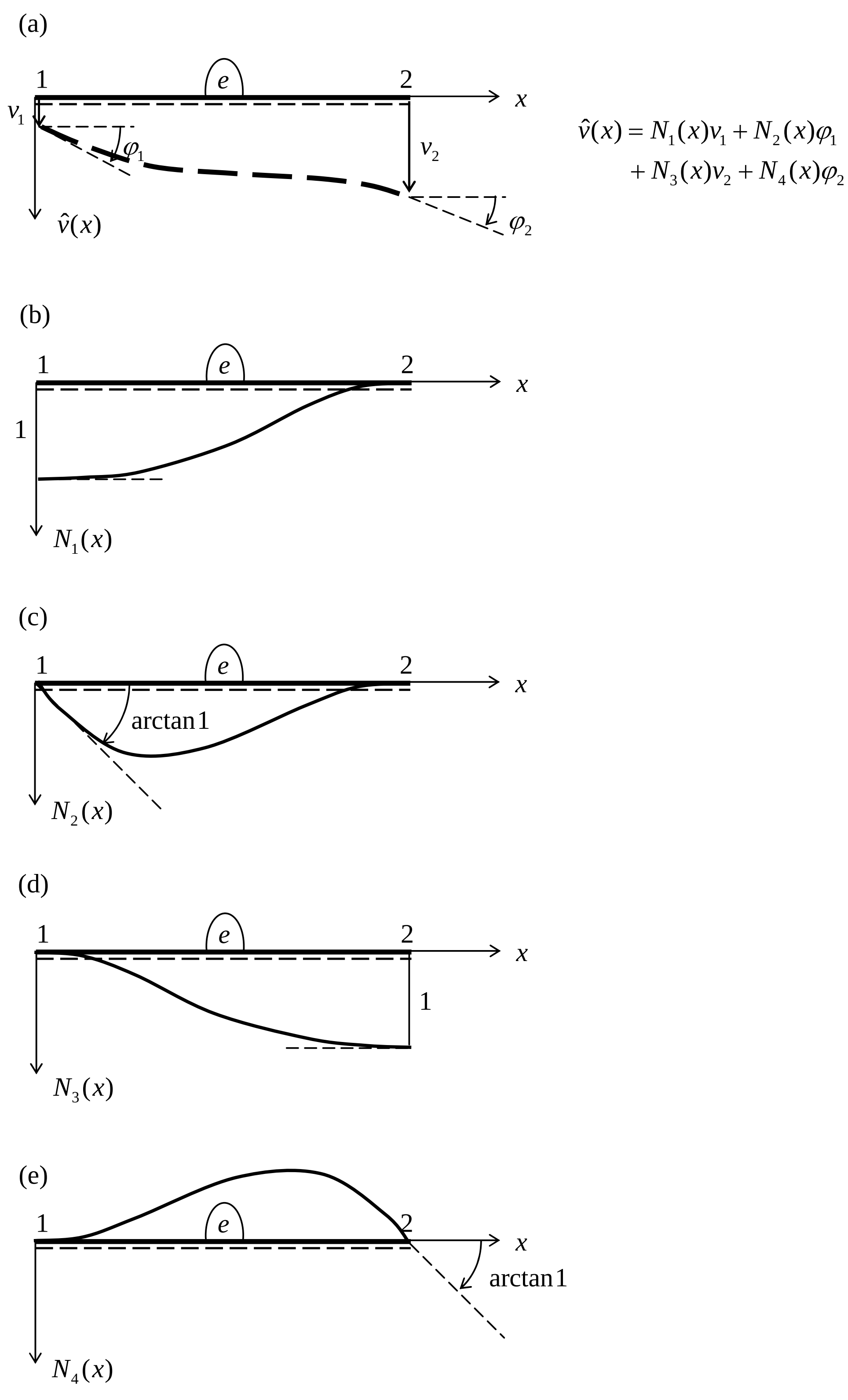
Elementtimenetelmän approksimaatio taipumalle tarkasteltavan elementin alueella esitetään muodosssa:

$$\hat{v}(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\varphi_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\varphi_2 \tag{5.103}$$

missä

$$N_1 = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3},\; N_2 = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2},\; N_3 = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3},\; N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \tag{5.104}$$

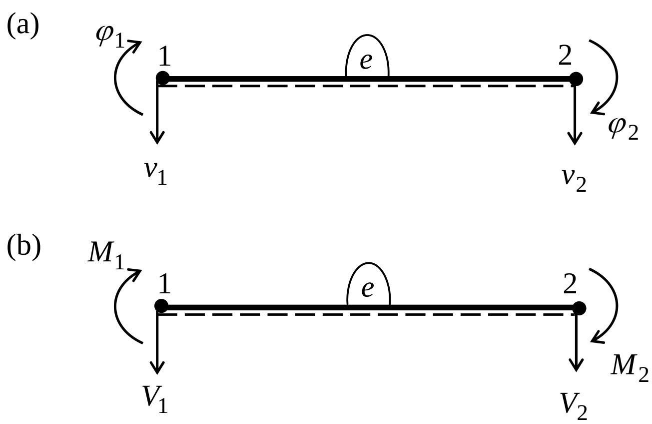
ovat elementin muotofunktiot, $v_i \; (i = 1, 2)$ ovat elementin ns. solmutaipumat, eli taipumat solmujen kohdilla, $\varphi_i \; (i = 1, 2)$ ovat elementin ns. solmukiertymät, eli



Kuva 5.14: Palkkielementin taipuma-approksimaation muodostuminen yleistetyillä solmusiirtymillä kerrottujen muotofunktioiden summana: (a) taipuma-approksimaatio $\hat{v}(x)$, (b)-(e) muotofunktiot $N_i(x)$.

kiertymät solmujen kohdilla, L on elementin pituus ja x-koordinaattia mitataan elementin vasemmasta päästä. Muotofunktiot $N_i(x)$ $(i = 1, \cdots, 4)$ ovat siis (tunnettuja) kolmannen asteen polynomeja. Solmutaipumia ja solmukiertymiä kutsutaan yhteisellä nimellä elementin solmuparametreiksi tai myös elementin yleistetyiksi solmusiirtymiksi. Kuva 5.14 havainnollistaa, kuinka taipuman $v(x)$ elementtiapproksimaatio $\hat{v}(x)$ muodostuu yleistetyillä solmusiirtymillä kerrottujen muotofunktioiden summana.

5.93 Bernoulli-Euler palkkielementin jäykkyysmatriisi ja kuormitustermivektori



Kuva 5.15: Palkkielementin yleistetyt solmusiirtymät ja yleistetyt solmuvoimat.

Seuraavassa johdetaan palkkielementin yleistettyjen solmuvoimien ja solmusiirtymien väliset yhteydet. Vertaamalla saatuja yhteyksia edellä yleisellä siirtymämentelmällä saatuihin tarkkoihin yhtälöihin pyrimme tekemään haluamiamme johtopäätöksiä. Käytetään tuttuja kuvan 5.15 mukaisia merkintöjä.

Sovelletaan virtuaalisen työn periaatetta elementtiin e. Virtuaalisen työn periaate siis kuuluu:

$$\overline{W} \equiv \overline{W}_{\text{int}} + \overline{W}_{ext} = 0\,, \tag{5.105}$$

missä palkkielementin tapauksessa elementin sisäinen virtuaalinen työ on

$$\overline{W}_{\text{int}} = -\int_0^L M\overline{\kappa}dx\,, \tag{5.106}$$

missä M on todellinen taivutusmomentti ja $\overline{\kappa}$ on virtuaalinen käyristymä. Palkin käyristymä κ on taivutusmomentista aiheutuvan käyristymän ja alkukäyristymän summa, ts.

$$\kappa = \frac{M}{EI} + \kappa_0 . \tag{5.107}$$

Tästä saadaan taivutusmomentin ja käyristymän yhteydeksi

$$M = EI(\kappa - \kappa_0) . \tag{5.108}$$

Sijoittamalla tämä taivutusmomentin lauseke elementin sisäisen virtuaalisen työn lausekkeeseen (5.106) saadaan

$$\overline{W}_{\text{int}} = -\int_0^L EI\kappa\overline{\kappa}dx + \int_0^L EI\kappa_0\overline{\kappa}dx . \tag{5.109}$$

Elementin ulkoiselle virtuaaliselle työlle saadaan

$$\overline{W}_{ext} = \int_0^L q\overline{v}dx + V_1\overline{v}(0) + M_1\overline{\varphi}(0) + V_2\overline{v}(L) + M_2\overline{\varphi}(L) , \tag{5.110}$$

missä yläviivalla varustetut siirtymäsuureet ovat virtuaalisia. Lausekkeen (5.110) oikean puolen ensimmäinen termi edustaa poikittaisen jakautuneen kuorman $q(x)$ tekemää virtuaalista työtä, kun palkki saa virtuaalisen taipuman $\overline{v}(x)$. Pieneen kohdassa x olevaan dx:n pituiseen palkkialkioon vaikuttavan voiman $q(x)dx$ tekemä työ on $q(x)dx \cdot \overline{v}(x)$. Kun tämä integroidaan yli koko elementin, saadaan mainittu termi. Lausekkeen (5.110) oikean puolen muut termit edustavat yleitettyjen solmuvoimien tekemiä virtuaalisia töitä. Elementin virtuaaliselle kokonaistyölle saadaan nyt

$$\begin{aligned}\overline{W} &\equiv \overline{W}_{\text{int}} + \overline{W}_{\text{ext}} \\ &= -\int_0^L EI\kappa\overline{\kappa}\,dx + \int_0^L EI\kappa_0\overline{\kappa}\,dx + \int_0^L q\overline{v}dx + V_1\overline{v}(0) + M_1\overline{\varphi}(0) + V_2\overline{v}(L) + M_2\overline{\varphi}(L).\end{aligned} \tag{5.111}$$

Tämän tulisi vurtuaalisen työn periaatteen mukaan hävitä mielivaltaisella virtuaalisella siirtymällä $\overline{v}(x)$.

Otetaan nyt virtuaaliseksi siirtymäksi vuorotellen kukin muotofunktio. Kun kysymyksessä in i:s muotofunktio virtuaaliselle taipumalla, kietymällä ja käyristymällä on siis lausekkeet

$$\overline{v}(x) = N_i(x), \quad \overline{\varphi}(x) \equiv \overline{v}'(x) = N_i'(x), \quad \overline{\kappa}(x) \equiv -\overline{v}''(x) = -N_i''(x) \tag{5.112}$$

ja vastaava elementin virtuaalinen työ $\overline{W}_i$ saa muodon

$$\overline{W}_i \equiv \int_0^L EIN_i''\kappa dx - \int_0^L EIN_i''\kappa_0 dx + \int_0^L N_i q dx$$
$$+V_1 N_i(0) + M_1 N_i'(0) + V_2 N_i(L) + M_2 N_i'(L). \tag{5.113}$$

Todellisen käyristymän approksimaatiolle saadaan

$$\hat{\kappa}(x) \equiv -\hat{v}''(x) = -N_1''(x)v_1 - N_2''(x)\varphi_1 - N_3''(x)v_2 - N_4''(x)\varphi_2 \,. \tag{5.114}$$

Sijoittamalla tämä virtuaalisen työn lausekkeeseen (5.113) saadaan

$$\overline{W}_i \equiv -\int_0^L EIN_i''N_1''dx v_1 - \int_0^L EIN_i''N_2''dx\varphi_1 - \int_0^L EIN_i''N_3''dx v_2 - \int_0^L EIN_i''N_4''dx\varphi_2$$
$$-\int_0^L EIN_i''\kappa_0 dx + \int_0^L N_i q dx + V_1 N_i(0) + M_1 N_i'(0) + V_2 N_i(L) + M_2 N_i'(L) \tag{5.115}$$

eli

$$\overline{W}_i \equiv -K_{i1}^e v_1 - K_{i2}^e\varphi_1 - K_{i3}^e v_2 - K_{i4}^e\varphi_2 - FK_i^e$$
$$+V_1 N_i(0) + M_1 N_i'(0) + V_2 N_i(L) + M_2 N_i'(L) \tag{5.116}$$

missä

$$K_{ij}^e = \int_0^L EIN_i''N_j''dx,$$
$$FK_i^e = -\int_0^L N_i q dx + \int_0^L N_i'' EI\kappa_0 dx. \tag{5.117}$$

Muodostetaan nyt virtuaalisen työn yhtälöt. Virtuaalista siirtymää $\bar{v}(x) = N_1(x)$ vastaava yhtälö on

$$\overline{W}_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; -K_{11}^e v_1 - K_{12}^e\varphi_1 - K_{13}^e v_2 - K_{14}^e\varphi_2 - FK_1^e$$
$$+V_1 \overbrace{N_1(0)}^{1} + M_1 \overbrace{N_1'(0)}^{0} + V_2 \overbrace{N_1(L)}^{0} + M_2 \overbrace{N_1'(L)}^{0} = 0,$$

virtuaalista siirtymää $\bar{v}(x) = N_2(x)$ vastaava yhtälö on

$$\overline{W}_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; -K_{21}^e v_1 - K_{22}^e\varphi_1 - K_{23}^e v_2 - K_{24}^e\varphi_2 - FK_2^e$$
$$+V_1 \overbrace{N_2(0)}^{0} + M_1 \overbrace{N_2'(0)}^{1} + V_2 \overbrace{N_2(L)}^{0} + M_2 \overbrace{N_2'(L)}^{0} = 0,$$

virtuaalista siirtymää $\bar{v}(x) = N_3(x)$ vastaava yhtälö on

$$\overline{W}_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; -K_{31}^e v_1 - K_{32}^e \varphi_1 - K_{33}^e v_2 - K_{34}^e \varphi_2 - FK_3^e$$
$$+V_1 \overbrace{N_3(0)}^{0} + M_1 \overbrace{N_3'(0)}^{0} + V_2 \overbrace{N_3(L)}^{1} + M_2 \overbrace{N_3'(L)}^{0} = 0$$

ja virtuaalista siirtymää $\bar{v}(x) = N_4(x)$ vastaava yhtälö on

$$\overline{W}_4 = 0 \;\Leftrightarrow\; -K_{41}^e v_1 - K_{42}^e \varphi_1 - K_{43}^e v_2 - K_{44}^e \varphi_2 - FK_4^e$$
$$+V_1 \overbrace{N_4(0)}^{0} + M_1 \overbrace{N_4'(0)}^{0} + V_2 \overbrace{N_4(L)}^{0} + M_2 \overbrace{N_4'(L)}^{1} = 0.$$

Nämä yhtälöt saadaan helposti muotoon

$$\begin{aligned}
V_1 &= K_{11}^e v_1 + K_{12}^e \varphi_1 + K_{13}^e v_2 + K_{14}^e \varphi_2 + FK_1^e, \\
M_1 &= K_{21}^e v_1 + K_{22}^e \varphi_1 + K_{23}^e v_2 + K_{24}^e \varphi_2 + FK_2^e, \\
V_2 &= K_{31}^e v_1 + K_{32}^e \varphi_1 + K_{33}^e v_2 + K_{34}^e \varphi_2 + FK_3^e, \\
M_2 &= K_{41}^e v_1 + K_{42}^e \varphi_1 + K_{43}^e v_2 + K_{44}^e \varphi_2 + FK_4^e.
\end{aligned} \tag{5.118}$$

Ne ovat palkkielementin yleistettyjen solmuvoimien ja yleistettyjen solmusiirtymien väliset yhteydet ja kuuluvat matriisimuodossa

$$\{F\}^e = [K]^e \{a\}^e + \{FK\}^e, \tag{5.119}$$

missä

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}, \quad \{a\}^e = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \tag{5.120}$$

ovat elementin yleistettyjen solmuvoimien ja yleistettyjen solmusiirtymien muodostamat pystyvektorit ja

$$\boxed{[K]^e = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{bmatrix}, \quad \{FK\}^e = \begin{Bmatrix} FK_1^e \\ FK_2^e \\ FK_3^e \\ FK_4^e \end{Bmatrix}}. \tag{5.121}$$

ovat **elementin jäykkyysmatriisi ja kuormitustermivektori**.

Näin Bernoulli-Euler palkkielementin jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin alkioille saatiin lausekkeet (5.117) eli uudelleen kirjoitettuina

$$\boxed{\begin{aligned} K_{ij}^{e} &= \int_0^L EIN_i''N_j''dx, \\ FK_i^{e} &= -\int_0^L N_i q dx + \int_0^L N_i'' EI\kappa_0 dx. \end{aligned}} \tag{5.122}$$

Nämä kaavat ovat voimassa siinäkin tapauksessa, että elementin taivutusjäykkyys EI ei ole vakio, vaan riippuu x:stä. Tällöin ei useinkaan ole mahdollista määrittää lausekkeissa (5.122) olevia määrättyjä intergraaleja tarkasti vaan joudutaan turvautumaan numeeriseen integrointiin.

5.94 Tasajäykkä Bernoulli-Euler palkkielementti

Seuraavassa kehitämme lausekkeita (5.122) eteenpäin tasajäykän palkin (EI = vakio) tapauksessa, jolloin integroinnit voidaan suorittaa analyyttisesti. Derivoimalla elementin muotofunktioita (5.104) saadaan

$$N_1' = -6\frac{x}{L^2} + 6\frac{x^2}{L^3},\; N_2' = 1 - 4\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2},$$
$$N_3' = 6\frac{x}{L^2} - 6\frac{x^2}{L^3},\quad N_4' = -2\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2}$$

ja

$$N_1'' = -\frac{6}{L^2} + 12\frac{x}{L^3},\; N_2'' = -\frac{4}{L} + 6\frac{x}{L^2},$$
$$N_3'' = \frac{6}{L^2} - 12\frac{x}{L^3},\quad N_4'' = -\frac{2}{L} + 6\frac{x}{L^2}$$

Nyt saadaan elementin jäykkyysmatriisin alkioille

$$\begin{aligned} K_{11}^{e} &= EI\int_0^L N_1''N_1''dx = \frac{EI}{L^4}\int_0^L(-6+12\frac{x}{L})(-6+12\frac{x}{L})dx \\ &= \frac{EI}{L^4}\int_0^L(36-144\frac{x}{L}+144\frac{x^2}{L^2})dx = \frac{EI}{L^4}\Big|_0^L(36x-72\frac{x^2}{L}+\frac{144}{3}\frac{x^3}{L^2}) \\ &= \frac{EI}{L^4}(36L-72L+\frac{144}{3}L) = \underline{\underline{\frac{12EI}{L^3} = D}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K_{12}^e &= EI\int_0^L N_1''N_2''dx = \frac{EI}{L^3}\int_0^L(-6+12\frac{x}{L})(-4+6\frac{x}{L})dx \\
&= \frac{EI}{L^3}\int_0^L(24-84\frac{x}{L}+72\frac{x^2}{L^2})dx = \frac{EI}{L^3}\Big|_0^L(24x-42\frac{x^2}{L}+24\frac{x^3}{L^2}) \\
&= \frac{EI}{L^3}(24L-42L+24L) = \underline{\underline{\frac{6EI}{L^2} = C}}
\end{aligned}
$$

Jatkamalla samaan tapaan lopputulokseksi tulee

$$
\begin{aligned}
&K_{22}^e = K_{44}^e = A, \\
&K_{24}^e = K_{42}^e = B, \\
&K_{11}^e = K_{33}^e = -K_{13}^e = -K_{31}^e = D, \\
&K_{12}^e = K_{21}^e = K_{14}^e = K_{41}^e = -K_{23}^e = -K_{32}^e = -K_{34}^e = -K_{43}^e = C.
\end{aligned}
\tag{5.123}
$$

Tämä on täsmälleen sama tulos kuin yleiselle siirtymämemetelmälle saatu (5.56).

Elementin kuormitustermivektorin alkioille saadaan vastaavati

$$
\begin{aligned}
FK_1^e &= -\int_0^L N_1 q dx + \int_0^L N_1'' EI\kappa_0 dx \\
&= -\int_0^L (1-3\frac{x^2}{L^2}+2\frac{x^3}{L^3})qdx - \frac{6EI}{L^2}\int_0^L(1-2\frac{x}{L})\kappa_0 dx = \underline{\underline{VK_1}}, \\
FK_2^e &= -\int_0^L N_2 q dx + \int_0^L N_2'' EI\kappa_0 dx \\
&= -L\int_0^L (\frac{x}{L}-2\frac{x^2}{L^2}+\frac{x^3}{L^3})qdx - \frac{2EI}{L}\int_0^L(2-3\frac{x}{L})\kappa_0 dx = \underline{\underline{MK_1}} \\
FK_3^e &= -\int_0^L N_3 q dx + \int_0^L N_3'' EI\kappa_0 dx \\
&= -\int_0^L (3\frac{x^2}{L^2}-2\frac{x^3}{L^3})qdx + \frac{6EI}{L^2}\int_0^L(1-2\frac{x}{L})\kappa_0 dx = \underline{\underline{VK_2}}, \\
FK_4^e &= -\int_0^L N_4 q dx + \int_0^L N_4'' EI\kappa_0 dx. \\
&= -L\int_0^L (-\frac{x^2}{L^2}+\frac{x^3}{L^3})qdx - \frac{2EI}{L}\int_0^L(1-3\frac{x}{L})\kappa_0 dx = \underline{\underline{MK_2}}.
\end{aligned}
$$

Saadut elementin kuormitustermivektorin alkiot VK_1, MK_1, VK_2 ja MK_2 ovat täsmälleen samat kuin yleisen siirtymämemetelmän lausekkeet (5.32). Koska rakenteen jäykkyysmatriisi $[K]$ ja kuormitustermivektori $\{FK\}$ saadaan elementtien jäykkyysmatriisien ja kuormitustermivektorien $[K]^e$ ja $\{FK\}^e$ alkioista elementtimenetelmän kokoamismenettelyä käyttäen, tulevat myös nämä olemaan samat.

Näin myös lopullinen yhtälöryhmä

$$[K]\{a\}+\{FK\}=\{P\},$$

tulee olemaan sama elementtimenetelmässä Bernoulli-Euler palkkielementtiä käyttäen ja yleisessä siirtymämentelmässä. Koska yleinen siirtymämenetelmä, joka on tarkka menetelmä, antaa tarkat arvot yleistetyille solmusiirtymille $\{a\}$ ovat siis myös elementtimenetelmällä Bernoulli-Euler palkkielementtiä käyttäen saadut yleistetyt solmusiirtymät tarkkoja.

5.95 Johtopäätöksia

Päätellään siis, että **tasajäykkä Bernoulli-Euler palkkielementti antaa tarkan ratkaisun yleistetyille solmusiirtymille** (eli solmutaipumille ja solmukiertymille).

Bernoulli-Euler palkkielementin **kuubinen taipuma-approksimaatio** (5.103) **ei kuitenkaan ole tarkka koko elementin alueella** vaan ainoastaan solmujen kohdilla. Tämä voidaan perustella seuraavasti: Lausekkeen (5.103) perusteella taivutusmomentin ja leikkausvoiman lausekkeiksi saadaan

$$\hat{M}(x) \equiv -EI\hat{v}''(x) = -EI[N_1''(x)v_1 + N_2''(x)\varphi_1 + N_3''(x)v_2 + N_4''(x)\varphi_2],$$
$$\hat{Q}(x) \equiv \hat{M}'(x) = -EI[N_1'''(x)v_1 + N_2'''(x)\varphi_1 + N_3'''(x)v_2 + N_4'''(x)\varphi_2].$$

Koska muotofunktiot $N_i(x)$ ovat kuubisia, tulevat niiden toiset derivaatat olemaan lineaarisia ja ensimmäiset derivaatat vakioita. Näin Bernoulli-Euler palkkielementin **taivutusmomentti** $\hat{M}(x)$ **on lineaarinen** ja **leikkausvoima** $\hat{Q}$ **on vakio**. Lineaarinen taivutusmomentti ja vakio leikkausvoima on mahdollinen ainoastaan palkin osalla, jolla ei ole poikittaista kuormaa, ts. $q(x) \equiv 0$. Päädymme siis tulokseen: Bernoulli-Euler palkkielementti **antaa tarkan tuloksen** elementin alueella ainoastaan **palkin osalla, jossa ei ole poikittaista kuormaa**, muussa tapauksessa tulos on aina likimääräinen.