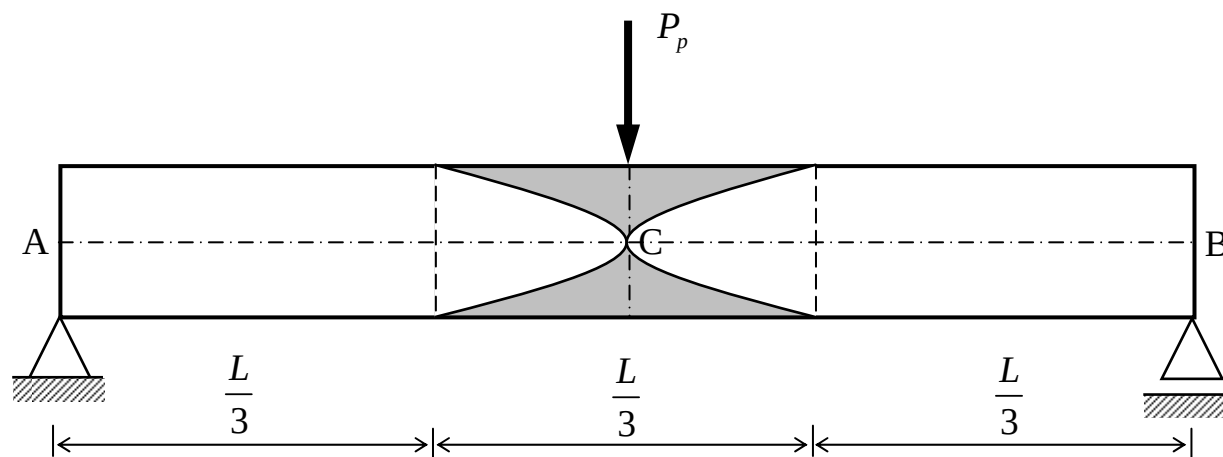
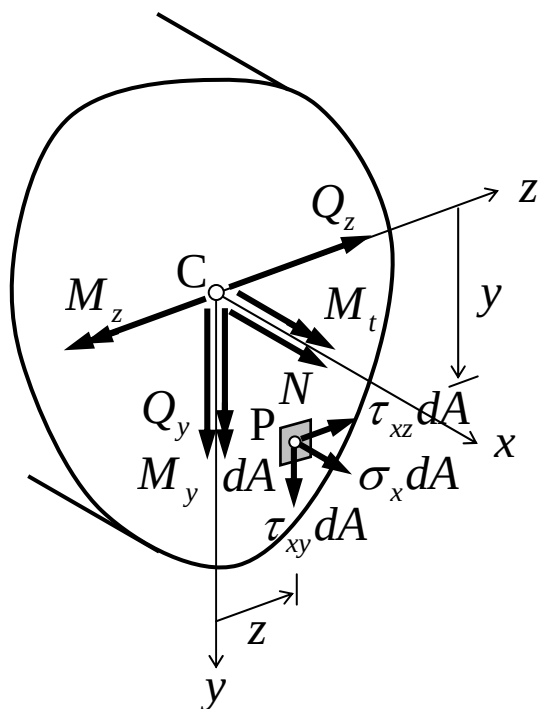


Rak-54.1200 RAKENTEIDEN LUJUUSOPPI

Luentomoniste

Osa II: Rakenteiden lujuusopin perusteita

Jukka Aalto



1. Lujuusopin peruskäsitteitä

1.1 Suoran sauvan veto ja puristus

1.11 Sauvan keskimääräinen normaalijännitys

Tarkastellaan suoraa sauva, jota kuormittaa sen päihin vaikuttavat annetut ulkoiset (vetävät tai puristavat) voimat F . Normaalivoima on tällöin $N = F$. Normaalivoima on poikkipinnalla vaikuttavan normaalijännityksen σ_x , jota merkitään tässä lyhyesti σ , resultantti. Mikäli sauva on homogeeninen, sen poikkileikkauksen mitat ovat pieniä pituuteen verrattuna ja poikkileikkausta ei oteta kovin läheltä sauvan kuormitettuja päitä, sauvan poikkileikkauksen **normaalijännitys** on likimain tasan jakautunut ja saamme

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (1.1)$$

Vaikka emme tuntisi täsmällisesti jännityksen jakautumista poikkipinnalla, voimme määrittää sauvan poikkileikkauksen keskimääräisen **normaalijännityksen** kaavalla

$$\bar{\sigma} = \frac{N}{A}. \quad (1.2)$$

Normaalijännityksen dimensio on $[\sigma] = [N]/[A] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$ ja sen yleisin kerrannaisyksikkö on $\text{MPa} = 10^6 \text{Pa} = 10^6 \text{N/m}^2 = \text{N/mm}^2$.

1.12 Sauvan venymä

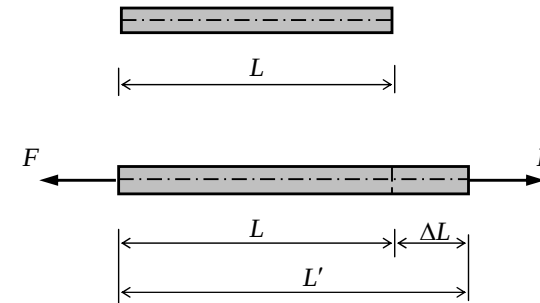
Sauvan **pituuden muutos** (kuva 1.1) on

$$\Delta L = L' - L \quad (1.3)$$

ja sen suhteellinen pituuden muutos eli (insinööri)**venymä** on

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}. \quad (1.4)$$

Mikäli sauvan venyminen ei ole samanlaista sen koko pituudella, tämä kaava esittää keskimääräistä venymää $\bar{\varepsilon}$ sen pisteissä.



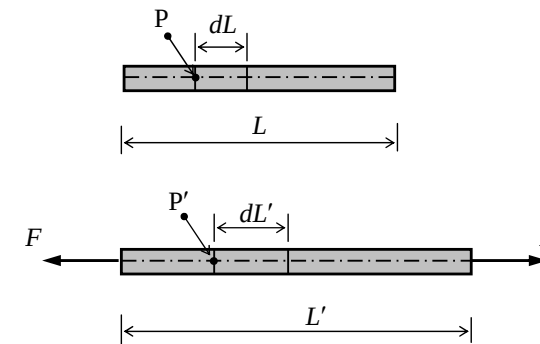
Kuva 1.1: Sauvan pituuden muutos

Sauva-alkion pituuden muutos on

$$\Delta(dL) = dL' - dL \quad (1.5)$$

ja sen (insinööri)**venymä** pisteessä P on

$$\varepsilon(P) = \frac{\Delta(dL)}{dL}. \quad (1.6)$$



Kuva 1.2: Sauva-alkion pituuden muutos

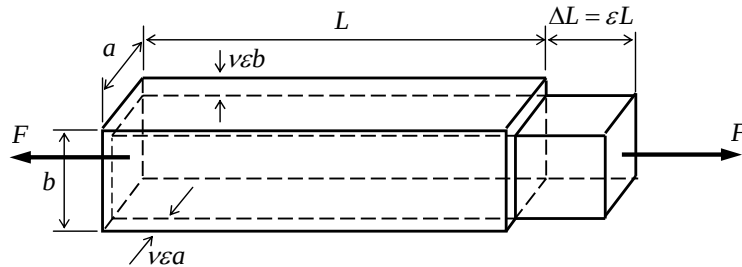
Venymä on paljas luku, joka ilmaistaan usein prosentteina (%), promilleina (‰) tai mikrina ($\mu = 10^{-6}$, mikrostrain, μstr). Venymät ovat tavallisilla materiaaleilla esim. teräksillä, promillen suuruusluokkaa.

1.13 Poissonin vakio

Kokeellisesti voidaan todeta, kuten jo edellä olemme todenneet, että venytetyssä (puristetussa) sauvassa esiintyy pituussuuntaisen venymän lisäksi **poikittaissuuntaista** kutistumista (laajenemista). Useilla materiaaleilla, kun venymät ovat riittävän pieniä, on poikittaisen venymän $\varepsilon_{\perp}$ (lateral strain) ja pitkittäisen venymän ε (axial strain) suhde negatiivinen vakio. Sen vastalukua

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon} \quad (1.7)$$

kutsutaan **Poissonin vakioksi** (Poisson's ratio) tai **suppeumaluvuksi**.



Kuva 1.3: Sauvan tilavuuden muutos

Mikäli kysymyksessä on tällainen materiaali, sauvan (kuva 1.3) tilavuuden muutokselle ΔV saadaan

$$\begin{aligned} \Delta V &= (a - v\varepsilon a)(b - v\varepsilon b)(L + \varepsilon L) - abL = [\varepsilon(1 - 2\nu) - \nu(\nu - 2)\varepsilon^2 + \nu^2\varepsilon^3]abL \\ &\approx \varepsilon(1 - 2\nu)\underbrace{abL}_V, \end{aligned}$$

joten sauvan suhteellinen tilavuuden muutos on

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\nu)\varepsilon. \quad (1.8)$$

Todellisilla materiaaleilla $\Delta V \geq 0$, kun $\varepsilon > 0 \Rightarrow (1 - 2\nu)\varepsilon \geq 0 \Rightarrow \nu \leq 0,5$. Toisaalta kokemuksen perusteella $\nu \geq 0$, joten Poissonin vakio vaihtelee rajoissa $0 \leq \nu \leq 0,5$. Jos $\nu = 0,5$, niin $\Delta V = 0$ ja materiaali on **kokoonpuristumatonta** (incompressible). Taulukossa 1.1 on esitetty Poissonin vakion arvoja joillekin materiaaleille.

Taulukko 1.1: Poissonin vakion arvoja

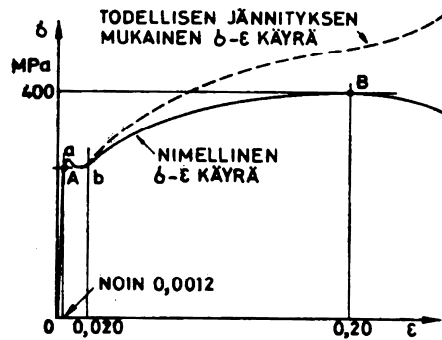
	ν
Korkki	≈ 0
metallit	0,25 – 0,35
Teräs	0,27 – 0,30
Betoni	0,10 – 0,20
Kumi	$\approx 0,5$

1.2 Jännityksen ja venymän välinen yhteys

Seuraavassa tarkastellaan pääpiirteittäin materiaalin jännityksen ja venymän välistä yhteyttä $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ eli tässä lyhyesti $\sigma - \varepsilon$ -yhteyttä. Se selvitetään tavallisesti **kokeellisesti** suoralle sauvalle tehtävän vetokokeen ja tietyille puristuskokeapalleille tehtävien puristuskokeiden avulla.

1.21 Tyypillisiä $\sigma - \varepsilon$ -yhteyksiä ja niitä kuvaavia parametreja

Sitkeälle rakenneteräkselle ja muutamille muille materiaaleille ominainen $\sigma - \varepsilon$ -yhteys on esitetty kuvassa 1.1. Sille on tyypillistä selvä vaakasuora **myötöalue** (yield domain) sekä melko suuri venymä ennen murtumista



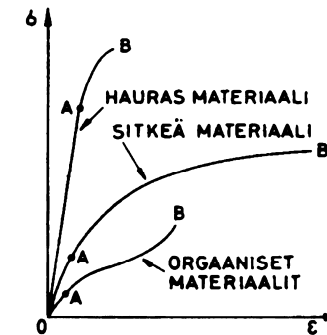
Kuva 1.4: Sitkeän rakenneteräksen tyypillinen $\sigma - \varepsilon$ -yhteys¹

Joukolle muita materiaaleja tyypillinen $\sigma - \varepsilon$ -yhteys on esitetty kuvassa 1.5. Sillä ei ole selvää myötöaluetta. **Sitkeät** (ductile) materiaalit venyvät voimakkaasti ennen murtumista. Tällaisia ovat monet teräkset ja metalliseokset. **Hauraat** (brittle) materiaaleilla murtuvat jo pienillä venymillä. Tällaisia ovat valurauta, keraamiset materiaalit, betoni, eräät metalliseokset ja lasi.

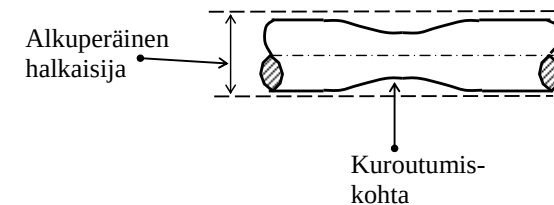
Nimellisjännitys määritetään vetosauvan alkuperäisen poikkipinnan mukaan. Sauvassa tapahtuu erityisesti murtumistilannetta lähestyttäessä voimakasta poikittaista supistumista ns. **kuroutumista** (necking), (kuva

¹ Kuva on saatu tekijän luvalla teoksesta: Outinen, H., Koski, J. ja Salmi, T., Lujuusopin perusteet, Pressus Oy, 2000.

1.6). Sekä nimellisen jännityksen, että todellisen jännityksen mukainen $\sigma - \varepsilon$ -käyrä on esitetty kuvassa 1.1.



Kuva 1.5: Joidenkin materiaalien tyypillisiä $\sigma - \varepsilon$ -yhteyksiä²

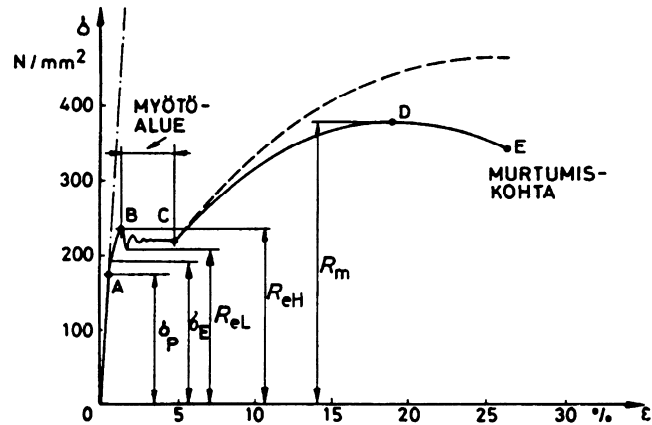


Kuva 1.6: Vetosauvan poikkileikkauksen kuroutuminen

Kuvassa 1.7 on esitelty yksityiskohtaisemmin sitkeän rakenneteräksen $\sigma - \varepsilon$ -käyrän ominaisuuksia. Aluksi jännitys on tiettyyn arvoon ns. **suhteellisuusrajaan** σ_p (proportional limit) asti suoraan verrannollinen venymään. Vaikka jännitys kasvaa tätä suuremmaksi, on sauvan venymä vielä palautuvaa eli materiaali käyttäytyy **kimmoisesti**. Kun jännitys ylittää **kimmorajan** σ_E (elastic limit), jää sauvaan pysyvä venymä kuormituksen poistamisen jälkeen.

Venymän edelleen kasvaessa jännitys saavuttaa ns. **myötörajan** R_e (yield limit), jolloin venymä kasvaa voiman lisääntymättä. Tätä käyrän aluetta kutsutaan **myötöalueeksi**. Ylempi myötöraja R_{eH} on se jännityksen arvo,

² Katso alaviite 1.



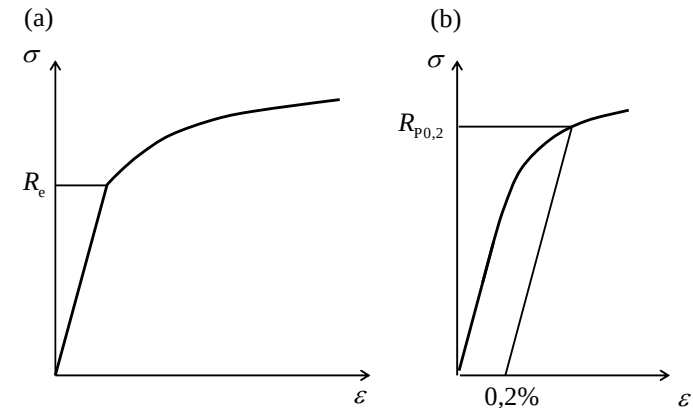
Kuva 1.7: Sitkeän rakenneteräksen $\sigma - \varepsilon$ -käyrän ominaisuuksia³

millä myötö alkaa. Alempi myötöraja R_{eL} on pienin myötöalueella esiintyvä jännitys. Välillä CD nimellijännitys kasvaa jälleen venymän kasvaessa. Vaihetta kutsutaan **myötölujittumiseksi** (strain hardening). Saavutetaan materiaalin **murtolujuus** R_m (ultimate stress, fracture stress). Se on nimellijännityksen suurin arvo kokeen aikana. Tämän jälkeen venymän kasvaessa normaalivoima pienenee ja murtuminen tapahtuu lopulta pisteessä E. Puristuspuolella vastaavia rajoja merkitään symboleilla: σ_{-p} , R_{-E} , R_{-e} ja R_{-m} .

Huomautus: Toisaalla tässä kurssissa ja muissa rakenteiden mekaniikan kurseissa myötörajalta käytetään usein merkintää σ_m .

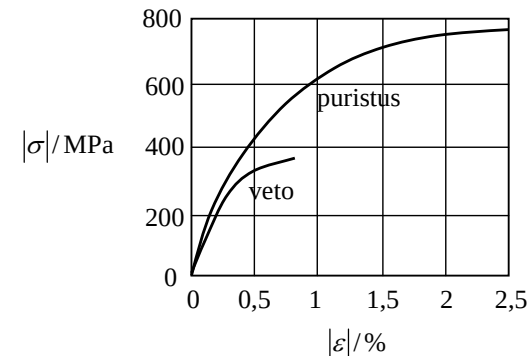
Myös sellaisille materiaaleille, joilla ei ole selvää myötöaluetta, on tarkoituksen mukaista määrittää myötöraja. Eräs syy tähän on se, että todellisille materiaaleille käytetään laskelmissa usein yksinkertaistettuja $\sigma - \varepsilon$ -riippuvuuksia, joissa myötöraja esiintyy parametrina arvoa. Myötörajan arvoksi otetaan tällöin (a) $\sigma - \varepsilon$ -käyrän derivaatan epäjatkuvuuskohdan ordinaatta (kuva 1.8a) tai (b) 0,2% suuruista pysyvää venymää vastaava jännitys, ns. 0,2-raja $R_{p0,2}$ (kuva 1.8b).

³ Katso alaviite 1.

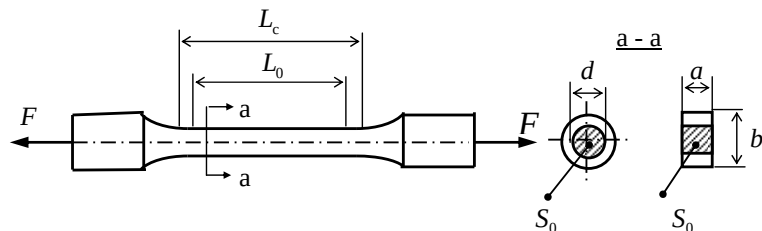


Kuva 1.8: Myötörajan määrittäminen materiaaleille, joilla ei ole selvää myötöaluetta

Useimmilla materiaaleilla puristuskokeesta saatava $\sigma - \varepsilon$ -käyrä on lähes samanlainen kuin vetokokeessa. Joillakin, erityisesti haurailla materiaaleilla, veto- ja puristuspuolen $\sigma - \varepsilon$ -käyrät saattavat erota toisistaan huomattavasti. Esimerkiksi valurautaa (kuva 1.9) ja betoni kestävät huomattavasti vähemmän vetoa kuin puristusta.



Kuva 1.9: Valuraudan $\sigma - \varepsilon$ -käyrä vedossa ja puristuksessa



Kuva 1.10: Metallien vetokoe

1.22 Metallien vetokoe

Kuva 1.10 esittää standardin SFS-EN 10 0021-1 mukaista metallien vetokoetta. Koesauvan poikkileikkaus on yleensä ympyrä, mutta myös suorakulmiopoikkileikkaus tulee kysymykseen. Koe tehdään vakionopeudella lämpötilassa $23 \pm 5^\circ\text{C}$. Kokeessa rekisteröidään sauvan venyminen mittapituuden L_0 matkalta ja sauvaan vaikuttava voima F , joiden avulla saadaan nimellisjännityksen $\sigma = F/S_0$ ja venymän $\varepsilon = \Delta L_0 / L_0$ välinen yhteys. Koepituus L_c on sauvan tasapaksun osuuden pituus ja S_0 on sauvan alkuperäinen poikkipinta-ala. Sauvan **murtokurouma** (percent reduction in area) määritellään pyöreillä koesauvoilla siten, että katkenneen sauvan ohuimmasta kohdasta mitataan kuroutumiskohdan poikkipinta-ala S_u , jolloin murtokurouma on

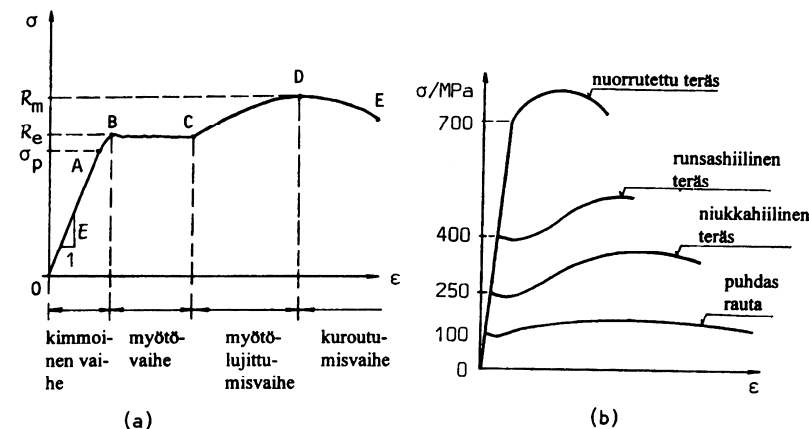
$$Z = \frac{S_0 - S_u}{S_0} \cdot 100\% \quad (1.9)$$

Esimerkiksi rakenneteräkselle $Z = 60 \dots 70\%$.

1.23 Kimmoinen käyttäytyminen

Useimpien rakennusmateriaalien käyttäytyminen on $\sigma - \varepsilon$ -käyrän alkuosalla **lineaarisesti kimmoista** (linearly elastic) suhteellisuusrajaan σ_p saakka, ts. $\sigma - \varepsilon$ -käyrä välillä OA on **suora**, vrt. kuva 1.11a. Kuvassa 1.11b on eräiden teräslaatujen periaatteellisia $\sigma - \varepsilon$ -käyriä, joissa näkyy selvä suora osuus likimain myötörajaan saakka.

Useimmissa tapauksissa käytettäessä rakennusmateriaaleina esimerkiksi metalleja, muoveja, puuta, betonia tai keraamisia aineita, suunnitellaan rakenteet siten, että niiden käyttäytyminen voidaan olettaa lineaarisesti kimmoiseksi. Tällöin jännityksen ja venymän yhteys on



Kuva 1.11: (a) sitkeän materiaalin periaatteellinen $\sigma - \varepsilon$ -käyrä, (b) eräiden teräslaatujen $\sigma - \varepsilon$ -käyriä⁴

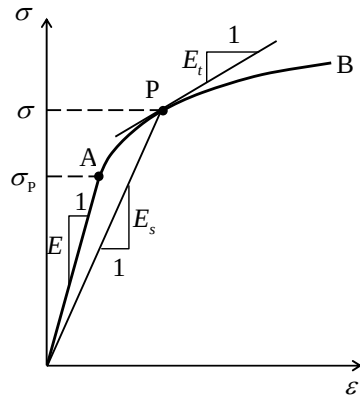
$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.10)$$

missä kerroin E on **kimmomoduuli** (Young's modulus), vrt. kuva 1.11a. Kimmomoduulin yksikkö on jännityksen yksikkö. Sopiva kerrannaisyksikkö on $\text{GPa} = 10^9 \text{ Pa}$. Esimerkiksi teräksen kimmomoduuli on $E \approx 200 \text{ GPa}$. Kimmomoduuli kuvaa **materiaalin jäykkyyttä** (material stiffness) tarkasteltavassa materiaalipisteessä. Hooken lakiin sisältyvä kerroin E on Poissonin luvun ν ohella toinen materiaalin käyttäytymistä kuvaava **kimmovakio** (elastic coefficient).

1.24 Tangentti- ja sekanttimoduuli

Kuvan 1.12 jännitys-venymäkäyrän suoralla osalla OA kimmomoduuli E tarkoittaa sen suoran osan **kulmakerrointa**. Jännitys-venymäkäyrän epälineaarisella osalla AB, jossa $\sigma > \sigma_p$, materiaalin jäykkyyttä kuvaavana suureena voidaan käyttää **tangenttimoduulia** E_t (tangent modulus), jolla ymmärretään $\sigma - \varepsilon$ -käyrän derivaattaa eli tangentin kulmakerrointa tarkastelupisteessä. Tangenttimoduulin sijasta voidaan käyttää myös ns. **sekanttimoduulia** E_s (secant modulus), jolla taas ymmärretään origon ja käyrän tarkastelu-pisteen kautta kulkevan suoran kulmakerrointa.

⁴ Katso alaviite 1



Kuva 1.12: Kimmomoduuli, tangenttimoduuli ja sekanttimoduuli

Kun $\sigma \leq \sigma_p$, niin $E = E_t = E_s = \text{vakio}$. Kun $\sigma > \sigma_p$, niin E_t ja E_s ovat jännityksen tai venymän funktioita.

1.24 Ramberg-Osgood kaava

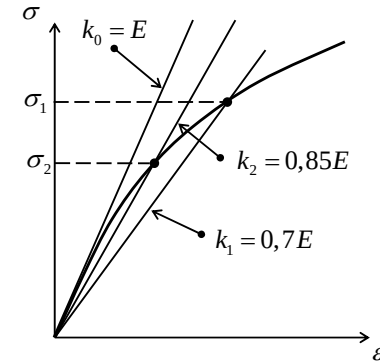
Eri materiaalien $\sigma - \varepsilon$ -käyrän esittämiseen analyttisesti on esitetty monia kaavoja. Tunnetuimpia niistä lienee **Ramberg-Osgood** kaava

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{3}{7} \frac{\sigma_1}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^n, \quad (1.11)$$

missä parametri n voidaan laskea kokemuspäisestä kaavasta

$$n = \frac{0,8873}{\ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} + 1. \quad (1.12)$$

Jännitykset σ_1 ja σ_2 määritetään ko. materiaalin kokeellisesta $\sigma - \varepsilon$ -käyrästä siten, että σ_1 ja σ_2 vastaavat origosta kulmakertoimilla $0,7E$ ja $0,85E$ piirrettyjen sekanttien ja käyrän leikkauspisteiden jännitysten arvoja kuvan 1.13 mukaisesti.

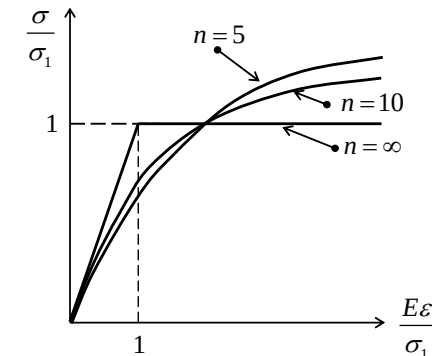


Kuva 1.13: Jännitysten σ_1 ja σ_2 määrittäminen kokeellisen $\sigma - \varepsilon$ -käyrän avulla Ramberg-Osgood kaavaa varten

Kirjoittamalla Ramberg-Osgood kaava muotoon

$$\frac{E\varepsilon}{\sigma_1} = \frac{\sigma}{\sigma_1} + \frac{3}{7} \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^n, \quad (1.14)$$

saadaan sille parametrin n eräillä arvoilla kuvan 1.14 mukaiset käyrät.

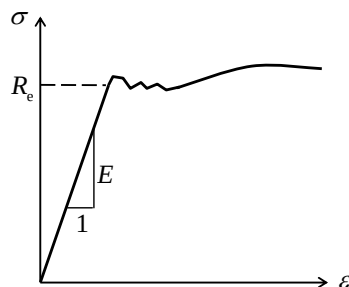


Kuva 1.14: Tyypillisiä Ramberg-Osgood jännitys-venymäkäyriä

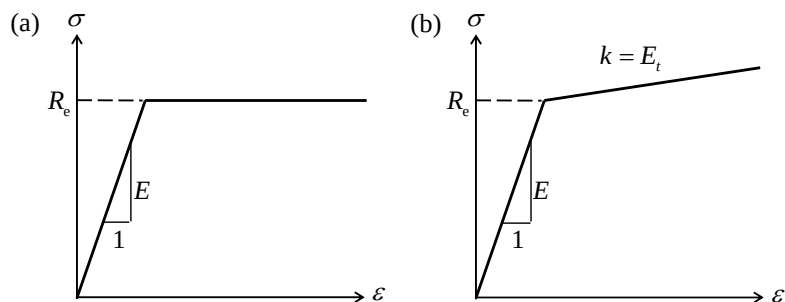
Rajatapauksena, kun $n = \infty$, saadaan kaavasta (1.12) materiaalimalli, jonka on alkuosaltaan ($\sigma \leq \sigma_1$) kalteva suora ja muualla ($\sigma > \sigma_1$) vaakasuora. Ramberg-Osgood kaava soveltuu hyvin mm. korkean lujuusluokan teräksille, betonille, alumiinille ja magnesiumille.

1.25 Idealisesti plastinen ja myötölujittuva materiaali

Monille materiaaleille $\sigma - \varepsilon$ -käyrää (kuva 1.15) kuvaan hyvin käyrän alkuosalla Hookeen lain mukainen lineaarinen jännitysvenymäyhteys. Joissain yhteyksissä, kuten rakenteen **sortumiskuormituksen** eli **rajakuorman** (limit load) määrittämisessä tarvitaan myötörajan R_e ylittäviä jännityksiä vastaavaa $\sigma - \varepsilon$ -käyrää. Useilla materiaaleilla, esim. rakenneteräksillä, voidaan käyttää kuvan 1.16a **lineaarisesti kimmoista, ideaalisesti plastista materiaalmallia** (linear elastic, ideal plastic material). Joissain yhteyksissä kannattaa käyttää kuvan 1.16b **lineaarisesti kimmoista, lineaarisesti myötölujittuvaa materiaalmallia** (linear elastic, linear strain hardening material).



Kuva 1.15: Todellisen materiaalin $\sigma - \varepsilon$ -käyrä

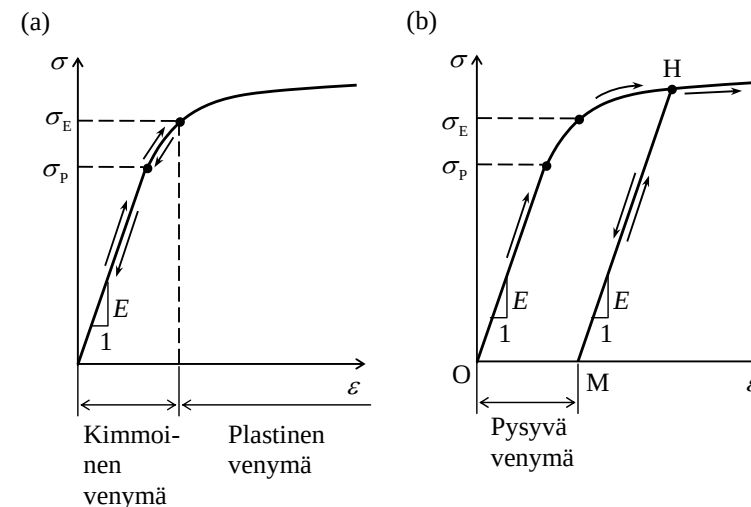


Kuva 1.16: Lineaarisesti kimmoiset (a) ideaaliplastinen materiaali (b) lineaarisesti myötölujittuva materiaali

1.26 Kuormituksen poisto ja pysyvä venymä

Materiaalia sanotaan **kimmoiseksi** (elastic), jos se kuormituksen poistuttua palaa täydellisesti alkuperäiseen tilaansa. Kun jännitys ei ylitä kimmorajaa ($\sigma \leq \sigma_E$), venymät pysyvät kimmoisina. Tällöin kuormitusvaihe ja kuormituksen poistovaihe seuraavat samaa käyrää kuvan 1.17a mukaisesti.

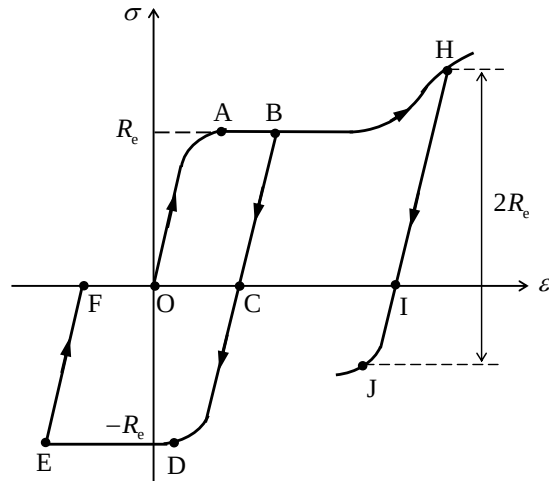
Kuormitettaessa materiaalia **kimmottomalle** (inelastic) alueelle ($\sigma > \sigma_E$) kuormituksen poistaminen tapahtuu likimain kuvan 1.17b mukaisesti lineaarisesti pitkin suoraa HM, jonka kulmakerroin on sama kuin $\sigma - \varepsilon$ -kuvion alkuosan kulmakerroin. Näin materiaaliin jää **pysyvä venymä** (residual strain, permanent strain). Kun materiaaliin syntyy pysyvä venymä, niin vain osa materiaalin kuormitusvaiheessa absorboimasta energiasta on palautuvaa, loppu on hajaantunut lämmön kautta systeemin sisäenergiaksi. Tämä energia on verrannollinen pinnan OHMO alaan.



Kuva 1.17: Kuormitus ja kuormituksen poisto, (a) kun $\sigma \leq \sigma_E$ ja (b) kun $\sigma > \sigma_E$

Kuormitettaessa materiaalia uudelleen lähtemällä pisteestä M käyttäytyy se likimain lineaarisesti kimmoisesti, kunnes saavutetaan uudelleen edellisellä kuormituskerralla saavutettu suurin jännitys pisteessä H. Tällä

tavalla voidaan nostaa materiaalin suhteellisuus- ja kimmorajaa. Kuormituksen edelleen kasvaessa seurataan jälleen **alkuperäistä** $\sigma - \varepsilon$ -käyrää, kunnes saavutetaan materiaalin murtoraja R_m .



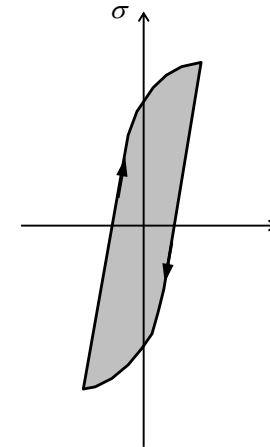
Kuva 1.18: Toistuvan veto-, puristus-kuormituksen $\sigma - \varepsilon$ -käyrä

1.27 Toistuva veto-, puristus-kuormitus

Kuva 1.18 esittää materiaalia, jonka $|R_e| = |R_{-e}|$. Kuormitetaan materiaalia kimmottomalle alueelle pisteeseen B, jossa kuormitus poistetaan. Tällöin saavutetaan piste C. Kun kuormitussuunta vaihdetaan puristukseksi, saavutetaan piste E. Kun puristuskuormitus poistetaan, saavutetaan piste F, joka voi olla origon jommalla kummalla puolella tai origossa. Jos piste on origossa, materiaaliin ei jää pysyvää venymää. Kuitenkin materiaalin sisäinen rakenne on muokkautunut kuormitusprosessissa ja jos kuormituskierros toistetaan joitakin kertoja, koesauva murtuu. Vaihtuva veto- ja puristuskuormitus plastisten venymien alueella voidaan sallia vain tarkoin harkituissa olosuhteissa, esimerkiksi silloin, kun suoritetaan vaurioitunutta rakenne- tai koneen osaa. Jos vetokuormitusta jatketaan niin pitkälle, että saavutetaan piste H, materiaali myötölujittuu. Kun nyt kuormitus poistetaan, saavutetaan piste I. Kun kuormituksen suunta vaihdetaan puristukseksi, saavutetaan piste J, jota vastaava puristusjännityksen itseisarvo jää myötörajaa R_e pienemmäksi. Pisteitä H ja J vastaavien jännitysten erotus on kuitenkin edelleen $2R_e$.

Puristuspuolen myötörajan pienentymisilmiötä kimmottoman alueen vaihtokuormituksessa sanotaan **Bauschingerin efektiksi**.

Jos materiaalia kuormitetaan symmetrisesti nollan molemmin puolin vaihtelevalla voimalla, on $\sigma - \varepsilon$ -käyrä kuvan 1.19 mukainen. Jokaisella kierroksella kuluva energia on verrannollinen käyrän sisään jäävään pinta-alaan. Tällaista käyrää kutsutaan **hystereesissilmukaksi** (hysteresis loop).

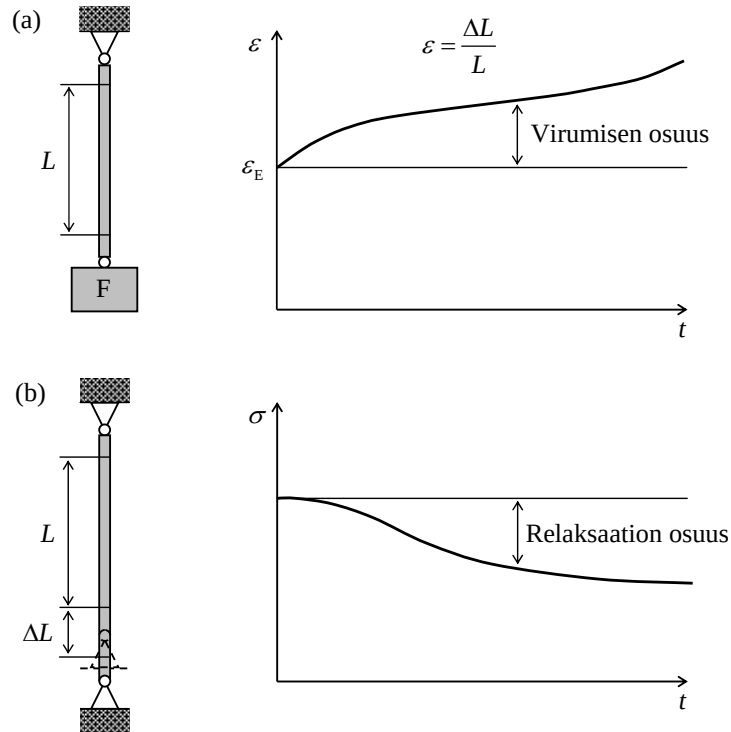


Kuva 1.19: Hystereesissilmukka

1.3 Venymän ja jännityksen riippuvuus ajasta

Tietyillä materiaaleilla mm. Betonilla venymät kasvavat pitkällä aikavälillä, vaikka jännitys säilyy vakiona. Ilmiötä kutsutaan materiaalin **virumiseksi** (creep). Joillakin materiaaleilla viruminen on voimakasta korkeissa lämpötiloissa. Virumiskokeessa koesauvaan järjestetään vakio vetorasitus $\sigma = F / A$. Ensin tapahtuu äkillinen kimmoinen venymä ε_e ja sitten sauva venyy ajan mukana kuvan 1.20a mukaisesti. Samoilla materiaaleilla esiintyy myös ilmiö, jossa jännitykset pienenevät ajan mukana, vaikka venymät pysyvät vakiona. Ilmiötä kutsutaan **relaksaatioksi** (relaxation). Relaksaatiokokeessa koesauvan venymä pidetään vakiona. Tapahtuu kuvan 1.20b mukainen jännitysrelaksaatio.

Jännitetyissä betonirakenteissa, joissa jänneteräkset jännitetään suurella voimalla, tapahtuu ajan mukana jännevoiman laukeamista eli relaksatiota virumismekanismin seurauksena. Virumista tapahtuu jo tavallisissa lämpötiloissa esim. muoveilla, puulla, betonilla ja orgaanisilla aineilla.

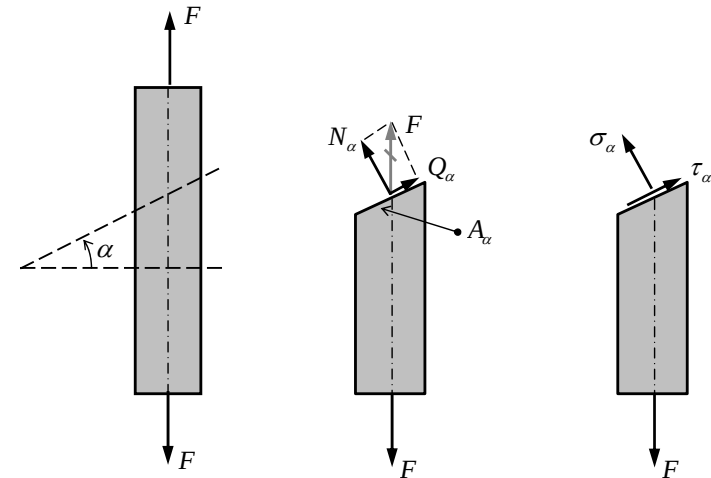


Kuva 1.20: (a) Vakiojännityksen aiheuttama viruminen ja (b) vakio venymän aiheuttama jännitysrelaksaatio

1.4 Leikkaus

1.41 Leikkausjännitys vetosauvassa

Leikataan sauva **vinolla** leikkauksella ja merkitään vinon pinnan alaa A_α . Pystysuuntaisesta tasapainoehdosta seuraa, että leikkauspinnassa vaikuttava voimaresultantti on F ja se on sauvan akselin suuntainen. Jaetaan F leikkaustason normaalin ja tangentin suuntaisiin komponentteihin. Näistä edellistä kutsutaan vinon tason **normaalivoimaksi** N_α (normal force) ja jälkimmäistä sen **leikkausvoimaksi** Q_α (shear force).



Kuva 1.21: Vetosauvan vinossa leikkauksessa vaikuttavat jännitykset

Kuvan 1.21 perusteella on voimassa

$$N_\alpha = F \cos \alpha, \quad Q_\alpha = F \sin \alpha, \quad A_\alpha = A / \cos \alpha, \quad (1.15)$$

missä A on sauvan akselia vastaan kohtisuoran leikkauspinnan ala. Jos voidaan otaksua, että voimat N_α ja Q_α ovat jakautuneet tasaisesti koko leikkauspinnalle, saadaan ko. pinnan **normaalijännitykseksi** σ_α ja **leikkausjännitykseksi** τ_α lausekkeet

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha}, \quad \tau_\alpha = \frac{Q_\alpha}{A_\alpha}, \quad (1.16)$$

Sijoittamalla kaavoihin (1.16) lausekkeet (1.15) saadaan

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{F \cos \alpha}{A / \cos \alpha} = \frac{F}{A} \cos^2 \alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \\ \tau_\alpha &= \frac{F \sin \alpha}{A / \cos \alpha} = \frac{F}{A} \sin \alpha \cos \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha,\end{aligned}\quad (1.17)$$

jolloin on merkitty $\sigma = F / A$. Tuloksista nähdään, että

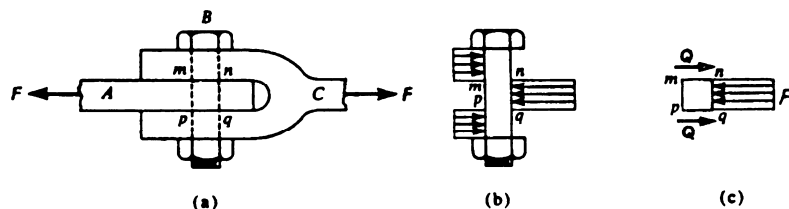
$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \sigma_\alpha (\alpha = 0^\circ) = \frac{F}{A}, \\ \tau_{\max} &= \tau_\alpha (\alpha = 45^\circ) = \frac{1}{2} \frac{F}{A}, \\ \tau_{\max} &= \frac{1}{2} \sigma_{\max}.\end{aligned}\quad (1.18)$$

Esitetty tarkastelu tulee käytännössä tarpeelliseksi erityisesti silloin, kun vetosauva on jatkettu esimerkiksi liimaamalla.

1.42 Leikkausjännitykset liitoksessa

Esimerkkinä käytännön tilanteesta, jossa leikkausjännitykset ovat pääasiallisena mielenkiinnon kohteena, tarkastellaan kuvan liitosta. Siinä tappi B välittää voiman F kappaleiden A ja C välillä.

Liitos (a) tappi (b) ja tapin palan VKK (c).



Kuva 1.22: (a) Liitos (b) tappi ja (c) tapin palan VKK⁵

Oletetaan, että kappaleiden A ja C sekä tapin B välinen voima on kuvan (b) mukaisesti tasan jakautunut niiden kosketuspintoihin. Tapin palan

⁵ Katso alaviite 1

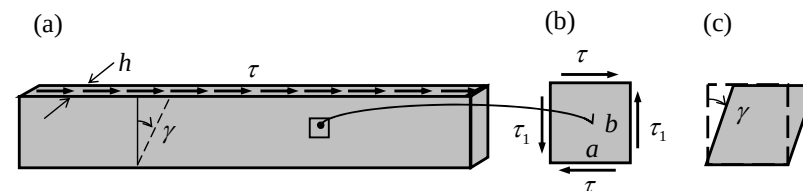
$mnpq$ VKK:sta 1.22c nähdään, että leikkauksessa täytyy vaikuttaa keskimääräisen leikkausvoiman, jonka suuruus saadaan tasapainoehdosta

$$\rightarrow 2Q - F = 0 \Rightarrow Q = \frac{F}{2} \Rightarrow \bar{\tau} = \frac{Q}{A} = \frac{F}{2A}, \quad (1.19)$$

missä $\bar{\tau}$ on tapin poikkileikkauksen keskimääräinen leikkausjännitys ja A on tapin poikkipinnan ala. Todellisuudessa kuvan 1.22b tapin leikkauksiin mn ja pq kohdistuu myös taivutusrasitus (taivutusmomentti). Kaavan (1.19) mukainen laskelma on kuitenkin useimmissa tapauksissa riittävä monien rakenneosien, kuten esimerkiksi ruuvi-, niitti-, hitsi- ja liimaliitosten mitoituksessa.

1.43 Liukuma

Tarkastellaan kuvan 1.23 mukaista tasapaksua, äärettömän pitkää levykaistaa, joka on alareunastaan jäykästi kiinnitetty ja jota kuormittaa yläreunaan kohdistuva tasainen leikkausjännitys τ .



Kuva 1.23: Leikkausjännityksen aiheuttama liukuma

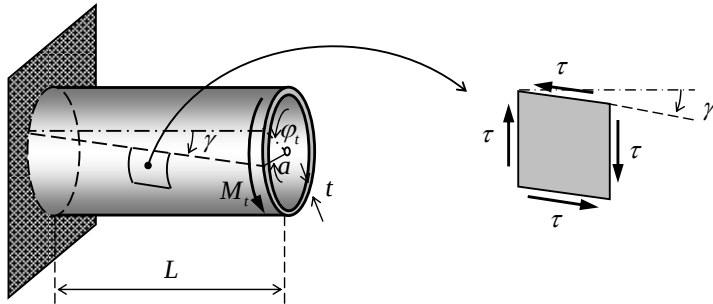
Kuormittamattoman levyn pystysuora jana kääntyy kuormituksen vaikutuksesta kulman γ verran. Kulman arvo radiaaneissa on leikkausjännitystä τ vastaava **liukuma** (shear strain). Levykaistan jokaisessa vaakaleikkauksessa vaikuttaa leikkausjännitys τ . Leikataan levykaistasta pala, jonka leveys on a ja korkeus b . Sen ylä- ja alapintaan vaikuttavat tasaiset leikkausjännityskentät τ kuvan mukaisesti, jolloin voimien vaakatasapainoehto toteutuu. Sen pystysuuntaisiin reunapintoihin vaikuttavat leikkausjännitykset τ_1 , jolloin voimien pysty-tasapainoehto toteutuu. Kirjoittamalla levyn palalle momenttitasapainoyhtälö saadaan

$$\tau_1 b h \cdot a - \tau a h \cdot b = 0 \Rightarrow \tau_1 = \tau \quad (1.20)$$

Koska pala oli leikattu mielivaltaisesta kohdasta, täytyy jokaisessa levykaistan pystyleikkauksessa olla tasainen leikkausjännityskenttä τ . Kuormittamattomasta levystä leikattu kuvan 1.23b pala siirtyy vaakasuunnassa ja lisäksi muuttaa muotoaan kuvan 1.23c mukaisesti. Leikkaus-jännityksestä aiheutuva liukuma on todellisuudessa yleensä hyvin pieni, joten se on kuvassa voimakkaasti liioiteltu.

1.44 Leikkausjännityksen ja liukuman välinen yhteys

Leikkausjännityksen ja liukuman välinen yhteys saadaan **kokeellisesti** puhtaan leikkauksen kuormittamalle kappaleelle tehtävästä kokeesta. Koe tehdään yleensä ympyräsynterin muotoisen putken **vääntökokeena** (torsion test).

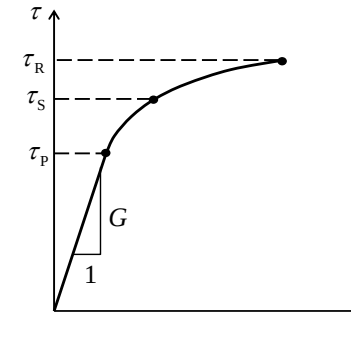


Kuva 1.24: Periaatekuva ympyräsynterin muotoisen putken vääntökokeesta

Kokeessa rekisteröidään vääntökulma φ_t ja sitä vastaava vääntömomentti M_t . Liukuma ja sitä vastaava leikkausjännitys saadaan kaavoista

$$\gamma = \frac{\varphi_t a}{L}, \quad \tau = \frac{M_t}{2\pi a^2 t}. \quad (1.21)$$

Mittaustuloksista piirretty $\tau - \gamma$ -käyrä on muodoltaan hyvin samanlainen kuin vetokokeessa saatava $\sigma - \varepsilon$ -käyrä (kuva 1.25).



Kuva 1.25: Sitkeän materiaalin tyypillinen $\tau - \gamma$ -käyrä

Mikäli materiaalilla on vetokokeen $\sigma - \varepsilon$ -käyrässä lineaarinen osuus, on myös $\tau - \gamma$ -käyrässä lineaarinen osuus. Tällä alueella on voimassa leikkauksen Hooken laki

$$\tau = G\gamma, \quad (1.22)$$

missä kerroin G on **liukumoduuli** (shear modulus).

Isotrooppisen aineen kimmomoduuli E , liukumoduuli G ja Poissonin vakio ν eivät ole toisistaan riippumattomia, vaan niiden välillä on (edellä johdettu) yhteys

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1.23)$$

Kun Poissonin vakio vaihtelee välillä $\nu = 0 \dots 0,5$, niin liukumoduuli vaihtelee välillä $G = E/2 \dots E/3$. Esimerkiksi rakenneteräksellä $G = 75 \text{ GPa}$ ja alumiinilla $G = 28 \text{ GPa}$.

1.5 Sallitut jännitykset ja varmuusluku

Lujuuslaskennassa joudutaan aina käsittelemään **idealisoitua mekaniikan mallia**. Tällöin joudutaan tekemään huomattava määrä **yksinkertaistuksia** koskien rakenteen geometriaa, materiaaliominaisuuksia sekä kuormituksia. Edelleen esiintyy mm. seuraavia epävarmuustekijöitä:

- **Materiaaliominaisuuksien vaihtelut.** Lujuusarvot ovat vain keskimääräisesti paikkansa pitäviä.
- **Kuormituksiin liittyvät epävarmuudet.** On mahdoton tuntea kaikkia mahdollisia kuormitusolosuhteita.
- **Ympäristöolosuhteiden vaikutus.** Korroosion, syövyttävien aineiden ja radioaktiivisuuden vaikutukset lujuusominaisuuksiin ovat vaikeasti ennustettavissa.
- **Rakenteiden kuluminen** ja sen vaikutus niiden toimintaan.
- **Valmistuksen tarkkuus.**

Näiden likimääräistysten ja epävarmuustekijöiden huomioon ottamiseksi on otettu käyttöön käsite **varmuusluku** n (safety factor). Se määrittellään osamääränä

$$n = \frac{F_{kr}}{F_{sall}}, \quad (1.24)$$

missä F_{kr} on **kriittinen, kielletty kuormitus**, joka johtaa epätydyttävään tilanteeseen. Kielto voi aiheutua esimerkiksi materiaalin murtumisesta, myötäämisestä tai liian suurista siirtymistä. F_{sall} taas tarkoittaa vastaavaa laskennassa **sallittavaa kuormitusta**.

Usein varmuusluku määritellään materiaalin **kriittisen jännityksen** (laskentalujuuden) σ_{kr} suhteena suurimpaan **sallittuun rakenteessa esiintyvään jännitykseen** σ_{sall} , eli

$$n = \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{sall}}. \quad (1.25)$$

On luonnollista, että jännitys ei saa missään kohdassa rakennetta ylittää murtolujuutta. Kuitenkin myös myötörajan ylitystä ja siihen liittyviä suuria venymiä pidetään useimmissa tapauksissa mahdollittomina sallia.

Yleisimmin varmuusluku määritelläänkin käyttämällä laskentalujuutena myötörajaa R_e , harvemmin murtolujuutta R_m eli

$$n = \frac{R_e}{\sigma_{sall}}, \quad n = \frac{R_m}{\sigma_{sall}}. \quad (1.26)$$

Vastaavasti puhtaalle **leikkausjännitystilalle** käytetään sallittua leikkausjännitystä τ_{sall} ja laskentalujuutena käytetään joko leikkausmyötörajaa τ_s tai leikkausmurtolujuutta τ_B eli

$$n = \frac{\tau_s}{\tau_{sall}}, \quad n = \frac{\tau_B}{\tau_{sall}}. \quad (1.27)$$

Varmuusluvun valintaan vaikuttavat seuraavat seikat:

- **Eliniälle ja luotettavuudelle asetettavat vaatimukset.** Esimerkiksi kerrostalojen hisseiltä vaaditaan sekä pitkää elinikää että suurta luotettavuutta. Niiden suunnittelussa käytetään siten suuria varmuuslukuja.
- **Rakenteen ympäristölle aiheuttamat vaarat.** Mikäli rakenteen sortuminen aiheuttaa ihmishenkien menetyksiä, on yleensä käytettävä suurempaa varmuuslukua kuin tilanteissa, joissa ei tätä vaaraa ole.
- **Rakenteen painon, koon ja hinnan erityinen tärkeys.** Esimerkiksi lentokoneiden suunnittelussa käytettävät varmuusluvut ovat yleensä pieniä. Tällöin kuitenkin käytetään tarkkoja laskentamenetelmiä ja epävarmuustekijät pyritään minimoimaan tarkalla materiaalien ja valmistuksen valvonnalla sekä rakenteiden määräaikaistarkistuksilla.

Tietyissä tapauksissa varmuusluku tai sallitut jännitykset annetaan asetuksissa ja standardeissa, SFS 2610 **Paineastiain mitoitus** ja SFS 3200 **Teräsrakenteiden suunnitteluohjeet**. Teräsrakenteiden suunnitteluohjeiden mukaan rakenneterästen sallitut jännitykset staattisissa kuormituksissa määritellään vedolle, taivutukselle ja puristukselle materiaalin alemman myötörajan R_{eL} arvosta seuraavasti:

$$\sigma_{sall} = \begin{cases} R_{eL}/1,5 & \text{(tavallinen kuormitus),} \\ R_{eL}/1,3 & \text{(harvinainen kuormitus).} \end{cases} \quad (1.28)$$

Sallittu leikkausjännitys saadaan kertomalla nämä arvot kertoimella 0,6

$\tau_{sall} = 0,6 \cdot \sigma_{sall}$ (1.29)

Taulukossa 1.2 on esitetty tavallisimpien rakenne- ja koneterästen alemman myötörajan arvot standardin SFS 200 mukaan sekä sallitut jännitykset standardin SFS 3200 mukaan.

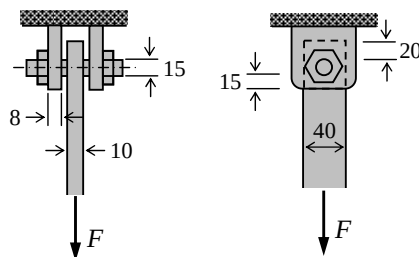
Taulukko 1.2: Tavallisten rakenne- ja koneterästen myötörajat ja sallitut jännitykset standardin SFS 3200 mukaan

Lujuusarvot SFS 200 mukaan			Sallitut jännitykset MPa SFS 3200								HERTZin jänni- tyt	
Teräksen lu- juus ja laatu	Aineen pak- suus <i>r</i> mm	<i>R_L</i> MPa	Veto-, puristus ja taivutus		Leikkaus		Reunapuristus ²		Kuormitustapaus		Kuormitustapaus	
			Tav.	Harv.	Tav.	Harv.	Tav.	Harv.	Tav.	Harv.	Tav.	Harv.
Rakenneteräksset	Fe 33 ¹			100	120	60	70	210	240			
	Fe 37A, Fe 37B	≤16	220	147	169	88	101					
	Fe 37C, Fe 37D	17...40	210	140	162	85	97	260	300	650	750	
		41...100	200	133	153	80	92					
	Fe 44B, Fe 44C	≤16	270	180	207	108	124	310	360	800	900	
Rakenneteräksset	Fe 44D	17...40	260	173	200	103	120					
		41...100	250	167	192	100	115					
	Fe 52C, Fe 52D	≤16	340	227	261	136	157	380	430	950	1050	
		17...30	330	220	253	132	152					
		31...50	320	213	246	128	147					
Koneteräksset	Fe 50	≤16	280							800	900	
		17...40	270	170	190	100	115					
		41...100	260									
	Fe 60	≤16	320	200	220	120	140			900	1000	
		17...40	310									
Koneteräksset		41...100	300									
	Fe 70	≤16	350	220	240	130	150			1000	1100	
		17...40	340									
		41...100	330									

¹Terästä Fe 33, jolla ei ole taattua myötöärvä, ei saa käyttää rakenneluokkaan 2 kuuluvissa rakenteissa ja rakenneluokkaan 1 kuuluvissa hitsatuissa rakenteissa.
²Koskee koneellista mittausta tai ruuviliitosluokkaa R 2.

Esimerkki 1.1:

Terästankoa, jonka poikkileikkaus on suorakulmio, venytetään voimalla F . Laske tavallisen kuormituksen F sallittu arvo, kun sekä tanko, pultti ja korvakkeet ovat terästä Fe 37. Mikä on varmuus sille, että korvakelevy ja tangon pää eivät leikkaudu, kun leikkausmyötöraja on 130MPa? Kaikki jännitysjakautumat oletetaan tasaisiksi.



Ratkaisu:

Tangon nettopinta-ala on

$$A_1 = (40 - 15) \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} = 250 \text{ mm}^2.$$

Valitaan taulukosta 1.2 tangolle sallituksi normaalijännitykseksi 147MPa ja leikkausjännitykseksi 88MPa. Silloin tangolle voitaisiin sallia voima

$$F_{1,\text{sall}} = 147 \text{ N/mm}^2 \cdot 250 \text{ mm} = 36,75 \text{ kN}$$

Tapin poikkipinnan ala on

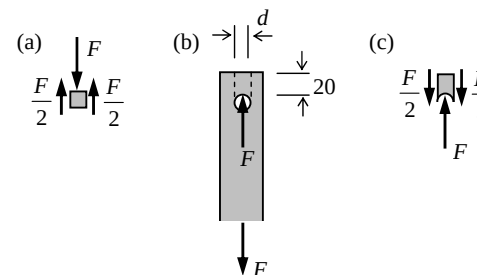
$$A_2 = \frac{\pi}{4} (15 \text{ mm})^2 \approx 176,7 \text{ mm}^2,$$

joten tapille voitaisiin sallia leikkausvoima (kuva 1a)

$$Q \equiv \frac{F_{2,\text{sall}}}{2} = \tau_{\text{sall}} A_2 = 88 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 176,7 \text{ mm}^2 \Rightarrow F_{2,\text{sall}} = 31,10 \text{ kN}$$

Sallituista voimista on valittava pienempi, joten tulokseksi saadaan

$$\underline{\underline{F_{\text{sall}} = 31,1 \text{ kN}}}$$



Kuva 1: (a) Pultin palan VKK, (b) tangon pään leikkautuminen ja (c) tangon palan VKK

Tangon pään leikkauspinnassa (kuva 1b), jonka ala on

$$A_3 = 20 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} = 200 \text{ mm}^2,$$

vaikuttavaksi keskimääräiseksi leikkausjännitykseksi (kuva 1c) saadaan

$$\tau_3 = \frac{F_{\text{sall}}/2}{A_3} = \frac{31,1 \cdot 10^3 \text{ N}}{2 \cdot 200 \text{ mm}^2} = 77,8 \text{ MPa}.$$

Varmuusluku tangon pään leikkautumisen suhteen on

$$n_1 = \frac{\tau_s}{\tau_3} = \frac{130 \text{ MPa}}{77,8 \text{ MPa}} = 1,70.$$

Tukilevyn leikkauspinnan ala on

$$A_4 = 15 \text{ mm} \cdot 8 \text{ mm} = 120 \text{ mm}^2$$

ja pinnan keskimääräinen leikkausjännitys

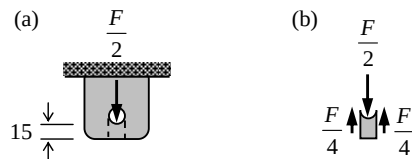
$$\tau_4 = \frac{F_{\text{sall}}/4}{A_4} = \frac{31,1 \cdot 10^3}{4 \cdot 120 \text{ mm}^2} = 64,8 \text{ MPa}$$

Varmuusluku tukilevyn leikkautumisen suhteen on

$$n_2 = \frac{\tau_s}{\tau_4} = \frac{130 \text{ MPa}}{64,8 \text{ MPa}} = \underline{\underline{2,01}}$$

Varmuusluvuksi leikkautumisen suhteen valitaan pienempi luvuista n_1 ja n_2 , joten

$$n = \underline{\underline{1,67}}$$



Kuva 2: (a) Tukilevyn leikkautuminen (b) tukilevyn palan VKK

Tarkistetaan vielä suurin keskimääräinen **reunapuristus** (pintapaine) $\bar{p}$ (bearing stress), joka kohdistuu pultin reiän reunaan. Kuvista 1b ja 2 nähdään, että suurin reikien reunapintoihin kohdistuva voima on $F = F_{\text{sall}}$ ja se kohdistuu tangon reiän reunapintaan. Keskimääräinen reunapuristus lasketaan, kuten myöhemmin osoitetaan, jakamalla pintaan kohdistuva voima pinta-alalla

$$A_s = h \cdot d,$$

missä d on reiän halkaisija ja h on ainepaksuus. Näin ollen

$$A_s = 10 \text{ mm} \cdot 15 \text{ mm} = 150 \text{ mm}^2,$$

Joten keskimääräiseksi reunapuristukseksi saadaan

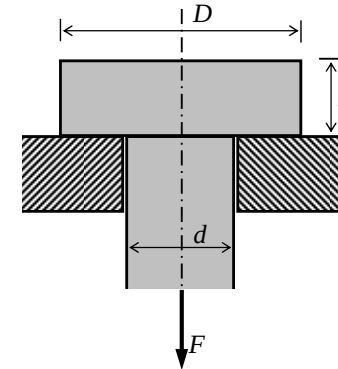
$$\bar{p} = \frac{F_{\text{sall}}}{A_s} = \frac{31,1 \cdot 10^3 \text{ N}}{150 \text{ mm}^2} = 207,3 \text{ MPa}$$

Taulukon 1.2 perusteella suurin sallittu reunapuristus tälle materiaalille on 260 MPa. Näin ollen suurin reunapuristus jää alle sallitun arvon.

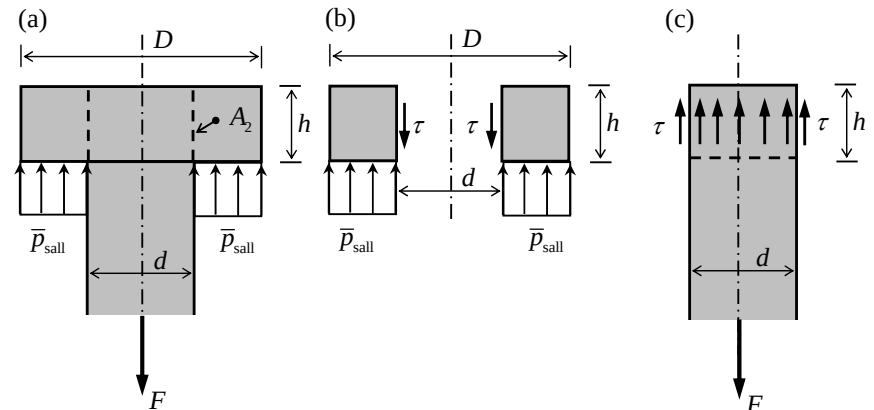
Lopputulokseksi saadaan, että tangolle voidaan sallia vetovoima **31,1 kN**.

Esimerkki 1.2:

Kuvan esittämän vetopultin halkaisija on $d = 20 \text{ mm}$ ja sitä kuormittaa voima $F = 25 \text{ kN}$. Pultin pään korkeus on $h = 14 \text{ mm}$. Mitoita pultin pään halkaisija D , kun pultin ja alustan välille sallitaan 20 MPa pintapaine. Pultin materiaalin sallittu leikkausjännitys on 100 MPa ja sallittu normaali jännitys on 165 MPa.



Ratkaisu:



Kuva 1: (a) Pultin pään leikkautuminen, pultin pään VKK ja (c) pultin varren VKK.

Pultin pystysuora tasapainoehto (kuva 1a) antaa

$$\uparrow \quad \bar{p}_{\text{sall}} \cdot \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) - F = 0$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{d^2 + \frac{4F}{\bar{p}_{\text{sall}} \pi}} = \sqrt{(20\text{mm})^2 + \frac{4 \cdot 25 \cdot 10^3 \text{N}}{20\text{N/mm}^2 \cdot \pi}} = 44,6\text{mm} \approx \underline{\underline{45\text{mm}}}$$

Pultin normaaliännitys:

$$\sigma = \frac{F}{A_1} = \frac{F}{\frac{1}{4} \pi d^2} = \frac{4 \cdot 25 \cdot 10^3 \text{N}}{\pi \cdot (20\text{mm})^2} = 79,6\text{MPa} < \sigma_{\text{sall}}$$

Tarkistetaan vielä, että pultin pää ei leikkaudu. Leikkauspinta-ala on

$$A_2 = \pi dh = \pi \cdot 20\text{mm} \cdot 14\text{mm} = 879,6\text{mm}^2$$

Kuvan 1c pystytasapainoehto antaa

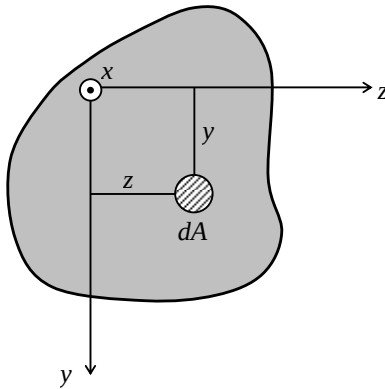
$$\uparrow \quad \tau A_2 - F = 0 \Rightarrow \tau = \frac{F}{A_2} = \frac{25 \cdot 10^3 \text{N}}{879,6\text{mm}^2} = 28,4\text{MPa} < \tau_{\text{sall}}$$

2. Poikkipinnan geometriset suureet

2.1 Poikkipinnan staattiset momentit ja pintakeskiö

Sauvarakenteiden teoriassa tarvitaan sauvan poikkileikkaukseen liittyviä geometrisia suureita. Vastaavia käsitteitä käytetään muussakin mekaniikan ja lujuusopin käsittelyssä.

Sauvan poikkileikkauksen geometrisia suureita tarkastellaan tässä kuvan 2.1 mukaisessa y, z -koordinaatistossa, jonka y -akseli suuntautuu alaspäin ja z -akseli vasemmalta oikealle.



Kuva 2.1: Sauvan poikkipinta ja siihen liittyvä koordinaatisto

Poikkipinnan **ala** saadaan määritetyksi integroimalla kaikki pinta-alkiot dA poikkipinnan alueen yli

$$A = \int_A dA. \quad (2.1)$$

Pinta-alkion dA **lineaariset momentit** z - ja y -akselien suhteen määritellään kaavoilla $dS_z = dA \cdot y = ydA$ ja $dS_y = dA \cdot z = zdA$. Poikkipinnan **lineaariset momentit** eli **staattiset momentit** määräytyvät näistä integroimalla poikkipinnan alueen yli, eli

$$S_z = \int_A ydA, \quad S_y = \int_A zdA. \quad (2.2)$$

Staattisten momenttien tavallisin yksikkö on mm^3 .

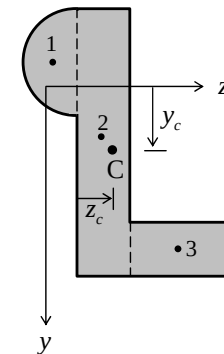
Poikkipinnan pintakeskiön koordinaatit määräytyvät ehdoista

$$Ay_c = \int_A ydA \equiv S_z, \quad Az_c = \int_A zdA \equiv S_y, \quad (2.3)$$

jotka voidaan tulkita seuraavasti: **Poikkipinnan pintakeskiön keskitetyn pinta-alan staattisen momentin tarkasteltavan akselin suhteen tulee olla yhtä suuren kuin pinnan staattinen momentti.** Pintakeskiön koordinaateille voidaan näin kirjoittaa

$$y_c = \frac{S_z}{A}, \quad z_c = \frac{S_y}{A}. \quad (2.4)$$

Tässä yhteydessä todetaan myös tulos, jota tarvitsemme jatkossa. Jos y, z -koordinaatisto valitaan siten, että sen origo on poikkileikkauksen pintakeskiössä $y_c = z_c = 0$. Tällöin kaavoista (2.3) nähdään, että staattiset momentit S_z ja S_y häviävät. Saadaan tulos, että ns. **pintakeskiö-koordinaatistossa**, jonka origo on pintakeskiössä, **staattiset momentit häviävät**.



Kuva 2.2: Sauvan poikkipinta, joka muodostuu osapinnoista, joiden pintakeskiöt tunnetaan

Usein poikkipinta muodostuu osapinnoista, joiden pintakeskiöt tunnetaan. (vrt. kuva 2.2). Kunkin osapinnan i staattisille momenteille voidaan tällöin kirjoittaa

$$S_{zi} = \int_{A_i} y dA = A_i y_i, \quad S_{yi} = \int_{A_i} z dA = A_i z_i, \quad (2.5)$$

missä A_i on osapinnan i pinta-ala ja vastaava integroimisalue sekä y_i ja z_i ovat sen pintakeskiön koodinaatit. Poikkipinnan A , joka koostuu n osapinnasta A_i , staattiselle momentille voidaan kirjoittaa

$$S_z = \int_A y dA = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} y dA = \sum_{i=1}^n A_i y_i, \quad S_y = \int_A z dA = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} z dA = \sum_{i=1}^n A_i z_i, \quad (2.6)$$

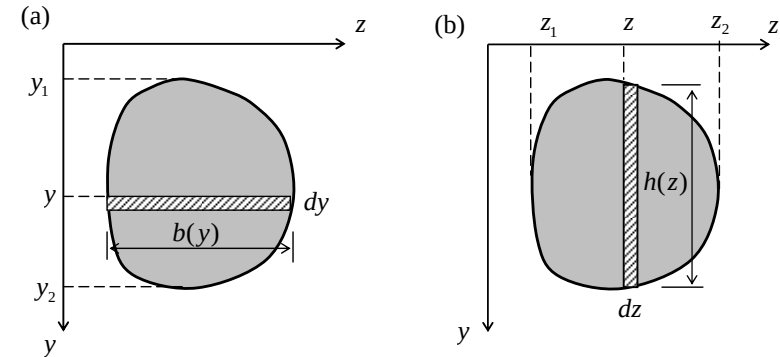
Nämä kaavat voidaan tulkita seuraavasti: **Poikkipinnan staattinen momentti tarkasteltavan akselin suhteen saadaan osapintojen pintakeskiöön keskitettyjen pinta-alojen staattisten momenttien summana.** Niitä käytettäessä voidaan myös soveltaa ns. **reikä-periaatetta**. Sen avulla poikkipinnan, jossa on reikä, staattinen momentti saadaan reiättömän poikkipinnan ja reiän muotoisen **negatiivisen pinnan** staattisten momenttien summana.

Kaavoista (2.4) ja (2.6) seuraa poikkipinnan pintakeskiön C koordinaateille lausekkeet

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{A}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_i}{A}. \quad (2.7)$$

Näiden kaavojen mukaan: **Poikkipinnan pintakeskiön koodinaatit saadaan sen osapintojen pintakeskiöiden koodinaattien pinta-aloilla painotettuina keskiarvoina.**

Tarkastellaan seuraavassa erilaisia näkökohtia, jotka helpottavat pinta-alan ja staattisten momenttien käytännöllistä määrittämistä. Tarkastellaan poikkipintaa, jonka leveys ja/tai korkeus ovat ilmaistavissa funktioina $b(y)$ tai $h(z)$ (kuva 2.3) ja tarkastellaan staattisen momentin S_z määrittämistä. Koska kuvan 2.3 viivoitetun pinnan pintakeskiön etäisyys z -akselista on $y + dy/2 \approx y$, on sen staattinen momentti z -akselin suhteen $dS_z = y \cdot b(y) dy$. Integroimalla tämä saadaan staattiselle momentille S_z tulos



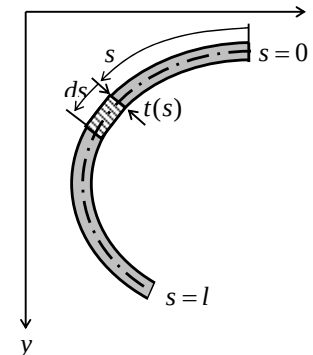
Kuva 2.3: Poikkileikkauksia

$$S_z = \int dS_z = \int_{y_1}^{y_2} y b(y) dy.$$

Näin menetellen saadaan poikkipinnan pinta-alalle ja staattisille momenteille seuraavat kaavat

$$A = \int_{y_1}^{y_2} b(y) dy = \int_{z_1}^{z_2} h(z) dz, \quad (2.8)$$

$$S_z = \int_{y_1}^{y_2} y b(y) dy, \quad S_y = \int_{z_1}^{z_2} z h(z) dz.$$



Kuva 2.4: Ohutseinämäisen profiilin pinta-alkio

Jos kysymyksessä on **ohutseinämäinen profiili**, jonka seinämän paksuus t (kuva 2.4) on pieni sen muihin mittoihin verrattuna, pinta-alkioksi voidaan ottaa $dA = t ds$. Jos profiilin muoto ja seinämän paksuus on lausuttu profiilin keskiviivan pituuskoordinaatin s avulla muodossa

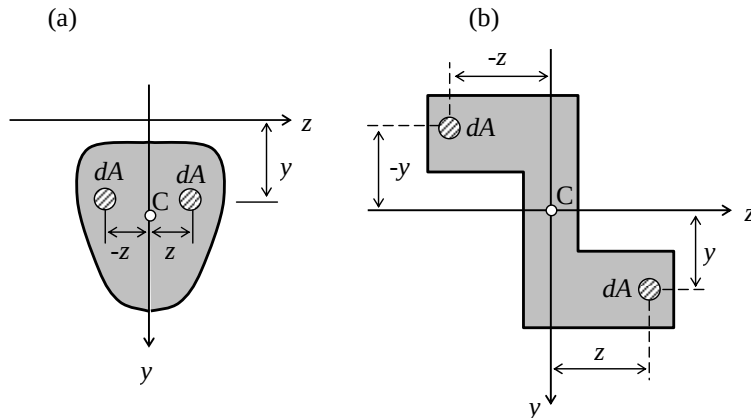
$$y = y(s), \quad z = z(s), \quad t = t(s), \quad (2.9)$$

pinta-alalle ja staattisille momenteille voidaan tällöin kirjoittaa

$$A = \int_0^l t(s) ds, \quad S_z = \int_0^l y(s)t(s) ds, \quad S_y = \int_0^l z(s)t(s) ds, \quad (2.10)$$

missä integrointi tapahtuu koko profiilin keskiviivan yli (vrt. kuva 2.4).

Tarkastellaan kuvien 2.5 esittämiä tapauksia. Edellisessä S_y häviää, koska y -akselin suhteen symmetrisesti sijaitsevien pinta-alkioiden antamat osuudet zdA ja $-zdA$ aina kumoavat toisensa kaavassa (2.2). Täten pintakeskiö sijaitsee kaavan (2.4) perusteella y -akselilla. Jälkimmäisessä kuvassa sekä S_z että S_y häviävät ja pintakeskiö sijaitsee origossa.

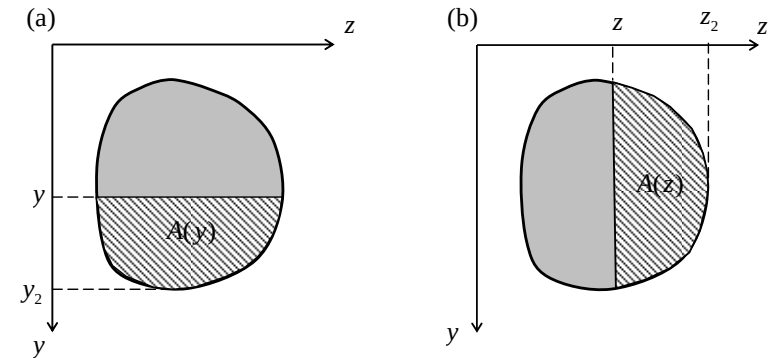


Kuva 2.5: (a) y -akselin suhteen symmetrinen (b) Origin suhteen symmetrinen poikkipinta.

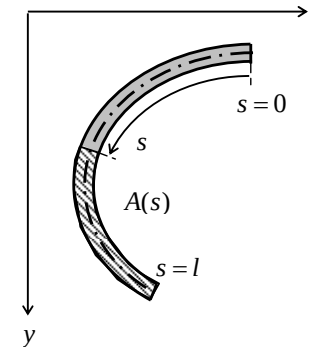
Saatiin tulokset: **Akselin suhteen symmetrisen pinnan pintakeskiö sijaitsee symmetria-akselilla. Pisteen suhteen symmetrisen pinnan pintakeskiö sijaitsee symmetriapistessä.** Myös **kaksoissymmetrisen**

poikkileikkauksen pintakeskiö on **symmetria-akseliden leikkauspisteessä.**

Taivutettujen sauvojen leikkausjännitysten määrittämisessä tarvitaan myös ns. **osapoikkipintasuureita**. Pinnalla $A(y)$ ymmärretään sitä poikkipinnan A osaa, joka jää tason y positiiviselle puolelle (kuva 2.6a), ja pinnalla $A(z)$ ymmärretään sitä poikkipinnan A osaa, joka jää tason z positiiviselle puolelle (kuva 2.6b). Pinnalla $A(s)$ ymmärretään vastaavasti sitä ohuen profiilin poikkipinnan osaa, joka jää kohdan s positiiviselle puolelle (kuva 2.7). Tässä s esittää parametrista koordinaattia, jolla on pituuden dimensio, ja l on profiilin keskiviivan pituus.



Kuva 2.6: Osapoikkipinnat $A(y)$ ja $A(z)$.



Kuva 2.7: Osapoikkipinta $A(s)$.

Osapoikkipintoihin liittyvät staattiset momentit määritellään kuvaan 2.6 liittyen kaavoilla

$$S_z(y) = \int_{A(y)} y dA = \int_y^{y_2} y b(y) dy, \quad S_y(z) = \int_{A(z)} z dA = \int_z^{z_2} z h(z) dz. \quad (2.10)$$

ja kuvaan 2.7 liittyen kaavoilla

$$S_z(s) = \int_s^l y(s) t(s) ds, \quad S_y(s) = \int_s^l z(s) t(s) ds. \quad (2.11)$$

2.2 Poikkipinnan jähyysmomentit ja tulomomentti

Pinta-alkion dA **neliömomentit** z - ja y -akselien suhteen (vrt. kuva 2.1) määritellään kaavoilla $dI_z = dA \cdot y^2 = y^2 dA$ ja $dI_y = dA \cdot z^2 = z^2 dA$. Poikkipinnan A **neliömomentit** eli **jähyysmomentit** z - ja y -akselien suhteen määräytyvät näistä integroimalla poikkipinnan alueen yli, eli

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA. \quad (2.12)$$

Pinta-alkion dA **tulomomentti** y, z -koordinaatiston suhteen (vrt. kuva 2.1) määritellään kaavalla $dI_{yz} = dA \cdot y \cdot z = yz dA$. Poikkipinnan A **tulomomentti** y, z -koordinaatiston suhteen määräytyy tästä integroimalla, eli

$$I_{zy} = \int_A yz dA = I_{yz}. \quad (2.13)$$

Jähyysmomenttien ja tulomomentin tavallisin yksikkö on mm^4 .

Pinta-alkion dA **polaarinen neliömomentti** origon suhteen määritellään kaavalla $dI_p = r^2 dA$, missä r on pinta-alkion etäisyys origosta. Poikkipinnan A **polaarinen neliömomentti** eli **polaarinen jähyysmomentti** origon suhteen määräytyy tästä integroimalla, eli

$$I_p = \int_A r^2 dA. \quad (2.14)$$

Sijoittamalla tähän $r^2 = y^2 + z^2$, saadaan

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_z + I_y. \quad (2.15)$$

Määritelmistä seuraa, että **jähyysmomentit** ja **polaarinen jähyysmomentti** ovat aina **positiivisia**, mikäli pinta-ala pidetään positiivisena. **Tulomomentti** sen sijaan voi olla **positiivinen tai negatiivinen**.

Jähyysmomenttia tarkastellaan usein liittämättä sitä mihinkään koordinaatistoon. Silloin puhutaan **jähyysmomentista** annetun **suoran**

suhteen ja käytetään tavallisesti pelkkää symbolia I . Jäyhyysmomentin määrittäminen tapahtuu kuitenkin mukavimmin käyttäen kaavoja (2.12) sekä koordinaatistoa, jonka jompi kumpi koordinaattiakseli yhtyy tarkasteltavaan suoraan.

Tarkastellaan seuraavassa erilaisia näkökohtia, jotka helpottavat jäyhyysmomenttien ja tulomomentin määrittämistä käytännössä. Jos poikkipinta on sellainen (kuva 2.3), että sen leveys ja/tai korkeus ovat ilmaistavissa funktioina $b(y)$ tai $h(z)$ saadaan jäyhyysmomenteille kaavat

$$I_z = \int_{y_1}^{y_2} y^2 b(y) dy, \quad I_y = \int_{z_1}^{z_2} z^2 h(z) dz. \quad (2.16)$$

Jos kysymyksessä on ohutseinämäinen profiili, jonka seinämän paksuus t (kuva 2.4) on pieni sen muihin mittoihin verrattuna, jäyhyysmomenteille ja tulomomentille saadaan kaavat

$$I_z = \int_0^l y^2(s)t(s)ds, \quad I_y = \int_0^l z^2(s)t(s)ds, \quad I_{zy} = \int_0^l y(s)z(s)t(s)ds. \quad (2.17)$$

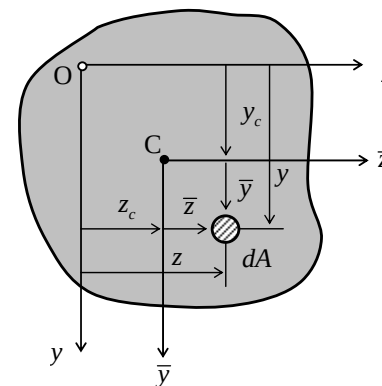
Usein poikkipinta A muodostuu geometrialtaan yksinkertaisemmista osapinnoista A_i , joiden jäyhyysmomentit on helpompi määrittää. Koska integrointi voidaan suorittaa alue kerrallaan, saadaan esimerkiksi jäyhyysmomentille I_z

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \dots + \int_{A_n} y^2 dA = I_{z1} + \dots + I_{zn}. \quad (2.18)$$

Saatiin tulos: Koko poikkipinnan jäyhyysmomentti, tulomomentti tai polaarinen jäyhyysmomentti saadaan **laskemalla yhteen osapintojen vastaavat suuret**¹.

Tarkastellaan kuvan 2.5a esittämää tapausta. Tulomomentti I_{zy} häviää, koska y -akselin suhteen symmetrisesti sijaitsevien pinta-alkioiden antamat osuudet $yzdA$ ja $zydA$ aina kumoavat toisensa kaavassa (2.13). Saatiin tulos: Jos y - tai z -akseli on poikkipinnan **symmetria-akseli**, **tulomomentti** I_{zy} **häviää**. Myös vastaavan **kaksoissymmetrisen** poikkipinnan **tulomomentti häviää**.

¹ **Huomautus:** Niiden tulee olla määritetty samojen akselien suhteen.



Kuva 2.8: Pintakeskiöön asetettu $\bar{y}, \bar{z}$ -koordinaatisto ja valittu y, z -koordinaatisto

Steinerin lause: Pinnan A jäyhyysmomenteille ja tulomomentille ovat voimassa seuraavat kaavat

$$I_z = I_{\bar{z}} + Ay_c^2, \quad I_y = I_{\bar{y}} + Az_c^2, \quad I_{zy} = I_{\bar{y}\bar{z}} + Ay_c z_c, \quad (2.19)$$

missä I_z , I_y ja I_{zy} ovat valittuun y, z -koordinaatistoon ja $I_{\bar{z}}$, $I_{\bar{y}}$ ja $I_{\bar{y}\bar{z}}$ ovat pintakeskiöön asetettuun $\bar{y}, \bar{z}$ -koordinaatistoon liittyvät pinnan A jäyhyysmomentit ja tulomomentti.

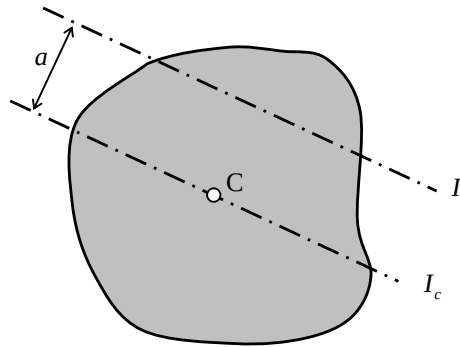
Todistus: Esimerkiksi jäyhyysmomentille I_z ja tulomomentille I_{zy} saadaan

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA = \int_A (y_c + \bar{y})^2 dA = \int_A (y_c^2 + 2y_c \bar{y} + \bar{y}^2) dA \\ &= y_c^2 \int_A dA + 2y_c \int_A \bar{y} dA + \int_A \bar{y}^2 dA = y_c^2 A + 2y_c A \overset{0}{\bar{y}_c} + I_{\bar{z}} = I_{\bar{z}} + Ay_c^2, \\ I_{zy} &= \int_A zy dA = \int_A (z_c + \bar{z})(y_c + \bar{y}) dA = \int_A (z_c y_c + z_c \bar{y} + y_c \bar{z} + \bar{z} \bar{y}) dA \\ &= z_c y_c \int_A dA + z_c \int_A \bar{y} dA + y_c \int_A \bar{z} dA + \int_A \bar{z} \bar{y} dA = z_c y_c A + y_c A \overset{0}{\bar{z}_c} + z_c A \overset{0}{\bar{y}_c} + I_{\bar{y}\bar{z}} \\ &= I_{\bar{y}\bar{z}} + Az_c y_c. \end{aligned}$$

Jäyhyysmomentin osuus Steinerin lauseesta voidaan myös formuloida seuraavassa, helposti muistettavassa muodossa (vrt. Kuva 2.9). **Steinerin lause:** Suoran suhteen laskettu jäyhyysmomentti on

$$I = I_c + A \cdot a^2, \quad (2.20)$$

missä I_c on pintakeskiön C kautta kulkevan samansuuntaisen suoran suhteen laskettu jäyhyysmomentti ja a on suorien välimatka.



Kuva 2.9: Steinerin lause jäyhyysmomentille

Määritellään lopuksi yksi jäyhyysmomentteihin liittyvä käsite: Pinnan **jäyhyyssäde suoran suhteen** määritellään **pituutena** i , jonka avulla vastaava jäyhyysmomentti saadaan lausekkeesta

$$I = A \cdot i^2 \quad (2.21)$$

Näin jäyhyyssäde voidaan laskea kaavalla

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}. \quad (2.22)$$

Poikkileikkauskoordinaatistoon liittyvät jäyhyysäteet ovat

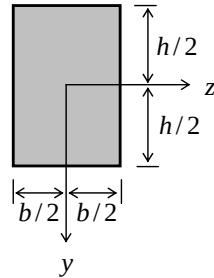
$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (2.23)$$

Taulukko 2.1: Poikkipintasuureita

Poikkileikkaus	Pinta-ala ja pintakeskiö	Jäyhyysmomentit
1 Kolmio 	$A = \frac{1}{2}bh$ $z_c = \frac{1}{3}(a+b)$ $y_c = \frac{1}{3}h$	$I_z = \frac{1}{36}bh^3$ $I_y = \frac{1}{36}bh(b^2 - ab + a^2)$ $I_{zy} = \frac{1}{72}bh^2(2a - b)$
2 Suorakulmio 	$A = bh$ $z_c = \frac{1}{2}b$ $y_c = \frac{1}{2}h$	$I_z = \frac{1}{12}bh^3$ $I_y = \frac{1}{12}b^3h$ $I_{zy} = 0$
3 Ympyrä 	$A = \pi r^2$ $z_c = r$ $y_c = r$	$I_z = I_y = \frac{\pi}{4}r^4$ $I_{zy} = 0$
4 Puoliympyrä 	$A = \frac{1}{2}\pi r^2$ $z_c = 0$ $y_c = \frac{4}{3\pi}r$	$I_z = \frac{9\pi^2 - 64}{72\pi}r^4$ $I_y = \frac{\pi}{8}r^4$ $I_{zy} = 0$
5 Ympyrän sektori 	$A = \beta r^2$ $z_c = 0$ $y_c = \frac{2 \sin \beta}{3 \beta}r$	$I_z = \frac{r^4}{4}(\beta + \sin \beta \cos \beta) - \frac{4}{9}r^4 \frac{\sin^2 \beta}{\beta}$ $I_y = \frac{r^4}{4}(\beta - \sin \beta \cos \beta)$ $I_{zy} = 0$

Taulukossa 2.1 on esitetty yksinkertaisten poikkipintojen pinta-aloja, pintakeskiöitä ja jäyhyysmomentteja.

Esimerkki 2.1: Määritetään oheisen suorakaidepoikkipinnan jäyhyysmomentit I_z , I_y ja tulomomentti I_{yz} pintakeskiökoordinaatistossa.



Ratkaisu:

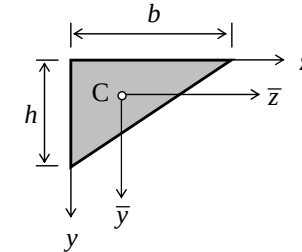
Asetetaan koordinaatisto poikkileikkauksen keskipisteeseen (pintakeskiö).

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = b \frac{h^3}{24} + b \frac{h^3}{24} = \underline{\underline{\frac{bh^3}{12}}}$$

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} z^2 h dz = h \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} = h \frac{b^3}{24} + h \frac{b^3}{24} = \underline{\underline{\frac{b^3 h}{12}}}$$

$$I_{yz} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{Koordinaattiakselit yhtyvät symmetria-akseleihin!})$$

Esimerkki 2.2: Määritetään oheisen suorakulmaisen kolmiopoikkipinnan jäyhyysmomentit ja tulomomentti poikkileikkauksen pintakeskiökoordinaatistossa, jonka akselit ovat kateettien suuntaiset.



Ratkaisu:

Leveys $b(y)$:

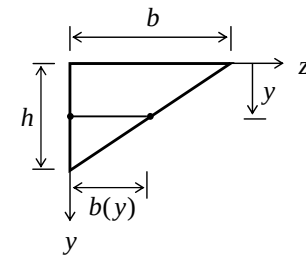
$$b(y) = \alpha + \beta y$$

$$b(0) \equiv \alpha = b$$

$$b(h) \equiv \alpha + \beta h = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha = b \\ \beta = -b/h \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{b(y) = b(1 - \frac{y}{h})}}$$



Pintakeskiö:

$$A = \int_A dA = \int_0^h b(y) dy = b \int_0^h (1 - \frac{y}{h}) dy = b \left[y - \frac{y^2}{2h} \right]_0^h = \frac{bh}{2}$$

$$S_z = \int_A y dA = \int_0^h y b(y) dy = b \int_0^h (y - \frac{y^2}{h}) dy = b \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3h} \right]_0^h = \frac{bh^2}{6}$$

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{bh^2}{6} \frac{2}{bh} = \frac{h}{3}$$

Vastaavaan tapaan saadaan pintakeskiön z-koordinaatiksi $z_c = \frac{b}{3}$

Jäyhyysmomentti I_z :

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b(y) dy = b \int_0^h (y^2 - \frac{y^3}{h}) dy = b \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4h} \right]_0^h = \frac{bh^3}{12}$$

Jäyhyysmomentti I_z :

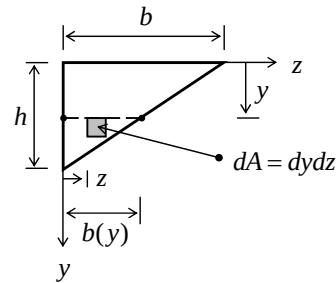
$$\text{Steiner} \Leftrightarrow I_z = I_{\bar{z}} + Ay_c^2 \Rightarrow I_{\bar{z}} = I_z - Ay_c^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2} \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

Jäyhyysmomentti I_y :

$$\text{Tulos saadaan vaihtamalla } \bar{z} \leftrightarrow \bar{y} \text{ ja } b \leftrightarrow h: \underline{\underline{I_y = \frac{b^3 h}{36}}}$$

Tulomomentti I_{zy} :

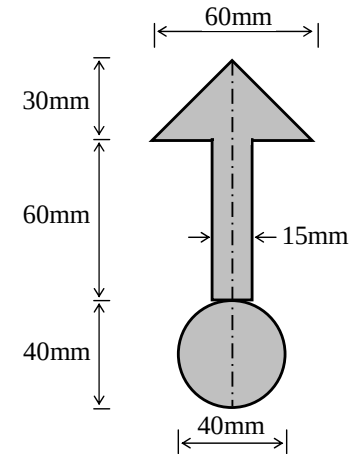
$$\begin{aligned} I_{zy} &= \int_A yz dA = \int_0^h \int_0^{b(y)} yz dy dz \\ &= \int_0^h y \left(\int_0^{b(y)} z dz \right) dy = \int_0^h y \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{b(y)} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h y b^2(y) dy = \frac{b^2}{2} \int_0^h y \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 dy \\ &= \frac{b^2}{2} \int_0^h \left(y - 2\frac{y^2}{h} + \frac{y^3}{h^2}\right) dy \\ &= \frac{b^2}{2} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3h} + \frac{y^4}{4h^2} \right]_0^h = \underline{\underline{\frac{b^2 h^2}{24}}} \end{aligned}$$



Tulomomentti $I_{\bar{y}}$:

$$\text{Steiner} \Leftrightarrow I_{\bar{y}} = I_{zy} + Ay_c z_c \Rightarrow I_{\bar{y}} = I_{zy} - Ay_c z_c = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{b}{3} = \underline{\underline{-\frac{b^2 h^2}{72}}}$$

Esimerkki 2.3: Määritetään oheisen poikkipinnan jäyhyysmomentit I_z ja I_y sekä tulomomentti I_{zy} sen pintakeskiökoordinaatistossa.



Ratkaisu:

Määritetään ensin pintakeskiön asema. Sitä varten asetetaan aluksi y, z -koordinaatisto siten, että y -akseli yhtyy poikkipinnan symmetria-akseliin ja origo on poikkileikkauksen ylänurkassa.

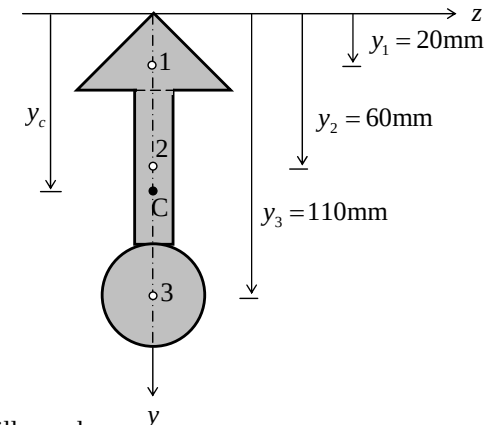
Pintakeskiö:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 30 = 900 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 15 \cdot 60 = 900 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = \pi \cdot 20^2 = 1256,6 \text{ mm}^2$$

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= 3056,6 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

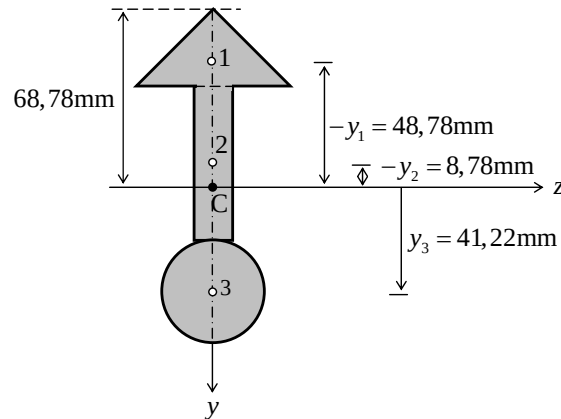


Pintakeskiön y -koordinaatille saadaan:

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A} = \frac{900 \cdot 20 + 900 \cdot 60 + 1256,6 \cdot 110}{3056,6} = \underline{\underline{68,78 \text{ mm}}}$$

Seuraavaksi asetetaan y, z -koordinaatisto poikkileikkauksen pinta-keskiöön.

Jähyysmomentit:



Jähyysmomentit z - ja y -akselien suhteen:

$$\begin{aligned} I_z &= I_{z1} + I_{z2} + I_{z3} = I_{z1} + A_1 y_1^2 + I_{z2} + A_2 y_2^2 + I_{z3} + A_3 y_3^2 \\ &= \frac{60 \cdot 30^3}{36} + 900 \cdot (-48,78)^2 + \frac{15 \cdot 60^3}{12} + 900 \cdot (-8,78)^2 \\ &\quad + \frac{\pi \cdot 40^4}{64} + 1256,6 \cdot 41,22^2 = \underline{\underline{47,87 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} \\ &= \frac{30 \cdot 60^3}{48} + \frac{15^3 \cdot 60}{12} + \frac{\pi \cdot 40^4}{64} = \underline{\underline{0,278 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}} \end{aligned}$$

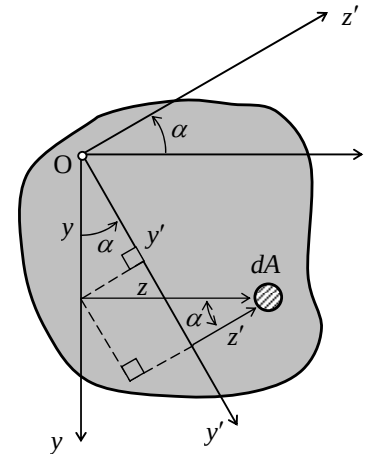
Tulomomentti:

Koska y -akseli on poikkipinnan symmetria-akseli, saadaan

$$\underline{\underline{I_{zy} = 0}}$$

2.3 Jähyysmomentit ja tulomomentti koordinaatiston kierrossa

2.31 Jähyysmomenttien ja tulomomentin muunnoskaava



Kuva 2.10: Koordinaatiston muunnos

Koordinaattien muunnoskaavat ovat kuvan 2.10 perusteella

$$\begin{aligned} y' &= y \cos \alpha + z \sin \alpha, \\ z' &= -y \sin \alpha + z \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Jähyysmomentille $I_{z'}$ saadaan

$$\begin{aligned} I_{z'} &= \int_A (y')^2 dA = \int_A (y \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 dA \\ &= \int_A (y^2 \cos^2 \alpha + z^2 \sin^2 \alpha + 2yz \sin \alpha \cos \alpha) dA \\ &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A z^2 dA + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A yz dA \\ &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + 2I_{zy} \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Jäyhyysmomentille $I_{y'}$ saadaan vastaavasti

$$\begin{aligned} I_{y'} &= \int_A (z')^2 dA = \int_A (-y \sin \alpha + z \cos \alpha)^2 dA \\ &= \int_A (y^2 \sin^2 \alpha + z^2 \cos^2 \alpha - 2yz \sin \alpha \cos \alpha) dA \\ &= \sin^2 \alpha \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_z} + \cos^2 \alpha \underbrace{\int_A z^2 dA}_{I_y} - 2 \sin \alpha \cos \alpha \underbrace{\int_A yz dA}_{I_{zy}} \\ &= I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha - 2I_{zy} \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Tulomomentille $I_{z'y'}$ saadaan

$$\begin{aligned} I_{z'y'} &= \int_A y'z' dA = \int_A (y \cos \alpha + z \sin \alpha)(-y \sin \alpha + z \cos \alpha) dA \\ &= \int_A [-y^2 \sin \alpha \cos \alpha + z^2 \sin \alpha \cos \alpha + yz(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] dA \\ &= -\sin \alpha \cos \alpha \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_z} + \sin \alpha \cos \alpha \underbrace{\int_A z^2 dA}_{I_y} \\ &\quad + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \underbrace{\int_A yz dA}_{I_{zy}} \\ &= -(I_z - I_y) \sin \alpha \cos \alpha + I_{zy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

Näin olemme saaneet neliömomenteille seuraavat muunnoskaavat

$$\begin{aligned} I_{z'} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + 2I_{zy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ I_{y'} &= I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha - 2I_{zy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ I_{z'y'} &= -(I_z - I_y) \sin \alpha \cos \alpha + I_{zy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ilmaistaan nämä lausekkeet vielä hieman toisenlaisessa muodossa seuraavasti:

$$I_{z'} = \frac{I_z + I_y}{2} \underbrace{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}_1 + \frac{I_z - I_y}{2} \underbrace{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}_{\cos 2\alpha} + I_{zy} 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$I_{y'} = \frac{I_z + I_y}{2} \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_1 + \frac{I_z - I_y}{2} \underbrace{(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}_{-\cos 2\alpha} - I_{zy} 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$I_{z'y'} = -(I_z - I_y) \underbrace{\sin \alpha \cos \alpha}_{\sin 2\alpha/2} + I_{zy} \underbrace{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}_{\cos 2\alpha}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} I_{z'} &= \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{zy} \sin 2\alpha, \\ I_{y'} &= \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{zy} \sin 2\alpha, \\ I_{z'y'} &= -\frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.27)$$

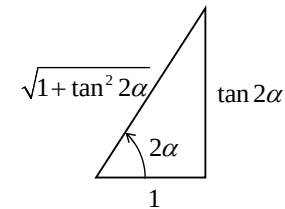
2.32 Pääjäyhyysmomentit

Sauvarakenteiden taivutusteoriaa silmälläpitäen on hyödyllistä löytää sellainen y', z' -koordinaatisto, jossa jäyhyysmomentit saavat ääriarvon. Derivoimalla jäyhyysmomentin $I_{z'}$ lauseke (2.27a) kulman α suhteen saadaan

$$\frac{dI_{z'}}{d\alpha} = -(I_z - I_y) \sin 2\alpha + 2I_{zy} \cos 2\alpha$$

Merkitsemällä tulos nolaksi saadaan $I_{z'}$:n ääriarvoa vastaavalle kulmalle α yhtälö

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}. \quad (2.28)$$



Kuva 2.11: Trigonometrinen apukuva

Määritetään nyt jäyhyysmomenttien lausekkeet tässä koordinaatistossa. Näitä kaavoja varten määritetään kulman 2α sini ja kosini. Kuvan 2.11 perusteella saadaan lausekkeet

$$\sin 2\alpha = \frac{\tan 2\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}} = \frac{\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}\right)^2}} = \frac{2I_{zy}}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}\right)^2}} = \frac{I_z - I_y}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}},$$

Sijoittamalla nämä lausekkeisiin (2.28) saadaan jäyhyysmomenteille ja tulomomentille

$$I_{z'} = \frac{1}{2}(I_z + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2},$$

$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_z + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}, \quad (2.29)$$

$$I_{z'y'} = 0.$$

Näistä $I_{z'}$ on **jäyhyysmomentin maksimiarvo** $I_{\max}$ ja $I_{y'}$ on sen **minimiarvo** $I_{\min}$ ja niitä kutsutaan **pääjäyhyysmomenteiksi**. Nähdään myös, että niitä vastaava **tulomomentti häviää**. Koordinaattiakseleita z' ja y' kutsutaan **pääjäyhyysakseleiksi** ja niiden suuntia jäyhyyden **pääsuunniksi**. Pääjäyhyysmomenteille käytetään myös tavanomaisia merkintöjä I_1 ja I_2 , jolloin niille saadaan näin kompakti kaava

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}(I_z + I_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \quad (2.30)$$

Tämä kaava on analoginen tasotapauksen pääjännitysten kaavan kanssa.

2.33 Jäyhyyden pääsuunnat

Seuraavassa tarkastellaan pääsuuntia. Niitä vastaaville kulmille saadaan yhtälön (2.27) ratkaisuna tulos

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}, \\ \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{zy}}{I_z - I_y} + \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Nähdään, että saadaan kaksi suuntaa, jotka ovat **kohtisuorassa** toisiaan vastaan. Näiden kaavojen haittapuolena on kuitenkin se, että niistä ei saada suoraan selville kumpi α :n arvo vastaa I_1 :tä ja kumpi I_2 :ta. Tämän vuoksi seuraavassa johdetaan toisenlaiset kaavat. Merkitään z' -akselin (suunta 1) ja z -akselin välistä kulmaa α_1 :llä, jolloin jäyhyysmomentin $I_{z'}$ ja tulomomentin $I_{z'y'}$, joka on nolla, lausekkeet saavat muodon

$$I_{z'} = I_z \cos^2 \alpha_1 + I_y \sin^2 \alpha_1 + 2I_{zy} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1,$$

$$I_{z'y'} = -(I_z - I_y) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + I_{zy} (\cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1) = 0.$$

Kerrotaan ensimmäinen yhtälö puolittain $\cos \alpha_1$:llä ja jälkimmäinen yhtälö puolittain $-\sin \alpha_1$:llä ja lasketaan ne puolittain yhteen, jolloin saadaan

$$I_{z'} \cos \alpha_1 = I_z \cos \alpha_1 + I_{zy} \sin \alpha_1$$

$$\Rightarrow \tan \alpha_1 = \frac{I_{z'} - I_z}{I_{zy}} \Rightarrow \alpha_1 = \arctan \frac{I_{z'} - I_z}{I_{zy}} = \arctan \frac{I_1 - I_2}{I_{zy}}.$$

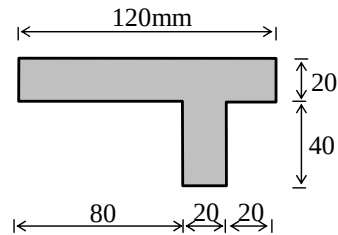
Vastaavaan tapaan voidaan johtaa lauseke myös kulmalle α_2 . Saatu tulos yhdistettynä on

$$\alpha_i = \arctan \frac{I_i - I_z}{I_{zy}}, \quad (i=1,2).$$

Tämä kaava ilmaisee siis pääsuunnan i ja z -akselin välisen kulman pitäen **vastapäivään kiertävää suuntaa positiivisena**. Se on analoginen tasotapauksen pääjännitysten suuntien kaavan kanssa.

Edellä todettiin, että jos y - tai z -akseli on poikkipinnan symmetria-akseli, tulomomentti I_{zy} häviää. Toisaalta edellytyksenä sille, että koordinaatisto on pääjäyhyyskoordinaatiston, on tulomomentin häviäminen. Saadaan tulos: **Poikkipinnan symmetria-akseli** on aina myös **pääjäyhyysakseli**.

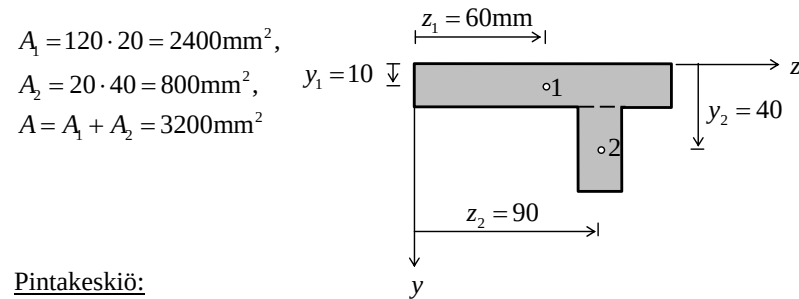
Esimerkki 2.5: Määritetään oheisen poikkipinnan pääjäyhyysmomentit ja pääakselit pintakeskiökoordinaatistossa.



Ratkaisu:

Pintakeskiön asema:

Asetetaan pintakeskiön aseman määrittämistä varten y, z –koordinaatisto esimerkiksi poikkipinnan vasempaan ylänurkkaan.



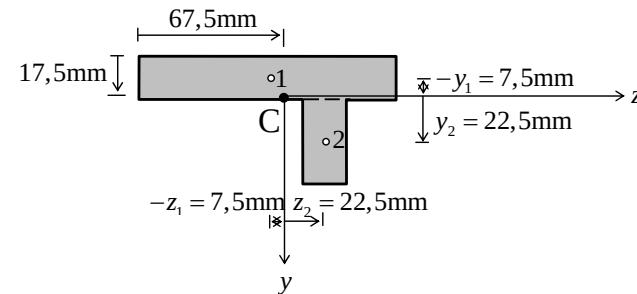
Pintakeskiö:

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{2400 \cdot 10 + 800 \cdot 40}{3200} = 17,5 \text{ mm}$$

$$z_c = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A} = \frac{2400 \cdot 60 + 800 \cdot 90}{3200} = 67,5 \text{ mm}$$

Jäyhyysmomentit ja tulomomentti pintakeskiökoordinaatistossa:

Asetetaan y, z –koordinaatisto pintakeskiöön C:



Osapintojen jäyhyysmomentit ja tulomomentit omien pintakeskiöakseliensuhteen:

$$I_{z1} = \frac{120 \cdot 20^3}{12} = 0,8 \cdot 10^5 \text{ mm}^4,$$

$$I_{y1} = \frac{120^3 \cdot 20}{12} = 28,8 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{y}1} = 0 \text{ (Suorakaide on kaksoissymmetrinen!)}$$

$$I_{z2} = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 1,07 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{y}2} = \frac{20^3 \cdot 40}{12} = 0,267 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{z}2} = 0 \text{ (Kaksoissymmetrinen!)}$$

Poikkipinnan jäyhyysmomentit ja tulomomentti y, z –akselien suhteen:

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} = I_{z1} + A_1 y_1^2 + I_{z2} + A_2 y_2^2 \\ = 0,8 \cdot 10^5 + 2400 \cdot (-7,5)^2 + 1,07 \cdot 10^5 + 800 \cdot 22,5^2 = 7,27 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} = I_{y1} + A_1 z_1^2 + I_{y2} + A_2 z_2^2 \\ = 28,8 \cdot 10^5 + 2400 \cdot (-7,5)^2 + 0,267 \cdot 10^5 + 800 \cdot 22,5^2 = 34,47 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_{zy} = I_{zy1} + I_{zy2} = I_{\bar{y}1} + A_1 y_1 z_1 + I_{\bar{y}2} + A_2 y_2 z_2 \\ = 0 + 2400 \cdot (-7,5) \cdot (-7,5) + 0 + 800 \cdot 22,5 \cdot 22,5 = 5,40 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

Pääjäyhyysmomentit:

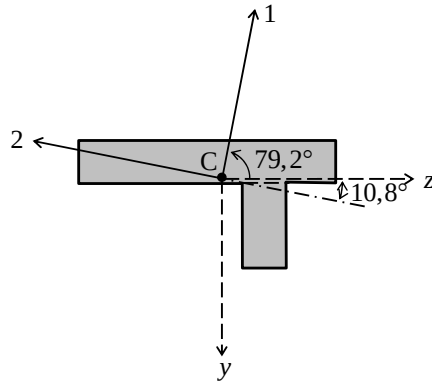
$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \frac{1}{2}(I_z + I_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \\ &= \left[\frac{1}{2}(7,27 + 34,47) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(7,27 - 34,47)^2 + 4 \cdot 5,40^2} \right] \cdot 10^5 \\ &= (20,87 \pm 14,63) \cdot 10^5 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{I_1 = 35,50 \cdot 10^5 \text{ mm}^4}}, \quad \underline{\underline{I_2 = 6,24 \cdot 10^5 \text{ mm}^4}}$$

Pääsuunnat:

$$\alpha_1 = \arctan \frac{I_1 - I_z}{I_{zy}} = \arctan \frac{35,50 - 7,27}{5,40} = \underline{\underline{79,2^\circ}}$$

$$\alpha_2 = \arctan \frac{I_2 - I_z}{I_{zy}} = \arctan \frac{6,24 - 7,27}{5,40} = \underline{\underline{-10,8^\circ}}$$



3. Vedetty tai puristettu sauva

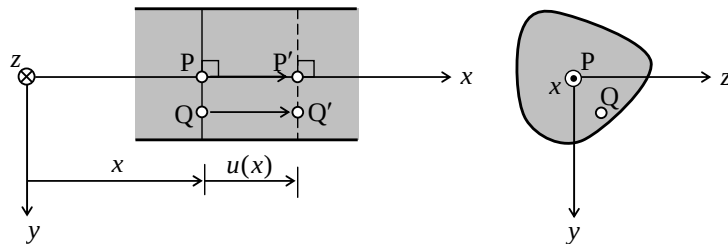
3.1 Puhtaan vedon tai puristuksen alaisen sauvan yhtälöt

3.11 Siirtymä, venymä ja jännitys

Tarkastellaan suoran sauvan deformaatiota siten, että sen **poikkileikkauksen jokainen piste siirtyy** palkin akselin suunnassa **yhtä paljon**. Tällöin sauvan akselia vastaan kohtisuora taso pysyy tasona ja sauvan akselia vastaan kohtisuorana. Näin sauvan yleisen pisteen Q: (x, y, z) siirtymälle u , saadaan

$$u = u(x). \quad (3.1)$$

Tämä on myös sauvan akselin pisteen P siirtymä (kuva 3.1). Venymälle ε_x pisteessä Q saadaan



Kuva 3.1: Puhtaan vedon tai puristuksen alaisen sauvan poikkileikkauksen deformaatio

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx} = u'(x). \quad (3.2)$$

Myös venymä on siis poikkileikkauksen jokaisessa pisteessä yhtä suuri. Jos sauvan poikkileikkauksen mitat ovat sauvan pituuteen nähden pienet, ja jos sauvan sivupinnoille ei kohdistu kuormitusta, voidaan jännityskomponenttien σ_y , σ_z ja τ_{yz} otaksua häviävän. Tällöin yleistetystä Hooken laista seuraa

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \Rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x. \quad (3.3)$$

Sauvoja käsiteltäessä jätetään venymästä ε_x ja normaalijännityksestä σ_x usein alaindeksi x pois. Näin meillä on **sauvan venymän ja siirtymän yhteys**

$$\varepsilon(x) = u'(x) \quad (3.4)$$

sekä lineaarisesti kimmoisessa tapauksessa **normaalijännityksen ja venymän yhteys**

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (3.5)$$

Tarkasteltavan sauvan venymä ε on siis **tietyn poikkileikkauksen pisteissä vakio** ja jos materiaali on homogeenista ($E = \text{vakio}$) myös **normaalijännitys** $\sigma = E\varepsilon$ on tasan jakautunut. Sanotaan, että sauvan poikkileikkaus on joko **puhtaan vedon tai puristuksen alainen**. Jos tämä on voimassa sauvan kaikissa poikkileikkauksissa, puhutaan **veto- tai puristussauvasta**.

3.12 Homogeeninen sauva

Jos sauvan materiaali on **homogeenista** ($E = \text{vakio}$), on normaalijännitys $\sigma = E\varepsilon$ sauvan poikkileikkauksessa tasan jakautunut. Tällainen palkin poikkipinnalla A tasan jakautunut normaalijännitys voidaan redusoida pelkäksi voimaksi, **normaalivoimaksi**, jonka suuruus on

$$N = \sigma A, \quad (3.6)$$

ja joka vaikuttaa **poikkipinnan pintakeskiössä**. Usein poikkipinta muodostuu osista $1, \dots, n$ joiden pintakeskiöt tunnetaan. Tällöin sen pintakeskiön koordinaatit voidaan määrittää mukavasti osapintojen pintakeskiöiden koordinaattien pinta-aloilla painotettuna keskiarvona, eli

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + \dots + A_n y_n}{A}, \quad z_c = \frac{A_1 z_1 + \dots + A_n z_n}{A} \quad (3.7)$$

Tavallisimmin aksiaalisesti kuormitetun sauvan poikkileikkaus on kaksoissymmetrinen, jolloin pintakeskiö yhtyy symmetria-akselien leikkauspisteeseen. Jos näin ei ole, pintakeskiö on määritettävä tavanomaiseen tapaan.

Saatiin tulos: Jos **homogeeninen suora sauva** on kuormitettu siten, että sen jokaisessa poikkileikkauksessa vaikuttaa **pelkästään** pintakeskiössä vaikuttava **normaalivoima** N , on **normaalijännitys** σ sen poikkileikkauksessa **tasan jakautunut ja venymä** ε **vakio**. Tällaisen aksiaalisesti kuormitetun, **homogeenisen sauvan normaalivoiman ja venymän yhteydeksi** saadaan kaavoista (3.5) ja (3.6)

$$N = EA\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{N}{EA}, \quad (3.8)$$

missä tuloa EA kutsutaan sauvan **aksaalijäykkyydeksi**.

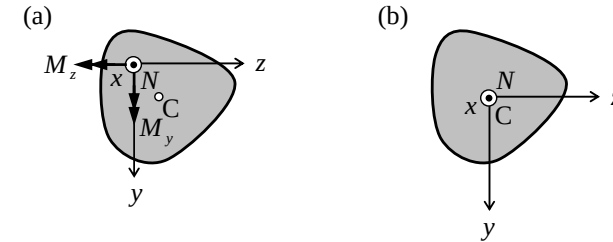
Kaavojen (3.5) ja (3.8) perusteella saadaan homogeenisen sauvan **normaalijännityksen ja normaalivoiman** yhteydeksi lauseke

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (3.9)$$

Huomautus: Saadut tulokset voidaan myös johtaa lähtien poikkileikkauksen jännitysresultanttien yleisistä lausekkeista (1.5) ja (1.8) seuraavasti. Koska poikkileikkauksen normaalijännitys σ on vakio, normaalivoimalle ja taivutusmomenteille saadaan

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA = \sigma A, \\ M_y &= \int_A \sigma z dA = \sigma \int_A z dA = \sigma S_y, \\ M_z &= \int_A \sigma y dA = \sigma \int_A y dA = \sigma S_z. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Jotta poikkileikkauksessa vaikuttaisi **pelkkä normaalivoima** N , tulee taivutusmomenttien M_y ja M_z hävitä. Kaavojen (3.10) perusteella tämä on mahdollista, jos staattiset momentit S_y ja S_z häviävät. Näin tapahtuu, koordinaatiston origo on **poikkileikkauksen pintakeskiössä** (kuva 3.2). Näin **palkin akseliksi** (x -akseli) tulee valita sen **pintakeskiöakseli**.



Kuva 3.2: Poikkileikkauksen normaalivoima ja taivutusmomentit koordinaatistossa, jonka origo (a) ei yhdy (b) yhtyy pintakeskiöön

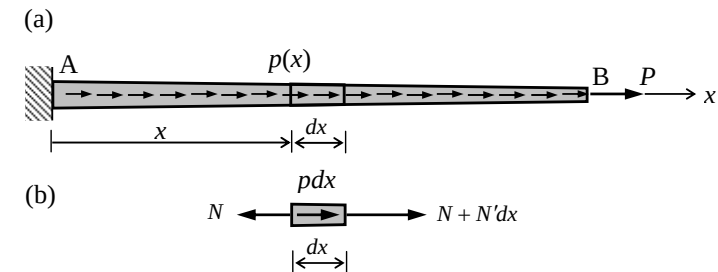
3.13 Vedetyn tai puristetun sauvan tasapainoyhtälö

Tarkastellaan kuvan 3.3a sauva (tai sauvan osaa) AB, jota kuormittaa pituutta kohti jakautunut aksiaalinen kuorma $p(x)$. Kuvassa 3.3b on sen differentiaalisen osan vapaakappalekuvio. Vaakasuoja tasapainoehto on

$$\rightarrow N + N'dx - N + p dx = 0 \Rightarrow (N' + p)dx = 0,$$

josta saadaan tasapainoyhtälöksi

$$N' = -p. \quad (3.11)$$

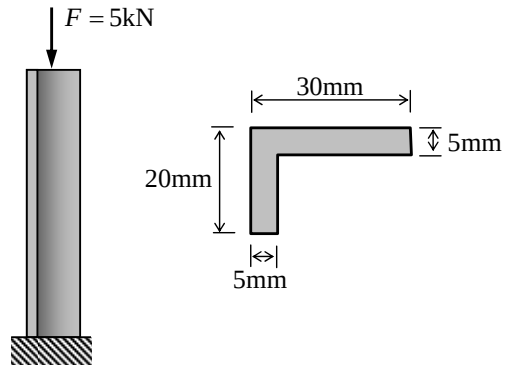


Kuva 3.3: (a) Sauva AB ja (b) sen differentiaalisen osan VKK

3.14 Vedetyn tai puristetun sauvan keskeiset yhtälöt

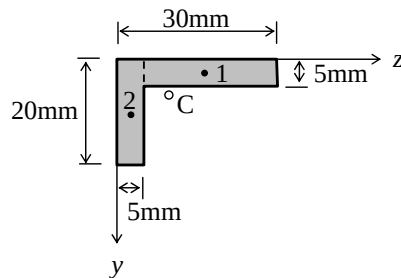
Edellä johdimme seuraavat vedetyn tai puristetun sauvan keskeiset yhtälöt: **Venymän ja siirtymän yhteys** (3.4), **normaalivoiman ja venymän yhteys** (3.8), **normaalijännityksen ja normaalivoiman yhteys** (3.9) sekä **sauvan akselin suuntaisen tasapainoyhtälö** (3.11).

Esimerkki 3.1: Tarkastellaan oheista pilaria, jonka päähän kohdistuu voima $F = 5\text{kN}$. Määritä voiman asema pilarin päässä siten, että pilarin poikkileikkauksissa vaikuttaisi puhdas puristus (vakio puristusjännitys) sekä määritä normaalijännityksen suuruus.



Ratkaisu:

Jotta pilarissa vaikuttaisi puhdas puristus, tulee voiman vaikuttaa poikkileikkauksen pintakeskiössä. Määritetään siis pintakeskiön C koordinaatit y_c ja z_c kuvan koordinaatistossa.



Pinta-alat:

$$A_1 = 25 \cdot 5 = 125\text{mm}^2, \quad A_2 = 20 \cdot 5 = 100\text{mm}^2, \quad A = A_1 + A_2 = 225\text{mm}^2$$

Osapintojen pintakeskiöiden koordinaatit:

$$y_1 = 2,5\text{mm}, \quad y_2 = 10\text{mm}, \quad z_1 = 17,5\text{mm}, \quad z_2 = 2,5\text{mm}$$

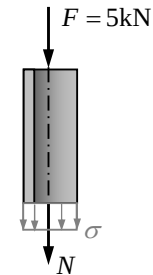
Pintakeskiön C koordinaatit:

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{125 \cdot 2,5 + 100 \cdot 10}{225} = \underline{\underline{5,83\text{mm}}},$$

$$z_c = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A} = \frac{125 \cdot 17,5 + 100 \cdot 2,5}{225} = \underline{\underline{10,83\text{mm}}}.$$

Normaalivoima:

$$\downarrow F + N = 0 \Rightarrow N = -F = -5\text{kN}$$



Normaalijännitys:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{5 \cdot 10^3 \text{N}}{225\text{mm}^2} = \underline{\underline{22,2\text{MPa}}}$$

3.2 Sauvan pituuden muutoksen ja siirtymän määrittäminen

Tarkastellaan aksiaalisesti kuormitettua sauvaa tai sauvarakenteen osasauvaa **staattisesti määrättyssä tehtävässä**, jossa sauvan normaalivoima $N(x)$ on määritettävissä statiikan keinoin etukäteen. Se siis on tehtävässämme tunnettu. Tällöin myös sauvan venymä $\varepsilon(x)$ voidaan laskea kaavasta (3.8).

3.21 Sauvan pituuden muutos

Sauvan tai sauvan osan AB **pituuden muutokselle** saadaan

$$\Delta L = L' - L = x_B + u_B - (x_A + u_A) - (x_B - x_A) = u_B - u_A, \quad (3.12)$$

Se on siis **sauvan päiden siirtymien erotus**.

Integroimalla venymän lauseke (3.4) välin AB yli saadaan siirtymien erotukselle

$$\int_{x_A}^{x_B} u'(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} \varepsilon(x) dx \Rightarrow u_B - u_A = \int_{x_A}^{x_B} \varepsilon(x) dx. \quad (3.13)$$

Näin saamme sauvan tai sen osan AB **pituuden muutokselle** lausekkeen

$$\Delta L = u_B - u_A = \int_{x_A}^{x_B} \varepsilon(x) dx, \quad (3.14)$$

Jos sauvan venymä $\varepsilon = \text{vakio}$, kuten nivelsauvassa, saadaan $\Delta L = \varepsilon L$. Tarvittaessa voidaan määritellä **sauvan keskimääräinen venymä**

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{L} \int_{x_A}^{x_B} \varepsilon(x) dx \quad (3.15)$$

Nivelsauvassa siis $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$.

3.22 Sauvan siirtymä

Kaavasta (3.4) ja seuraa sauvan **siirtymälle** $u(x)$ differentiaaliyhtälö $u'(x) = \varepsilon(x)$, (3.16)

jonka ratkaisu on muotoa

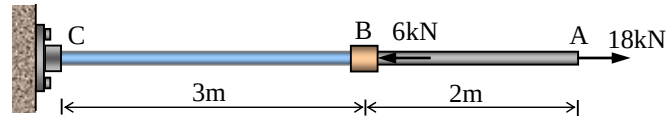
$$u(x) = \int \varepsilon(x) dx + C \quad (3.17)$$

missä C on integrointivakio, joka määräytyy siirtymälle asetettavasta reunaehdosta. Ratkaisu voidaan myös esittää esimerkiksi muodossa

$$u(x) = u(0) + \int_0^x \varepsilon(x) dx, \quad (3.18)$$

missä $u(0)$ on siirtymän arvo pisteessä $x = 0$.

Esimerkki 3.2: Oheinen sauva koostuu terästangosta CB ja alumiinitangosta BA, joiden kummankin halkaisija $d = 12\text{mm}$. Sauvaan vaikuttaa kuvan mukainen aksiaalinen kuorma pisteessä A ja liittimessä B. Määritä liittimen B ja pään A siirtymät. Pisteissä B ja C olevat liittimet otaksutaan jäykiksi, ja niiden koot voidaan jättää huomiotta. Teräksen ja alumiinin kimmomoduulit ovat $E_s = 200\text{GPa}$ ja $E_a = 70\text{GPa}$.



Ratkaisu:

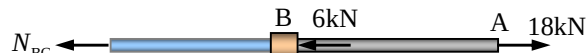
Normaalivoimat:

Väli AB:



$$\rightarrow 18\text{kN} - N_{AB} = 0 \Rightarrow N_{AB} = 18\text{kN}$$

Väli BC:



$$\rightarrow 18\text{kN} - 6\text{kN} + N_{BC} = 0 \Rightarrow N_{BC} = 12\text{kN}$$

$$\text{Poikkipinnan ala: } A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot (12\text{mm})^2}{4} = 113,1\text{mm}^2$$

Venymät:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{N_{AB}}{E_a A} = \frac{18 \cdot 10^3 \text{N}}{70 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 113,1\text{mm}^2} \approx 2,273 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{N_{BC}}{E_s A} = \frac{12 \cdot 10^3 \text{N}}{200 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 113,1\text{mm}^2} \approx 0,531 \cdot 10^{-3}$$

Pituuden muutokset:

$$\Delta L_{AB} = \varepsilon_{AB} L_{AB} = 2,273 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{mm} = 4,55\text{mm},$$

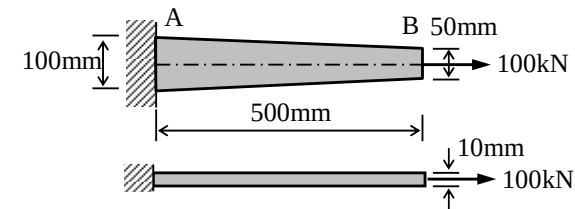
$$\Delta L_{BC} = \varepsilon_{BC} L_{BC} = 0,531 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^3 \text{mm} = 1,59\text{mm}.$$

Siirtymät:

$$u_B = \Delta L_{BC} = \underline{1,59\text{mm}}$$

$$u_A = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} = 1,59\text{mm} + 4,55\text{mm} = \underline{6,14\text{mm}}$$

Esimerkki 3.3: Lasketaan oheisen homogeenisen levyn oikean pään B siirtymä, kun $E = 210\text{GPa}$.



Ratkaisu:

Normaalivoima:

$$\rightarrow -N + 100\text{kN} = 0 \Rightarrow N = 100\text{kN}$$



Poikkipinnan ala:

Päiden alat:

$$A_A = 100\text{mm} \cdot 10\text{mm} = 1000\text{mm}^2, \quad A_B = 50\text{mm} \cdot 10\text{mm} = 500\text{mm}^2$$

Alan lauseke: $A(x) = a + bx$

Ehdot päissä:

$$\left. \begin{aligned} A(0) &\equiv a + b \cdot 0 = A_A \\ A(L) &\equiv a + b \cdot L = A_B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = A_A \\ b = \frac{1}{L}(A_B - A_A) \end{cases}$$

Ala:

$$A(x) = A_A + \frac{A_B - A_A}{L}x = 1000\text{mm}^2 - \frac{500\text{mm}^2}{500\text{mm}}x = 1000\text{mm}^2 - 1\text{mm} \cdot x$$

Venymä:

$$\varepsilon(x) = \frac{N}{EA(x)} = \frac{100 \cdot 10^3 \text{ N}}{210 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot (1000\text{mm}^2 - 1\text{mm} \cdot x)} = \frac{1}{2,1(1000 - x/\text{mm})}$$

Sauvan pituuden muutos:

$$\begin{aligned}\Delta L &= \int_{x_A}^{x_B} \varepsilon(x) dx = \frac{1}{2,1} \int_0^{500\text{mm}} \frac{1}{1000 - x/\text{mm}} dx = -\frac{1\text{mm}}{2,1} \Big|_0^{500\text{mm}} \ln(1000 - x/\text{mm}) \\ &= \frac{1\text{mm}}{2,1} \ln 2 \approx 0,330\text{mm}\end{aligned}$$

Siirtymä pisteessä B:

$$u_B = \Delta L \approx \underline{\underline{0,330\text{mm}}}$$

3.23 Aksiaalisesti kuormitetun sauvan siirtymän differentiaaliyhtälö

Käyttämällä venymän ja siirtymän yhteyttä (3.4) sekä lineaarisesti kimmoisen sauvan normaalivoiman ja venymän yhteyttä (3.8) saadaan akselin suuntainen tasapainoyhtälö (3.11) lausutuksi siirtymän avulla. Tulos on

$$(EAu')' = -p \quad \text{eli} \quad \frac{d}{dx}(EA \frac{du}{dx}) = -p. \quad (3.19)$$

Tämä on **aksiaalisesti kuormitetun sauvan siirtymän differentiaaliyhtälö**. Jos kyseessä on tasajäykkä sauva ($EA = \text{vakio}$), yhtälö (3.19) saa hieman yksinkertaisemman muodon

$$u'' = -\frac{p}{EA}. \quad (3.20)$$

Yhtälö (3.19) on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, joka on helppo ratkaista. Ratkaisuun tulee kaksi integrointivakiota, jotka määräytyvät siirtymälle tai siirtymän avulla ilmaistulle normaalivoimalle

$$N = EAu' \quad (3.21)$$

asettavista reunaehdoista.

Aksiaalisesti kuormitettu sauva voidaan ratkaista siirtymän differentiaaliyhtälöä (3.19) käyttäen oli probleema **staattisesti määrätty** tai **staattisesti määräämätön**. Kun siirtymä $u(x)$ on ensin ratkaistu, saadaan kaavan (3.21) avulla normaalivoima $N(x)$ ja lopuksi normaalijännitys kaavan (3.8) avulla.

Esimerkki 3.4: Oheinen sauva AB on päistään kiinnitetty ja sitä kuormittaa oma paino. Määritetään sen siirtymän $u(x)$ ja normaalivoiman $N(x)$ lausekkeet. Sauvan kimmoduuli E , poikkipinta-ala A ja tiheys ρ ovat vakioita.

Ratkaisu:

Aksiaalinen jakautunut kuorma:

$$p = \frac{dG}{dx} = \rho g A = \text{vakio}$$

Differentiaaliyhtälöstä (3.20) saadaan:

$$u'' = -\frac{p}{EA} \Rightarrow u'' = -\frac{\rho g}{E} \Rightarrow u' = -\frac{\rho g}{E}x + C_1 \Rightarrow u = -\frac{\rho g}{2E}x^2 + C_1x + C_2.$$

Reunaehdoista $u(0) = 0$ ja $u(L) = 0$ seuraa:

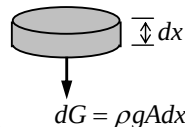
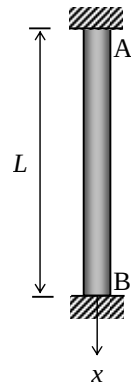
$$\left. \begin{aligned} u(0) &\equiv C_2 = 0, \\ u(L) &\equiv -\frac{\rho g}{2E}L^2 + C_1L + C_2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{\rho g L}{2E}, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Siirtymä:

$$u = -\frac{\rho g}{2E}x^2 + \frac{\rho g L}{2E}x = \frac{\rho g}{2E}(Lx - x^2).$$

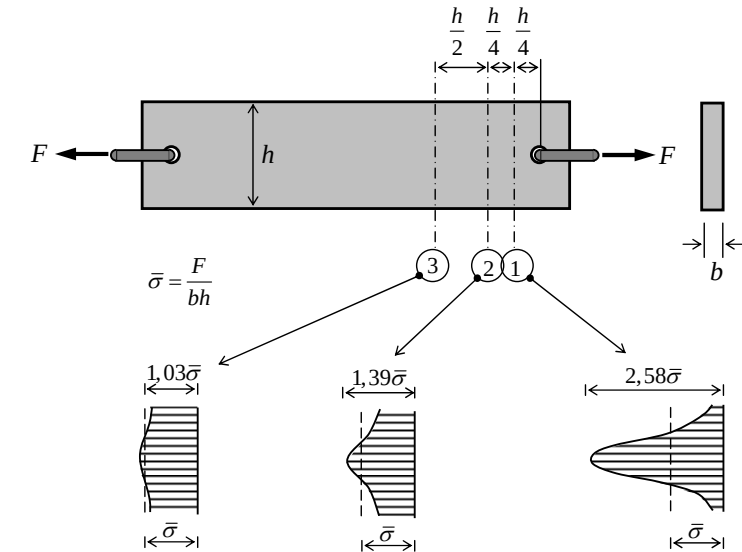
Normaalivoima:

$$N = EAu' = EA \cdot \frac{\rho g}{2E}(L - 2x) = \rho g A \left(\frac{L}{2} - x \right).$$



3.3 Saint Venant'n periaate

Kokeelliset mittaukset ja laskennalliset analyysit osoittavat, että **mitä kauemmaksi** kimmoisessa kappaleessa siirrytään kuormituksen vaikutuskohdasta, **sitä vähemmän** riippuvat tarkastelukohdan siirtymä-, muodonmuutos- tai jännitystilä **kuormituksen jakautumisesta** vaikutusalueellaan, vaan ainoastaan **sen resultantista**.



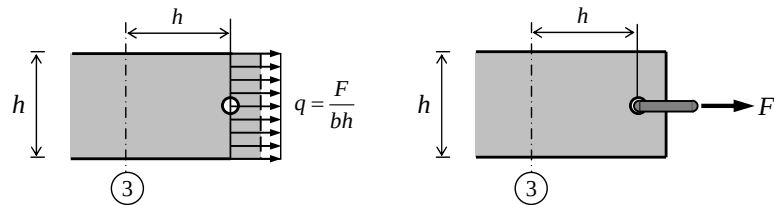
Kuva 3.6: Esimerkki Saint Venant'n periaatteen toteutumisesta

Saint Venant'n periaate kuuluu

Jos kimmoisen kappaleen tiettyyn alueeseen kohdistuva kuormitus korvataan sen kanssa staattisesti samanarvoisella kuormitusyhteisöllä, muuttuvat kappaleen siirtymät, muodonmuutokset ja jännitykset sitä vähemmän mitä kauempana ollaan kuormituksen vaikutuspisteestä.

Kuva 3.7 esittää Saint Venantin periaatteen toteutumista vetosauvassa, jota vedetään päistään voimilla F , joiden vaikutus keskittyy pienelle sauvan päissä olevien reikien reunalla olevalle alueelle. Siirryttäessä etäämmälle voimien vaikutuskohdasta normaalijännityksen σ jakauma tasoittuu. Kun ollaan riittävän etäällä, $\sigma \approx \text{vakio}$ ja keskimääräisen jännityksen $\bar{\sigma} = F/bh$ suuruinen. Jos sauvan todellinen kuormitus

korvataan sen kanssa samanarvoisella tasaisella kuormalla kuvan 3.7a mukaisesti, tästä ei aiheudu suurta virhettä leikkauksen ③ jännitysjakautumaan.



Kuva 3.7: Samanarvoiset kuormitukset (a) ja (b).

3.4 Jännityskeskittymät

3.41 Pistekuormasta aiheutuva jännityskeskittymä

Saint Venantin periaatetta luonnehtiva kuva 3.6 esittää päästään vedettyä poikkileikkaukseltaan suorakaiteen muotoista ohutta sauvaa. Se kuvaa myös normaalijännityksen σ_x jakautumista eri etäisyyksillä vetovoiman F vaikutuskohdasta olevissa pystysuorissa leikkauksissa. Jos vetovoima F olisi ideaalinen pistekuorma, olisi normaalijännitys σ_x sen vaikutuskohdassa äärettömän suuri. Todellisuudessa ideaalista pistekuormaa ei ole olemassakaan, vaan sitä edustaa sauvaan tehdyn ympyrän muotoisen reiän läpäisevän tangon aiheuttama kosketusjännitys (traktio).

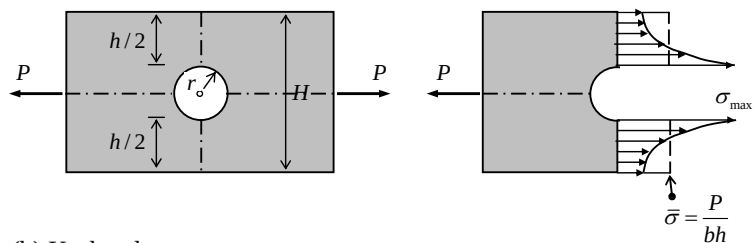
Joka tapauksessa vedetyn sauvan päissä normaalijännitys σ_x ei ole tasan jakautunut, vaan siellä esiintyy kiinnittämisestä aiheutuvia jännityskeskittymiä. Siellä vaikuttavat myös muut jännityskomponentit (levymäisen sauvan tapauksessa σ_y ja τ_{xy}) ja niillä on vastaavia keskittymiä.

3.42 Jännityskeskittymä kohdassa, jossa sauvan muodossa on äkillinen muutos

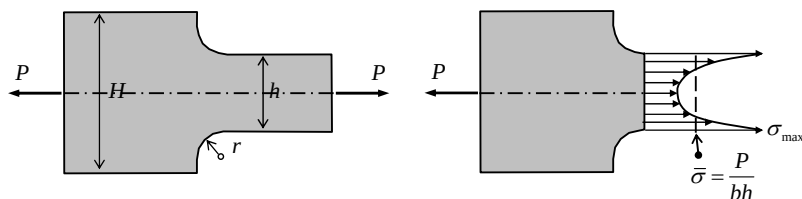
Kun vedetyn tai puristetun sauvan muodossa on äkillinen muutos, kuten esimerkiksi reikä tai poikkileikkauksen korkeuden muutos, voi tämän läheisyydessä esiintyä suuria paikallisia jännityksiä. Kuva 3.8 esittää normaalijännityksen σ_x jakautumista kriittisessä leikkauksessa kahdessa tyypillisessä tilanteessa. Kuvassa 3.8a on poikkileikkaukseltaan suorakaiteen muotoinen sauva, jossa on ympyrän muotoinen reikä. Kuvassa 3.8b on sauva, joka muodostuu kahdesta saman levyisestä mutta eri korkuisesta osasta siten, että niiden liitoskohta on pyöristetty.

Jännitysjakautuman määrittäminen tällaisissa jännityskeskittymissä ei ole aivan yksinkertainen tehtävä. Lähtökohtana on osittaisdifferentiaaliyhtälöiden joukko: muodonmuutosten ja siirtymien yhteydet, yleistetty Hooken laki, tasapainoyhtälöt ja sopivia reunaehtoyhtälöitä. Aikaisemmin probleeman ratkaisemiseen käytettiin mm. jännitysoptisia laitteita. Nykyisin ratkaisu voidaan saada numeerisesti esimerkiksi elementtimenetelmällä (finite element method, FEM).

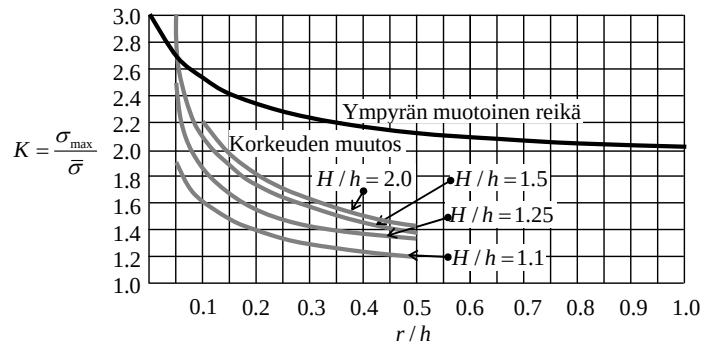
(a) Ympyrän muotoinen reikä:



(b) Korkeuden muutos:



Kuva 3.8: Jännityskeskittymiä poikkileikkaukseltaan suorakaiteen muotoisessa vetosauvassa.

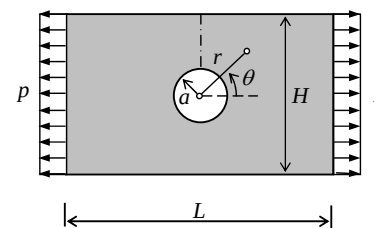


Kuva 3.9: Jännityskeskittymiskerroin poikkileikkaukseltaan suorakaiteen muotoisessa vetosauvassa, jossa on (a) ympyrän muotoinen reikä tai (b) korkeuden muutos.

Kriittisen leikkauksen **jännityskeskittymiskerroin** K määritellään kaavalla

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\bar{\sigma}}. \quad (3.22)$$

Se ilmaisee siis leikkauksen suurimman jännityksen suhdetta leikkauksen keskimääräiseen jännitykseen. Kuvassa 3.9 on esitetty käyrästä, jonka avulla jännityskeskittymiskerron kuvien 3.8a ja 3.8b tapauksissa voidaan määrittää. Koska leikkauksen keskimääräinen jännitys on helppo laskea, voidaan käyrästä avulla määrittää leikkauksen suurin jännitys.



Kuva 3.10: Ympyränmuotoinen reikä vedetyssä levyssä.

Tässä yhteydessä emme pyri määrittämään kuvan 3.9 käyrästä. Esitämme kuitenkin kuvan 3.8a probleeman ratkaisun siinä tapauksessa, että reiän säde on sauvan korkeuteen nähden hyvin pieni, ts. $r/H \approx 0$. Viittaamme tehtäväkokoelman tehtäviin 2.17 ja 2.18, joissa on käsitelty kuvan 3.10 mukaisen levytehtävän jännitystilaa tapauksessa $H \rightarrow \infty$ ja $L \rightarrow \infty$. Suurimmalle pääjännitykselle saatiin siellä tulos $\sigma_{\max} = 3\sigma_{\infty}$, missä σ_{∞} on levyn normaalijännitys σ_x (äärettömän) kaukana reiästä. Korkeudeltaan äärellisessä levyssä

$$\sigma_{\infty} = \frac{P}{bH}, \quad \bar{\sigma} = \frac{P}{b(H-2a)} \Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\infty}}{b(1-2\frac{a}{H})}, \quad (3.24)$$

joten kun H kasvaa rajatta $\bar{\sigma} = \sigma_{\infty}$. Jännityskeskittymiskertoimelle saadaan näin tulos

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\infty}} = 3. \quad (3.25)$$

Tämä on sama tulos, joka saadaan kuvan 3.9 käyrästä suhteen r/h arvolla nolla.

Esimerkki 3.5: Määritä suurin aksiaalinen kuorma P , jonka voidaan turvallisesti kohdistaa kapeaan terässauvaan, joka koostuu kahdesta osasta, jotka molemmat ovat 10mm leveitä ja vastaavasti 40mm ja 60mm korkeita. Osien liitoskohdassa on pyöristys, jonka säde on $r=8\text{mm}$. Sallitun jännityksen otaksutaan olevan 165MPa.

Lasketaan suhteet

$$\frac{H}{h} = \frac{60\text{mm}}{40\text{mm}} = 1,5, \quad \frac{r}{h} = \frac{8\text{mm}}{40\text{mm}} = 0,2$$

Kuvan 3.7 käyrästä saadaan $K=1,72$. Kaavasta (3.22) saadaan suurimmalle jännitykselle

$$\sigma_{\max} = 1,72\bar{\sigma} = 1,72\frac{P}{bh}$$

Tämä ei saa ylittää sallittua jännitystä, joten suurimman mahdollisen kuorman määrittämiseksi saadaan ehto

$$1,72\frac{P}{bh} = \sigma_{\text{sall}},$$

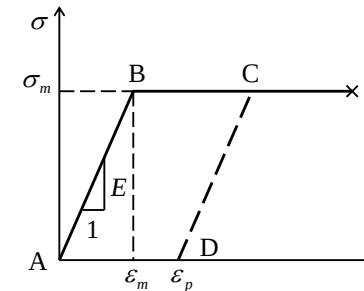
josta seuraa tulos

$$P_{\max} = \frac{\sigma_{\text{sall}}bh}{1,72} = \frac{165\text{N/mm}^2 \cdot 10\text{mm} \cdot 40\text{mm}}{1,72} = \underline{\underline{38,4\text{kN}}}$$

3.5 Plastiset muodonmuutokset

Edellä saadut tulokset perustuivat lineaarisesti kimmoiseen, eli Hooken lakia noudattavaan, materiaalmalliin. Toisin sanoen otaksuimme, että materiaalin suhteellisuusrajaa ei ylitetty. Tämä on järkevä otaksuma, kun kysymyksessä ovat hauraat materiaalit, jotka murtuvat myötäämättä. Myötäävien materiaalien tapauksessa tämä otaksuma edellyttää, että materiaalin myötölujuutta ei ylitetä. Jos toisaalta, jännitykset sauvan jossain osassa ylittävät materiaalin myötölujuuden, syntyy plastisia muodonmuutoksia ja osa edellä esitetyistä tuloksista ei ole enää voimassa. Tällöin joudutaan suorittamaan työläämpi analyysi, joka perustuu epälineaariseen jännitys-muodonmuutoslakiin.

Esimerkkinä tällaisesta analyysistä tarkastelemme **kimmoisesta, ideaaliplastisesta materiaalista** koostuvaa sauvaa, jonka jännitys-muodonmuutos yhteys on kuvan 3.11 mukainen. Vaikka mikään todellinen materiaali ei käyttäydy täsmällisesti kuvan mukaisesti, tämä jännitys-muodonmuutos käyrä on käyttökelpoinen, kun tarkastellaan sitkeitä materiaaleja.



Kuva 3.11: Kimmoisen ideaaliplastisen materiaalin jännitys-muodonmuutos yhteys

Niin kauan kuin jännitys σ ei ylitä myötölujuutta σ_m , materiaali käyttäytyy kimmoisesti ja noudattaa Hooken lakia $\sigma = E\varepsilon$. Kun σ saavuttaa arvon σ_m materiaali alkaa myötää ja se deformoituu vakio kuorman alaisena. Jos kuorma poistetaan, palautuminen tapahtuu pitkin janaa CD, joka on yhdensuuntainen jännitys-muodonmuutoskäyrän alkuosan AB kanssa. Jana AD vaaka-akselilla esittää kuormittamisen ja kuormituksen poistamisen seurauksena syntyneen pysyvän plastisen venymän ε_p .

Esimerkki 3.6: Sauva, jonka pituus on $L = 500\text{mm}$ ja poikkipinnan ala $A = 60\text{mm}^2$ on tehty kimmoisesta ideaaliplastisesta materiaalista, jonka kimmomoduuli ja myötölujuus ovat $E = 200\text{GPa}$ ja $\sigma_m = 300\text{MPa}$. Sauvaa kuormitetaan aksiaalisella kuormalla, kunnes sen pituus on kasvanut 7mm , ja sitten kuorma poistetaan. Mikä on kuormituksesta aiheutunut sauvan pysyvä pituuden muutos?

Maksimi venymäksi, jota vastaa piste C kuvassa 3.11, saadaan

$$\varepsilon_C = \frac{\Delta L_C}{L} = \frac{7\text{mm}}{500\text{mm}} = 14 \cdot 10^{-3}$$

Toisaalta myötövenymäksi, jota vastaa pisteen B abskissa, saadaan

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E} = \frac{300 \cdot 10^6 \text{Pa}}{200 \cdot 10^9 \text{Pa}} = 1,5 \cdot 10^{-3}$$

Kuorman poistamisen jälkeistä pysyvää venymää edustaa pisteen D abskissa ε_p . Kuvan 3.11 perusteella sille saadaan

$$\varepsilon_p = AD = BC = \varepsilon_C - \varepsilon_m = 14 \cdot 10^{-3} - 1,5 \cdot 10^{-3} = 12,5 \cdot 10^{-3}$$

Sauvan pysyväksi pituuden muutokseksi saadaan nyt

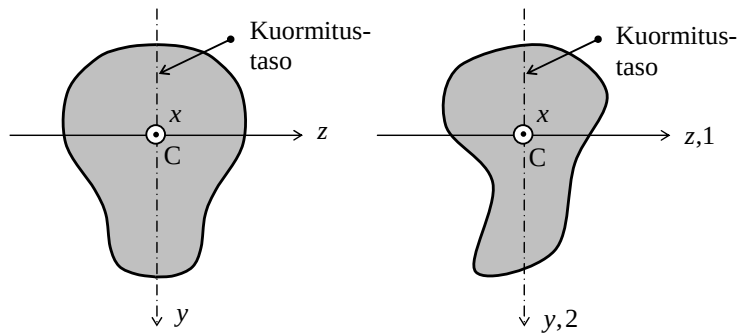
$$\Delta L_p = \varepsilon_p L = 12,5 \cdot 10^{-3} \cdot 500\text{mm} = \underline{\underline{6,25\text{mm}}}$$

4. Suoran palkin yksiakselinen taivutus

4.1 Puhdas taivutus

4.11 Poikkileikkauksen venymäjakautuma

Tarkastellaan suoraa palkkia, jonka poikkileikkaus on **symmetrinen** ja jota kuormittaa symmetriatasossa oleva **tasovoimajärjestelmä**. Valitaan koordinaatisto x, y, z siten, että sen x -akseli yhtyy palkin pintakeskiöakseliin ja x, y -taso yhtyy sen symmetriatasoon (kuva 4.1a).



Kuva 4.1: (a) Symmetrinen poikkileikkaus (b) epäsymmetrinen poikkileikkaus, jonka toinen pääakseli yhtyy kuormitus-tasoon

Tämä tarkastelu soveltuu myös epäsymmetrisen poikkileikkauksen omaavaan palkkiin, jos sitä kuormittaa tasovoimajärjestelmä, jonka vaikutustaso yhtyy palkin pintakeskiöakseliin ja jompaankumpaan pääjäyhyysakseliin (kuva 4.1b).

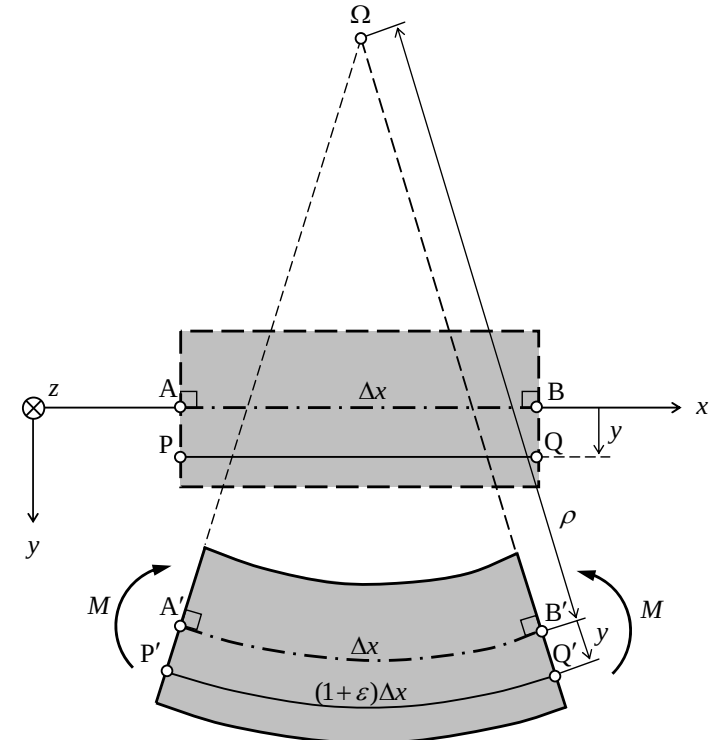
x, y -tasossa vaikuttavasta kuormituksesta palkin poikkileikkaukseen syntyy ainoastaan normaalivoima N , leikkausvoima Q_y ja taivutusmomentti M_z muiden leikkausrasitusten ollessa nolli. Jos lisäksi $N=0$, puhutaan **puhtaasta taivutuksesta**. Seuraavassa merkitään $Q_y = Q$ ja $M_z = M$.

Tarkastellaan kuvan 4.2 palkkia, joka deformoituu ympyrän kaaren muotoiseksi. Havaitaan, että deformaatioissa sauvan akselia vastaan kohtisuora taso säilyy tasona ja sauvan akselia vastaan kohtisuorana.

Tämä havainto muodostaa ns. **Bernoullin otaksuman**, johon perustuu ns. **Bernoulli-Euler palkkiteoria**, jota kutsutaan myös **teknilliseksi taivutusteoriaksi**.

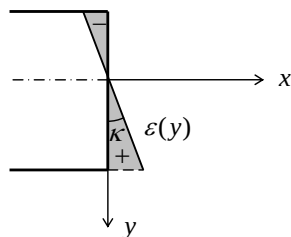
Tasoa, jolla sauvan venymä¹ $\varepsilon=0$ kutsutaan palkin **neutraalitasoksi**. Neutraalitaso leikkaa poikkileikkauksen pitkin **neutraaliakselia** (NA). Oletetaan, että palkki deformoituu siten, että **palkin akselin** (x -akseli) pituus säilyy samana. Se ei siis veny ja on **neutraalitasossa**, jolloin poikkileikkauksen **z -akseli** yhtyy **neutraaliakseliin**. Kuvan 4.2 yhdenmuotoisista sektoreista $P'Q'\Omega$ ja $A'B'\Omega$ saadaan tällöin verranto

$$\frac{(1+\varepsilon)\Delta x}{\Delta x} = \frac{\rho+y}{\rho}, \quad (4.1)$$



Kuva 4.2: Puhdas taivutus

¹ Venymää ε_x merkitään tässä ilman alaindeksiä symbolilla ε



Kuva 4.3: Puhtaan taivutuksen alaisen poikkileikkauksen venymä-jakautuma

josta seuraa venymälle ε lauseke

$$\varepsilon(y) = \frac{y}{\rho}, \quad (4.2)$$

missä ρ on palkin keskiviivan (deformoituneen akselin) **kaarevuussäde**. Palkin poikkileikkauksen **venymä** ε jakautuu siis **palkin korkeussuunnassa y suoraviivaisesti** (kuva 4.3). Suoran kulmakerrointa

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \quad (4.3)$$

kutsutaan rakenteiden mekaniikassa **käyristymäksi**. Koska venymät ovat pieniä, on käyristymä tapana merkitä venymäkuvion kaltevuuskulmaksi kuvan 4.3 mukaisesti. Käyristymän avulla ilmaistuna venymän lauseke on

$$\varepsilon(y) = \kappa y. \quad (4.4)$$

4.12 Taivutusmomentin ja käyristymän yhteys

Tarkastellaan **lineaarisesti kimmoisesta** materiaalista tehtyä palkkia. Hooken laista seuraa (vrt. kohta 6.1)

$$\sigma = E\varepsilon = E\kappa y. \quad (4.5)$$

Sijoittamalla näin saatu jännityksen² σ lauseke normaalivoiman N ja taivutusmomentin $M (= M_z)$ määrittelykaavoihin saadaan, jos palkin poikkileikkaus on **homogeeninen** ($E = \text{vakio}$)

$$N = \int_A \sigma dA = E\kappa \int_A y dA = ES\kappa, \quad (4.6)$$

$$M = \int_A \sigma y dA = E\kappa \int_A y^2 dA = EI\kappa, \quad (4.7)$$

missä $S = S_z$ ja $I = I_z$ ovat poikkileikkauksen staattinen momentti ja jäyhyysmomentti z-akselin suhteen. Koska koordinaatiston x -akseli yhtyy palkin pintakeskiöakseliin, ja poikkileikkauskoordinaatiston origo sijaitsee sen pintakeskiössä, on staattinen momentti $S = 0$. Kaavan (4.6) perusteella siis $N = 0$ ja kyseessä on **puhdas taivutus** (pelkän taivutusmomentin rasittama palkki).

Päädyimme siihen, että jos lineaarisesti kimmoista palkkia taivutetaan yksiakselisesti siten, että sen pintakeskiöakseli ei veny, se on puhtaan taivutuksen alainen ($N = 0, M \neq 0$). Ja kääntäen, jos palkki on **puhtaan taivutuksen alainen**, sen **pintakeskiöakseli ei veny**. Käytännössä palkki, jota kuormittaa sen akselia vastaan kohtisuora tasovoimasyhteys, on tällainen.

Yhtälöstä (4.7) seuraa **taivutusmomentin ja käyristymän yhteys**

$$M = EI\kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{M}{EI}, \quad (4.8)$$

missä kimmomoduulin ja jäyhyysmomentin tuloa EI kutsutaan palkin **taivutusjäykkyudeksi**.

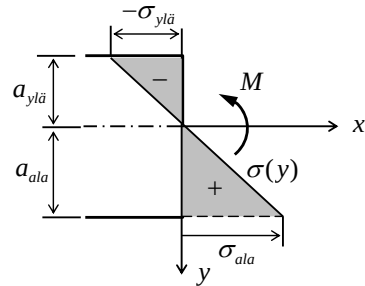
4.12 Poikkileikkauksen normaalijännitys taivutusmomentin avulla

Sijoittamalla kaavasta (4.8) ratkaistu käyristymän lauseke yhtälöön (4.5) saadaan taivutusmomenttia M vastaavan **normaalijännityksen** lauseke

$$\sigma = \frac{M}{I} y. \quad (4.9)$$

² Normaalijännitystä σ_x merkitään tässä ilman alaindeksiä symbolilla σ

lineaarisesti kimmoiselle, homogeeniselle palkille. **Normaalijännitys** σ jakautuu siis palkin **korkeussuunnassa y suoraviivaisesti** (kuva 4.4). Suoran kulmakerroin on M/I . Palkin normaalijännitys on mitoituksen kannalta tärkeä suure. Sen itseisarvoltaan suurimmat arvot saavutetaan palkin ala- ja yläreunassa.



Kuva 4.4: Puhtaan taivutuksen alaisen lineaarisesti kimmoisen palkin poikkileikkauksen jännitysjakautuma

Näitä arvoja kutsutaan **reunajännityksiksi**. Ala ja yläreunan (reuna-) jännityksiksi saadaan

$$\sigma_{ylä} = \frac{M}{I}(-a_{ylä}), \quad \sigma_{ala} = \frac{M}{I}a_{ala} \quad (4.10)$$

eli

$$\sigma_{ylä} = -\frac{M}{W_{ylä}}, \quad \sigma_{ala} = \frac{M}{W_{ala}} \quad (4.11)$$

missä

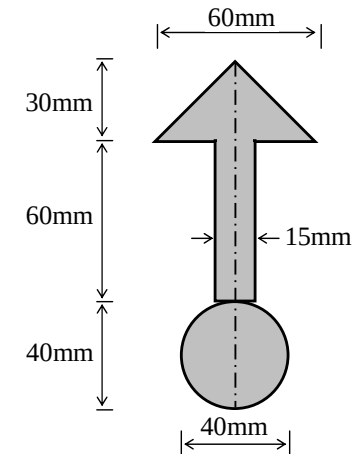
$$W_{ylä} = \frac{I}{a_{ylä}}, \quad W_{ala} = \frac{I}{a_{ala}} \quad (4.12)$$

ovat poikkileikkauksen ala- ja yläreunan **taivutusvastukset**. Jos poikkileikkaus on **kaksoissymmetrinen**, reunaetäisyyksille pätee $a_{ala} = a_{ylä} = h/2$ ja taivutusvastus on

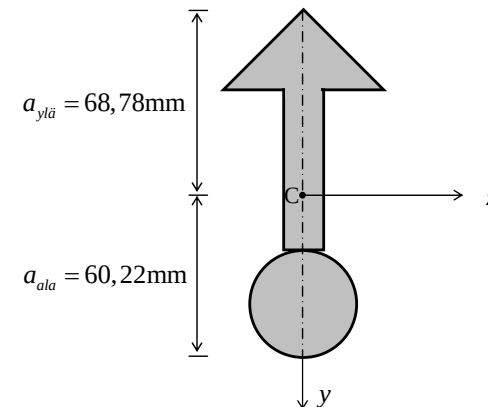
$$W = \frac{I}{h/2}, \quad (4.13)$$

missä h on palkin korkeus.

Esimerkki 4.1: Oheisessa poikkileikkauksessa vaikuttaa taivutusmomentti $M = 2,5 \text{ kNm}$, määritä suurin ja pienin normaalijännitys.



Luvun 5 esimerkissä 5.3 määritimme tarkasteltavan poikkipinnan pintakeskiön etäisyydeksi poikkipinnan ylänurkasta $68,78 \text{ mm}$ ja sen jäyhyysmomentiksi $I = I_z = 4,78 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$. Oheisessa kuvassa poikkipintaan on liitetty pintakeskiökoordinaatisto.



Taivutusvastuksille saadaan:

$$W_{ylä} = \frac{I}{a_{ylä}} = \frac{4,78 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{68,78 \text{ mm}} = 7,080 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

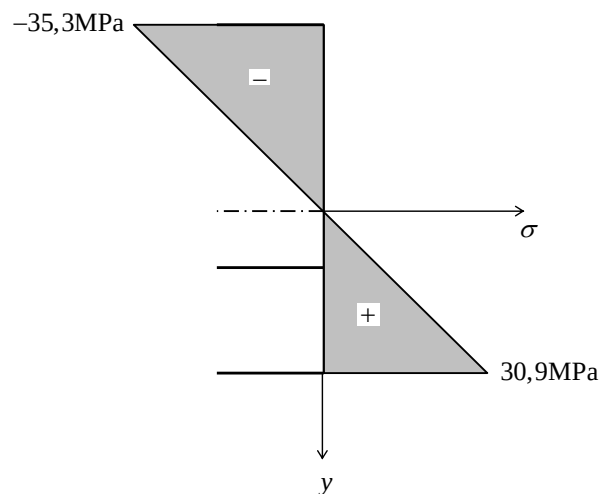
$$W_{ala} = \frac{I}{a_{ala}} = \frac{4,78 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{60,22 \text{ mm}} = 8,087 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

Reunajännityksille saadaan:

$$\sigma_{ylä} = -\frac{M}{W_{ylä}} = -\frac{2,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{7,080 \cdot 10^4 \text{ mm}^3} = \underline{\underline{-35,3 \text{ MPa}}}$$

$$\sigma_{ala} = \frac{M}{W_{ala}} = \frac{2,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{8,087 \cdot 10^4 \text{ mm}^3} = \underline{\underline{30,9 \text{ MPa}}}$$

Jännitys jakauma:



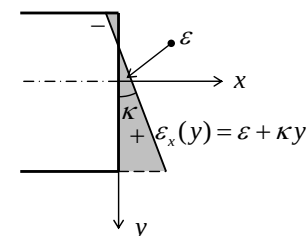
4.2 Samanaikainen veto ja puristus sekä taivutus

4.21 Poikkileikkauksen venymäjakauma

Samanaikainen veto ja puristus sekä taivutus syntyy, kun poikkileikkauksessa vaikuttaa sekä normaalivoima N että taivutusmomentti M . Normaalivoima N aiheuttaa sauvaan vakio venymän ε ja taivutusmomentti M korkeussuunnassa lineaarisen venymän κy . Yhteisvaikutuksena saadaan siis venymä³

$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon + \kappa y \quad (4.14)$$

missä ε on siis palkin venymän lausekkeen vakio-osa ja toisaalta palkin **akselin venymä** ja käyritymä κ on suoran kulmakerroin (vrt. kuva 4.5).



Kuva 4.5: Samanaikaisen vedon ja taivutuksen alaisen poikkileikkauksen venymäjakauma

4.22 Normaalivoiman ja venymän sekä taivutusmomentin ja käyritymän yhteydet

Hooken laista seuraa

$$\sigma(y) = E \varepsilon_x(y) = E \varepsilon + E \kappa y. \quad (4.15)$$

Sijoittamalla näin saatu normaalijännityksen lauseke normaalivoiman N ja taivutusmomentin M määrittelykaavoihin saadaan

³ Tässä poikkileikkauksen venymälle käytetään merkintää $\varepsilon_x(y)$, koska symbolia ε ilman alaindeksiä käytetään palkin akselin venymälle.

$$N = \int_A \sigma dA = E\varepsilon \int_A dA + E\kappa \int_A y dA = EA\varepsilon + ES\kappa, \quad (4.16)$$

$$M = \int_A \sigma y dA = E\varepsilon \int_A y dA + E\kappa \int_A y^2 dA = ES\varepsilon + EI\kappa. \quad (4.17)$$

Asettamalla palkin akseli pintakeskiöakseliksi staattinen momentti S häviää ja saamme **normaalivoiman ja akselin venymän yhteydeksi**

$$N = EA\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{N}{EA} \quad (4.18)$$

sekä **taivutusmomentin ja käyristymän yhteydeksi**

$$M = EI\kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{M}{EI}. \quad (4.19)$$

4.23 Poikkileikkauksen normaalijännitys normaalivoiman ja taivutusmomentin avulla

Sijoittamalla akselin venymän ja käyristymän lausekkeet (4.18) ja (4.19) normaalijännityksen lausekkeeseen (4.14) saadaan

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y. \quad (4.20)$$

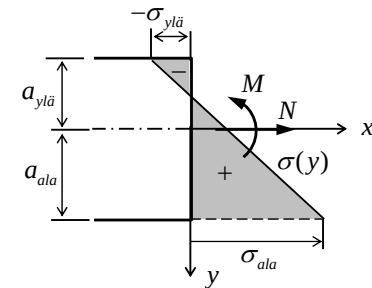
Tämä on siis lauseke, jonka avulla saadaan samanaikaisen vedon tai puristuksen sekä taivutuksen alaisen poikkileikkauksen **normaalijännityksen** jakauma, kun normaalivoima ja taivutusmomentti tunnetaan. Jännitysjakauma on edelleen lineaarinen. **Neutraaliakseli ei** kuitenkaan enää **kulje pintakeskiön kautta**. Sen asema saadaan ehdosta $\sigma(y) = 0$, josta seuraa

$$y_n = -\frac{N}{M} \frac{I}{A} = -\frac{N}{M} i^2 \quad (4.21)$$

missä

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (4.22)$$

on jäyhyysäde.

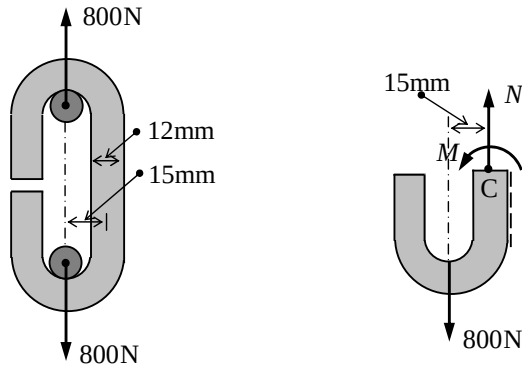


Kuva 4.6: Lineaarisesti kimmoisen palkin samanaikaisen vedon ja taivutuksen alaisen poikkileikkauksen jännitysjakautuma

Poikkileikkauksen **reunajännityksille** saadaan lausekkeet

$$\sigma_{ala} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_{ala}}, \quad \sigma_{ylä} = \frac{N}{A} - \frac{M}{W_{ylä}}. \quad (4.23)$$

Esimerkki 4.2: Teräsketju muodostuu lenkeistä, jotka on taivutettu halkaisijaltaan 12mm:n tangoista kuvan mukaisesti. Ketjua kuormittaa 800N:n voima. Määritä (a) suurin ja pienin jännitys lenkin suoralla osalla sekä (b) suoran osan poikkileikkauksen pintakeskiön ja neutraaliakselin keskinäinen etäisyys.



Leikkausrasitukset:

$$\uparrow N - 800\text{N} = 0 \Rightarrow N = 800\text{N}$$

$$\curvearrowleft C \quad M + 800\text{N} \cdot 15\text{mm} = 0 \Rightarrow M = -12000\text{Nmm}$$

Pinta-ala, taivutusvastus ja jäyhyysmomentti (taulukko):

$$A = \frac{\pi}{4}(12\text{mm})^2 = 113,1\text{mm}^2$$

$$W = \frac{\pi}{32}(12\text{mm})^3 = 169,6\text{mm}^3$$

$$I = \frac{\pi}{64}(12\text{mm})^4 = 1017,9\text{mm}^4$$

Reunajännitykset ($\sigma_{\text{vas}} \triangleq \sigma_{\text{ylä}}, \sigma_{\text{oik}} \triangleq \sigma_{\text{ala}}$):

$$\sigma_{\text{vas}} = \frac{N}{A} - \frac{M}{W} = \frac{800\text{N}}{113,1\text{mm}^2} - \frac{-12000\text{Nmm}}{169,6\text{mm}^3} = (7,07 + 70,75) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \underline{\underline{77,8\text{MPa}}}$$

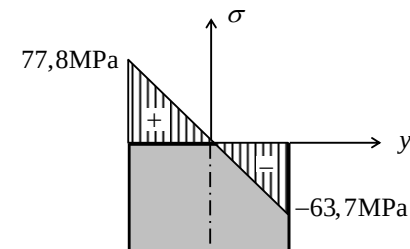
$$\sigma_{\text{oik}} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = (7,07 - 70,75) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \underline{\underline{-63,7\text{MPa}}}$$

Neutraaliakseli:

$$\sigma \equiv \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y_n = 0$$

$$\Rightarrow y_n = -\frac{N}{M} \frac{I}{A} = -\frac{800\text{N}}{-12000\text{Nmm}} \frac{1017,9\text{mm}^4}{113,1\text{mm}^2} = \underline{\underline{0,6\text{mm}}}$$

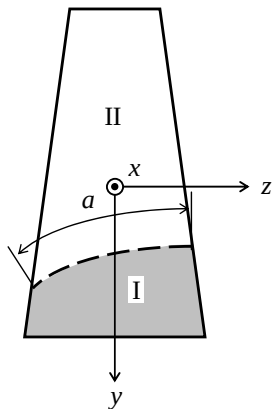
Jännitys jakauma:



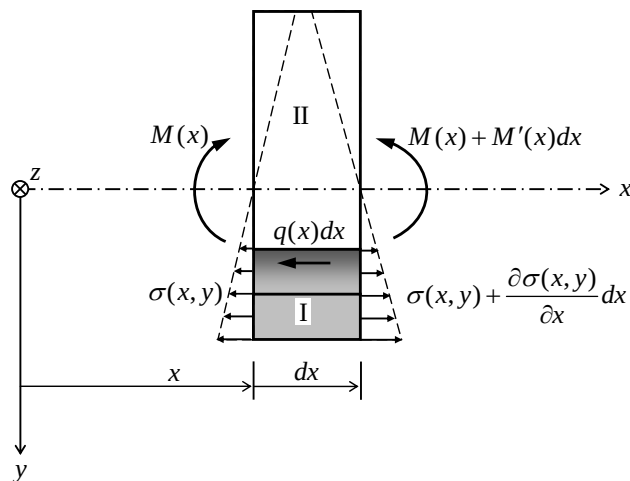
4.3 Taivutetun palkin leikkausjännitykset

4.31 palkin leikkausvuo sen halkaisupinnalla

Tarkastellaan palkkia, jonka poikkileikkaus on kuvan 4.7 mukainen. Ajatellaan palkki halkaistuksi sen pituussuunnassa kahteen osaan I ja II. Palkin **pituutta kohti laskettua leikkausvoimaa**, jolla osa II vaikuttaa osaan I, kutsutaan osien I ja II väliseksi **leikkausvuoksi** $q(x)$.



Kuva 4.7: Palkin poikkileikkaus ja sen osat I ja II



Kuva 4.8: Leikkausvuon $q(x)$ määrittäminen

Leikkausvuo on käyttökelpoinen suure mm. palkin osien välisten pitkittäisten liima, hitsi tms. **liitosten** tarkastelussa. **Huomautus:** Leikkausvuolle käytetään tässä merkintää $q(x)$, jota olemme käyttäneet myös poikittaiselle kuormalle.

Tarkastellaan kuvan 4.8 mukaista leikkausten x ja $x + dx$ välisen differentiaalisen palkin osan I vapaakappalekuviota. Sen yläpintaan vaikuttaa leikkausvuo q , vasempaan reunapintaan vaikuttaa normaalijännitys σ ja oikeaan reunapintaan normaalijännitys $\sigma + \partial\sigma/\partial x \cdot dx$. Vaakasuuntaiseksi tasapainoyhtälö on

$$\rightarrow -qdx - \int_{A_I} \sigma dA + \int_{A_I} (\sigma + \frac{\partial\sigma}{\partial x} dx) dA = 0, \quad (4.24)$$

josta seuraa

$$(q - \int_{A_I} \frac{\partial\sigma}{\partial x} dA) dx = 0$$

ja edelleen leikkausvuolle

$$q = \int_{A_I} \frac{\partial\sigma}{\partial x} dA. \quad (4.25)$$

Sijoittamalla tähän normaalijännityksen lauseke (4.9) saadaan

$$q = \int_{A_I} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M}{I} y \right) dA = \frac{1}{I} \overbrace{M'(x)}^Q \int_{A_I} y dA = \frac{Q(x) S_I}{I}.$$

Käytettiin hyväksi palkin momenttitasapainoyhtälöä $Q(x) = M'(x)$ ja staattisen momentin määrittelykaavaa.

Näin **lineaarisesti kimmoisen palkin leikkausvuolle** poikkipinnan osan A_I määrittelemän palkin osan I ja palkin toisen osan II välisellä (ajatellulla) leikkauspinnalla saatiin lauseke

$$q(x) = \frac{Q(x) S_I}{I}. \quad (4.26)$$

missä

$$S_I = \int_{A_I} y dA \quad (4.27)$$

on leikkauksen alapuoleisen poikkipinnan osan I staattinen momentti z -akselin suhteen.

Ottamalla huomioon, että koko poikkipinnan staattinen momentti S on osapintojen I ja II staattisten momenttien S_I ja S_{II} summa ja että se pintakeskiöön asetetussa koordinaatistossa häviää, saadaan

$$S_I = -S_{II}. \quad (4.28)$$

Näin osien I ja II välisen leikkausvuon lausekkeessa (4.26) voidaan staattisen momentin S_I sijasta käyttää myös staattista momenttia S_{II} , tällöin on kuitenkin vaihdettava myös etumerkki.

4.32 Keskimääräinen leikkausjännitys kahden palkin osan välisellä pinnalla

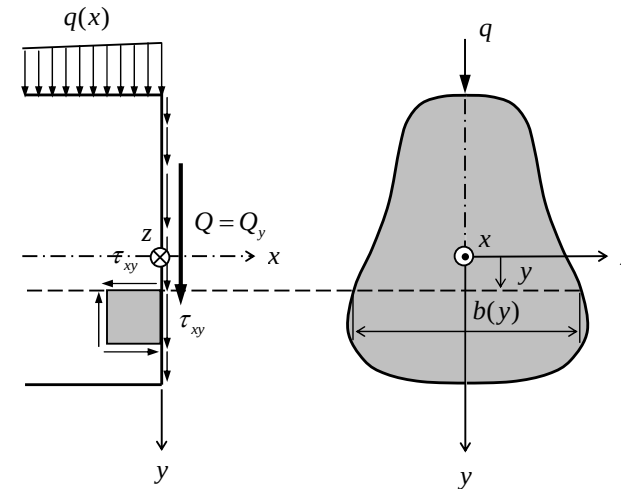
Tarkastellaan vielä kuvan 4.7 poikkileikkausta, joka on ajateltu leikatuksi kahteen osaan I ja II. Leikkauspinnalla vaikuttavalle keskimmäiselle leikkausjännitykselle saadaan

$$\bar{\tau} = \frac{q}{a}, \quad (4.29)$$

missä q on leikkausvuo ja a on leikkausviivan pituus poikkipinnalla (ks. kuva 4.7). **Keskimääräiselle leikkausjännitykselle** saadaan näin kaava

$$\bar{\tau} = \frac{QS_I}{Ia}. \quad (4.30)$$

4.33 Leikkausjännitykset palkin poikkipinnalla



Kuva 4.9: Leikkausjännityskomponentin τ_{xy} määrittäminen

Tarkastellaan kuvan 4.9 symmetristä poikkileikkausta, jolla vaikuttaa ulkoisesta kuormituksesta $q(x)$ aiheutunut leikkausvoima $Q = Q_y$. Teknisen taivutusteorian perusteella ei ole mahdollista määrittää leikkausjännitysten τ_{xy} ja τ_{xz} tarkkaa jakautumaa poikkileikkauksessa. Käytännön tarpeita varten tyydyttävä jakautuma leikkausjännitykselle τ_{xy} saadaan kuitenkin seuraavasti.

Varjostetun differentiaalisen suorakaiteen momenttitasapainoehdon perusteella voimme päätellä, että korkeudella y olevalla (katkoviivalla merkityllä) tasolla vaikuttavan leikkausjännityksen tulee olla τ_{xy} :n suuruinen. Leikkausjännitykselle τ_{xy} saadaan nyt likiarvo, merkitsemällä se yhtä suureksi kuin tasolla y vaikuttava keskimääräinen leikkausjännitys, ja sille saadaan kaavan (4.29) perusteella lauseke

$$\tau_{xy}(y) \approx \bar{\tau}(y) = \frac{q(y)}{b(y)}, \quad (4.31)$$

missä $q(y)$ on leikkausvuo ko. tasolla y ja $b(y)$ on sen leveys. Käytetään tason y alapuoleiselle (y -akselin positiivisen suunnan puoleiselle) poikkipinnan osalle merkintää $A(y)$, jolloin sen staattinen momentti on

$$S(y) = \int_{A(y)} y dA = \int_{A(y)} y b(y) dy. \quad (4.32)$$

Tämä on osapoikkipinnan $A(y)$ staattinen momentti z -akselin suhteen, jolle on edellä käytetty merkintää $S_z(y)$.

Kaavojen (4.30) ja (4.31) perusteella saadaan nyt **palkin leikkausjännitykselle** τ_{xy} likilauseke

$$\tau_{xy}(y) \approx \frac{QS(y)}{Ib(y)} \quad (4.33)$$

Huomautus: Leikkausjännityksen $\tau_{xy}(y)$ (itseisarvoltaan) suurimman arvon määrittämistä silmälläpitäen on hyvä tietää, että **staattinen momentti** $S(y)$ saa **ääriarvon pintakeskiöakselilla**, ts. $S_{\max} = S(0)$. Tämä tulos voidaan todistaa seuraavasti. Derivoimalla staattinen momentti

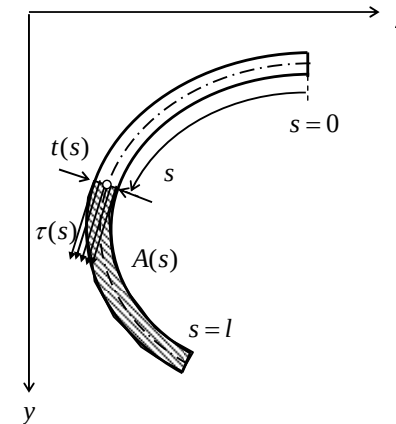
$$S(y) = \int_y^{y_2} y b(y) dy$$

saadaan

$$S'(y) = -yb(y).$$

Koska $b(y) \neq 0$ derivaatta häviää, kun $y = 0$.

4.34 Ohuen profiilin leikkausjännitykset



Kuva 4.10: Ohuen profiilin poikkileikkaus

Tarkastellaan kuvan 3.4 ohutta avointa profiilia. Jos profiili on riittävän ohut $t \ll l$, leikkausjännityksen τ suunta yhtyy profiilin keskiviivan tangentin suuntaan ja se voidaan olettaa profiilin paksuussuunnassa tasan jakautuneeksi. Näin se voidaan ilmaista profiilin keskiviivaan yhtyvän koordinaatin s funktina. Leikkausjännityksen $\tau(s)$ positiivisen suunnan otaksutaan yhtyvän koordinaatin s suuntaan. Tälle leikkausjännitykselle saadaan

$$\tau(s) = \frac{q(s)}{t(s)}, \quad (4.34)$$

missä $q(s)$ on vastaava leikkausvuo ja $t(s)$ on profiilin paksuus. Kaavan (4.26) perusteella lineaarisesti kimmoisen profiilin leikkausvuolle saadaan

$$q(s) = \frac{QS(s)}{I}, \quad (4.35)$$

missä

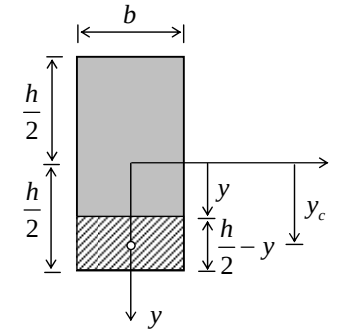
$$S(s) = \int_{A(s)} y dA = \int_s^l y(s) t(s) ds \quad (4.36)$$

on pinnan $A(s)$ (kuva 4.10) staattinen momentti z -akselin suhteen. Edellä poikkileikkaussuureita käsittelevässä osassa $S(s)$:lle käytettiin merkin-
tää $S_z(s)$. Näin ohuen profiilin leikkausjännityksen kaavaksi saadaan

$$\tau(s) = \frac{QS(s)}{It(s)}. \quad (4.37)$$

Huomautus: Jos avoimen profiilin poikkipinta on **monihaarainen**, on yksikäsitteisen koordinaatin s käyttö mahdotonta. Tällöin on oleellista, että **kullekin profiilin haaralle valitaan positiivinen suunta**, joka on samalla leikkausjännityksen positiivinen suunta ko. haaralla. Määrittäessä leikkausjännitystä tietyn profiilin haaran tietyssä kohdassa s , pinta $A(s)$ kaavassa (4.36) on se profiilin osa, joka jää ko. haaran positiivisen suunnan osoittamalle puolelle tarkasteltavasta kohdasta katsottuna ja $S(s)$ on siis tämän pinnan staattinen momentti z -akselin suhteen.

Esimerkki 4.3: Määritetään leikkausvoiman Q aiheuttama leikkausjännityksen jakauma $\tau_{xy}(y)$ suorakaidepoikkipinnalle.



Osapoikkipinnan pinta-ala, pintakeskiön y -koordinaatti ja staattinen momentti sekä poikkipinnan jäyhyysmomentti:

$$A(y) = b\left(\frac{h}{2} - y\right), \quad y_c(y) = \frac{1}{2}\left(y + \frac{h}{2}\right)$$

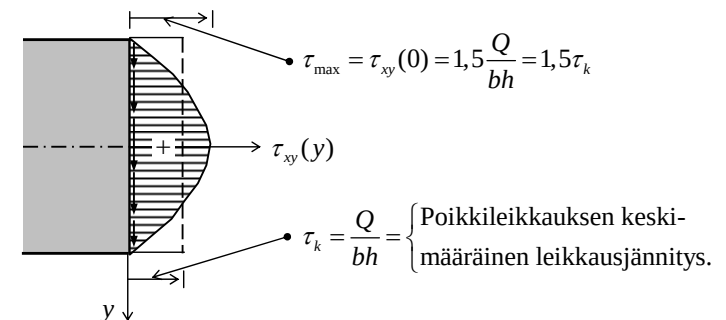
$$S(y) = A(y)y_c(y) = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{1}{2}\left(y + \frac{h}{2}\right) = \frac{bh^2}{8}\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

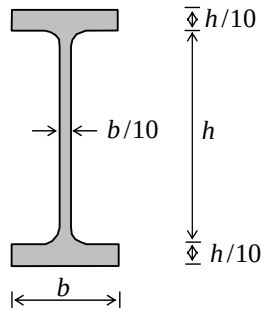
Leikkausjännitys:

$$\tau_{xy}(y) = \frac{QS}{Ib} = Q \cdot \frac{bh^2}{8} \left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right] \cdot \frac{12}{bh^3} \cdot \frac{1}{b} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]$$

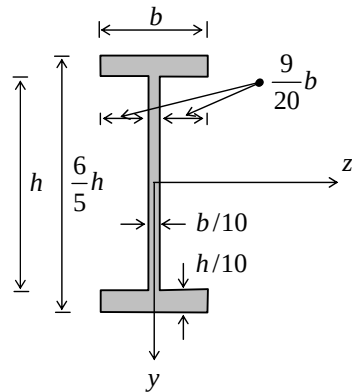
Nähdään, että jakauma on kuvan mukainen paraabeli:



Esimerkki 4.4: Määritetään leikkausvoiman Q aiheuttama leikkausjännityksen jakauma $\tau_{xy}(y)$ oheiselle I-profiilille.



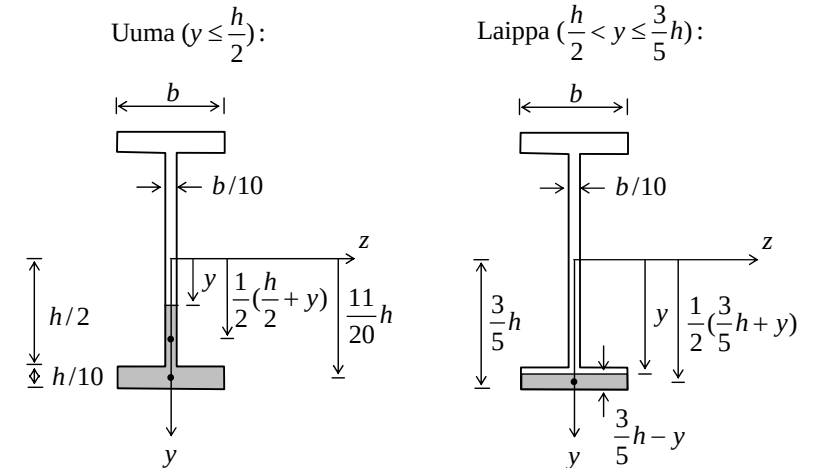
Jätetään uuman ja laipan yhtymäkohdassa olevat pyöristykset huomioon ottamatta.



Jäyhyysmomentti:

$$I = \frac{b \cdot \left(\frac{6}{5}h\right)^3}{12} - 2 \cdot \frac{\frac{9}{20}b \cdot h^3}{12} = \frac{207}{3000}bh^3 \approx 0,069bh^3 \text{ (Reikäperiaate)}$$

Staattinen momentti $S(y)$:



Uuma:

$$S(y) = b \cdot \frac{h}{10} \cdot \frac{11}{20}h + \frac{b}{10} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{27}{400}bh^2\left(1 - \frac{20}{27}\frac{y^2}{h^2}\right)$$

Laippa:

$$S(y) = b\left(\frac{3}{5}h - y\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}h + y\right) = \frac{9}{50}bh^2\left(1 - \frac{25}{9}\frac{y^2}{h^2}\right)$$

Leikkausjännitys $\tau_{xy}(y)$:

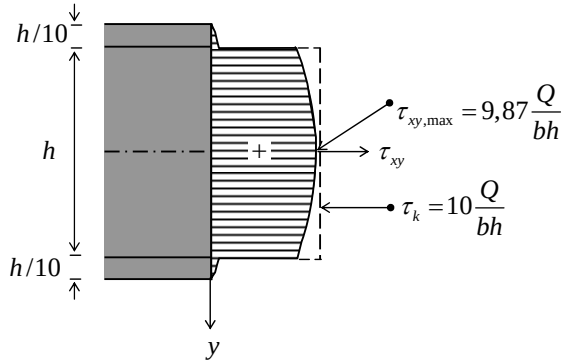
Uuma:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y) &= \frac{QS(y)}{Ib(y)} = \frac{Q}{\frac{207}{3000}bh^3 \cdot \frac{b}{10}} \cdot \frac{27}{400}bh^2\left(1 - \frac{20}{27}\frac{y^2}{h^2}\right) = \frac{2025}{207} \frac{Q}{bh} \left(1 - \frac{20}{27}\frac{y^2}{h^2}\right) \\ &= (9,78 - 7,25\frac{y^2}{h^2}) \frac{Q}{bh} \end{aligned}$$

Laippa:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y) &= \frac{QS(y)}{Ib(y)} = \frac{Q}{\frac{207}{3000}bh^3 \cdot b} \cdot \frac{9}{50}bh^2\left(1 - \frac{25}{9}\frac{y^2}{h^2}\right) = \frac{60}{23} \frac{Q}{bh} \left(1 - \frac{25}{9}\frac{y^2}{h^2}\right) \\ &= (2,61 - 7,25\frac{y^2}{h^2}) \frac{Q}{bh} \end{aligned}$$

Leikkausjännityksen $\tau_{xy}(y)$ jakauma:

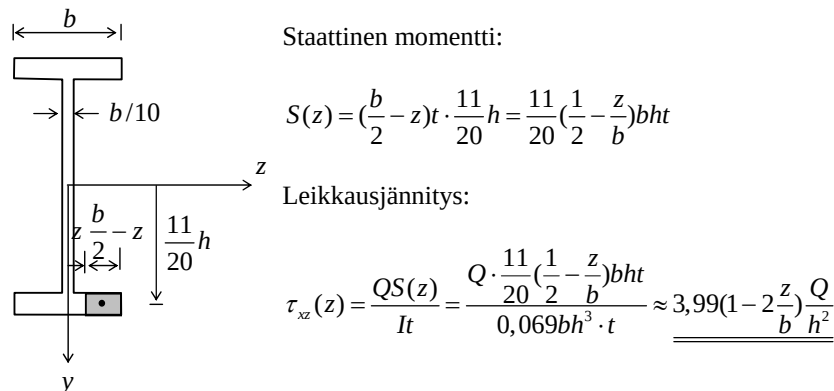


Kuvassa τ_k on uuman keskimääräinen leikkausjännitys, joka on saatu ajattelemalla koko leikkausvoiman Q kohdistuvan pelkästään uumaan. Havaitaan, että ohuella I-profiililla τ_k on hyvä likiarvo $\tau_{xy}(y)$:n suurimmalle arvolle, ts.

$$\tau_{xy,max} \approx \tau_k = \frac{Q}{th},$$

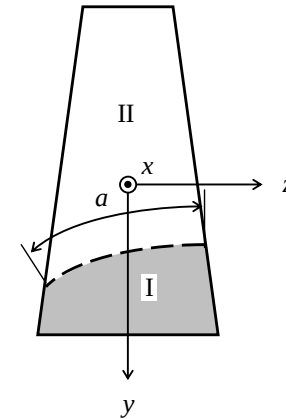
missä t on uuman paksuus (tässä $t = b/10$).

Leikkausjännitys τ_{xy} laipan alueella on pieni. (Voidaan myös osoittaa, likikaava antaa tässä tilanteessa hyvin epätarkan tuloksen.) Laippaa vastaan kohtisuorilla pinnoilla vaikuttaa myös leikkausjännitys $\tau = \tau_{xz}$, joka saadaan seuraavasti:



4.4 Pitkittäinen leikkausvoima eli työntövoima

Tarkastellaan edelleen palkkia, jonka poikkileikkaus on kuvan 4.11 mukainen. Ajatellaan palkki halkaistuksi sen pituussuunnassa kahteen osaan I ja II.



Kuva 4.11: Palkin poikkileikkaus ja sen osat I ja II

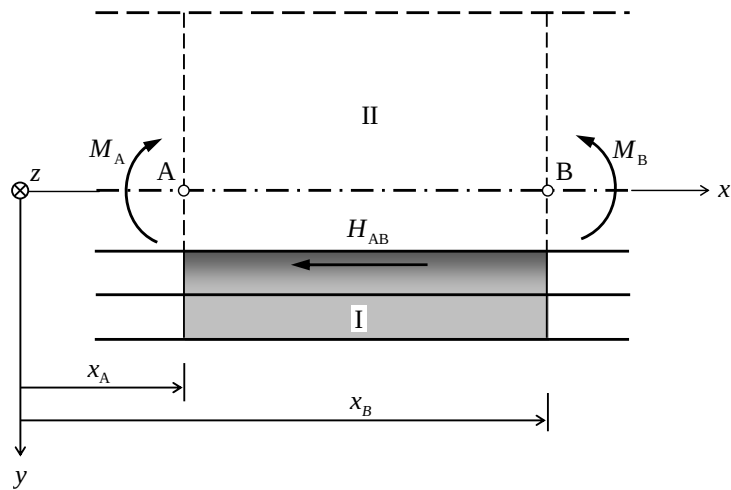
Kahden pisteen x_A ja x_B välisellä palkin osalla vaikuttavalla **pitkittäisellä leikkausvoimalla** eli **työntövoimalla** H_{AB} tarkoitetaan leikkausvoimaa, joka vaikuttaa palkin osien I ja II välillä leikkausten A ja B välisellä matkalla (vrt. kuva 3.2). Työntövoimaa voidaan käyttää eri osista koostuvan palkin **liitoselinten**, kuten naulojen, niittien, pulttien jne. **mitoituksessa**.

Tarkastellaan kuvan 4.12 mukaista palkkia ja halutaan määrittää osien I ja II välinen työntövoima välillä AB. Se saadaan integroimalla leikkausvuo välin AB yli

$$H_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} q(x) dx = \frac{S_I}{I} \int_{x_A}^{x_B} Q(x) dx = \frac{S_I}{I} [M(x_B) - M(x_A)].$$

Näin osien I ja II väliselle työntövoimalle välillä AB saatiin tulos

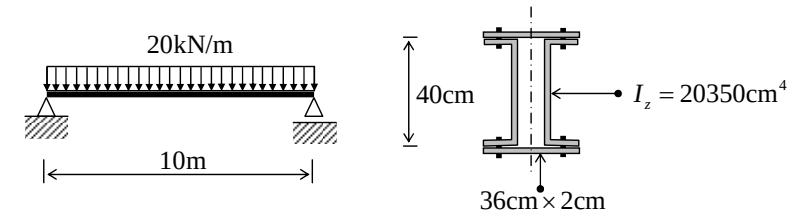
$$H_{AB} = \frac{S_I}{I} (M_B - M_A), \quad (4.37)$$



Kuva 4.12: Työntövoima H_{AB}

missä M_A ja M_B ovat taivutusmomentin arvot pisteissä x_A ja x_B .

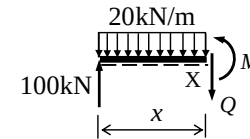
Esimerkki 4.5: Määritetään pienin mahdollinen niittien lukumäärä ja niiden sijoitus oheiselle kotelopalkille, kun niittien halkaisija on $d = 26\text{mm}$ ja sallittu leikkausjännitys $\tau_{sall} = 70\text{MPa}$.



Jäyhyysmomentti:

$$I = 2 \cdot [20350\text{cm}^4 + \frac{36\text{cm} \cdot (2\text{cm})^3}{12} + 36\text{cm} \cdot 2\text{cm} \cdot (21\text{cm})^2] = 104252\text{cm}^4$$

Leikkausvoima ja taivutusmomentti:



$$\uparrow -Q + 100\text{kN} - 20\text{kN/m} \cdot x = 0 \Rightarrow Q = 100\text{kN} - 20\text{kN/m} \cdot x$$

$$\curvearrowright -M + 100\text{kN} \cdot x - 20\text{kN} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow M = 100\text{kN} \cdot x - 10\text{kN} \cdot x^2$$

Paarilevyn staattinen momentti:

$$S_1 = 36\text{cm} \cdot 2\text{cm} \cdot 21\text{cm} = 1512\text{cm}^3$$

Paarten ja uumalevyjen välinen työntövoima puolella palkin pituutta:

$$H = \frac{S_1}{I} [M(5\text{m}) - M(0)] = \frac{1512\text{cm}^3}{104252\text{cm}^4} (250 \cdot 10^2 \text{kNm} - 0) = 362,6\text{kN}$$

Yhdelle niitille sallittu leikkausvoima:

$$H_0 = \frac{\pi d^2}{4} \tau_{sall} = \frac{\pi (26\text{mm})^2}{4} 70\text{N/mm}^2 = 37,2\text{kN}$$

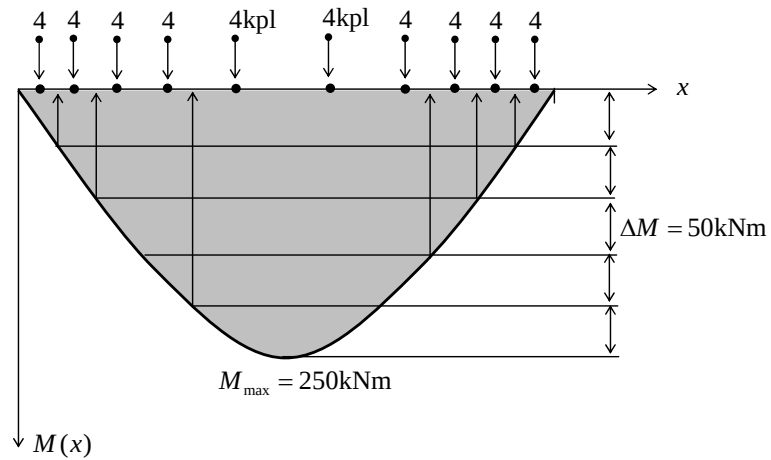
Niittien kokonaismäärä:

$$n = 4 \cdot \frac{H}{H_0} = 4 \cdot \frac{362,6 \text{ kN}}{37,2 \text{ kN}} = 39,0 \approx 40$$

Näitä niittejä sijoitetaan 4kpl per leikkaus. Sijoitetaan ne 10 vyöhykkeeseen, joissa kussakin on yhtä suuri taivutusmomentin muutos:

$$\Delta M = \frac{M_{\max}}{5} = \frac{250 \text{ kNm}}{5} = 50 \text{ kNm}$$

Niittien sijoittelukuvio:



5. Kaksiakselinen taivutus

5.1 Palkin poikkileikkauksen venymäjakautuma

Rakenteiden lujuusopin monisteen osan II luvussa 7 käsitelimme yksiakselistaa taivutusta. Siellä johdettiin teknistä taivutusteoriaa noudattavan samanaikaisesti vedetyn tai puristetun ja x, y -tasossa taivutetun palkin poikkileikkauksen venymälle lauseke

$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon + \kappa_y y,$$

missä ε on palkin akselin venymä ja κ on palkin käyritymä, joka on toisaalta palkin akselin tarkasteltavassa pisteessä olevan kaarevuussäteen ρ käänteisarvo.

Jos palkkia taivutetaan siten, että se käyristyy sekä x, y -tasossa käyristymän ollessa κ_z että x, z -tasossa käyristymän ollessa κ_y sen poikkileikkauksen venymä on

$$\varepsilon_x(y, z) = \varepsilon + \kappa_z y + \kappa_y z. \quad (5.1)$$

Poikkipinnan normaalijännitykselle $\sigma = \sigma_x$ saadaan nyt Hooken lain perusteella

$$\sigma(y, z) = E\varepsilon_x(y, z) = E\varepsilon + E\kappa_z y + E\kappa_y z. \quad (5.2)$$

Sijoittamalla tämä normaalivoiman N ja taivutusmomenttien M_z ja M_y määrittelykaavoihin

$$N = \int_A \sigma dA, \quad M_z = \int_A \sigma y dA, \quad M_y = \int_A \sigma z dA \quad (5.3)$$

saadaan

$$\begin{aligned} N &= E\varepsilon \int_A dA + E\kappa_z \int_A y dA + E\kappa_y \int_A z dA, \\ M_z &= E\varepsilon \int_A y dA + E\kappa_z \int_A y^2 dA + E\kappa_y \int_A yz dA, \\ M_y &= E\varepsilon \int_A z dA + E\kappa_z \int_A zy dA + E\kappa_y \int_A z^2 dA. \end{aligned} \quad (5.4)$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon + ES_z \kappa_z + ES_y \kappa_y, \\ M_z &= ES_z \varepsilon + EI_z \kappa_z + EI_{zy} \kappa_y, \\ M_y &= ES_y \varepsilon + EI_{zy} \kappa_z + EI_y \kappa_y, \end{aligned} \quad (5.5)$$

missä A , S_z , S_y , I_z , I_y ja I_{zy} ovat poikkipinnan poikkileikkaussuureet. Jos nyt koordinaatisto y, z asetetaan **pintakeskiöön**, staattiset momentit S_z ja S_y häviävät ja lausekkeet (5.5) yksinkertaistuvat muotoon

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon, \\ M_z &= EI_z \kappa_z + EI_{zy} \kappa_y, \\ M_y &= EI_{zy} \kappa_z + EI_y \kappa_y. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ratkaisemalla näistä yhtälöistä akselin venymä ja käyritymät, saadaan

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{N}{EA}, \\ \kappa_z &= \frac{1}{E} \frac{M_z I_y - M_y I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2}, \\ \kappa_y &= \frac{1}{E} \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Nämä ovat kaksiakselisesti taivutetun palkin poikkileikkauksen **akselin venymän ja normaalivoiman** sekä **käyritymien ja taivutusmomenttien yhteydet**. Ne ovat siis voimassa poikkipinnan pintakeskiöön asetetussa koordinaatistossa.

5.2 Normaalijännityksen jakauma

Sijoittamalla akselin venymän ja käyritymien lausekkeet (5.7) normaalijännityksen lausekkeeseen (5.2) saadaan

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_z I_y - M_y I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2} z. \quad (5.8)$$

Tämä lauseke ilmaisee normaalivoiman N ja taivutusmomenttien M_z ja M_y aiheuttaman poikkileikkauksen normaalijännityksen jakauman $\sigma(y, z)$. Tämä jakauma on **lineaarinen** ja siis tasopinta. Jos **koordinaattiakselit** asetetaan **yhtymään poikkileikkauksen pääjäyhysakseleihin**, tulomomentti I_{zy} häviää ja lauseke (5.8) saa muodon

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z. \quad (5.9)$$

Tämä lauseke on soveltuu erityisesti tapauksiin, jossa poikkileikkauksella on **symmetria-akseli**. Tällöin toinen koordinaattiakseli asetetaan, yhtymään symmetria-akseliin. Useimmiten käytännössä esiintyvät poikkileikkaukset ovat symmetrisiä tai kaksoissymmetrisiä, josta syystä kaavaa (5.9) on tällöin hyvä käyttää. Jos poikkileikkaus on epäsymmetrinen, palkin taivutustehtävän ratkaiseminen käy suoraviivaisemmin kaavaa (5.8) käyttäen¹.

Jos kyseessä on **puhdas taivutus**, jolloin $N = 0$, lausekkeiden (5.8) ja (5.9) oikean puolen ensimmäinen termi jää pois. Esimerkiksi symmetrisen poikkileikkauksen normaalijännityksen lauseke (5.9) on tällöin

$$\sigma(y, z) = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z. \quad (5.10)$$

Poikkileikkauksen **neutraaliakselilla** (NA) tarkoitetaan suoraa, jolla venymä on nolla eli $\varepsilon = 0$. Koska homogeenisen poikkileikkauksen tapauksessa $\varepsilon = \sigma / E$, neutraaliakselin yhtälö voidaan ilmaista yhtälönä

$$\sigma(y, z) \equiv \frac{N}{A} + \frac{M_z I_y - M_y I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2} z = 0. \quad (5.11)$$

Se voidaan helposti saattaa muotoon

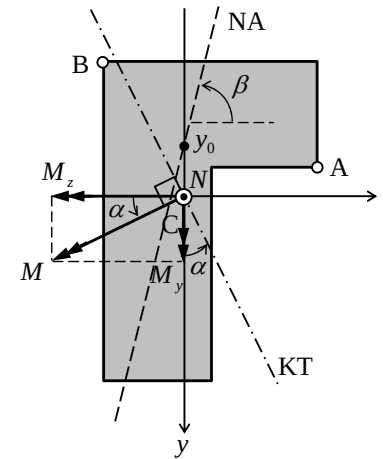
$$y = y_0 - z \tan \beta, \quad (5.12)$$

¹ Useissa lujuusopin perusteita käsittelevissä oppikirjoissa kaavaa (5.8) ei esitetä, vaan kaavaa (5.9) käytetään myös epäsymmetristen poikkileikkauksen tapauksessa. Käsitely on kuitenkin tällöin kirjoittajan mielestä työläämpää ja johtaa helpommin virheisiin.

missä

$$y_0 = -\frac{I_y I_z - I_{zy}^2}{M_z I_y - M_y I_{zy}} \frac{N}{A}, \quad \beta = \arctan \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{M_z I_y - M_y I_{zy}}. \quad (5.13)$$

Neutraaliakseli (NA) leikkaa siis y -akselin pisteessä y_0 ja sen positiivisesta z -akselista vastapäivään mitattu suuntakulma on β (vrt. kuva 5.1). Havaitaan, että puhtaan taivutuksen ($N = 0$) tapauksessa $y_0 = 0$ ja neutraaliakseli kulkee origon kautta.



Kuva 5.1: Vino taivutus.

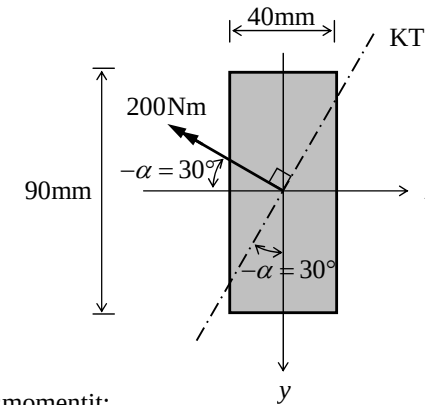
Merkitään poikkileikkauksen **resultoivan taivutusmomentin** M negatiivisesta z -akselista vastapäivään mitattua **suuntakulmaa** symbolilla α .

Usein kaksiakselisesti taivutetun palkin kuormitus tapahtuu yhdessä ns. **kuormitustasossa** (KT). Tällöin puhutaan **vinosta taivutuksesta**. Koska tällöin resultoiva taivutusmomentti M on kohtisuorassa kuormitustasoa vastaan, on kulma α myös positiivisesta y -akselista vastapäivään mitattu **kuormitustason kaltevuuskulma** (vrt. kuva 5.1). Tyypillisessä normaalijännitysten määrittämistehtävässä normaalivoima N ja resultoiva taivutusmomentti M tarkasteltavassa poikkileikkauksessa määritetään ensin. Tämän jälkeen normaalijännityksen kaavassa (5.8) tarvittavat taivutusmomentit M_z ja M_y saadaan kuvan 5.1 perusteella kaavoista

$$\begin{aligned} M_z &= M \cos \alpha, \\ M_y &= M \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Neutraaliakselin tunteminen on tärkeää siksi, että ne poikkileikkauksen pisteet, joissa normaalijännitys saa suurimman ja pienimmän arvonsa voidaan helposti paikantaa sen avulla. Tämä perustuu siihen, että normaalijännityksen (5.8) kuvaaja on tasopinta, joka saa arvon nolla neutraaliakselilla. Jos nyt neutraaliakseli **leikkaa poikkipinnan**, suurin ja pienin normaalijännitys ovat **eri puolilla** neutraaliakselia pisteissä, joiden **etäisyys neutraaliakselista on suurin** (vrt. pisteet A ja B kuvassa 5.1). Jos taas neutraaliakseli ei leikkaa poikkipintaa, suurin ja pienin normaalijännitys ovat luonnollisesti **samalla puolella** neutraaliakselia pisteissä, joiden **etäisyys neutraaliakselista on suurin ja pienin**.

Esimerkki 5.1: Puista palkkia kuormitetaan tasossa, joka muodostaa 30° kulman pystytason suhteen. Kuormitus aiheuttaa tarkasteltavaan poikkileikkaukseen taivutusmomentin 200Nm kuvan mukaisesti. Palkin poikkileikkaus on suorakaide, jonka leveys ja korkeus ovat 40mm ja 90mm . Määritä (a) neutraaliakseli sekä (b) suurin ja pienin normaalijännitys tarkasteltavassa poikkileikkauksessa.



Jäyhyysmomentit:

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,04\text{m} \cdot (0,09\text{m})^3}{12} = 2,43 \cdot 10^{-6} \text{m}^4$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12} = \frac{(0,04\text{m})^3 \cdot 0,09\text{m}}{12} = 0,480 \cdot 10^{-6} \text{m}^4$$

$$I_{yz} = 0$$

Kuormitustason suuntakulma α :

$$\alpha = -30^\circ$$

Taivutusmomentit:

$$M_z = M \cos \alpha = 200\text{Nm} \cdot \cos(-30^\circ) = 100\sqrt{3}\text{Nm}$$

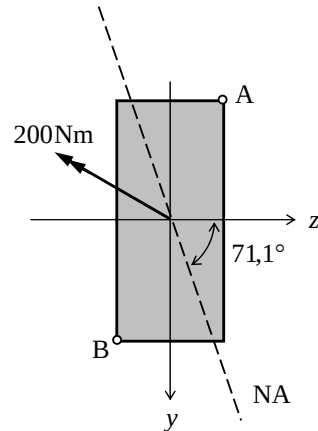
$$M_y = M \sin \alpha = 200\text{Nm} \cdot \sin(-30^\circ) = -100\text{Nm}$$

Koordinaatti y_0 ja kulma β :

$$y_0 = 0$$

$$\beta = \arctan \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{M_z I_y - M_y I_{zy}} = \arctan \frac{-100 \text{ Nm} \cdot 2,43 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}{100\sqrt{3} \text{ Nm} \cdot 0,480 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} = -71,1^\circ$$

Oheiseen kuvaan on piirretty neutraaliakseli (NA). Sen avulla nähdään, että suurin ja pienin normaalijännitys saadaan pisteissä A ja B, joiden koordinaatit ovat $y_A = -45 \text{ mm}$, $z_A = 20 \text{ mm}$ ja $y_B = 45 \text{ mm}$, $z_B = -20 \text{ mm}$.

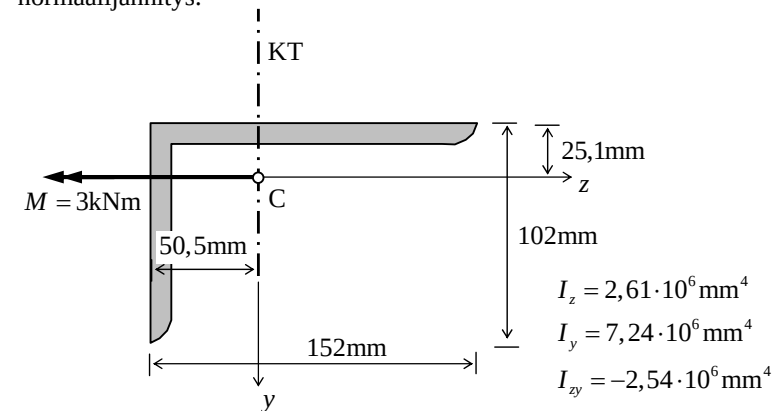


Suurin ja pienin normaalijännitys:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{M_z}{I_z} y_A + \frac{M_y}{I_y} z_A \\ &= \frac{100 \cdot \sqrt{3} \text{ Nm}}{2,43 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} \cdot (-0,045 \text{ m}) + \frac{-100 \text{ Nm}}{0,480 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} \cdot 0,020 \text{ m} \\ &= -7,66 \text{ MPa} = \underline{\underline{\sigma_{\min}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{M_z}{I_z} y_B + \frac{M_y}{I_y} z_B \\ &= \frac{100 \cdot \sqrt{3} \text{ Nm}}{2,43 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} \cdot 0,045 \text{ m} + \frac{-100 \text{ Nm}}{0,480 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} \cdot (-0,020 \text{ m}) \\ &= 7,66 \text{ MPa} = \underline{\underline{\sigma_{\max}}} \end{aligned}$$

Esimerkki 5.2: Palkkia, jonka poikkileikkaus on kuvan mukainen, kuormitetaan pystytasossa siten, että taivutusmomentilla tarkasteltavassa poikkileikkauksessa on arvo $M = 3 \text{ kNm}$. Määritetään suurin ja pienin normaalijännitys.



Taivutusmomentit:

$$M_z = \underline{3 \text{ kNm}}$$

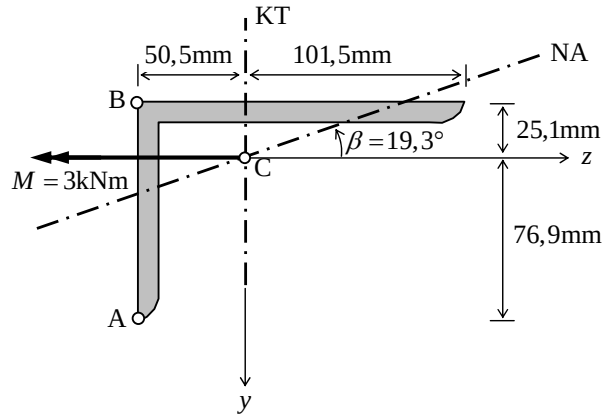
$$M_y = \underline{0}$$

Koordinaatti y_0 ja kulma β :

$$y_0 = -\frac{I_y I_z - I_{zy}^2}{M_z I_y - M_y I_{zy}} \frac{\bar{N}}{A} = 0$$

$$\beta = \arctan \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{M_z I_y - M_y I_{zy}} = \arctan \frac{-3 \text{ kNm} \cdot (-2,54) \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}{3 \text{ kNm} \cdot 7,24 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} = 19,3^\circ$$

Seuraavan sivun kuvaan on piirretty neutraaliakseli (NA). Sen avulla nähdään, että suurin ja pienin normaalijännitys saadaan pisteissä A ja B, joiden koordinaatit ovat $y_A = 76,9 \text{ mm}$, $z_A = -50,5 \text{ mm}$ ja $y_B = -25,1 \text{ mm}$, $z_B = -50,5 \text{ mm}$.



Normaalijännityksen lauseke:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{M_z I_y - M_y I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{I_y I_z - I_{zy}^2} z \\ &= \frac{3 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 7,24 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{7,24 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \cdot 2,61 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 - (-2,54 \cdot 10^6 \text{ mm}^4)^2} \cdot y \\ &\quad + \frac{-3 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot (-2,54 \cdot 10^6 \text{ mm}^4)}{7,24 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \cdot 2,61 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 - (-2,54 \cdot 10^6 \text{ mm}^4)^2} \cdot z \\ &= (1,745y + 0,612z) \frac{\text{N}}{\text{mm}^3}\end{aligned}$$

Normaalijännitykset pisteissä A ja B:

$$\begin{aligned}\sigma_A &= (1,745y_A + 0,612z_A) \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} = [1,745 \cdot 76,9 + 0,612 \cdot (-50,5)] \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ &= \underline{\underline{103,3 \text{ MPa} = \sigma_{\max}}} \\ \sigma_B &= (1,745y_B + 0,612z_B) \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} = [1,745 \cdot (-25,1) + 0,612 \cdot (-50,5)] \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ &= \underline{\underline{-74,7 \text{ MPa} = \sigma_{\min}}}\end{aligned}$$

5.3 Poikkileikkauksen sydänavalue

Tarkastellaan pilaria (vrt. kuva 5.2), johon vaikuttaa **epäkeskinen puristusvoima** P . Kysytään, missä alueessa P voi sijaita, ettei poikkileikkaukseen tulisi vetorasituksia. Kuvan 5.2a mukaisen pilarin osan x-akselin suuntaiseksi voimatasapainoyhtälöksi sekä momentti-tasapainoyhtälöiksi z- ja y-akselien suhteen saadaan

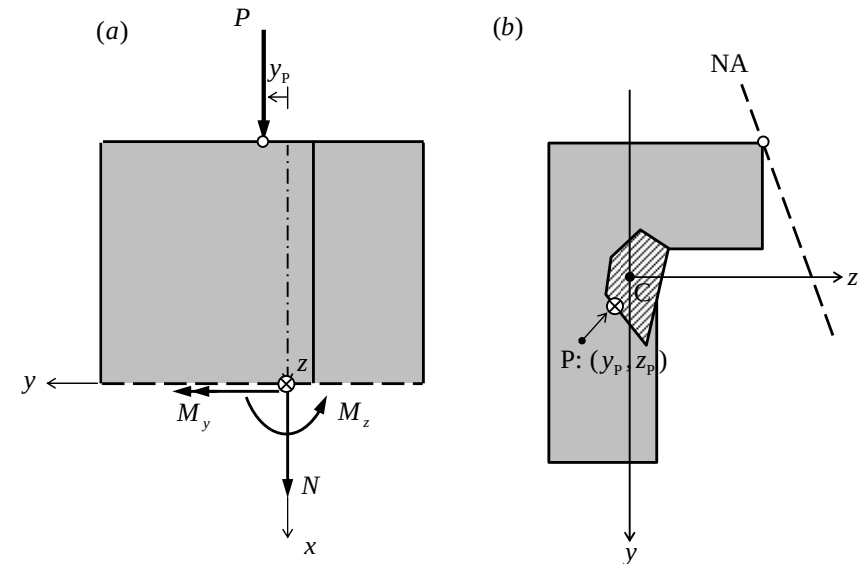
$$N + P = 0, \quad M_z + P y_p = 0, \quad M_y + P z_p = 0, \quad (5.15)$$

joista seuraa poikkileikkauksen jännitysresultanteille tulokset

$$N = -P, \quad M_z = -P y_p, \quad M_y = -P z_p. \quad (5.16)$$

Kaavan (5.8) perusteella poikkileikkauksen normaalijännitys on

$$\sigma(y, z) = -\frac{P}{A} \left(1 + A \frac{I_y y_p - I_{zy} z_p}{I_y I_z - I_{zy}^2} y + A \frac{I_z z_p - I_{zy} y_p}{I_y I_z - I_{zy}^2} z \right). \quad (5.17)$$



Kuva 5.2: Epäkeskisesti puristettu pilari ja sen sydänavalue.

Asettamalla σ nolaksi saadaan neutraaliakselin yhtälö, joka voidaan saattaa muotoon

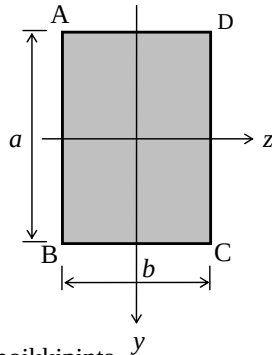
$$1 + A \frac{I_y y_p - I_{zy} z_p}{I_y I_z - I_{zy}^2} y + A \frac{I_z z_p - I_{zy} y_p}{I_y I_z - I_{zy}^2} z = 0, \quad 1 + \frac{y_p y}{I_z / A} + \frac{z_p z}{I_y / A} = 0 \quad (I_{zy} = 0) \quad (5.18)$$

Jos neutraaliakseli sivuaa poikkileikkauksen reunaa leikkaamatta sitä missään kohden, poikkileikkaus on pelkästään puristettu. Vetävän normaalivoiman tapauksessa poikkileikkaus olisi vastaavasti pelkästään vedetty.

Ne normaalivoiman vaikutuspisteet, joita vastaavat neutraaliakselit sivuavat poikkileikkauksen pintaa, muodostavat suljetun käyrän. Sen rajoittamaa aluetta kutsutaan **poikkileikkauksen sydänelueeksi**. Sydänelueen määritelmästä seuraa:

- Sydänelueen sisällä tai reunalla sijaitseva normaalivoima aiheuttaa poikkileikkaukseen vain yhdenmerkkisiä jännityksiä.
- Poikkipinnan pintakeskiö on sydänelueen sisällä.

Sydänelueen nurkkapisteet voidaan konstruoida määrittämällä vuorotellen koordinaatit y_p, z_p siten, että neutraaliakseli kulkee poikkileikkauksen kahden nurkkapisteen kautta leikkaamatta poikkipintaa. Tämä tapahtuu sijoittamalla kyseisten nurkkapisteen koordinaatit neutraaliakselin yhtälöön ja ratkaisemalla saadusta yhtälöparista koordinaatit y_p, z_p .



Kuva 5.3: Suorakaidepoikkipinta

Esimerkiksi kuvan 5.3 suorakaidepoikkipinnan tapauksessa, kun pinta-ala, jäyhyysmomentit ja tulomomentti ovat

$$A = ab, \quad I_z = \frac{a^3 b}{12}, \quad I_y = \frac{ab^3}{12}, \quad I_{yz} = 0 \quad (5.19)$$

ja neutraaliakselin yhtälö (5.18) saa aluksi muodon

$$1 + \frac{12 y_p}{a^2} y + \frac{12 z_p}{b^2} z = 0. \quad (5.20)$$

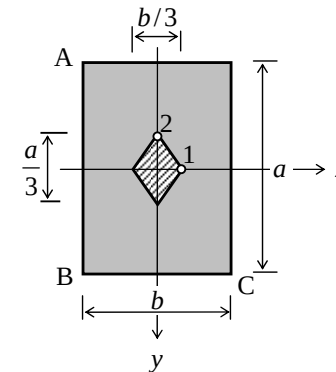
Kun nurkkapisteiksi valitaan A: $(-a/2, -b/2)$ ja B: $(+a/2, -b/2)$, saadaan

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{6 y_p}{a} - \frac{6 z_p}{b} &= 0 \\ 1 + \frac{6 y_p}{a} - \frac{6 z_p}{b} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} y_p = 0 \\ z_p = \frac{b}{6} \end{cases} \Rightarrow \text{Piste 1} \quad (5.21)$$

Kun nurkkapisteiksi valitaan B: $(+a/2, -b/2)$ ja C: $(+a/2, +b/2)$, saadaan

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{6 y_p}{a} - \frac{6 z_p}{b} &= 0 \\ 1 + \frac{6 y_p}{a} + \frac{6 z_p}{b} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} y_p = -\frac{a}{6} \\ z_p = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Piste 2} \quad (5.22)$$

Näin saimme kuvan 5.4 sydänelueen kaksi nurkkapistettä 1 ja 2. Jatkamalla samaan tapaan saadaan muut nurkkapisteet.



Kuva 5.4: Suorakaidepoikkipinnan sydänelue.

6. Useasta materiaalista koostuva sauva

6.1 Vedetty tai puristettu suora sauva

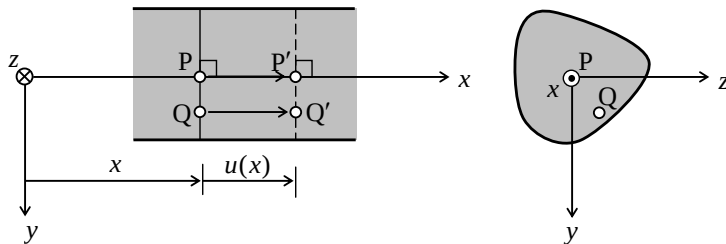
Suoran sauvan sanotaan olevan **puhtaan vedon tai puristuksen** alainen, jos siihen vaikuttava kuormitus aiheuttaa sauvan deformaation siten, että sauva **pysyy suorana** myös deformaation jälkeen¹. Tällöin sauvan **poikkileikkauksen jokainen piste siirtyy** palkin akselin suunnassa **yhtä paljon**. Sauvan yleisen pisteen Q: (x, y, z) siirtymä u on tällöin

$$u = u(x). \quad (6.1)$$

Tämä on myös sauvan akselin pisteen P siirtymä (kuva 6.1). Myös venymä $\varepsilon = \varepsilon_x$ on sauvan poikkileikkauksessa vakio ja sille on voimassa

$$\varepsilon(x) = u'(x) \quad (6.2)$$

Tämä on sauvan venymän ja siirtymän yhteys.



Kuva 6.1: Puhtaan vedon tai puristuksen alaisen sauvan poikkileikkauksen deformaation

Poikkileikkauksen mittojen ollessa sauvan pituuteen nähden pienet, voidaan jännityskomponenttien σ_y , σ_z ja τ_{yz} otaksua häviävän, jolloin yleistetystä Hooken laista poikkileikkauksen tarkasteltavassa pisteessä seuraa

¹ Vedetyn ja puristetun suoran sauvan deformaation tarkasteltiin yksityiskohtaisemmin Rakenteiden lujuusopin osan II luvussa 6.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \Rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x$$

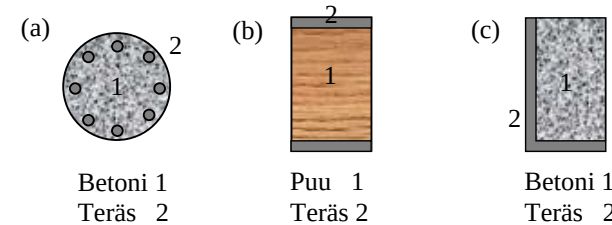
ja **normaalijännityksen ja venymän** yhteys on

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (6.3)$$

Tarkastellaan sauva, joka koostuu kahdesta tai useammasta **homogeenisesta osasauvasta** i , jotka ovat eri materiaalia. Tällaista sauvaan kutsutaan usein **liittosauvaksi**. Tällöin jokaisen osasauvan i poikkileikkauksessa on voimassa Hooken laki

$$\sigma_i = E_i\varepsilon_i. \quad (6.4)$$

Jos osasauvat on liitetty toisiinsa siten, että niiden välillä ei tapahdu liukumista, sanotaan **sauvan osien toimivan yhdessä**. Tässä tapauksessa sauvalle voidaan käyttää edellä tehtyä siirtymäotaksumaa.



Kuva 6.2: Kahdesta materiaalista koostuvia poikkileikkauksia: (a) ja (b) kaksoisymmetrisiä (c) epäsymmetrinen.

Koska käytännössä liittosauvat koostuvat tavallisesti kahdesta materiaalista, rajoitamme tarkastelun tässä kahden materiaalin tapaukseen. Useammasta materiaalista koostuvien poikkileikkausten käsittely ei tuo periaatteessa mitään uutta. Tyypillisiä kahdesta materiaalista 1 ja 2 koostuvia poikkileikkauksia on esitetty kuvissa 6.2. Materiaalit ovat lineaarisesti kimmoisia ja niiden kimmomoduulit ovat E_1 ja E_2 .

Koko poikkileikkauksen ja osapoikkileikkausten normaalivoimilla ja venymillä on tällöin yhteydet

$$N = N_1 + N_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (6.5)$$

Edellisen mukaan koko poikkileikkauksen normaalivoima on osapoikkileikkausten normaalivoimien summa ja jälkimmäisen mukaan poikkileikkausten venymät ovat yhtäsuuret.

Hooken laista ja kaavasta (6.5) seuraa osien 1 ja 2 normaalijännityksille

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E_1 \varepsilon_1 = E_1 \varepsilon \quad \text{osapinnalla } A_1, \\ \sigma_2 &= E_2 \varepsilon_2 = E_2 \varepsilon \quad \text{osapinnalla } A_2.\end{aligned}\quad (6.6)$$

Normaalivoimalle ja taivutusmomenteille saadaan nyt

$$\begin{aligned}N &= N_1 + N_2 = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 = (E_1 A_1 + E_2 A_2) \varepsilon, \\ M_y &= N_1 z_{c1} + N_2 z_{c2} = \sigma_1 A_1 z_{c1} + \sigma_2 A_2 z_{c2} = (E_1 A_1 z_{c1} + E_2 A_2 z_{c2}) \varepsilon, \\ M_z &= N_1 y_{c1} + N_2 y_{c2} = \sigma_1 A_1 y_{c1} + \sigma_2 A_2 y_{c2} = (E_1 A_1 y_{c1} + E_2 A_2 y_{c2}) \varepsilon.\end{aligned}\quad (6.7)$$

Käyttämällä kimmomoduulien suhteelle merkintää

$$n = \frac{E_2}{E_1}, \quad (6.8)$$

voidaan normaalivoiman ja taivutusmomenttien lausekkeet saattaa muotoon

$$\begin{aligned}N &= E_1 A_r \varepsilon, \\ M_y &= E_1 A_r z_{cr} \varepsilon, \\ M_z &= E_1 A_r y_{cr} \varepsilon,\end{aligned}\quad (6.9)$$

missä

$$y_{cr} = \frac{A_1 y_{c1} + n A_2 y_{c2}}{A_r}, \quad z_{cr} = \frac{A_1 z_{c1} + n A_2 z_{c2}}{A_r} \quad (6.10)$$

ja

$$A_r = A_1 + n A_2. \quad (6.11)$$

Pinta-ala A_r saadaan siis pinta-alan A_1 ja kimmomoduulien suhteella n kerrotun pinta-alan A_2 summana. Sitä kutsutaan tässä materiaalin 1 suhteen **redusoidun poikkipinnan pinta-alaksi**. Vastaavasti koordinaatit y_{rc} ja z_{cr} ovat **redusoidun poikkipinnan pintakeskiön** koordinaatit.

Jotta normaalijännityksen redusointituloksena olisi pelkkä voima, tulee taivutusmomenttien M_y ja M_z hävitä. Saamme redusoidun poikkipinnan pintakeskiön koordinaateille ehdot $y_{rc} = 0$ ja $z_{rc} = 0$. Näin koordinaatisto tulee asettaa materiaalin 1 suhteen redusoidun poikkipinnan pintakeskiöön. Päädyimme siis tulokseen, että liittosauvan **normaalivoiman vaikutuspiste** on materiaalin 1 suhteen **redusoidun poikkipinnan pintakeskiö** ja sauvan akseliksi valitaan siten **redusoidun poikkipinnan pintakeskiöakseli**.

Tavallisimmin vedetyn tai puristetun aksiaalisesti kuormitetun liittosauvan poikkileikkaus on **kaksoissymmetrinen**, jolloin redusoidun poikkipinnan pintakeskiö yhtyy symmetria-akseleiden leikkauspisteeseen.

Aksiaalisesti kuormitetun **liittosauvan normaalivoiman ja venymän yhteydeksi** saatiin siis

$$N = E_1 A_r \varepsilon, \quad (6.12)$$

missä tuloa $E_1 A_r$ kutsutaan **liittosauvan aksiaalijäykkyydeksi**.

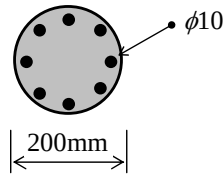
Kaavojen (6.6) ja (6.12) perusteella saadaan **liittosauvan** osasauvojen 1 ja 2 **normaalijännityksille** lausekkeet

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_r}, \quad \sigma_2 = n \frac{N}{A_r}. \quad (6.13)$$

Osapoikkipintojen 1 ja 2 normaalijännitykset σ_1 ja σ_2 ovat siis **vakioita**.

Vedetyn tai puristetun **liittosauvan** keskeiset yhtälöt ovat venymän ja siirtymän yhteys (6.3), normaalivoiman ja venymän yhteys (6.12) normaalijännityksen ja normaalivoiman yhteydet (6.13). Muussa suhteessa vedetyn tai puristetun **liittosauvan** yhtälöt ovat samanlaista kuin homogeenisen sauvan. Erona on vain se, että homogeenisen sauvan aksiaalijäykkyyden EA sijasta käytetään liittosauvan aksiaalijäykkyyttä $E_1 A_r$.

Esimerkki 6.1: Oheista betonipilaria kuormittaa keskeinen normaali-voima, jonka suuruus on 400kN. Määritä normaalijännitys betonissa ja teräksissä, kun teräksen kimmomoduuli on $E_s = 200\text{GPa}$ ja kimmo-
moduulien suhde on $E_s / E_c = 15$.



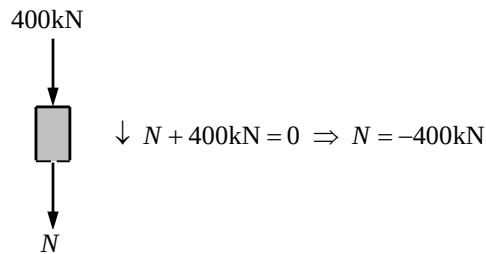
Koska poikkipinta ja raudoitus ovat symmetriset, yhtyy betonin suhteen redusoidun poikkipinnan pintakeskiö poikkileikkauksen keskipisteeseen. Poikkileikkaus on siis puhtaasti puristettu.

$$n = E_s / E_c = 15$$

$$A_s = 8 \cdot \pi \cdot 5^2 = 628,3\text{mm}^2$$

$$A_c = A - A_s = \pi \cdot 100^2 - 628,3 = 30787,6\text{mm}^2$$

$$A_r = A_c + nA_s = 30787,6 + 15 \cdot 628,3 = 40212,1\text{mm}^2$$



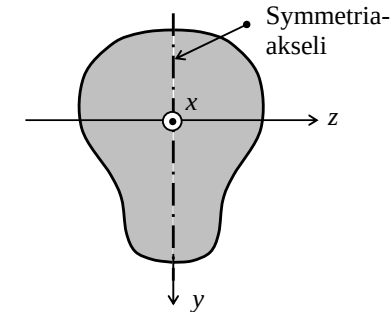
Saadaan:

$$\sigma_c = \frac{N}{A_r} = \frac{-400 \cdot 10^3 \text{ N}}{40212,1\text{mm}^2} = \underline{\underline{-9,95\text{MPa}}}$$

$$\sigma_s = n \frac{N}{A_r} = 15 \cdot (-9,95\text{MPa}) = \underline{\underline{-149,2\text{MPa}}}$$

6.2 Taivutettu palkki

Tarkastellaan palkkia, jonka poikkileikkaus on symmetrinen ja jonka koordinaatisto x, y, z on valittu siten, että x, y -taso yhtyy symmetriatasoon (kuva 6.3). Otaksutaan, että palkki on samanaikaisen vedon tai puristuksen sekä taivutuksen alainen, jolloin saatavat tulokset soveltuvat myös tasokehäsaavaan.

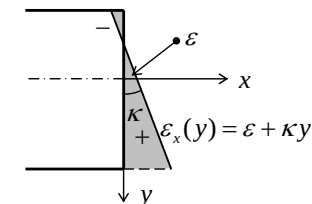


Kuva 6.3: Symmetrinen poikkileikkaus.

Palkin **poikkileikkauksen venymällä** on lauseke²

$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon + \kappa y, \quad (6.13)$$

missä ε on palkin **akselin venymä** ja κ on palkin **käyristymä**. Käyristymä on palkin akselin kaarevuussäteen ρ kääteisarvo. Venymä ε_x jakautuu siis palkin korkeussuunnassa y suoraviivaisesti (kuva 6.4). Käyristymä on siis tämän suoran kulmakerroin.



Kuva 6.4: Samanaikaisen vedon ja taivutuksen alaisen poikkileikkauksen venymäjakautuma

² Taivutetun sauvan deformaatiota tarkasteltiin yksityiskohtaisemmin Rakenteiden lujuusopin osan II luvussa 6.

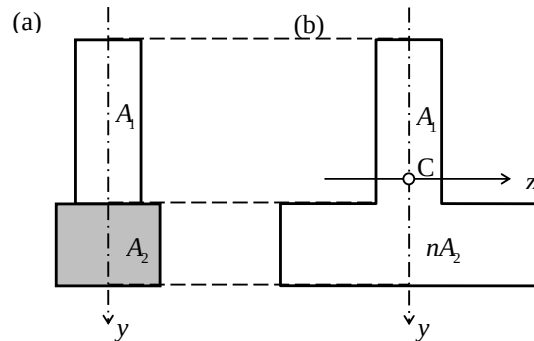
Tarkastellaan kahdesta homogeenisesta osapalkista muodostuvaa **liittopalkkia**. Palkin osapalkkien otaksutaan **toimivan yhdessä**, mikä merkitsee sitä, että niiden välillä ei tapahdu liukumista. Tässä tapauksessa palkin poikkileikkauksen venymä ε_x siis jakautuu korkeussuunnassa suoraviivaisesti (kuva 6.4) ja sen lauseke on yhtälön (6.13) mukainen.

Tarkastellaan kuvan 6.5a mukaista kahdesta materiaalista 1 ja 2 koostuvaa poikkileikkausta. Materiaalit ovat lineaarisesti kimmoisia ja niiden kimmomoduulit ovat E_1 ja E_2 .

Hooken laista saadaan osien 1 ja 2 normaalijännitykselle

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E_1 \varepsilon_x = E_1 (\varepsilon + \kappa y) \quad \text{osapinnalla } A_1, \\ \sigma_2 &= E_2 \varepsilon_x = E_2 (\varepsilon + \kappa y) \quad \text{osapinnalla } A_2.\end{aligned}\quad (6.14)$$

Normaalivoimalle N ja taivutusmomentille M saadaan nyt



Kuva 6.5: Kahdesta materiaalista koostuva palkki: (a) poikkileikkaus, (b) osapalkkipinnan 1 suhteen redusoitu poikkileikkaus.

$$\begin{aligned}N &= \int_A \sigma dA = \int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA \\ &= (E_1 \int_{A_1} dA + E_2 \int_{A_2} dA) \varepsilon + (E_1 \int_{A_1} y dA + E_2 \int_{A_2} y dA) \kappa \\ &= (E_1 A_1 + E_2 A_2) \varepsilon + (E_1 S_1 + E_2 S_2) \kappa,\end{aligned}\quad (6.15)$$

$$\begin{aligned}M &= \int_A \sigma y dA = \int_{A_1} \sigma_1 y dA + \int_{A_2} \sigma_2 y dA \\ &= (E_1 \int_{A_1} y dA + E_2 \int_{A_2} y dA) \varepsilon + (E_1 \int_{A_1} y^2 dA + E_2 \int_{A_2} y^2 dA) \kappa \\ &= (E_1 S_1 + E_2 S_2) \varepsilon + (E_1 I_1 + E_2 I_2) \kappa,\end{aligned}\quad (6.16)$$

missä A_1 ja A_2 ovat osapalkkipintojen pinta-alat, S_1 ja S_2 ovat niiden staattiset momentit sekä I_1 ja I_2 ovat niiden jäyhyysmomentit z-akselin suhteen.

Käyttämällä kimmomoduulien suhteelle merkintää

$$n = \frac{E_2}{E_1}, \quad (6.17)$$

normaalivoiman ja taivutusmomentin lausekkeet saadaan muotoon

$$N = E_1 A_r \varepsilon + E_1 S_r \kappa, \quad (6.18)$$

$$M = E_1 S_r \varepsilon + E_1 I_r \kappa, \quad (6.19)$$

missä

$$A_r = A_1 + nA_2, \quad S_r = S_1 + nS_2, \quad I_r = I_1 + nI_2 \quad (6.20)$$

ovat **materiaalin 1 suhteen redusoidun poikkipinnan** (vrt. kuva 6.5b), **pinta-ala**, **staattinen momentti** ja **jäyhyysmomentti** z-akselin suhteen.

Jos poikkileikkauskoordinaatiston **origo** asetetaan **redusoidun poikkipinnan pintakeskiöön** C_r , staattinen momentti S_r häviää. Tällöin palkin akseli (x-akseli) on **redusoidun poikkipinnan pintakeskiöakseli**. Palkin **normaalivoiman ja akselin venymän** sekä **taivutusmomentin ja käyristymän** yhteyksiksi näin valitussa koordinaatistossa saadaan

$$N = E_1 A_r \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{M}{E_1 A_r} \quad (6.21)$$

ja

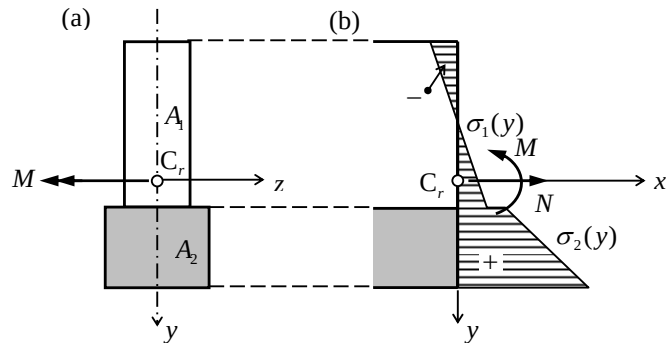
$$M = E_1 I_r \kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{M}{E_1 I_r}. \quad (6.22)$$

missä tuloja $E_1 A_r$ ja $E_1 I_r$ kutsutaan liittopalkin **aksiaalijäykkyydeksi** ja **taivutusjäykkyydeksi**.

Sijoittamalla kaavoista (6.21) ja (6.22) ratkaistut akselin venymän ja käyristymän lausekkeet yhtälöihin (6.14) saadaan normaalivoimaa ja taivutusmomenttia M vastaaville osien 1 ja 2 **normaalijännityksille** lausekkeet

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_r} + \frac{M}{I_r} y, \quad \sigma_2 = n \left(\frac{N}{A_r} + \frac{M}{I_r} y \right) = n \sigma_1. \quad (6.23)$$

Normaalijännitys σ jakautuu siis **osapoikkipinnoilla** palkin **korkeussuunnassa** y **suoraviivaisesti** (kuva 6.6). Suorien kulmakertoimet osapoikkipinnoilla 1 ja 2 ovat vastaavasti M/I_r ja nM/I_r .

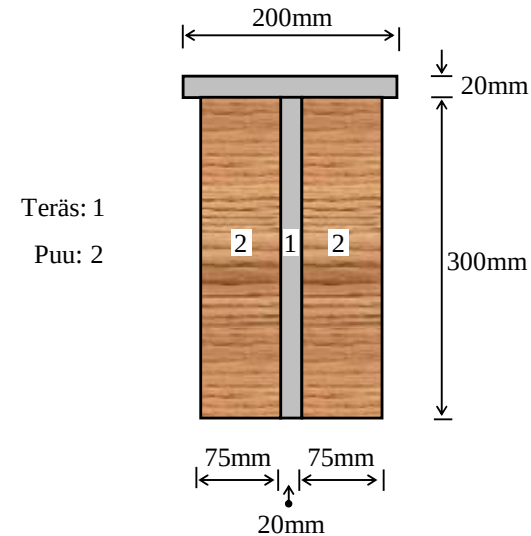


Kuva 6.6: Kahdesta materiaalista koostuva palkki: (a) poikkileikkaus, (b) poikkileikkauksen normaalijännityksen jakautuma

Jos kysymyksessä on puhdas taivutus, kuten poikittaisen kourman kuormittaman palkin tapauksessa $N=0$ ja osien 1 ja 2 normaalijännityksen lausekkeet saavat muodon

$$\sigma_1 = \frac{M}{I_r} y, \quad \sigma_2 = n \frac{M}{I_r} y = n \sigma_1. \quad (6.24)$$

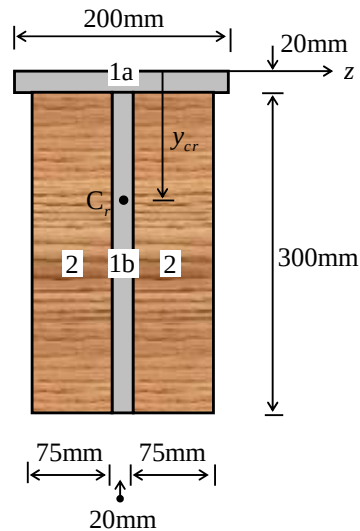
Esimerkki 6.2: Teräksistä T:n muotoista palkkia on vahvistettu pulttaamalla siihen kaksi tammilautaa. Puun ja teräksen kimmomoduulit ovat 12,5GPa ja 200GPa. Määritä suurin ja pienin normaalijännitys sekä puussa että teräksessä, kun liittopalkkiin vaikuttaa taivutusmomentti $M = 50 \text{ kNm}$.



Ratkaisu:

Kimmomoduulisuhde:

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{12,5 \text{ GPa}}{200 \text{ GPa}} = \frac{1}{16}$$



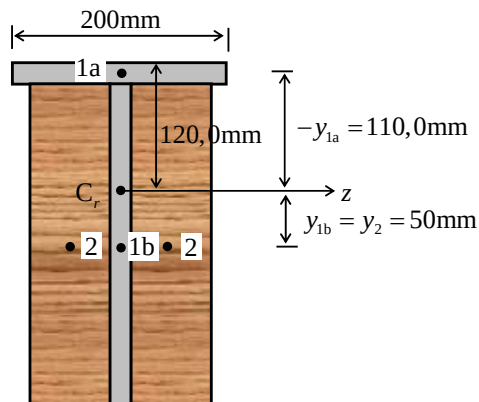
Muunnetun poikkipinnan pinta-ala ja pintakeskiö:

$$A_{1a} = 200 \cdot 20 = 4000 \text{ mm}^2, A_{1b} = 20 \cdot 300 = 6000 \text{ mm}^2, A_2 = 2 \cdot 75 \cdot 300 = 45000 \text{ mm}^2$$

$$A_r = A_{1a} + A_{1b} + nA_2 = 4000 + 6000 + 1/16 \cdot 45000 = 12812,5 \text{ mm}^2$$

$$y_{cr} = \frac{A_{1a}y_{1a} + A_{1b}y_{1b} + nA_2y_2}{A_r} = \frac{4000 \cdot 10 + 6000 \cdot 170 + 1/16 \cdot 45000 \cdot 170}{12812,5} = 120,0 \text{ mm}$$

Muunnetun poikkipinnan jäyhyysmomentti:
(Siirrytään pintakeskiökoordinaatistoon!)



Osapoikkipintojen jäyhyysmomentit z – akselin suhteen:

$$I_{z1a} = I_{z1a} + y_{1a}^2 A_{1a} = \frac{200 \cdot 20^3}{12} + (-110)^2 \cdot 4000 = 48,53 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{z1b} = I_{z1b} + y_{1b}^2 A_{1b} = \frac{20 \cdot 300^3}{12} + 50^2 \cdot 6000 = 60,00 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

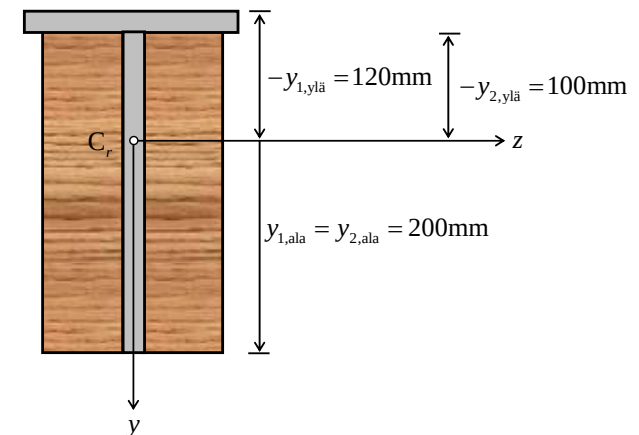
$$I_{z2} = I_{z2} + y_2^2 A_2 = 2 \cdot \frac{75 \cdot 300^3}{12} + 50^2 \cdot 45000 = 450,00 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Muunnetun poikkipinnan jäyhyysmomentti:

$$I_z \equiv I_{rz} = I_{z1a} + I_{z1b} + nI_{z2} = (48,53 + 60,00 + 1/16 \cdot 450,00) \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$= 136,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Teräksen jännitykset laipan yläreunassa ja uuman alareunassa:



$$\sigma_{1,ylä} = \frac{M}{I_r} y_{ylä} = \frac{50 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{136,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot (-120 \text{ mm}) = \underline{\underline{-43,9 \text{ MPa}}}$$

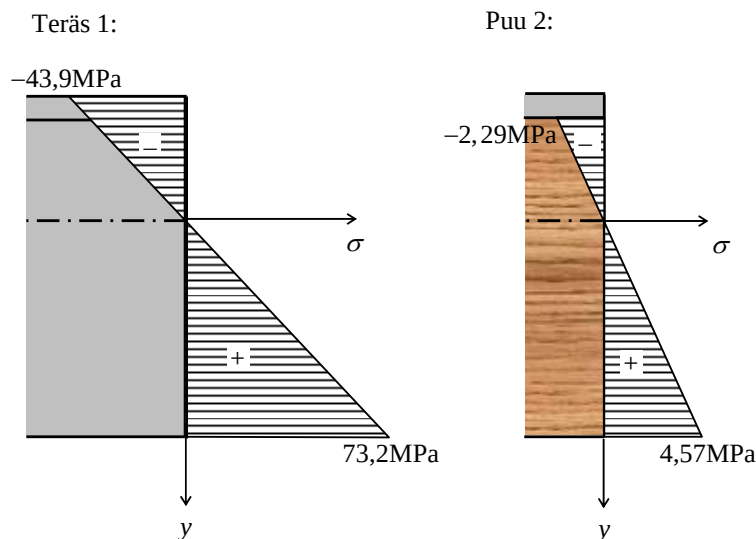
$$\sigma_{1,ala} = \frac{M}{I_r} y_{ala} = \frac{50 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{136,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot 200 \text{ mm} = \underline{\underline{73,2 \text{ MPa}}}$$

Puun jännitykset sen ylä- ja alareunassa:

$$\sigma_{2,y\ddot{a}} = n \frac{M}{I_r} y_{2,y\ddot{a}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{50 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{136,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot (-100 \text{ mm}) = \underline{\underline{-2,29 \text{ MPa}}}$$

$$\sigma_{2,ala} = n \frac{M}{I_r} y_{2,ala} = \frac{1}{16} \cdot \frac{50 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{136,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot 200 \text{ mm} = \underline{\underline{4,57 \text{ MPa}}}$$

Jännitysjaakaumat:



Huomautus: Muunnetun poikkipinnan poikkileikkaussuureet voidaan myös määrittää siten, että konstruoidaan kokonaan materiaalista 1 koostuva muunnettu poikkipinta kertomalla materiaalia 2 olevan poikkileikkauksen osan vaakamitat kimmomoduulisuhteella n . Muunnetun poikkipinnan poikkileikkaussuureet saadaan määrittämällä tämän poikkipinnan tavanomaiset poikkileikkaussuureet. Laskelma on seuraavanlainen:

Kerrotaan puuosan vaakamitat kertoimella $n = 1/16$.

Havaitaan, että muunnetun poikkipinnan uuma on vain 9,38mm teräs-poikkileikkauksen uumaa (20mm) leveämpi. Vahvistuksen vaikutus tulee siis tässä tapauksessa olemaan melko pieni.

Osapintojen poikkileikkaussuureita:

$$A_1 = 200 \cdot 20 = 4000 \text{ mm}^2,$$

$$A_2 = 29,38 \cdot 300 = 8814 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 12814 \text{ mm}^2,$$

Pintakeskiö:

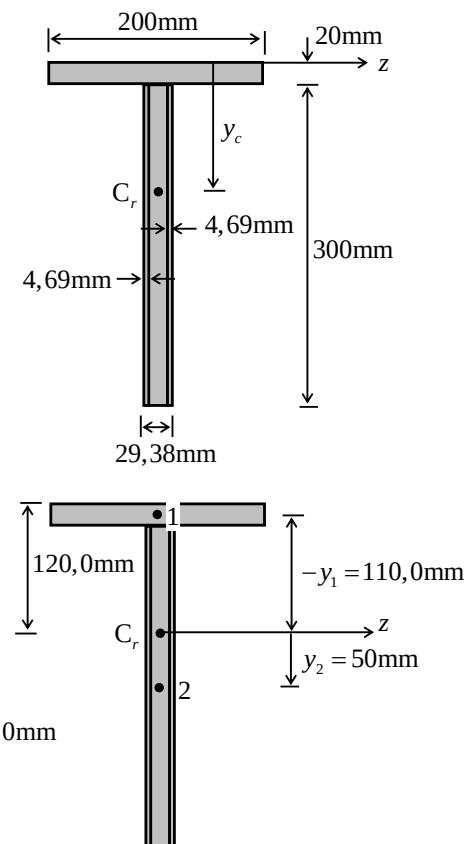
$$\begin{aligned} y_c &= \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} \\ &= \frac{4000 \cdot 10 + 8814 \cdot 170}{12814} \text{ mm} \approx 120,0 \text{ mm} \end{aligned}$$

Jäyhyysmomentti:

(Pintakeskiökoordinaatisto!)

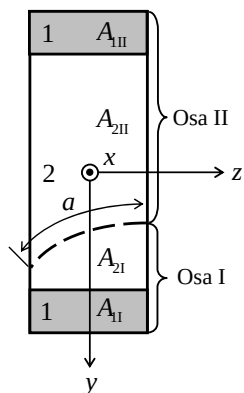
$$\begin{aligned} I_z &= I_{z1} + y_1^2 A_1 + I_{z2} + y_2^2 A_2 \\ &= \left[\frac{200 \cdot 20^3}{12} + (-110)^2 \cdot 4000 + \frac{29,38 \cdot 300^3}{12} + 50^2 \cdot 8814 \right] \text{ mm}^4 = \underline{\underline{136,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}} \end{aligned}$$

Tästä laskelma jatkuu kuten edellä.



6.3 Taivutetun palkin leikkausjännitykset

Tarkastellaan liittopalkkia, jonka poikkileikkaus muodostuu materiaaleista 1 ja 2 ja jonka poikkileikkaus on kuvan 6.7 mukainen. Ajatellaan palkki halkaistuksi sen pituussuunnassa kahteen osaan I ja II. Palkin **pituutta kohti laskettua leikkausvoimaa**, jolla osa II vaikuttaa osaan I, kutsutaan osien I ja II väliseksi **leikkausvuoksi** $q(x)$.



Kuva 6.7: Palkin poikkileikkaus ja sen osat I ja II

Leikkausvuolle saatiin Rakenteiden lujuusopin osan II luvussa 7 lauseke

$$q = \int_{A_I} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dA, \quad (6.25)$$

missä A_I on poikkipinnan osa I. Suorittamalla pinnan A_I yli tapahtuva integrointi kahdessa osassa ensin sen materiaalia 1 olevan osan A_{1I} ja sitten materiaalia 2 olevan osan A_{2I} yli saadaan

$$q = \int_{A_{1I}} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} dA + \int_{A_{2I}} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} dA. \quad (6.26)$$

Sijoittamalla tähän normaalijännityksen lausekkeet (6.24) saadaan

$$\begin{aligned} q &= \int_{A_{1I}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M}{I_r} y \right) dA + \int_{A_{2I}} \frac{\partial}{\partial x} \left(n \frac{M}{I_r} y \right) dA = \frac{\overbrace{M'(x)}^{Q(x)}}{I_r} \left(\overbrace{\int_{A_{1I}} y dA}^{S_{1I}} + n \overbrace{\int_{A_{2I}} y dA}^{S_{2I}} \right) \\ &= \frac{Q(x)}{I_r} (S_{1I} + nS_{2I}) \end{aligned} \quad (6.27)$$

Käytettiin hyväksi palkin momenttitasapainoyhtälöä $Q(x) = M'(x)$ ja staattisen momentin määrittelykaavaa.

Näin **lineaarisesti kimmoisen liittopalkin leikkausvuolle** poikkipinnan osan A_I määrittelemän palkin osan I ja palkin toisen osan II välisellä (ajatellulla) leikkauspinnalla saatiin lauseke

$$q(x) = \frac{Q(x)S_{rI}}{I_r}, \quad (6.28)$$

missä

$$S_{rI} = S_{1I} + nS_{2I} \quad (6.29)$$

on leikkauksen alapuoleisen poikkipinnan osan I redusoitu staattinen momentti z-akselin suhteen. Sen lausekkeessa (6.29) S_{1I} ja S_{2I} ovat poikkipinnan osan I materiaaleista 1 ja 2 koostuvien osapintojen staattiset momentit.

Ottamalla huomioon, että koko redusoidun poikkipinnan staattinen momentti S_r on osapintojen I ja II staattisten momenttien S_{rI} ja S_{rII} summa ja että se redusoidun poikkipinnan pintakeskiöön asetetussa koordinaatistossa häviää, saadaan

$$S_{rI} = -S_{rII}. \quad (6.30)$$

Näin osien I ja II välisen leikkausvuon lausekkeessa (6.28) voidaan staattisen momentin S_{rI} sijasta käyttää myös staattista momenttia S_{rII} , tällöin on kuitenkin vaihdettava myös etumerkki.

Tarkastellaan vielä kuvan 6.7 poikkileikkausta, joka on ajateltu leikatuksi kahteen osaan I ja II. Leikkauspinnalla vaikuttavalle keskimääräiselle leikkausjännitykselle saadaan

$$\bar{\tau} = \frac{q}{a}, \quad (6.31)$$

missä q on leikkausvuo ja a on leikkausviivan pituus poikkipinnalla (ks. kuva 6.7). **Keskimääräiselle leikkausjännitykselle** saadaan näin kaava

$$\bar{\tau} = \frac{QS_{rl}}{I_r a}. \quad (6.32)$$

Vastaavaan tapaan kuin homogeenisen palkin tapauksessa voidaan myös liittopalkin tapauksessa määrittää leikkausvoimasta Q aiheutuvalle leikkausjännitykselle τ_{xy} likiarvo, merkitsemällä se yhtä suureksi kuin tasolla y vaikuttava keskimääräinen leikkausjännitys. Toisin sanoen

$$\tau_{xy}(y) \approx \bar{\tau}(y) = \frac{q(y)}{b(y)}, \quad (6.33)$$

missä $q(y)$ on leikkausvuo ko. tasolla y ja $b(y)$ on sen leveys. Edellisen perusteella **palkin leikkausjännityksen** τ_{xy} likilauseke saa nyt muodon

$$\tau_{xy}(y) \approx \frac{QS_r(y)}{I_r b(y)}, \quad (6.34)$$

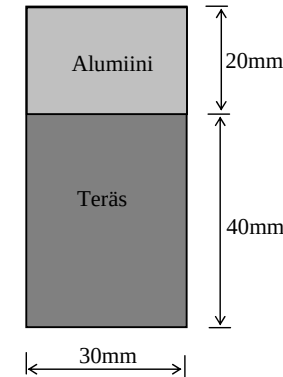
missä

$$S_r(y) = S_1(y) + nS_2(y) \quad (6.35)$$

on tason y alapuoleisen (y -akselin positiivisen suunnan puoleiselle) poikkipinnan osan muunnettu staattinen momentti z -akselin suhteen. Sen lausekkeessa (6.35) $S_1(y)$ ja $S_2(y)$ ovat tason y alapuoleisen poikkipinnan osan materiaaleista 1 ja 2 koostuvien osapintojen staattiset momentit z -akselin suhteen.

Huomautus: Leikkausjännityksen $\tau_{xy}(y)$ (itseisarvoltaan) suurimman arvon määrittämistä silmälläpitäen on hyvä pitää mielessä, että staattinen momentti $S_r(y)$ saa ääriarvon redusoidun poikkipinnan pintakeskiö-akselilla, ts. $S_{r,\max} = S_r(0)$.

Esimerkki 6.3: Terässauva ($E_s = 200\text{GPa}$) ja alumiinisauva ($E_a = 70\text{GPa}$) on liitetty yhteen siten, että ne muodostavat liittopalkin. Palkin poikkileikkauksessa vaikuttaa 20kN :n leikkausvoima. Määritä (a) keskimääräinen leikkausjännitys liitospinnalla ja (b) poikkileikkauksen suuri leikkausjännitys.



Ratkaisu:

Kimmoduulisuhde:

$$E_1 = E_s = 200\text{GPa},$$

$$E_2 = E_a = 70\text{GPa}.$$

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{70}{200} = 0,35$$

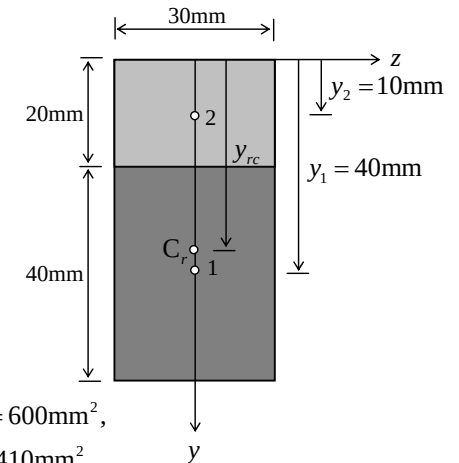
Muunnetun poikkipinnan pinta-ala:

$$A_1 = 30 \cdot 40 = 1200\text{mm}^2, \quad A_2 = 30 \cdot 20 = 600\text{mm}^2,$$

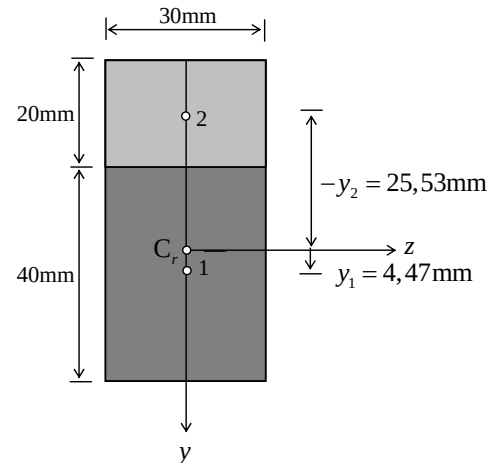
$$A_r = A_1 + nA_2 = 10200 + 0,35 \cdot 600 = 1410\text{mm}^2$$

Muunnetun poikkipinnan pintakeskiö:

$$y_{cr} = \frac{A_1 y_1 + nA_2 y_2}{A_r} = \frac{1200\text{mm} \cdot 40\text{mm} + 0,35 \cdot 600\text{mm} \cdot 10\text{mm}}{1410\text{mm}^2} = 35,53\text{mm}$$



Muunnetun poikki­pinnan jäyhyysmomentti:



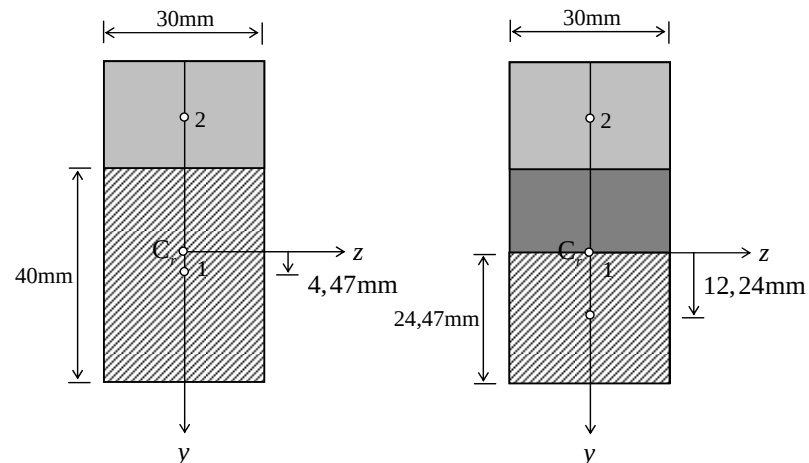
Osapintojen jäyhyysmomentit z – akselin suhteen:

$$I_{z1} = I_{z1} + y_1^2 A_1 = \frac{30 \cdot 40^3}{12} + 4,47^2 \cdot 1200 = 183977 \text{ mm}^4$$

$$I_{z2} = I_{z2} + y_2^2 A_2 = \frac{30 \cdot 20^3}{12} + (-25,53)^2 \cdot 600 = 411069 \text{ mm}^4$$

Muunnetun poikki­pinnan jäyhyysmomentti z – akselin suhteen:

$$I_z = I_{z1} + n I_{z2} = 183977 + 0,35 \cdot 411069 = 327851 \text{ mm}^4$$



$$S_{\text{liitos}} = 30 \cdot 40 \cdot 4,47 = 5364 \text{ mm}^3, \quad S(0) = 30 \cdot 24,47 \cdot 12,24 = 8982 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{\text{liitos}} = \frac{QS_{r,\text{liitos}}}{I_r b} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 5364 \text{ mm}^3}{327851 \text{ mm}^4 \cdot 30 \text{ mm}} = \underline{\underline{10,90 \text{ MPa}}}$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{QS_r(0)}{I_r b} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 8982 \text{ mm}^3}{327851 \text{ mm}^4 \cdot 30 \text{ mm}} = \underline{\underline{18,26 \text{ MPa}}}$$

7. Yli suhteellisuusrajan kuormitettu palkki

7.1 Peruskäsitteitä

Lineaarisesti kimmoinen, Hooken lakia

$$\sigma = E\varepsilon \quad (7.1)$$

noudattava, materiaalimalli on erittäin käyttökelpoinen erityisesti silloin, kun tarkastellaan rakenteen käyttäytymistä käyttötilassa. Lähtökohtana tässä on se, että suhteellisuusrajaa ei ylitetä, ja näin pysytään jännitys-muodonmuutoskäyrän lineaarisella alueella.

Jos halutaan tarkastella rakenteen käyttäytymistä koko kuormitusalueella tai tutkia sitä, minkälaisen kuorman se kestää, joudutaan Hooken lain otaksumasta (7.1) luopumaan. Tällöin jännityksen ja venymän riippuvuus esitetään muodossa

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad (7.2)$$

Seuraavassa tarkastelussa rajoitetaan kuormitustason suhteen symmetrisiin sauvoihin.

Teknisen taivutusteorian (Bernoulli-Euler palkki) mukaan poikkileikkauksen **venymä jakautuu lineaarisesti sauvan korkeussuunnassa**. Sille voidaan siis kirjoittaa

$$\varepsilon(y) = \varepsilon + \kappa y, \quad (7.3)$$

missä ε on palkin venymä z-akselilla ja κ on sen käyristymä.

Poikkileikkauksen jännitysresultantit ovat normaalivoima, leikkausvoima ja taivutusmomentti. Ne ovat poikkileikkauksessa vaikuttavien jännitysten redusointituloksen sen siihen asetetun y,z-koordinaatiston origoon. Toisin sanoen **normaalivoima on poikkileikkauksessa vaikuttavan normaalijännitys jakauman resultantti**, joten sille voidaan kirjoittaa

$$N = \int_A \sigma dA, \quad (7.4)$$

leikkausvoima on poikkileikkauksessa vaikuttavan leikkausjännitys jakauman resultantti, joten sille voidaan kirjoittaa

$$Q = \int_A \tau_{xy} dA \quad (7.5)$$

ja **taivutusmomentti on poikkileikkauksessa vaikuttavan normaalijännitys jakauman momentti z-akselin suhteen**, joten sille voidaan kirjoittaa

$$M = \int_A \sigma y dA \quad (7.6)$$

Näissä kaavoissa poikkileikkauksessa oleva y,z-koordinaatisto on edellä lineaarisesti kimmoisten sauvojen yhteydessä asetettu poikkileikkauksen pintakeskeiseen.

Poikkileikkauksen materiaalin ollessa homogeenista, samalla tavalla kuin venymä on kaavan (7.3) mukaan vain y:n funktio, on myös jännitys σ kaavan (7.2) perusteella pelkästään koordinaatin y funktio. Tämän vuoksi pinta-alkio dA kaavoissa (7.4) ja (7.6) voidaan esittää muodossa

$$dA = b(y)dy, \quad (7.7)$$

missä $b(y)$ on poikkileikkauksen korkeusasemasta riippuva leveys. Samanaikaisesti myös integrointialue muuttuu osaksi y-akselia rajojen ollessa poikkileikkauksen ylä- ja alareunan y-koordinaatit.

Palkin, johon kohdistuu vain poikittaisia kuormia, poikkileikkauksessa ei vaikuta normaalivoimaa, eli

$$N = 0. \quad (7.8)$$

Tällöin sanotaan, että poikkileikkaus on **puhtaan taivutuksen** alainen, ja ehtoa (7.8) voidaan kutsua **puhtaan taivutuksen ehdoksi**. Statiikasta tiedämme että, jos voimasysteemi (tässä tapauksessa poikkileikkauksen normaalijännitys σ) redusoituu pelkäksi momentiksi, tämä momentti on riippumaton redusointipisteestä. Tämä merkitsee sitä, että taivutusmomentti voidaan puhtaan taivutuksen tapauksessa laskea normaalijänni-

tyksen σ momenttina muunkin akselin, kuin poikkileikkauksen pintakeskiöakselin, suhteen. Kaavaa (7.6) voidaan siis tällöin käyttää myös silloin, kun y,z -koordinaatiston z -akseli yhtyy esimerkiksi poikkileikkauksen neutraaliakseliin tai vaikkapa sen yläreunaan.

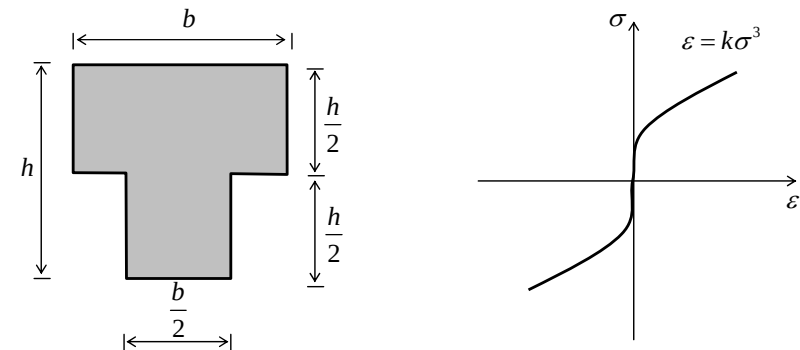
Seuraavassa rajoitutaan pääasiassa puhtaaseen taivutukseen. Ensin selvitetään kuinka voidaan määrittää annettua taivutusmomentin arvoa M vastaava poikkileikkauksen jännitysjaakauma $\sigma(y)$, jotta epälineaarista materiaalista koostuvan staattisesti määrätyn palkin jännitystila voitaisiin hallita. (b) Toiseksi tarkastellaan murtorajatilaa, jossa palkin poikkileikkaus menettää kantokykynsä, ja selostetaan kuinka kimmoisen ideaaliplastisen poikkileikkauksen ns. **täysplastinen momentti** voidaan määrittää. Tarkastelut suoritetaan pääasiassa esimerkkien valossa.

7.2 Epälineaarista materiaalista koostuvan puhtaan taivutuksen alaisen poikkileikkauksen jännitykset ja vaste

7.21 Käyräviivainen jännitys-muodonmuutosriippuvuus

Tarkastellaan aluksi palkkia, joka on pystytason (kuormitustaso, x,y -taso) suhteen symmetrinen, mutta vaakatason suhteen ei. Tälle tehtävälle on ominaista, että aluksi joudutaan määrittämään neutraaliakselin (NA) asema puhtaan taivutuksen ehtoa $N=0$ hyväksi käyttäen. Ensin käsittelemme esimerkin, jossa jännitys-muodonmuutosriippuvuus voidaan esittää yksinkertaisen polynomin avulla.

Esimerkki 7.1: Tarkastellaan palkkia, jonka poikkileikkaus ja jännitys-muodonmuutoskuvio ovat kuvan mukaiset. Määritetään (a) käyristymän riippuvuus taivutusmomentista, (b) taivutusmomenttia M vastaava poikkileikkauksen jännitysjaakauma sekä (c) suurin ja pienin jännitys.

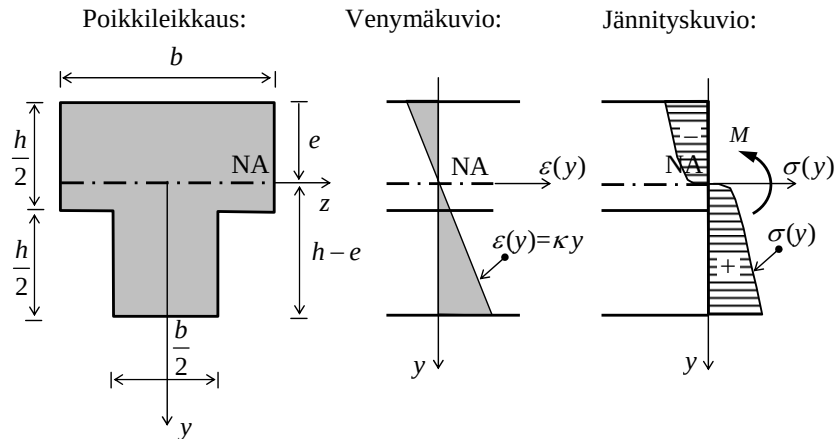


Jännitys-venymäriippuvuus:

$$\varepsilon = k\sigma^3 \Rightarrow \sigma = \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} \varepsilon^{\frac{1}{3}}$$

Venymäjakautmaa $\varepsilon(y) = \kappa y$ vastaava jännitysjaakauma:

$$\sigma(y) = \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$



Normaalivoima:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma(y) dA = \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} \sigma(y) b(y) dy = \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} \sigma(y) b dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma(y) \frac{b}{2} dy \\
 &= \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} b dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} \frac{b}{2} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b \left(2 \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} y^{\frac{1}{3}} dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^{\frac{h}{2}} y^{\frac{1}{3}} dy \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b \left[2 \left| \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} \right|_{-e}^{\frac{h-e}{2}} + \left| \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} \right|_{\frac{h-e}{2}}^{\frac{h}{2}} \right] \\
 &= \frac{3}{8} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b \left[2 \left(\frac{h}{2} - e \right)^{\frac{4}{3}} - 2e^{\frac{4}{3}} + (h-e)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{h}{2} - e \right)^{\frac{4}{3}} \right] \\
 &= \frac{3}{8} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b \left[\left(\frac{h}{2} - e \right)^{\frac{4}{3}} - 2e^{\frac{4}{3}} + (h-e)^{\frac{4}{3}} \right]
 \end{aligned}$$

Neutraaliakselin asema:

$$\begin{aligned}
 N &= 0 \Rightarrow \left(\frac{h}{2} - e \right)^{\frac{4}{3}} - 2e^{\frac{4}{3}} + (h-e)^{\frac{4}{3}} = 0 \\
 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{h} \right)^{\frac{4}{3}} - 2 \left(\frac{e}{h} \right)^{\frac{4}{3}} + \left(1 - \frac{e}{h} \right)^{\frac{4}{3}} &= 0.
 \end{aligned}$$

Määritetään yhtälön ratkaisu laskemalla sen vasemman puolen

$$f\left(\frac{e}{h}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{h}\right)^{\frac{4}{3}} - 2\left(\frac{e}{h}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(1 - \frac{e}{h}\right)^{\frac{4}{3}}$$

arvoja suhteen e/h eri arvoilla kunnes se on riittävällä tarkkuudella nolla. Saadaan

e/h	F
0,3	0,3368
0,4	-0,0369
0,39	$1,629 \cdot 10^{-4}$
0,391	$-3,555 \cdot 10^{-3}$
0,3905	$-1,696 \cdot 10^{-3}$
0,3901	$-2,089 \cdot 10^{-4}$

$$\Rightarrow \underline{e = 0,390h}.$$

Taivutusmomentti:

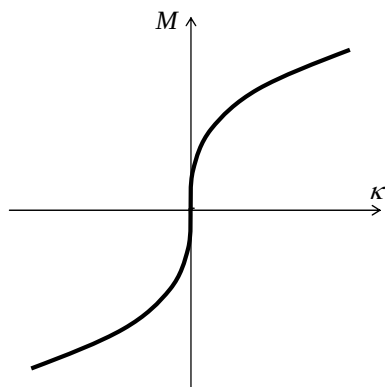
$$\begin{aligned}
 M &= \int_A \sigma(y) y dA = \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} \sigma(y) y b(y) dy = \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} \sigma(y) y b dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma(y) y \frac{b}{2} dy \\
 &= \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} y b dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} y \frac{b}{2} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b \left(2 \int_{-e}^{\frac{h-e}{2}} y^{\frac{4}{3}} dy + \int_{\frac{h-e}{2}}^{\frac{h}{2}} y^{\frac{4}{3}} dy \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b \left[2 \left| \frac{3}{7} y^{\frac{7}{3}} \right|_{-e}^{\frac{h-e}{2}} + \left| \frac{3}{7} y^{\frac{7}{3}} \right|_{\frac{h-e}{2}}^{\frac{h}{2}} \right] \\
 &= \frac{3}{14} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b \left[2 \left(\frac{h}{2} - e \right)^{\frac{7}{3}} + 2e^{\frac{7}{3}} + (h-e)^{\frac{7}{3}} - \left(\frac{h}{2} - e \right)^{\frac{7}{3}} \right] \\
 &= \frac{3}{14} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b h^{\frac{7}{3}} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{e}{h} \right)^{\frac{7}{3}} + 2 \left(\frac{e}{h} \right)^{\frac{7}{3}} + \left(1 - \frac{e}{h} \right)^{\frac{7}{3}} \right] \\
 &= \frac{3}{14} \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b h^{\frac{7}{3}} \left[\left(\frac{1}{2} - 0,390 \right)^{\frac{7}{3}} + 2(0,390)^{\frac{7}{3}} + \left(1 - 0,390 \right)^{\frac{7}{3}} \right] \\
 \Rightarrow M &= 0,1165 \left(\frac{\kappa}{k}\right)^{\frac{1}{3}} b h^{\frac{7}{3}}.
 \end{aligned}$$

Käyrityksen ja taivutusmomentin yhteys:

$$M = 0,1165 \left(\frac{\kappa}{k} \right)^{\frac{1}{3}} b h^{\frac{7}{3}} \Rightarrow \left(\frac{\kappa}{k} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{M}{0,1165 b h^{\frac{7}{3}}} \Rightarrow \kappa = k \left(\frac{M}{0,1165 b h^{\frac{7}{3}}} \right)^3$$

$$\Rightarrow \kappa = 632,4 \frac{k}{b^3 h^7} M^3.$$

Nähdään, että käyrityksen ja taivutusmomentin riippuvuus on kolmannen asteen polynomi. Oheinen kuva havainnollistaa asiaa.



Jännitusjakauma:

$$\sigma(y) = \left(\frac{\kappa}{k} \right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{0,1165^3 b^3 h^7} M^3 \right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \frac{M}{0,1165 b h^{\frac{7}{3}}} y^{\frac{1}{3}} = 8,584 \frac{M}{b h^{\frac{7}{3}}} y^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \sigma(y) = 8,584 \frac{M}{b h^2} \left(\frac{y}{h} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Maksimi- ja minimijännitys:

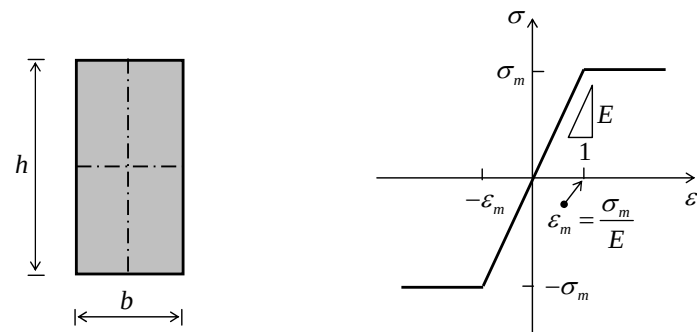
$$\sigma_{\max} = \sigma(h - e) = 8,584 \frac{M}{b h^{\frac{7}{3}}} (h - e)^{\frac{1}{3}} = 8,584 \frac{M}{b h^{\frac{7}{3}}} (h - 0,390h)^{\frac{1}{3}} = 7,280 \frac{M}{b h^2}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma(-e) = 8,584 \frac{M}{b h^2} (-e)^{\frac{1}{3}} = 8,584 \frac{M}{b h^{\frac{7}{3}}} (-0,390h)^{\frac{1}{3}} = -6,272 \frac{M}{b h^2}.$$

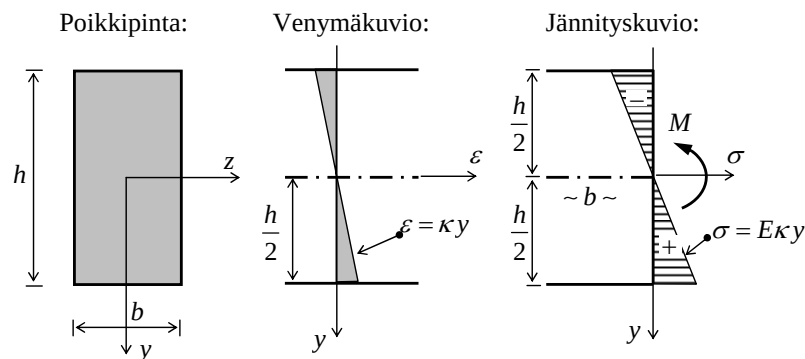
7.22 Kimmoinen ideaaliplastinen jännitys-muodonmuutosriippuvuus

Tarkastellaan nyt poikkileikkausta, joka on sekä pysty- että vaaka-akselin suhteen symmetrinen. Jos tämän lisäksi jännitys-muodonmuutoskäyrä on samanlainen sekä vedossa että puristuksessa, puhtaan taivutuksen ehto $N=0$ toteutuu, kun neutraaliakseli yhtyy vaakasuoraan symmetria-akseliin. Tässä tapauksessa käsittely yksinkertaistuu melkoisesti, koska neutraaliakselin aseman määrittäminen jää pois.

Esimerkki 7.2: Tarkastellaan suorakaidepalkkia, jonka materiaali on kimmoista ja ideaaliplastista. Sen poikkileikkaus ja jännitys-muodonmuutoskuvio ovat kuvan mukaiset. Määritetään käyrityksen κ riippuvuus taivutusmomentista M . Määritetään lopuksi rajatarkasteluna $\kappa \rightarrow \infty$ poikkileikkauksen täysplastinen momentti M_p .



(a) Kimmoisen taivutus:

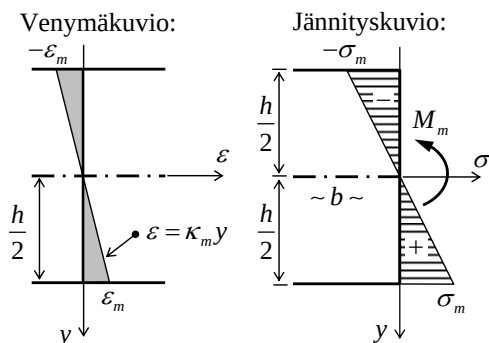


Taivutusmomentti:

$$M = \int_A \sigma y dA = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma y b dy = Eb\kappa \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = Eb\kappa \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = E \frac{bh^3}{12} \kappa.$$

Myötökäyristymä ja myötömomentti:

Poikkileikkauksen **myötökäyristymällä** κ_m tarkoitetaan sitä käyristymän arvoa, jolla poikkileikkaus alkaa myötää ja **myötömomentilla** M_m vastaavaa taivutusmomentin arvoa.



$$\varepsilon\left(\frac{h}{2}\right) \equiv \kappa_m \frac{h}{2} = \varepsilon_m \Rightarrow \kappa_m = 2 \frac{\varepsilon_m}{h} = 2 \frac{\sigma_m}{Eh}.$$

$$M_m = E \frac{bh^3}{12} \kappa_m = E \frac{bh^3}{12} \cdot 2 \frac{\sigma_m}{Eh} = \frac{1}{6} \sigma_m b h^2.$$

Kun $0 \leq |M| \leq M_m$, on poikkipinnan taivutusmomentti-käyristymäyhteys kaavan (a) mukainen.

Näin olemme saaneet palkin **taivutusmomentti-käyristymäyhteydelle**, kun $0 \leq |\kappa| \leq \kappa_m$, tuloksen

$$M = E \frac{bh^3}{12} \kappa. \quad (a)$$

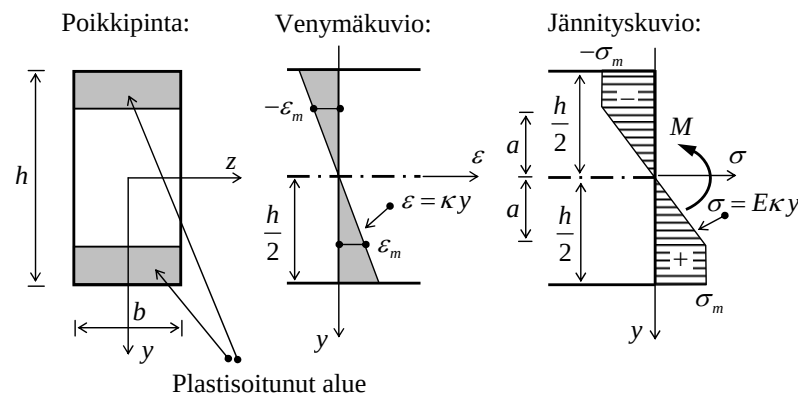
Kääntäen saadaan tästä palkin **käyristymä-taivutusmomenttiyhteydelle**, kun $0 \leq |M| \leq M_m$, tuloksen

$$\kappa = \frac{12}{Eb h^3} M. \quad (b)$$

Huomautus: Koska suorakaidepoikkipinnan jähyysmomentti on $I = bh^3/12$, nähdään, että lausekkeet (a) ja (b) ovat tutut lineaarisesti kimmoisen palkin taivutusmomentin ja käyristymän yhteydet

$$M = EI \kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{M}{EI}.$$

(b) Osittain plastisoitunut poikkileikkaus:



Merkitään plastisoituneen alueen reunan etäisyyttä neutraaliakselista symbolilla a . Sille saadaan

$$\varepsilon(a) = \kappa a = \varepsilon_m \Rightarrow a = \frac{\varepsilon_m}{\kappa} = \frac{\sigma_m}{E\kappa}. \quad (c)$$

Taivutusmomentti:

$$M = \int_A \sigma y dA = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma y b dy = \int_{-h/2}^{-a} \sigma y b dy + \int_{-a}^a \sigma y b dy + \int_a^{h/2} \sigma y b dy$$

$$\begin{aligned}
&= -\sigma_m b \int_{-h/2}^{-a} y dy + Eb\kappa \int_{-a}^a y^2 dy + \sigma_m b \int_a^{h/2} y dy \\
&= \sigma_m b \left(- \int_{-h/2}^{-a} y dy + \frac{1/a}{\sigma_m} \frac{Eb\kappa}{\sigma_m} \int_{-a}^a y^2 dy + \int_a^{h/2} y dy \right) \\
&= \sigma_m b \left(- \int_{-h/2}^{-a} \frac{y^2}{2} + \frac{1}{a} \int_{-a}^a \frac{y^3}{3} + \int_a^{h/2} \frac{y^2}{2} \right) = \sigma_m b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{a^2}{3} \right) = \sigma_m b \left[\frac{h^2}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_m}{E\kappa} \right)^2 \right] \\
&= \sigma_m b h^2 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_m}{Eh\kappa} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Näin olemme saaneet palkin **taivutusmomentti-käyristymäyhteydelle**, kun $\kappa \geq \kappa_m$, tuloksen

$$M = \sigma_m b h^2 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_m}{Eh\kappa} \right)^2 \right].$$

Kun käyristymä on negatiivinen, saadaan vastaavasti, kun $\kappa \leq -\kappa_m$, tulos

$$M = -\sigma_m b h^2 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_m}{Eh\kappa} \right)^2 \right].$$

Tulokset voidaan yhdistää palkin **taivutusmomentti-käyristymäyhteydeksi**, kun $|\kappa| \geq \kappa_m$

$$M = \text{sgn}(\kappa) \sigma_m b h^2 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_m}{Eh\kappa} \right)^2 \right]. \quad (d)$$

missä $\text{sgn}(\kappa)$ tarkoittaa käyristymän κ merkkiä.

Kääntäen saadaan palkin **käyristymä-taivutusmomenttiyhteydeksi**, kun $|M| \geq M_m$, lauseke

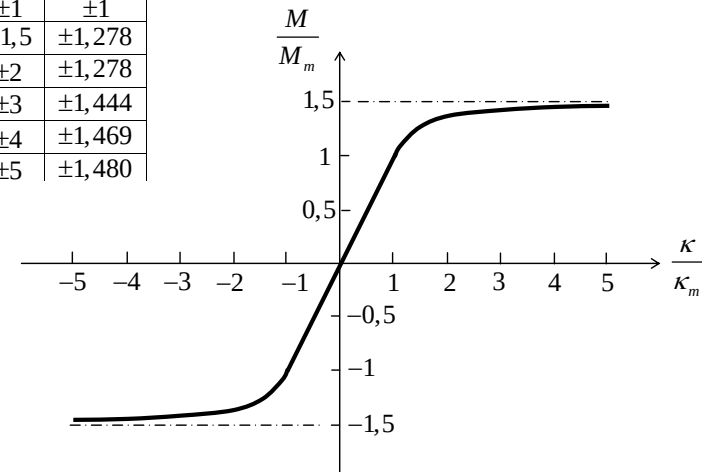
$$\kappa = \text{sgn}(M) \frac{\sigma_m}{Eh} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{3|M|}{\sigma_m b h^2}}}. \quad (e)$$

Taivutusmomentti-käyristymäriippuvuuden kuvaaja:

Sijoittamalla kaavaan (b) ja (d) $\sigma_m b h^2 = 6M_m$ ja $\sigma_m / Eh = \kappa_m / 2$ saadaan

$$\frac{M}{M_m} = \frac{\kappa}{\kappa_m} \quad 0 \leq \frac{\kappa}{\kappa_m} \leq 1; \quad \frac{M}{M_m} = \text{sgn}(\kappa) \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_m}{\kappa} \right)^2 \right], \quad \frac{\kappa}{\kappa_m} \geq 1.$$

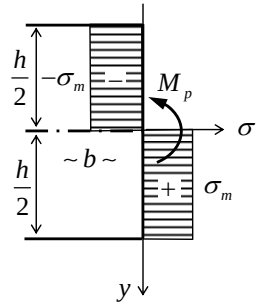
$\frac{\kappa}{\kappa_m}$	$\frac{M}{M_m}$
0	0
± 1	± 1
$\pm 1,5$	$\pm 1,278$
± 2	$\pm 1,278$
± 3	$\pm 1,444$
± 4	$\pm 1,469$
± 5	$\pm 1,480$



Määritetään seuraavaksi rajatarkastelulla se taivutusmomentin M arvo, jolla poikkileikkauksen käyristymä κ kasvaa rajatta. Kyseistä taivutusmomentin raja-arvoa kutsutaan poikkileikkauksen **täysplastisen momentiksi** ja merkitään symbolilla M_p . Kaavan (d) perusteella saadaan

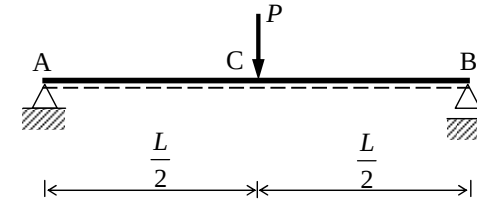
$$M_p = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} M = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \sigma_m b h^2 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_m}{Eh\kappa} \right)^2 \right] = \underline{\underline{\frac{1}{4} \sigma_m b h^2}}.$$

Oheiseen kuvioon on piirretty poikkileikkauksen täysplastista momenttia M_p ja **rajatilaa** $\kappa \rightarrow \infty$ vastaava jännityskuvio.



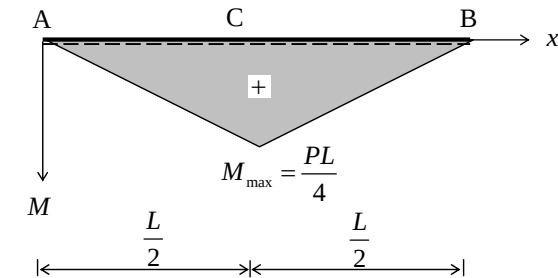
Täysplastinen momentti on edellisen sivun kuvion momentti-käyristymäkuvaajan vaakasuoran asymptootin ordinaatta. Kuviosta nähdään myös, että $M_p = 1,5M_m$ eli suorakaidepoikkipinnan täysplastinen momentti on sen myötömomenttiin nähden 1,5-kertainen.

Esimerkki 7.3: Tarkastellaan oheista palkkia, jota kuormittaa pistekuorma P sen keskipisteessä C . Määritetään (a) palkin rajakuorma P_p sekä (b) sen plastisoitunut alue, rajatilassa.



Ratkaisu:

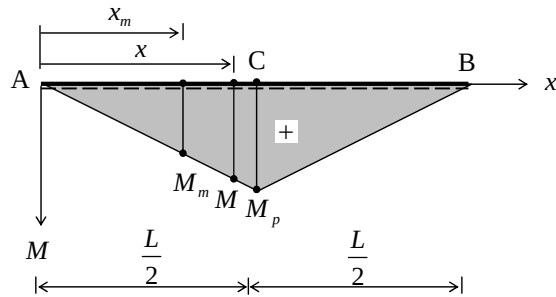
Palkin M -kuvio:



Rajatilassa palkin suurin taivutusmomentti on täysplastisen momentin suuruinen eli $M_{\max} = M_p$, joten saamme

$$\frac{P_p L}{4} = \frac{1}{4} \sigma_m b h^2 \Rightarrow \underline{\underline{P_p = \frac{\sigma_m b h^2}{L}}}$$

Taivutusmomenttikuvio rajatilassa on siis oheisen kuvan mukainen. Merkitään sen pisteen (pisteen C vasemmalla puolella) x -koordinaattia, jossa taivutusmomentti on myötömomentin suuruinen, symbolilla x_m .



Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan

$$\frac{x_m}{L/2} = \frac{M_m}{M_p} = \frac{1}{1,5} \Rightarrow x_m = \frac{L}{3}$$

Vastaava piste on symmetrian vuoksi myös pisteen C oikealla puolella. Poikkileikkaus on siis plastisoitunut palkin keskimmäisen kolmanneksen alueella. Taivutusmomentin lausekkeesta tällä alueella saadaan

$$M = \overbrace{\sigma_m b h^2}^{4M_p} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_m}{E h \kappa} \right)^2 \right] \Rightarrow \frac{M}{M_p} = 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \Rightarrow \frac{2x}{L} = 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{a}{h} \right)^2.$$

Käytettiin hyväksi lausekkeitä

$$a = \frac{\sigma_m}{E \kappa}, \quad \frac{M}{M_p} = \frac{x}{L/2}$$

joista edellinen esiintyi esimerkissä 7.2 ja jälkimmäinen saadaan momenttikuvion yhdenmuotoisista kolmioista. Näin saamme lausekkeen

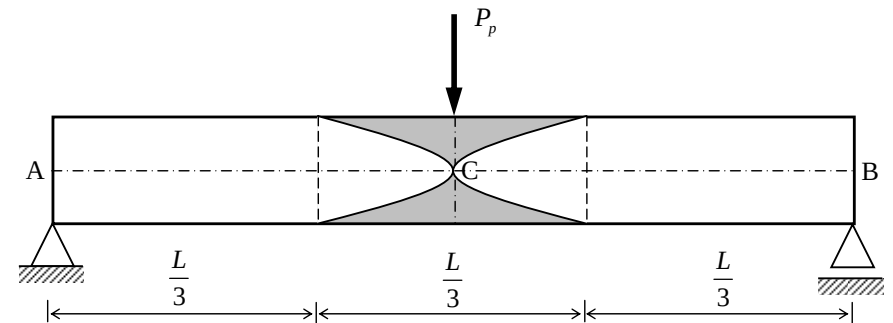
$$\frac{x}{L} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{a}{h} \right)^2.$$

Tämän lausekkeen avulla voidaan määrittää sen poikkileikkauksen asema x , jonka plastisoituneiden osien reunojen etäisyydet palkin akselist ovat a .

Oheisessa taulukossa on laskettu vastinpisteitä:

a/h	0,5	0,375	0,25	0,125	0
x/L	1/3	0,406	0,458	0,490	0,5

Oheinen kuva, jonka pystymittakaava on liioiteltu, esittää palkin plastisoituneen alueen rajatilassa:

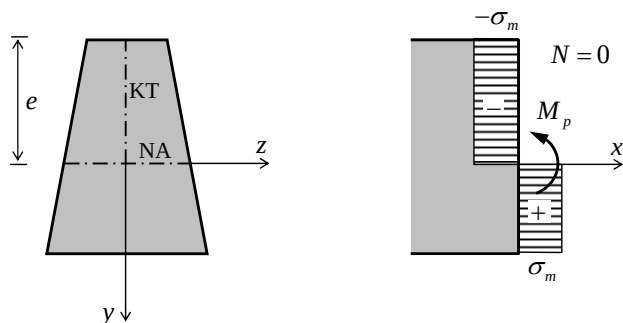


7.3 Kimmoisen ideaalplastisen poikkileikkauksen täysplastinen momentti

7.31 Puhtaan taivutuksen alaisen poikkileikkauksen täysplastinen momentti

Edellä olemme määrittäneet täysplastisen momentin M_p arvon kimmoiselle ideaalplastiselle suorakaidepoikkileikkaukselle ja esittäneet kyseistä rajatilaa vastaavan jännitys jakauman. Koska poikkileikkauksen täysplastinen momentti on rakenteiden suunnittelun kannalta varsin keskeinen suure, esittelemme tässä lyhyesti sen määrittämistä kimmoiselle ideaalplastiselle poikkileikkaukselle sekä määrittelemme joitakin aihepiiriin liittyviä käsitteitä.

Tarkastellaan kuvan 7.1 (a) mukaista kuormitustason (x, y -taso) suhteen symmetristä poikkileikkausta. Kuvassa 7.1 (b) on esitetty poikkileikkauksen rajatilaa vastaava jännitys jakauma.



Kuva 7.1: (a) Symmetrinen poikkileikkaus ja sen (b) rajatilaa vastaava jännitys jakauma

Poikkileikkauksen normaalivoimalle saadaan

$$N = \int_A \sigma dA = \int_{A_{ala}} \sigma_m dA + \int_{A_{ylä}} (-\sigma_m) dA = \sigma_m \left(\int_{A_{ala}} dA - \int_{A_{ylä}} dA \right) = \sigma_m (A_{ala} - A_{ylä}). \quad (7.9)$$

Puhtaan taivutuksen ehdosta $N = 0$ seuraa nyt neutraaliakselin aseman e määrittämiseksi ehto

$$A_{ala} = A_{ylä}, \quad (7.10)$$

missä A_{ala} ja $A_{ylä}$ ovat neutraaliakselin (NA) ala- ja yläpuolelle jäävien poikkipinnan A osien pinta-alat. Todetaan siis, että NA jakaa poikkipinnan kahteen yhtä suureen osaan.

Poikkileikkauksen taivutusmomentille, joka siis on täysplastisen momentin suuruinen, saadaan

$$M_p = \int_A \sigma y dA = \int_{A_{ala}} \sigma_m y dA + \int_{A_{ylä}} (-\sigma_m) y dA = \sigma_m \left(\int_{A_{ala}} y dA - \int_{A_{ylä}} y dA \right) = \sigma_m (S_{ala} - S_{ylä}) = \sigma_m (S_{ala} + |S_{ylä}|), \quad (7.11)$$

missä S_{ala} ja $S_{ylä}$ ovat poikkipinnan ala- ja yläpuoleisen osan staattiset momentit NA:n (z -akselin) suhteen. Yhtälöketjun viimeinen yhtäsuuruus perustuu siihen, että $S_{ylä}$ on negatiivinen.

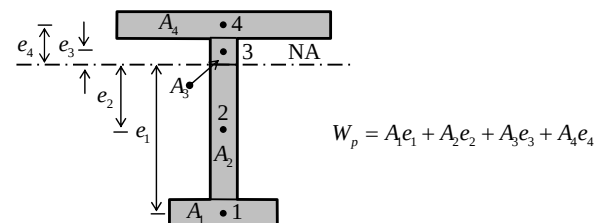
Näin poikkileikkauksen täysplastiselle momentille voidaan kirjoittaa

$$M_p = \sigma_m W_p, \quad (7.12)$$

missä

$$W_p = S_{ala} + |S_{ylä}|. \quad (7.13)$$

Suuretta W_p kutsutaan poikkileikkauksen **plastiseksi taivutusvastukseksi**. Samalla tavalla kuin erilaisten poikkileikkausten kimmoisille taivutusvastuksille W löytyy myös niiden plastisille taivutusvastuksille alan kirjallisuudesta valmiiksi taulukoituja kaavoja.



Kuva 7.2: Plastisen taivutusvastuksen määrittäminen

Jos poikkileikkaus voidaan jakaa osapintoihin, joita NA ei leikkaa ja joiden pinta-alat A_i ja pintakeskiöiden etäisyydet e_i NA:sta (vrt. kuva 4.2) tunnetaan, voidaan sen plastinen taivutusvastus laskea kaavalla

$$W_p = \sum_i A_i e_i. \quad (7.14)$$

Poikkileikkauksen myötömomentille voitiin kirjoittaa

$$M_m = \sigma_m W, \quad (7.15)$$

missä W on poikkipinnan siihen reunaan liittyvä kimmoisen taivutusvastus, missä jännitys on itseisarvoltaan suurin.

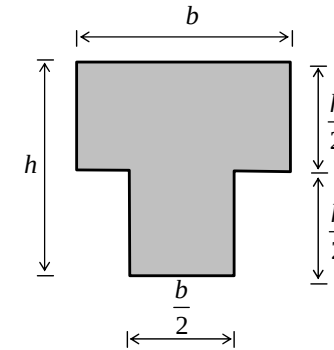
Poikkileikkauksen muotokerroin ϕ määritellään sen täysplastisen momentin ja myötömomentin suhteena, ts. sille saadaan

$$\phi = \frac{M_p}{M_m} = \frac{W_p}{W}. \quad (7.16)$$

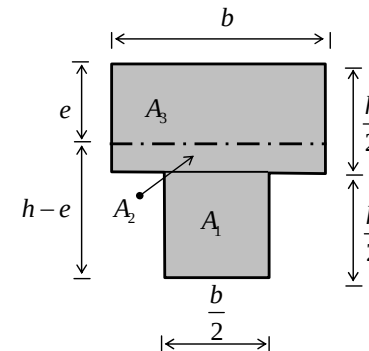
Se on siis myös plastisen ja kimmoisen taivutusvastuksen suhde.

Suorakaidepoikkipinnan täysplastiselle momentille ja myötömomentille saimme esimerkissä 7.2 $M_p = \sigma_m b h^2 / 4$ ja $M_m = \sigma_m b h^2 / 6$, joten sen muotokertoimelle saadaan $\phi = 1,5$. I-poikkileikkausten muotokerroin on suuruusluokkaa $\phi \approx 1,15$.

Esimerkki 7.4: Määritetään oheisen poikkileikkauksen täysplastinen momentti.



Neutraaliakselin asema:



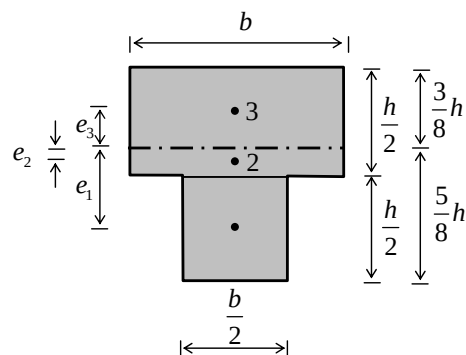
$$A_1 = \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4}bh, \quad A_2 = b \cdot \left(\frac{h}{2} - e\right) = \frac{1}{2}bh - be, \quad A_3 = be.$$

$$A_{ala} = A_{ylä} \Leftrightarrow A_1 + A_2 = A_3 \Rightarrow \frac{1}{4}bh + \frac{1}{2}bh - be = be \Rightarrow \underline{e = \frac{3}{8}h}.$$

Alat:

$$A_1 = \frac{1}{4}bh, \quad A_2 = \frac{1}{2}bh - b \cdot \frac{3}{8}h = \frac{1}{8}bh, \quad A_3 = b \cdot \frac{3}{8}h = \frac{3}{8}bh.$$

Plastinen taivutusvastus:



$$e_1 = \frac{5}{8}h - \frac{h}{4} = \frac{3}{8}h, \quad e_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - \frac{3}{8}h\right) = \frac{1}{16}h, \quad e_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}h = \frac{3}{16}h.$$

$$W_p = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 = \frac{1}{4}bh \cdot \frac{3}{8}h + \frac{1}{8}bh \cdot \frac{1}{16}h + \frac{3}{8}bh \cdot \frac{3}{16}h$$

$$= \frac{11}{64}bh^2.$$

Täysplastinen momentti:

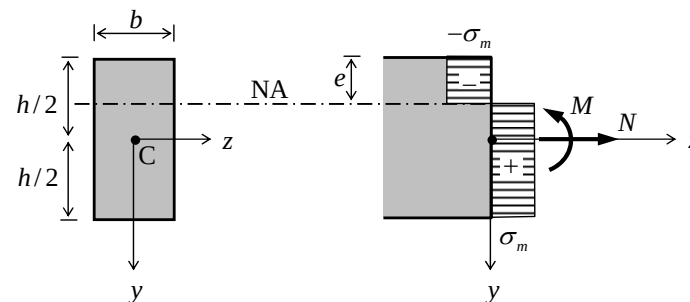
$$M_p = \sigma_m W_p = \frac{11}{64} \sigma_m b h^2.$$

7.32 Normaalivoiman vaikutus täysplastisen momenttiin

Kun kysymyksessä on normaalivoiman ja taivutusmomentin rasittama poikkileikkaus, sen kantokyky riippuu näistä molemmista. Tässä tapauksessa joudumme pitämään mielessä taivutusmomentin alkuperäisen määritelmän, ts. että se on poikkileikkauksen normaalijännitys jakauman momentti **pintakeskiöakselin** (eikä esimerkiksi neutraaliakselin) suhteen.

Esimerkki 7.4: Tutkitaan täysplastisen momentin riippuvuutta normaalivoimasta, kun kysymyksessä on (a) suorakaidepoikkipinta sekä (b) I-poikkipinta, jonka uuma otaksutaan niin ohueksi, että sen vaikutus voidaan jättää huomioon ottamatta ja laipan paksuus on 1/20 palkin korkeudesta.

(a) Suorakaidepoikkipinta:



Normaalivoimalle saadaan:

$$N = \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+e} (-\sigma_m) b dy + \int_{\frac{h}{2}-e}^{\frac{h}{2}} \sigma_m b dy = \sigma_m b \left(- \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+e} dy + \int_{\frac{h}{2}-e}^{\frac{h}{2}} dy \right)$$

$$= -\sigma_m b e + \sigma_m b (h - e) = \sigma_m b (h - 2e).$$

Sijoittamalla tähän $e=0$, saadaan **puhtaan vedon rasittaman poikkileikkauksen täysplastiselle normaalivoimalle**

$$N_p = \sigma_m b h.$$

Edellisten suhteelle saadaan

$$\frac{N}{N_p} = 1 - 2\frac{e}{h} \quad (a)$$

Taivutusmomentille saadaan:

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+e} (-\sigma_m) y b dy + \int_{-\frac{h}{2}+e}^{\frac{h}{2}} \sigma_m y b dy = \sigma_m b \left(- \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+e} y dy + \int_{-\frac{h}{2}+e}^{\frac{h}{2}} y dy \right) \\ &= \sigma_m b \left(- \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+e} + \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}+e}^{\frac{h}{2}} \right) = \sigma_m b \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{h}{2} + e \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{h}{2} + e \right)^2 \right] \\ &= \sigma_m b \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(-\frac{h}{2} + e \right)^2 \right] = \sigma_m b e (h - e) \end{aligned}$$

Sijoittamalla tähän $e = h/2$ saadaan **puhtaan taivutuksen alaisen palkin täysplastiselle momentille**

$$M_p = \frac{1}{4} \sigma_m b h^2.$$

Edellisten suhteelle saadaan

$$\frac{M}{M_p} = 4\frac{e}{h} \left(1 - \frac{e}{h} \right) \quad (b)$$

Yhtälöstä (a) saadaan

$$\frac{e}{h} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{N}{N_p} \right)$$

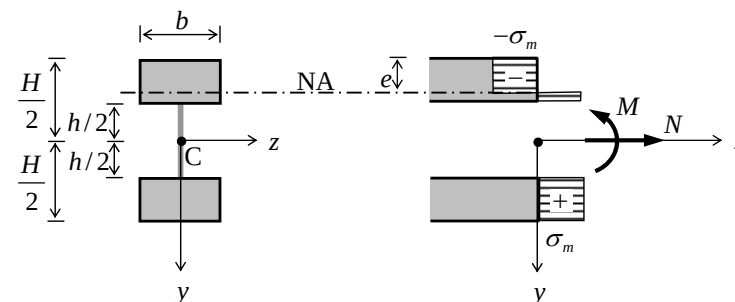
ja sijoittamalla tämä yhtälöön (b) saadaan

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{N}{N_p} \right)^2. \quad (c)$$

Jos N ja M toteuttavat tämän yhtälön, poikkileikkaus menettää kanto-kykynsä.

(b) I-poikkipinta:

(Kuvassa on poikkileikkauksen laipan paksuus esitetty suhteettoman suurena.)



Normaalivoimalle saadaan:

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\frac{H}{2}}^{-\frac{H}{2}+e} (-\sigma_m) b dy + \int_{-\frac{H}{2}+e}^{\frac{h}{2}} \sigma_m b dy + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_m b dy = \sigma_m b \left(- \int_{-\frac{H}{2}}^{-\frac{H}{2}+e} dy + \int_{-\frac{H}{2}+e}^{\frac{h}{2}} dy + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} dy \right) \\ &= -\sigma_m b e + \sigma_m b \left(\frac{H-h}{2} - e \right) + \sigma_m b \left(\frac{H-h}{2} \right) = \sigma_m b (H - h - 2e). \end{aligned}$$

Sijoittamalla tähän $e = 0$, saadaan **puhtaan vedon rasittaman poikkileikkauksen täysplastiselle normaalivoimalle**

$$N_p = \sigma_m b (H - h).$$

Edellisten suhteelle saadaan

$$\frac{N}{N_p} = 1 - \frac{2e}{H-h}$$

ja kun $h = 0,9H$ (laipan paksuus $H/20$) edelleen

$$\frac{N}{N_p} = 1 - \frac{20e}{H}. \quad (d)$$

Taivutusmomentille saadaan:

$$\begin{aligned} M &= \int_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}+e} (-\sigma_m) y b dy + \int_{\frac{H}{2}+e}^{\frac{h}{2}} \sigma_m y b dy + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_m y b dy \\ &= \sigma_m b \left(- \int_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}+e} y dy + \int_{\frac{H}{2}+e}^{\frac{h}{2}} y dy + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} y dy \right) \\ &= \sigma_m b \left(- \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}+e} + \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{H}{2}+e}^{\frac{h}{2}} + \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} \right) \\ &= \sigma_m b \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{H}{2} + e \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{H}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{h}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{H}{2} + e \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right] \\ &= \sigma_m b e (H - e). \end{aligned}$$

Sijoittamalla tähän $e = H/2 - h/2$, saadaan puhtaan taivutuksen alaisen palkin täysplastiselle momentille

$$M_p = \frac{1}{4} \sigma_m b (H^2 - h^2).$$

Edellisten suhteelle saadaan

$$\frac{M}{M_p} = \frac{4e(H-e)}{H^2 - h^2}$$

ja kun $h = 0,9H$ edelleen

$$\frac{M}{M_p} = \frac{4}{0,19} \frac{e}{H} \left(1 - \frac{e}{H} \right) \quad (e)$$

Yhtälöstä (d) saadaan

$$\frac{e}{h} = \frac{1}{20} \left(1 - \frac{N}{N_p} \right),$$

ja sijoittamalla tämä yhtälöön (e) saadaan

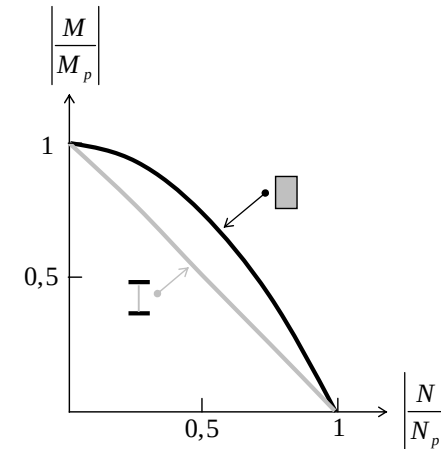
$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{18}{19} \frac{N}{N_p} - \frac{1}{19} \left(\frac{N}{N_p} \right)^2. \quad (f)$$

Jos N ja M toteuttavat tämän yhtälön, poikkileikkaus menettää kanto-kykynsä.

Lasketaan arvoja:

$\frac{N}{N_p}$	(a) $\frac{M}{M_p}$	(b) $\frac{M}{M_p}$
0	1	1
0,25	0,938	0,761
0,5	0,75	0,513
0,75	0,438	0,260
1	0	0

Kuvaajat:

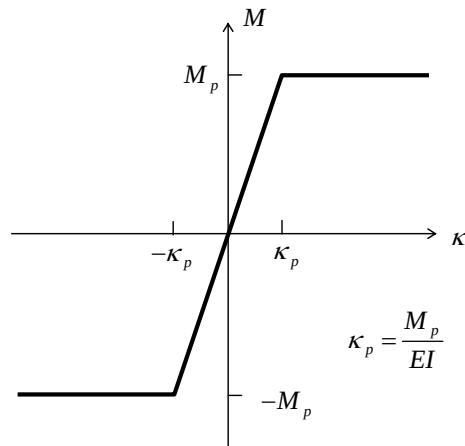


Käyrät on itseisarvomerkkien avulla laajennettu kattamaan myös tapaukset joissa normaalivoima, taivutusmomentti tai molemmat ovat negatiivisia. Tätä laajennusta ei tässä yhteydessä perustella.

7.4 Palkin plastinen rajakuorma

7.41 Palkin plastinen rajakuorma

Plastisella rajakuormalla tarkoitetaan suurinta kuormaa, jonka rakenne voi kantaa. Sitä määritettäessä poikkileikkauksen momentti-käyristymäriippuvuus (vrt. esimerkin 7.2 ao. kuva) korvataan kuvan 7.3 idealisoinnilla. Tällöin siihen palkin kohtaan, jossa täysplastinen momentti M_p (tai $-M_p$) saavutetaan, syntyy **plastinen nivel**. Plastiselle nivelelle on ominaista, että poikkileikkauksen taivutusmomentin ollessa itseisarvoltaan täysplastisen momentin suuruinen, sen käyristymä kasvaa rajatta.



Kuva 7.3: Momentti-käyristymäriippuvuuden idealisointi

Jos staattisesti määrätyn rakenteen kuormitusta lisätään siten, että jossakin palkin poikkileikkauksessa taivutusmomentin itseisarvo saavuttaa täysplastisen momentin arvon, kyseiseen poikkileikkaukseen syntyy plastinen nivel. Tällöin rakenteesta syntyy mekanismi ja se menettää kantokykynsä.

8. VÄÄNTÖ

8.1 Vääntötehtävän jaottelusta

Jos kuormitus aiheuttaa sauvan poikkileikkaukseen pelkän sen akselin suuntaisen momenttiresultantin, **vääntömomentin** M_t , sauva on puhtaan väännön rasittama. Useimmiten vääntö kuitenkin esiintyy yhdessä muiden rasitustilojen, vedon tai puristuksen sekä taivutuksen ja leikkauksen, kanssa. Vääntömomentti koostuu poikkipinnan suuntaisista leikkausjännityksistä τ_{xy} ja τ_{xz} .

Väännössä sauvan poikkileikkaustasot kiertyvät ns. **vääntökeskiön** (VK) ympäri ja samalla käyristyvät. Vääntökeskiö sijaitsee poikkileikkauksen symmetria-akselilla, joten kaksoissymmetrisen poikkileikkauksen tapauksessa se yhtyy poikkipinnan pintakeskiöön. Yleisesti tämä ei kuitenkaan pidä paikkaansa. Erityisesti ohutseinäisen avoimen poikkileikkauksen vääntökeskiö voi sijaita niin kaukana pintakeskiöstä, että tämä ero on otettava huomioon vääntömomentin arvoja laskettaessa. Tavallisimpien poikkileikkausten vääntökeskiöiden paikat löytyvät mitoituskäsikirjoista ja vääntöä käsittelevistä erikoisteoksista.

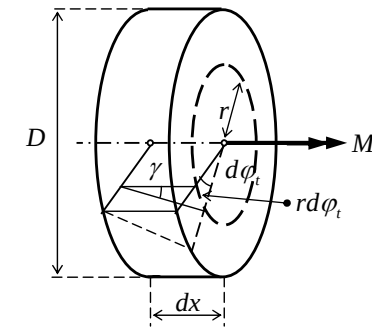
Sauvan geometrian ja reunaehtojen mukaan vääntötehtävät voidaan jaotella usealla tavoin. Tukemistavasta riippuen voi syntyä

- **vapaa vääntö**, jossa sauvan poikkileikkaustasojen käyristyminen ei ole estynyt
- **estetty vääntö**, jossa sauvan poikkileikkaustasojen käyristyminen on estynyt

Jälkimmäisessä sauvaan syntyy myös sen akselin suuntaisia normaali-jännityksiä. Poikkileikkausmuodon mukaan sauvat voidaan jakaa vääntötehtävien käsittelyä silmällä pitäen esim.

- **umpinaisen** tai **kotelomaisen** poikkileikkauksen omaaviin
- **suljetun** tai **avoimen** poikkileikkauksen omaaviin
- **paksu-** tai **ohutseinämaisiiin**

8.2 Ympyräpoikkileikkauksen vääntö



Kuva 8.1: Ympyräsyntierin väännön kinematiikkaa.

Tarkastellaan ympyräsyntierin muotoisen sauvan vääntöä, jonka kinematiikkaa on havainnollistettu kuvassa 8.1 Sauvan vääntyessä sen poikkileikkaustasot kiertyvät sauvan akselin ympäri ja vakioetäisyydellä r akselista olevat materialipinnat liikkuvat toistensa suhteen. Sauvan keskeissymmetriasta johtuen poikkileikkaustasot eivät tällöin käyristy, vaikka vapaassa väännössä yleensä näin tapahtuu. Kun kohdissa x ja $x+dx$ olevat poikkileikkaustasot kiertyvät toistensa suhteen kulman $d\phi_t$, sauvan **vääntymä** määritellään kaavalla

$$\theta = \frac{d\phi_t}{dx} = \phi_t' \quad (8.1)$$

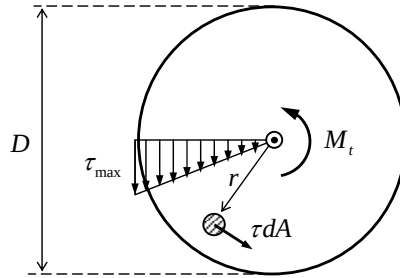
Etäisyydellä r sauvan akselista tapahtuu **liukuma**

$$\gamma(x) = \frac{rd\phi_t}{dx} = \phi_t' r = \theta r, \quad (8.2)$$

joka on siis suoraan verrannollinen etäisyyteen r sauvan akselista. Leikkauksen Hooken lain ja kaavan (8.2) perusteella saadaan leikkausjännitykselle

$$\tau = G\gamma = G\theta r. \quad (8.3)$$

Täten myös leikkausjännitys on suoraan verrannollinen etäisyyteen r poikkipinnan keskipisteestä (kuva 8.2).



Kuva 8.2: Ympyräpoikkileikkauksen leikkausjännitys ja vääntömomentti.

Vääntömomentti M_t on leikkausjännityksen momenttiresultantti, joten sille saadaan

$$M_t = \int_A \tau r dA. \quad (8.4)$$

Kun tähän sijoitetaan τ :n lauseke (8.3) saadaan edelleen

$$M_t = G\theta \int_A r^2 dA, \quad (8.5)$$

eli

$$M_t = GI_t \theta, \quad (8.6)$$

missä

$$I_t = \int_A r^2 dA = \int_0^{D/2} r^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_0^{D/2} r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{D/2} = \frac{\pi D^4}{32} \quad (8.7)$$

ja D on poikkileikkauksen halkaisija. Näin saatiin ympyräpoikkileikkauksisen sauvan **vääntömomentin ja vääntymän yhteys** muotoon

$$M_t = GI_t \theta \Leftrightarrow \theta = \frac{M_t}{GI_t}, \quad (8.8)$$

missä I_t on ympyräpoikkileikkauksisen sauvan **vääntöjäyhyysmomentti** ja sille saatiin lauseke

$$I_t = \frac{\pi D^4}{32}. \quad (8.9)$$

Tuloa GI_t kutsutaan sauvan **vääntöjäykkyydeksi**. Leikkausjännitykselle saadaan nyt kaavojen (8.2), (8.3) ja (8.8) perusteella kaava

$$\tau = \frac{M_t}{I_t} r. \quad (8.10)$$

Leikkausjännityksen suurin arvo saadaan sauvan pinnalla $r = D/2$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_t} \frac{D}{2}, \quad (8.11)$$

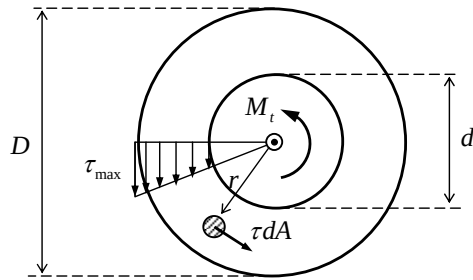
ja se voidaan esittää muodossa

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (8.12)$$

missä W_t on ympyräpoikkileikkauksen **vääntövastus**, jolla siis on lauseke

$$W_t = \frac{I_t}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16}. \quad (8.13)$$

8.3 Ympyrärengaspoikkileikkauksen vääntö



Kuva 8.3: Ympyrärengaspoikkipinnan leikkausjännitys ja vääntömomentti.

Tarkastellaan sauvaa, jolla on kuvan 8.3 mukainen ympyrärengaspoikkileikkaus. Leikkausjännitykselle τ saadaan tässäkin tapauksessa lauseke (8.3) ja vääntömomentin ja vääntymän yhteys saa muodon (8.8), missä vääntöjäyhyysmomentille saadaan nyt

$$I_t = \int_A r^2 dA = \int_{d/2}^{D/2} r^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{d/2}^{D/2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \quad (8.14)$$

eli siis

$$I_t = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}. \quad (8.15)$$

Leikkausjännitykselle saadaan kaava (8.10) ja sen suurin arvo (8.11) on sauvan pinnalla $r = D/2$ ja se voidaan esittää muodossa

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (8.16)$$

missä W_t on ympyrärengaspoikkileikkauksen **vääntövastus**, jolla siis on lauseke

$$W_t = \frac{I_t}{D/2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}. \quad (8.17)$$

Huomautus: Ympyrä- ja ympyrärengaspoikkileikkauksen vääntöjäyhyysmomentti on kaavojen (8.7) ja (8.14) perusteella yhtä suuri kuin kyseisten poikkileikkausten polaarinen jäyhyysmomentti

$$I_p = \int_A r^2 dA$$

Tämä yhtäsuuruus ei kuitenkaan päde muuntyyppisille poikkileikkauksille.

8.4 Mielivaltaisen poikkileikkauksen vapaa vääntö

8.41 Siirtymäotaksuma ja käyristymisfunktio

Yleisessä tapauksessa väännetyin sauvan poikkileikkaus ei pysy tasona, vaan käyristyy. Tämä merkitsee sitä, että sauvan yleinen piste (x, y, z) saa x -akselin suuntaisen siirtymän u , joka vaihtelee myös koordinaattien y ja z funktiona. Sille otaksutaan esitys

$$u(x, y, z) = \theta(x)\psi(y, z). \quad (8.18)$$

missä

$$\theta(x) = \varphi'_t(x) \quad (8.19)$$

on vääntymä ja funktiota $\psi(y, z)$ kutsutaan **käyristymisfunktioiksi**. Edelleen otaksutaan, että sauvan poikkileikkaus (tai itse asiassa sen projektiio y, z -tasolla) kiertyy vääntökeskiön ympäri kuin jäykkä levy. Tällöin yleisen pisteen (x, y, z) siirtymille v ja w saadaan

$$v(x, y, z) = -\varphi_t(x)z, \quad w(x, y, z) = \varphi_t(x)y. \quad (8.20)$$

Kaavojen (8.18) ja (8.20) mukaisen siirtymäotaksuman väännetyille sauvalle on ensimmäisenä esittänyt De Saint Venant vuonna 1856, ja sen vuoksi seuraavassa esitettävää vapaan väännön teoriaa kutsutaan **Saint Venant'in vääntöteoriaksi**.

8.42 Liukumien ja leikkausjännitykset

Sijoittamalla siirtymien lausekkeet (8.18) ja (8.20) kiinteän aineen mekaniikan liukumien γ_{xy} ja γ_{xz} siirtymien avulla ilmaistuihin lausekkeisiin saadaan

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta \frac{\partial \psi}{\partial y} - \varphi'_t z = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right), \quad (8.21)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta \frac{\partial \psi}{\partial z} + \varphi'_t y = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)$$

Sijoittamalla ne venymän ε_x lausekkeeseen saadaan vastaavasti

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \theta' \psi.$$

Vastaava sijoitus muiden muodonmuutoskomponenttien lausekkeisiin antaa tuloksiksi $\varepsilon_y = 0$, $\varepsilon_z = 0$ ja $\gamma_{yz} = 0$. Nähdään siis, että puhtaassa väännössä esiintyy vain liukumien γ_{xy} ja γ_{xz} sekä venymä ε_x . Leikkauksen Hooken lain perusteella saadaan leikkausjännityksille τ_{xy} ja τ_{xz}

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right), \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right). \quad (8.22)$$

Tarkastellaan nyt sauvan osaa, jolla ei ole ulkoista vääntävää jakautunutta momenttia m , eikä myöskään vääntäviä pistemomenteja. Tällöin sauva-alkion tasapainoyhtälö on $M'_t = 0$, vääntymän derivaatalle saadaan $\theta' = M'_t / GI_t = 0$ ja aksiaaliselle venymälle saadaan $\varepsilon_x = 0$. Koska tässä tapauksessa kaikki venymät ja liukuma γ_{yz} ovat nollia, ovat myös (Hooken lain perusteella) kaikki normaalijännitykset sekä leikkausjännitys τ_{yz} nollia, ts. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$. Ainoat nollasta eroavat jännityskomponentit ovat siis kaavan (8.22) leikkausjännitykset.

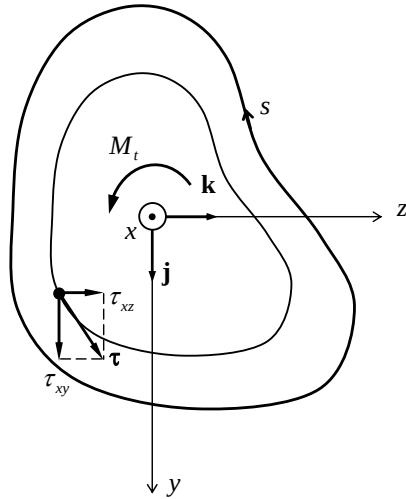
Vapaassa väännössä otaksutaan siinäkin tapauksessa, että sauvalle on ulkoista vääntävää kuormitusta, että $\varepsilon_x = 0$, jolloin ainoat nollasta eroavat jännityskomponentit ovat kaavan (8.22) leikkausjännitykset. Päädyttiin siis siihen, että ainoat nollasta eroavat jännityskomponentit puhtaassa väännössä ovat leikkausjännitykset τ_{xy} ja τ_{xz} . Niitä kutsutaan myös **vääntöjännityksiksi**. Ne voidaan haluttaessa esittää vääntöjännitysvektorina (kuva 8.4)

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}, \quad (8.23)$$

ja sen itseisarvoa

$$\tau = |\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (8.24)$$

voidaan kutsua **resultoivaksi vääntöjännitykseksi**.



Kuva 8.4: Poikkileikkauksen vääntöjännitykset.

8.43 Leikkausjännitysten tasapainoyhtälö

Kuvan 8.5 mukaisen sauvasta irroitettun alkion x akselin suuntaiseksi tasapainoehdoksi saadaan

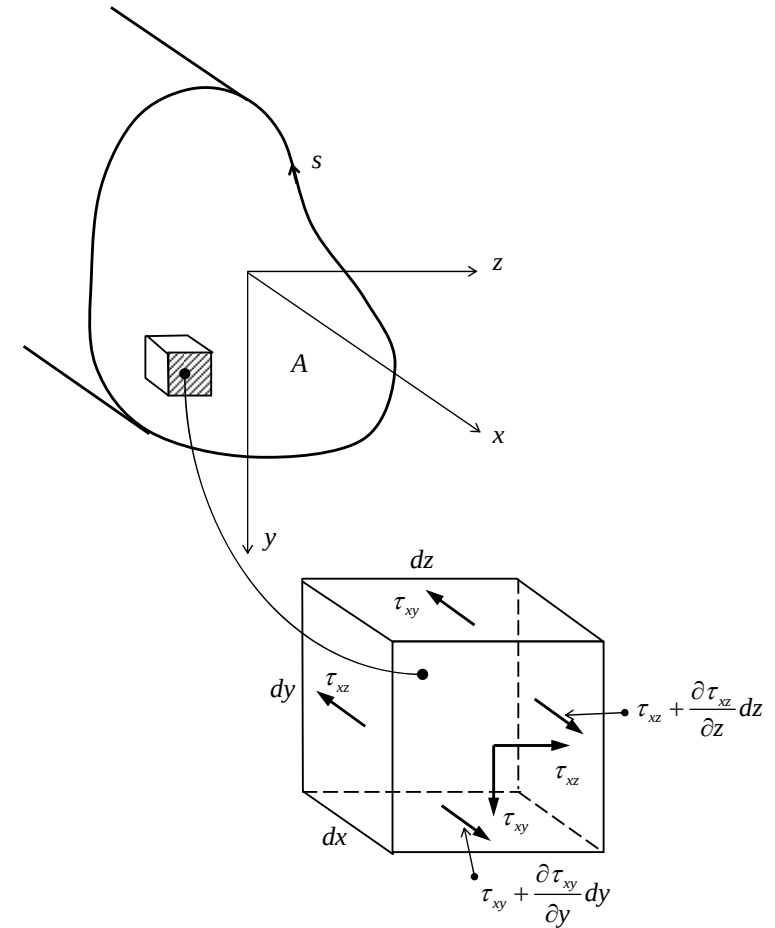
$$(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy) dx dz - \tau_{xy} dx dz + (\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz) dx dy - \tau_{xz} dx dy = 0. \quad (8.25)$$

josta saadaan edelleen

$$(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}) dx dy dz = 0. \quad (8.26)$$

Näin saimme väännetyin sauvan **leikkausjännitysten tasapainoyhtälön**

$$\boxed{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \text{ alueessa } A.} \quad (8.27)$$



Kuva 8.5: Vääntöjännitysten tasapainoyhtälön johtaminen.

8.44 Liukumien yhteensopivuusyhtälö

Muodostetaan seuraava liukumien derivaattojen erotus

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}$$

ja sijoitetaan siihen käyrästymisfunktion avulla ilmaistut liukummat (8.21), jolloin saadaan

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \theta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \theta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -2\theta. \quad (8.28)$$

eli

$$\boxed{\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = -2\theta, \text{ alueessa } A.} \quad (8.29)$$

Tätä yhtälöä voidaan kutsua **liukumien yhteensopivuusyhtälöksi**. Hooken lain perusteella se voidaan lausua leikkausjännitysten avulla muodossa

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2G\theta, \text{ alueessa } A. \quad (8.30)$$

8.45 Vääntöjännitysfunktio

Otetaan käyttöön ns. **vääntöjännitysfunktio** $\phi(y, z)$, jonka avulla leikkausjännitykset saadaan kaavoista

$$\boxed{\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}.} \quad (8.31)$$

Sijoittamalla leikkausjännitykset (8.31) tasapainoyhtälöön (8.27), nähdään sen toteutuvan. **Vääntöjännitysfunktion avulla lausutut leikkausjännitykset toteuttavat siis automaattisesti tasapainoyhtälön.**

Vääntöjännitysfunktiolla on seuraavat ominaisuudet:

- Vääntöjännitysfunktion tasa-arvokäyrät yhtyvät resaltoivan vääntöjännityksen suuntaan.
- Resaltoiva vääntöjännitys on yhtä suuri kuin vääntöjännitysfunktion gradientin itseisarvo.

Jos siis vääntöjännitysfunktio esitetään tasa-arvokäyrinä (ikään kuin korkeuskäyrinä) voimme päätellä seuraavaa. Tasa-arvokäyrien suunta ilmaisee resaltoivan vääntöjännityksen suunnan ja mitä tiheämmässä tasa-arvokäyriä on jossain poikkipinnan kohdassa, sitä suurempi on vääntöjännitys.

Todistetaan edellä mainitut vääntöjännitysfunktion ominaisuudet:

Vääntöjännitysvektorille τ saadaan

$$\tau = \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{k} \quad (8.32)$$

ja vääntöjännitysfunktion gradientti on

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (8.33)$$

Edellisten pistetuloiksi saadaan

$$\tau \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (8.34)$$

Resaltoiva vääntöjännitys siis kohtisuorassa jännitysfunktion gradienttia vastaan ja sen tasa-arvokäyrän suuntainen.

Resaltoivalle vääntöjännitykselle saadaan

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2} = |\nabla \phi|. \quad (8.35)$$

Se on siis vääntöjännitysfunktion gradientin itseisarvon suuruinen.

8.46 Vääntöjännitysfunktion differentiaaliyhtälö ja reunaehto

Sijoittamalla leikkausjännitykset (8.31) yhteensopivuusyhtälöön (8.30) saadaan

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G\theta, \text{ alueessa } A.} \quad (8.36)$$

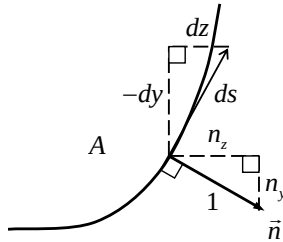
Tämä on **vääntöjännitysfunktion differentiaaliyhtälö**.

Tarkastellaan poikkipinnan reunaa. Olkoon reunan yksikönormaalivektori $\mathbf{n} = n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$. Reunaa vastaan kohtisuoralle leikkausjännityskomponentille τ_{xn} saadaan

$$\tau_{xn} \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial s}. \quad (8.37)$$

Kaavassa (8.37) käytettiin reunan yksikönormaalivektorin komponenttien lausekkeita

$$n_y = \frac{dz}{ds}, \quad n_z = -\frac{dy}{ds}, \quad (8.38)$$



Kuva 8.6: Reunan yksikönormaalien komponentit.

jotka voidaan nähdä oikeaksi kuvan 8.6 perusteella. Koska poikkipinnan reuna on jännityksetön, on reunapinnan leikkausjännitys $\tau_{nx} = 0$. Kiinteän aineen momenttitasapainoyhtälön $\tau_{xn} = \tau_{nx}$ perusteella täytyy siis myös poikkipinnan leikkausjännityksen τ_{xn} poikkipinnan reunalla hävitä. Näin saadaan yhtälö

$$\tau_{xn} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0, \quad (8.39)$$

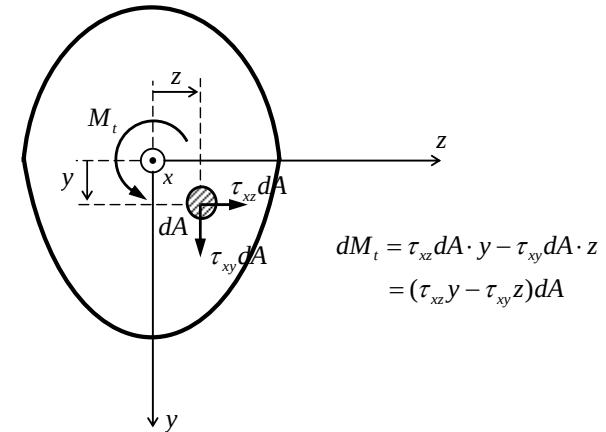
josta seuraa, että jännitysfunktion tulee reunaviivalla olla vakio. Tämän vakion arvolla ei ole fysikaalisen probleeman kannalta merkitystä, joten

sen arvoksi voidaan ottaa nolla, joten **vääntöjännitysfunktiolle** saadaan yksinkertainen **reunaehto**

$$\phi = 0, \quad \text{reunalla } s. \quad (8.40)$$

Osittaisdifferentiaaliyhtälö (8.36) ja reunaehto (8.40) muodostavat **reuna-arvoprobleeman** jännitysfunktion $\phi(y, z)$ määrittämiseksi. Yleensä sille ei löydy analyttistä ratkaisua, mutta nykyaikaisia numeerisia laskentamenetelmiä (esim. elementtimenetelmää) käyttäen voidaan aina löytää riittävän tarkka likiratkaisu. Kun ratkaisu tunnetaan, voidaan tulosta havainnollistaa tasa-arvokäyrien. Kun jännitysfunktion $\phi(y, z)$ on tunnettu voidaan myös leikkausjännityskomponentit $\tau_{xy}(y, z)$ ja $\tau_{xz}(y, z)$ määrittää kaavoihin (8.31) perustuen. Tulosta voidaan jälleen havainnollistaa määrittämällä esimerkiksi resaltoivan leikkausjännityksen tasa-arvokäyriä tms.

8.47 Vääntömomentti ja vääntöjäyhyysmomentti



Kuva 8.7: Vääntömomentin määrittely.

Vääntömomentille saadaan kuvan 8.7 perusteella lauseke

$$M_t = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA. \quad (8.41)$$

Sijoittamalla tähän jännitysfunktion avulla lausutut leikkausjännitykset (8.31) saadaan

$$M_t = \int_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial z} z \right) dA. \quad (8.42)$$

Tämä lauseke voidaan saattaa muotoon (johto sivuutetaan tässä)

$$M_t = 2 \int_A \phi dA. \quad (8.43)$$

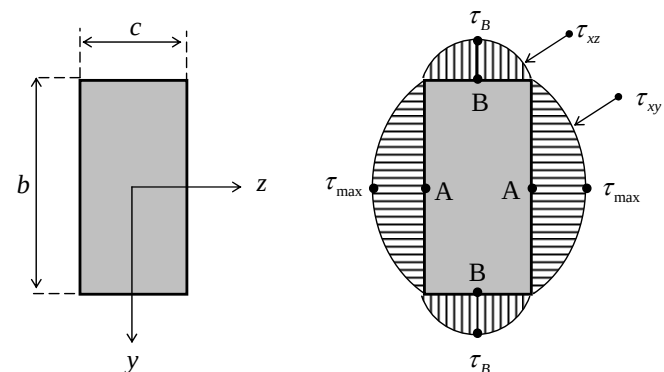
Käyttämällä vielä hyväksi vääntömomentin ja vääntymän yhteyttä $M_t = GI_t \theta$ saadaan **vääntöjäyhyysmomentille** tulos

$$I_t = \frac{2}{G\theta} \int_A \phi dA. \quad (8.44)$$

Kun vääntöjännitysfunktio $\phi(y, z)$ on saatu differentiaaliyhtälön (8.36) ja reunaehdon (8.40) muodostaman reuna-arvoprobleeman ratkaisuna, saadaan poikkipinnan vääntöjäyhyysmomentti kaavasta (8.44). Pintaintegraali lausekkeissa (8.43) ja (8.44) on yksinkertaisesti vääntöjännitysfunktion ja poikkipinnan (y, z -tason) välinen tilavuus.

8.5 Suorakaidepoikkipinnan vääntö

Suorakaidepoikkipinnan vääntötehtävä voidaan ratkaista kohdassa 8.4 esitetyn perustein käyttäen esimerkiksi Fourier-sajakehittelmiin perustuva menetelyä. Kuvassa 8.8 on kuvattu leikkausjännitysten τ_{xy} ja τ_{xz} jakautumista poikkipinnan reunoilla.



Kuva 8.8: Vääntöjännitykset suorakaidepoikkipinnan reunoilla.

Poikkileikkauksen suurin leikkausjännitys $\tau_{\max}$ vaikuttaa pidempien sivujen keskipisteissä A. Seuraavien kaavojen sekä taulukon 8.1 avulla voidaan määrittää suorakaidepoikkipinnan vääntöjäyhyysmomentti I_t , vääntövastus W_t , maksimi leikkausjännitys $\tau_{\max}$ sekä leikkausjännitys τ_B lyhyemmän sivun keskipisteissa B sivusuhteen b/c (>1) funktiona.

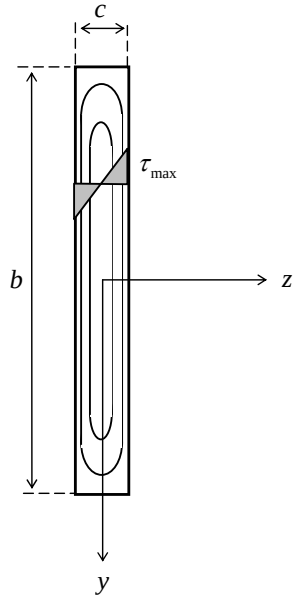
$$I_t = \alpha bc^3, \quad W_t = \beta bc^2, \quad (8.45)$$

$$\tau_{\max} = \tau_A = \frac{M_t}{W_t}, \quad \tau_B = \eta \tau_A = \eta \tau_{\max}.$$

Taulukko 8.1: Suorakaidepoikkipinnan vääntö.

b/c	1	1,5	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	1/3
β	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,311	1/3
η	1,000	0,859	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

8.6 Avoimen ohuen profiilin vääntö



Kuva 8.9: Kapean suorakaidepoikkipinnan vääntö.

8.61 Kapea suorakaidepoikkipinta

Tarkastellaan aluksi kuvan 8.9 **kapeaa suorakaidepoikkipintaa**. Voidaan otaksua, että kaikkialla paitsi poikkipinnan päissä vääntöjännitysfunktiolle on likimain voimassa $\phi \approx \phi(z)$. Tämän vuoksi vääntöjännitysfunktion differentiaaliyhtälön (8.36) vasen puoli voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \approx \frac{d^2 \phi}{dz^2} \quad (8.46)$$

ja yhtälöstä tulee tavallinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = -2G\theta. \quad (8.47)$$

Sen yleinen ratkaisu saadaan seuraavasti

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = -2G\theta \Rightarrow \frac{d\phi}{dz} = -2G\theta z + C_1 \Rightarrow \phi = -G\theta z^2 + C_1 z + C_2. \quad (8.48)$$

Reunaehdot ovat $\phi(-c/2) = 0$ ja $\phi(+c/2) = 0$, ja niistä seuraa

$$\left. \begin{aligned} \phi(-c/2) &\equiv -G\theta \frac{c^2}{4} - C_1 \frac{c}{2} + C_2 = 0, \\ \phi(+c/2) &\equiv -G\theta \frac{c^2}{4} + C_1 \frac{c}{2} + C_2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = G\theta \frac{c^2}{4}. \end{cases} \quad (8.49)$$

Vääntöjännitysfunktiolle saadaan näin tulos

$$\phi = G\theta \left(\frac{c^2}{4} - z^2 \right). \quad (8.50)$$

Vääntöjäyhyysmomentille saadaan

$$I_t = \frac{2}{G\theta} \int_A \phi dA = \frac{2}{G\theta} \int_{-c/2}^{c/2} G\theta \left(\frac{c^2}{4} - z^2 \right) b dz = 2b \left[\frac{c^2}{4} z - \frac{z^3}{4} \right]_{-c/2}^{c/2} \quad (8.51)$$

ja lopuksi

$$I_t = \frac{1}{3} b c^3. \quad (8.52)$$

Vääntöjännityksille saadaan

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -2G\theta z, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \approx 0, \quad (8.53)$$

joten suurin jännitys on

$$\tau_{\max} = 2G\theta \frac{c}{2} = G\theta c = \frac{M_t}{I_t} c \quad (8.54)$$

Näin voimme kirjoittaa

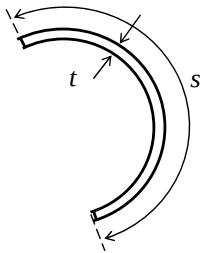
$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (8.55)$$

missä vääntövastus on

$$W_t = \frac{I_t}{c} = \frac{1}{3}bc^2. \quad (8.56)$$

8.62 Ohutseinäinen avoin poikkipinta

Tarkastellaan aluksi kuvan 8.10 ohutseinästä avointa poikkipintaa, jonka seinämän paksuus t on vakio. Jos t on sekä poikkipinnan pituuteen s että sen keskiviivan kaarevuussäteeseen nähden pieni, voidaan poikkipinnan vääntöjäyhyysmomentin ja vääntövastuksen määrittämisessä soveltaa kapean suorakaidepoikkipinnan kaavoja (8.52) ja (8.56).



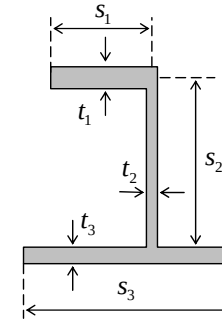
Kuva 8.10: Ohutseinäinen avoin poikkipinta, jonka paksuus on vakio.

Poikkipinnan vääntöjäyhyysmomentille ja vääntövastukselle saadaan näin tulokset

$$I_t = \frac{1}{3}st^3 \quad (8.57)$$

ja

$$W_t = \frac{I_t}{t} = \frac{1}{3}st^2. \quad (8.58)$$



Kuva 8.11: Ohutseinäinen avoin poikkipinta, jonka paksuus on paloittain vakio.

Myös avoimille ohuille poikkipinnoille, joiden paksuus vaihtelee voidaan johtaa vääntömomentin ja vääntövastuksen lausekkeita. Tässä rajoitutaan poikkipintoihin, joiden paksuus on paloittain vakio. Kuvassa 8.11 on esitetty tyypillinen poikkileikkaus. Tarkasteluissa jätetään luonnollisesti nurkkahäiriöt huomioon ottamatta. Koska vääntöjäyhyysmomentti on suoraan verrannollinen vääntöjännitysfunktion ja poikkipinnan väliseen tilavuuteen, voidaan tämä tilavuus määrittää kullekin poikkipinnan vakio-paksuiselle osalle erikseen ja laskea näin saadut tilavuudet yhteen. Tästä seuraa että, poikkipinnan vääntöjäyhyysmomentti saadaan suoraan summaamalla sen vakio-paksuisten osien vääntöjäyhyysmomentit. Näin vääntöjäyhyysmomentille saadaan kaava

$$I_t = \frac{1}{3} \sum s_i t_i^3. \quad (8.59)$$

Jos ajatellaan y, z -koordinaatisto asetetuksi tarkasteltavaan poikkipinnan osaan i siten, että y -akseli yhtyy osan keskiviivaan, on leikkausjännityksellä lauseke (8.53). Leikkausjännitys osan i reunoilla on nyt

$$\tau_{xy}(\pm \frac{t_i}{2}) = \mp 2G\theta \frac{t_i}{2} = \mp \frac{M_t}{I_t} t_i. \quad (8.60)$$

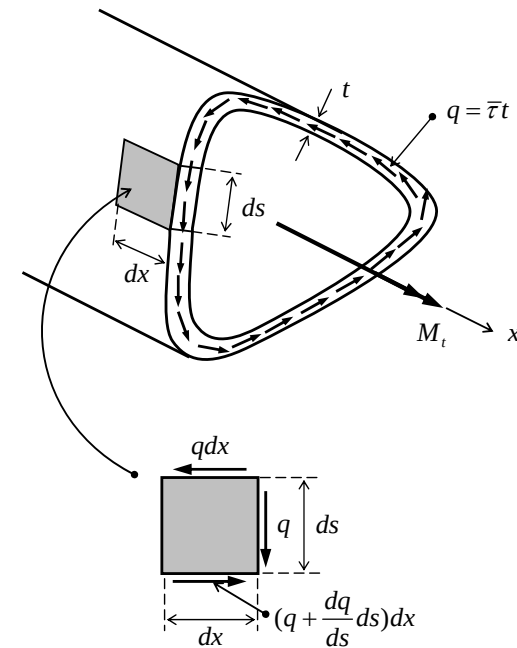
Nähdään siis, että osan i suurin leikkausjännitys on suoraan verrannollinen osan paksuuteen t_i . Näin koko poikkipinnan suurin leikkausjännitys esiintyy sen poikkipinnan osan reunalla, jonka paksuus on suurin ja se on

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_t} t_{\max}. \quad (8.61)$$

Näin vääntövastukselle saadaan tulos

$$W_t = \frac{I_t}{t_{\max}}. \quad (8.62)$$

8.7 Ohutseinäisen suljetun profiilin vääntö



Kuva 8.12: Leikkausvuo ohutseinäisellä suljetulla poikkipinnalla.

Tarkastellaan kuvan 8.12 puhtaan väännön alaista sauvaa, jolla on ohutseinäinen suljettu poikkipinta. Poikkileikkauspinnalla vaikuttavaa sen keskiviivan suuntaista leikkausvoimaa pituutta kohti merkitään symbolilla q ja kutsutaan **leikkausvuoksi**. Vastaava keskiviivan suuntainen **keskimääräinen leikkausjännitys** on täten $\bar{\tau} = q/t$.

Sauvasta irroitettun harmaan differentiaalisen suorakaiteen x -akselin suuntainen tasapainoehto on

$$-qdx + \left(q + \frac{dq}{ds}ds\right)dx = 0, \quad (8.63)$$

Siitä seuraa

$$\frac{dq}{ds} = 0 \quad (8.64)$$

Tämä tulos merkitsee sitä, että leikkausvuolle pätee

$$q \equiv \bar{\tau}t = \text{vakio.} \quad (8.65)$$

Kuvan 8.12 perusteella saadaan poikkipinnan pieneen osaan vaikuttavan voiman qds osuudeksi vääntömomentista

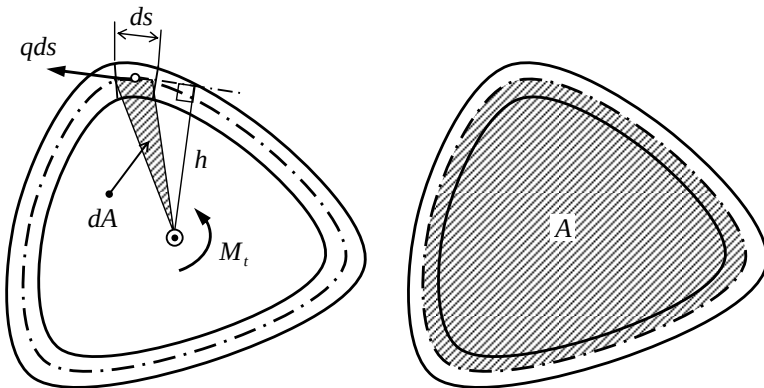
$$dM_t = qds \cdot h = 2qdA. \quad (8.66)$$

Tässä käytettiin hyväksi kuvasta 8.13 näkyvää yhteyttä $ds \cdot h = 2dA$. Vääntömomentiksi tulee näin

$$M_t = \oint 2qdA = 2q \oint dA = 2qA, \quad (8.67)$$

missä A on profiilin keskiviivan rajaaman alueen pinta-ala (vrt. kuva 8.13). Näin saadaan poikkileikkauksen leikkausvuolle kaava

$$q = \frac{M_t}{2A} \quad (8.68)$$



Kuva 8.13: Vääntömomentin laskeminen.

ja keskimääräiselle leikkausjännitykselle $\bar{\tau} = q/t$ kaava

$$\bar{\tau} = \frac{q}{t} = \frac{M_t}{2At}. \quad (8.69)$$

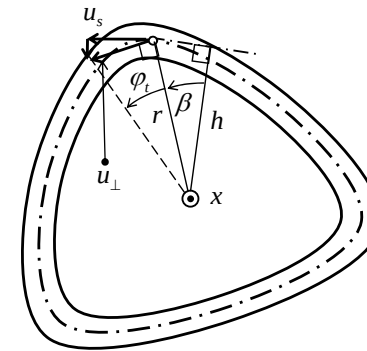
Tätä kaavaa kutsutaan kehittäjänsä mukaan **Bredt'in ensimmäiseksi kaavaksi**.

Koska keskimääräinen leikkausjännitys on kääntäen verrannollinen profiilin paksuuteen, on sen suurin arvo poikkipinnan ohuimmassa kohdassa ja sille saadaan

$$\bar{\tau}_{\max} = \frac{M_t}{2At_{\min}}. \quad (8.70)$$

Poikkileikkauksen vääntövastukselle saadaan näin tulos

$$W_t = 2At_{\min}. \quad (8.71)$$



Kuva 8.14: Ohutseinäisen suljetun profiilin kinematiikkaa.

Koska väännetyin sauva poikkipinta kiertyy vääntökeskiön ympäri kuin jäykkä kappale, saadaan kuvan 8.14 sädetä r vastaan kohtisuoralle siirtymälle

$$u_{\perp} \approx r\phi_t. \quad (8.72)$$

Profiilin keskiviivan suuntaiselle siirtymälle saadaan

$$u_s = u_{\perp} \cos \beta = r \varphi_t \cos \beta = h \varphi_t. \quad (8.73)$$

Liukumalle $\gamma = \gamma_{xs}$ saadaan

$$\gamma = \gamma_{xs} = \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (8.74)$$

Ratkaisemalla tästä $\partial u / \partial s$ saadaan

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \gamma - \frac{\partial u_s}{\partial x} = \frac{\tau}{G} - h \frac{d\varphi_t}{dx} \approx \frac{\bar{\tau}}{G} - h\theta. \quad (8.75)$$

Tässä käytettiin hyväksi leikkauksen Hooken lakia ja kaavaa (8.1).

Koska profiili on suljettu, täytyy siirtymän $u(s)$ olla jatkuva. Tämä merkitsee sitä, että siirtymällä poikkipinnan keskiviivan tietystä pisteestä A tulee olla yksikäsitteinen arvo. Lähtien pisteestä A saamme yleisen pisteen s siirtymälle

$$\begin{aligned} u(s) &= u_A + \int_{s_A}^s du = u_A + \int_{s_A}^s \frac{\partial u}{\partial s} ds = u_A + \int_{s_A}^s \left(\frac{\bar{\tau}}{G} - h\theta \right) ds \\ &= u_A + \int_{s_A}^s \left(\frac{q}{Gt} - h\theta \right) ds \end{aligned} \quad (8.76)$$

Pisteen A siirtymälle saamme tästä kaavasta

$$u_A = u(s_A) = u_A + \oint \left(\frac{q}{Gt} - h\theta \right) ds, \quad (8.77)$$

missä integrointi tapahtuu profiilin keskiviivan ympäri. Yhtälöstä (8.77) seuraa

$$\oint \left(\frac{q}{Gt} - h\theta \right) ds = 0 \Rightarrow \oint \frac{q}{Gt} ds = \theta \oint h ds \Rightarrow \frac{q}{G} \oint \frac{ds}{t} = 2\theta A. \quad (8.78)$$

Tässä käytettiin hyväksi kaavan (8.65) tulosta, jonka mukaan leikkausvuono on vakio ja voidaan ottaa integraalin ulkopuolelle, sekä yhteyttä $h ds = 2dA$. Leikkausvuolle saadaan nyt

$$q = \frac{2G\theta A}{\oint \frac{ds}{t}}. \quad (8.79)$$

Sijoittamalla tämä vääntömomentin yhtälöön (8.67) saadaan

$$M_t = 2qA = \frac{4G\theta A^2}{\oint \frac{ds}{t}}. \quad (8.80)$$

Tätä kaavaa kutsutaan Bredt'in toiseksi kaavaksi. Käyttäen hyväksi vääntömomentin ja vääntymän yhteyttä $M_t = GI_t\theta$ saadaan vääntöjäyhyysmomentille lopulta tulos

$$I_t = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}}. \quad (8.81)$$

Jos poikkipinta muodostuu tasapaksuista osista kaavan, viivaintegraali saa muodon

$$\oint \frac{ds}{t} = \sum \frac{s_i}{t_i}. \quad (8.82)$$

8.8 Sauvan vääntökulman määrittäminen

Tarkastellaan väännettyä sauvaa tai sauvarakenteen osasauvaa **staattisesti määrättyssä tehtävässä**, jossa sauvan vääntömomentti $M_t(x)$ on määritettävissä statiikan keinoin etukäteen. Se siis on tehtävässämme tunnettu. Tällöin myös sauvan vääntymä $\theta(x)$ voidaan laskea kaavasta

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t}. \quad (8.83)$$

8.81 Sauvan vääntökulma muutos

Sauvan tai sauvan osan AB **vääntökulman muutos** on **sauvan päiden vääntökulmien erotus** eli

$$\Delta\varphi_t = \varphi_{tB} - \varphi_{tA}. \quad (8.84)$$

Integroimalla vääntymän lauseke (8.1) välin AB yli saadaan vääntökulmien erotukselle

$$\int_{x_A}^{x_B} \varphi'_t(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} \theta(x) dx \Rightarrow \varphi_{tB} - \varphi_{tA} = \int_{x_A}^{x_B} \theta(x) dx. \quad (8.84)$$

Näin saamme sauvan tai sen osan AB **vääntökulman muutokselle** lausekkeen

$$\Delta\varphi_t = \varphi_{tB} - \varphi_{tA} = \int_{x_A}^{x_B} \theta(x) dx. \quad (8.85)$$

Jos sauvan vääntymä $\theta = \text{vakio}$, kuten kuormittamattomalla sauvan osalla, saadaan

$$\Delta\varphi_t = \theta L. \quad (8.86)$$

8.82 Sauvan vääntökulma

Kaavasta (8.1) ja seuraa sauvan **vääntökulmalle** $\varphi_t(x)$ differentiaaliyhtälö

$$\varphi'_t(x) = \theta(x), \quad (8.87)$$

jonka ratkaisu on muotoa

$$\varphi_t(x) = \int \theta(x) dx + C, \quad (8.88)$$

missä C on integrointivakio, joka määräytyy vääntökulmalle asetettavasta reunaehdosta. Ratkaisu voidaan myös esittää esimerkiksi muodossa

$$\varphi_t(x) = \varphi_t(0) + \int_0^x \theta(x) dx, \quad (8.89)$$

missä $\varphi_t(0)$ on vääntökulman arvo pisteessä $x = 0$.

8.83 Väännetyin sauvan vääntökulman differentiaaliyhtälö

Käyttämällä vääntymän ja vääntökulman yhteyttä (8.1) sekä lineaarisesti kimmouden sauvan vääntömomentin ja vääntymän yhteyttä (8.8) saadaan akselin suhteen muodostettu momenttitasapainoyhtälö (1.15) lausutuksi vääntökulman avulla. Tulos on

$$(GI_t \varphi'_t)' = -m \quad \text{eli} \quad \frac{d}{dx}(GI_t \frac{d\varphi_t}{dx}) = -m. \quad (8.90)$$

Tämä on väännetyin **sauvan vääntökulman differentiaaliyhtälö**. Jos kyseessä on tasajäykkä sauva ($GI_t = \text{vakio}$), yhtälö (8.90) saa hieman yksinkertaisemman muodon

$$\varphi''_t = -\frac{m}{GI_t}. \quad (8.91)$$

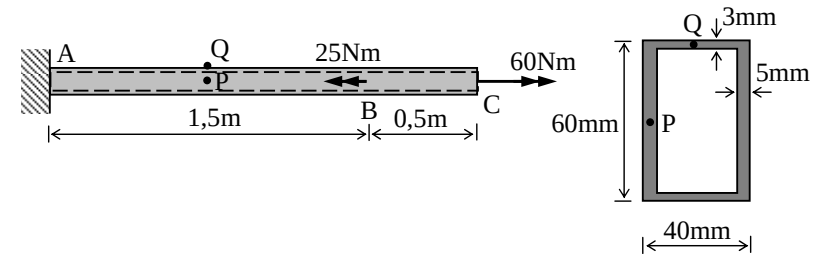
Yhtälö (8.90) on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, joka on helppo ratkaista. Ratkaisuun tulee kaksi integrointivakiota, jotka määräytyvät vääntökulmalle tai vääntökulman avulla ilmaistulle vääntömomentille

$$M_t = GI_t \varphi'_t \quad (8.92)$$

asetettavista reunaehdoista.

Väännetty sauva voidaan ratkaista vääntökulman differentiaaliyhtälöä (8.90) käyttäen oli probleema **staattisesti määrätty** tai **staattisesti määräämätön**. Kun vääntökulma $\varphi_t(x)$ on ensin ratkaistu, saadaan kaavan (8.92) avulla vääntömomentti $M_t(x)$ ja lopuksi vääntöjännitykset tämän luvun alussa esitettyjä menettelytapoja soveltaen.

Esimerkki 8.1: Oheinen putki on tehty pronssista, jonka liukumoduuli on 38GPa, ja sillä on suorakaiteen muotoinen poikkileikkaus. Siihen vaikuttaa kaksi vääntävää momenttia. Määritä keskimääräinen leikkausjännitys putken pisteissä P ja Q. Määritä myös vääntökulman arvo päässä C, kun putki on kiinnitetty päästä A.



Vääntömomentti välillä AB:

$$\leftarrow M_{tAB} + 25\text{Nm} - 60\text{Nm} = 0 \Rightarrow \underline{M_{tAB} = 35\text{Nm}}$$

Vääntömomentti välillä BC:

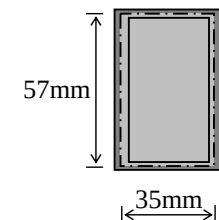
$$\leftarrow M_{tBC} - 60\text{Nm} = 0 \Rightarrow \underline{M_{tBC} = 50\text{Nm}}$$

Profiilin keskiviivan sisäpuolelle jäävän pinnan ala:

$$A = 35\text{mm} \cdot 57\text{mm} = 1995\text{mm}^2$$

Leikkausvuo:

$$q = \frac{M_t}{2A} = \frac{35 \cdot 10^3 \text{Nmm}}{2 \cdot 1995\text{mm}^2} = 8,772 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$



Keskimääräinen leikkausjännitys pisteissä P ja Q:

$$\bar{\tau}_P = \frac{q}{t_P} = \frac{8,772 \text{ N/mm}}{5 \text{ mm}} \approx \underline{\underline{1,75 \text{ MPa}}}$$

$$\bar{\tau}_Q = \frac{q}{t_Q} = \frac{8,772 \text{ N/mm}}{3 \text{ mm}} \approx \underline{\underline{2,92 \text{ MPa}}}$$

Vääntöjähyysmomentti:

$$\oint \frac{ds}{t} = \sum \frac{s_i}{t_i} = 2 \cdot \frac{57}{5} + 2 \cdot \frac{35}{3} = 46,1333$$

$$I_t = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4 \cdot (1995 \text{ mm}^2)^2}{46,1333} = \underline{\underline{3,4509 \cdot 10^5 \text{ mm}^4}}$$

Vääntökulman muutokset väleillä AB ja BC:

$$\Delta\varphi_{iAB} = \theta_{AB} L_{AB} = \frac{M_{iAB}}{GI_t} L_{AB} = \frac{35 \text{ N} \cdot 10^3 \text{ mm} \cdot 1,5 \cdot 10^3 \text{ mm}}{38 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 3,4509 \cdot 10^5 \text{ mm}^4} = \underline{\underline{0,00400}}$$

$$\Delta\varphi_{iBC} = \theta_{BC} L_{BC} = \frac{M_{iBC}}{GI_t} L_{BC} = \frac{60 \text{ N} \cdot 10^3 \text{ mm} \cdot 0,5 \cdot 10^3 \text{ mm}}{38 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 3,4509 \cdot 10^5 \text{ mm}^4} = \underline{\underline{0,00229}}$$

Vääntökulma pisteessä C:

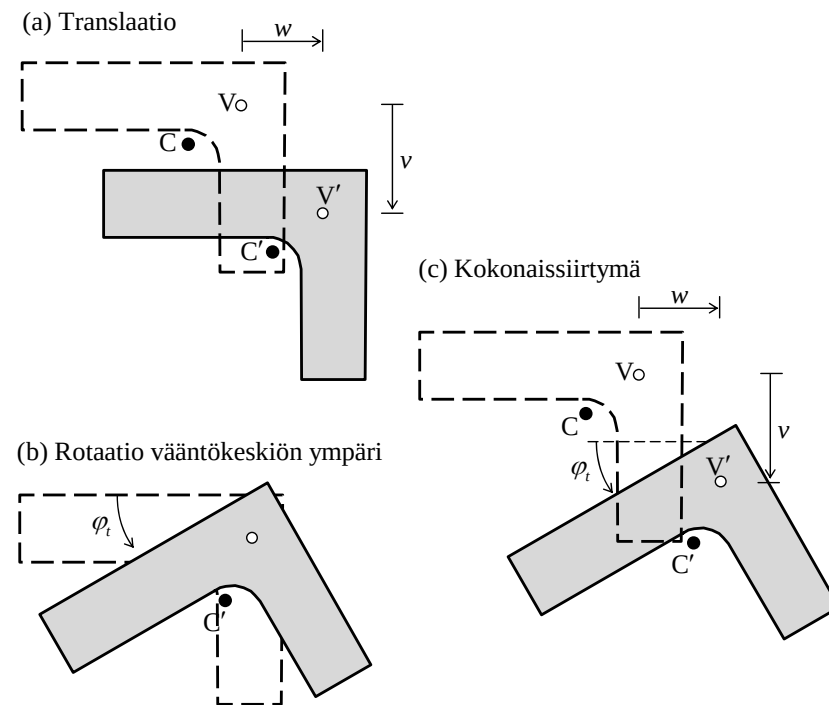
$$\varphi_{iC} = \Delta\varphi_{iAB} + \Delta\varphi_{iBC} = 0,00400 + 0,00229 = \underline{\underline{6,29 \cdot 10^{-3} \text{ rad}}}$$

8.9 Taivutuksen ja väännön yhteisvaikutus

8.9.1 Johdanto

Sauvarakenteisiin kohdistuvat kuormat ovat yleensä sellaisia, että niistä aiheutuu sekä vetoa/puristusta ja taivutusta että vääntöä. Puhtaan väännön alaiset rakenteet ovat, erityisesti rakennustekniikassa, harvinaisia. Yleisessä tapauksessa edessämme on siten tilanne, jossa poikkileikkaukseen vaikuttavat normaalivoima N , taivutusmomentit M_y ja M_z , vääntömomentti M_t sekä leikkausvoimat $Q_y = M'_z$ ja $Q_z = M'_y$.

Periaatteessa yhdistetyn vedon/puristuksen sekä taivutuksen osuus poikkileikkauksen jännityksiin voidaan määrittää erikseen käyttäen luvussa 5 esitettyjä periaatteita. Vastaavasti väännön osuus poikkileikkauksen jännityksiin voidaan arvioida tässä luvussa esitetyillä



Kuva 8.15: Taivutetun ja väännetyin poikkileikkauksen kinematiikkaa

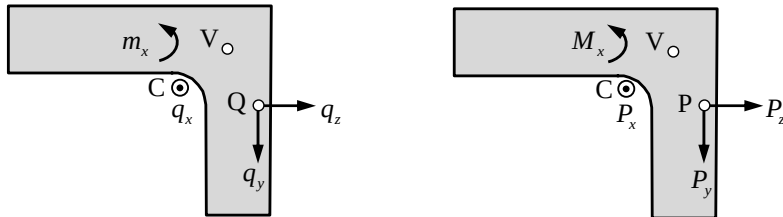
keinoilla. Rakenteeseen kohdistuvasta kuormituksesta sen poikkileikkauksiin syntyvän vääntömomentin M_t määrittäminen ei kuitenkaan onnistu, ellei **vääntökeskiön** V ja sen määrittelemän vääntökeskiöakselin asemaa tunneta.

8.92 Vääntökeskiön käsite ja merkitys

Kuvassa 8.15 on esitetty, kuinka taivutetun ja väännetyin palkin poikkileikkaus siirtyy. Puhtaassa taivutuksessa (kuva 8.15 (a)) poikkileikkauksen jokainen piste saa samat poikittaiset siirtymät v ja w eikä se kierry, eli liike on translaatio. Puhtaassa väännössä (kuva 8.15 (b)) poikkileikkaus kiertyy jäykkänä kappaleena vääntökulman φ_t suuruisen kiertymän vääntökeskiön V ympäri eikä vääntökeskiö siirry, eli poikkileikkaus saa rotaation vääntökeskiön suhteen. Yhdistetyssä taivutuksessa ja väännössä (kuva 8.15 (c)) poikkileikkaus saa sekä translaation että rotaation. Poikkileikkauksen siirtymätila siis määräytyy **vääntökeskiön taipumien** v , w ja **vääntökulman** φ_t avulla.

(a) Jakautuneet kuormat

(b) Pistekuormat



Kuva 8.16: Väännetyin ja taivutetun palkin kuormitus

Kuvassa 8.16 (a) on esitetty, palkkiin kohdistuva sen pituutta kohti jakautunut kuormitus. Pitkittäisen jakautuneen kuorman $q_x(x)$ otaksutaan kuvan 8.16 (a) mukaisesti vaikuttavan pintakeskiöakselilla C ja jakautuneen poikittaisen kuorman $q_y(x)$ ja $q_z(x)$ otaksutaan vaikuttavan akselilla Q . Lisäksi palkkiin voi kohdistua jakautunut voimaparikuorma $m_x(x)$. Kuvassa 8.16 (b) on esitetty, palkin tiettyyn poikkileikkaukseen kohdistuvat pistekuormat. Pitkittäisen pistekuorman P_x otaksutaan kuvan 8.16 (b) mukaisesti vaikuttavan poikkileikkauksen pintakeskiössä C ja poikittaisten pistekuormien P_y ja P_z otaksutaan vaikuttavan pisteessä P . Lisäksi poikkileikkaukseen voi kohdistua jakautunut pistemäinen voimaparikuorma M_x .

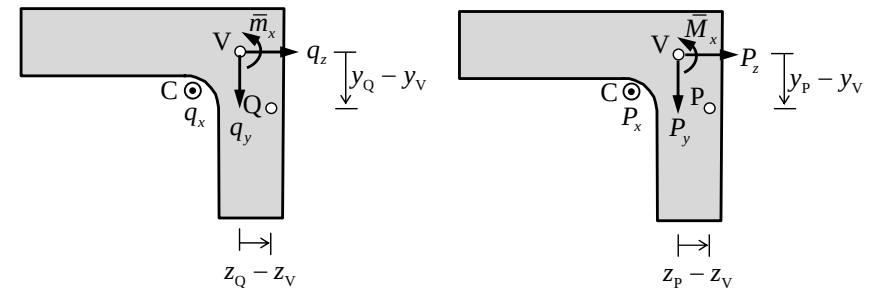
Jos palkin poikittaiset jakautuneet voimat $q_y(x)$, $q_z(x)$ ja momentti $m_x(x)$ redusoidaan vääntökeskiöakselille V , syntyy kuvan 8.17 (a) voimasysteemi, jossa voimat $q_y(x)$ ja $q_z(x)$ vaikuttavat vääntökeskiöakselilla ja sen ympäri vääntävä jakautunut momentti on

$$\bar{m}_x = m_x + q_y(z_Q - z_V) - q_z(y_Q - y_V). \quad (8.93)$$

Jos poikkileikkauksen pistevoimat P_y , P_z ja voimapari M_x redusoidaan vääntökeskiöön V , syntyy kuvan 8.17 (b) voimasysteemi, jossa voimat P_y ja P_z vaikuttavat vääntökeskiöakselilla ja sen ympäri vääntävä momentti on

$$\bar{M}_x = M_x + P_y(z_P - z_V) - P_z(y_P - y_V). \quad (8.94)$$

(a) Vääntökeskiöakselille redusoidut jakautuneet kuormat (b) Vääntökeskiöakselille redusoidut pistekuormat



Kuva 8.17: Väännetyin ja taivutetun palkin poikittaisen kuormituksen redusointi

Jos palkin kuormitus muodostuu akselilla vaikuttavasta pitkittäisestä jakautuneen kuormasta $q_x(x)$ ja vääntökeskiöakselilla vaikuttavista poikittaista kuormista $q_y(x)$ ja $q_z(x)$ sekä pintakeskiössä vaikuttavista pitkittäisistä pistekuormista P_x ja vääntökeskiöstä vaikuttavista poikittaista kuormista P_y ja P_z , palkin akseli saa aksiaalisen siirtymän $u(x)$ ja poikkileikkaukset saavat poikittaisen siirtymän, jonka komponentit ovat taipumat $v(x)$ ja $w(x)$. Palkin poikkileikkaukset saavat siis kuvan 8.15 (a) poikittaisen translaation, mutta eivät kierry. Tästä

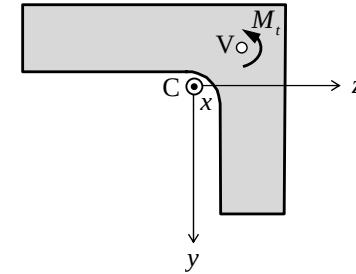
kuormituksesta aiheutuu edelleen jännitysresultantit $N(x)$, $M_y(x)$ ja $M_z(x)$ sekä $Q_y(x) = M'_z(x)$ ja $Q_z(x) = M'_y(x)$, mutta ei vääntömomenttia $M_t(x)$.

Jos palkin kuormitus muodostuu pelkästä jakautuneesta vääntävästä momentista $\bar{m}_x(x)$ sekä pistemomenteista $\bar{M}_x$, sen poikkileikkaukset saavat kiertymän $\varphi_t(x)$ eli palkki kiertyy vääntökeskiöakselin ympäri. Palkin poikkileikkaukset saavat siis kuvan 8.15 (b) rotaation, mutta pintakeskiöakseli ei veny eikä vääntökeskiöakseli taivu. Tästä kuormituksesta aiheutuu pelkkä vääntömomentti $M_t(x)$.

Jos palkin kuormitus muodostuu kaikista kuvassa 8.17 esitetyistä kuormista, sen akseli saa siirtymän $u(x)$, vääntökeskiö saa taipumat $v(x)$ ja $w(x)$ sekä poikkileikkaukset saavat kiertymän $\varphi_t(x)$. Palkin poikkileikkaukset siis siirtyvät kuvan 8.15 (c) mukaisesti. Tästä kuormituksesta aiheutuvat kaikki jännitysresultantit $N(x)$, $M_y(x)$, $M_z(x)$, $Q_y(x) = M'_z(x)$, $Q_z(x) = M'_y(x)$ ja $M_t(x)$. Tällöin on kysymyksessä yhdistetty veto/puristus, taivutus ja vääntö. Näin kuormitettu palkki voidaan edellä esitetyn perusteella ratkaista kahdessa vaiheessa. Ensinnä se ratkaistaan kaikille muille kuormille paitsi vääntävälle jakautuneelle momentille $\bar{m}_x(x)$ ja vääntäville pistemomenteille $\bar{M}_x$ käyttäen taivutusteoriaa ja sitten näille kuormille käyttäen vääntöteoriaa. Saadut tulokset lasketaan lopuksi yhteen.

8.93 Väännön yhtälöt pintakeskiökoordinaatistossa ja käyristymisfunktion määrittäminen

Kun edellä (kohdassa 8.41) tarkasteltiin väännön siirtymäotaksumaa, poikkileikkauskoordinaatiston origo sijoitettiin vääntökeskiöön ja vääntökeskiön V asema oletettiin siten tunnetuksi. Yleisessä tapauksessa vääntökeskiön asemaa ei kuitenkaan tunneta, vaan sen koordinaatit y_v ja z_v joudutaan ensin määrittämään. Tällöin tarkastelu on tarkoituksenmukaista suorittaa y, z -koordinaatistossa (vrt. kuva 8.18), jonka origo sijaitsee pintakeskiössä C.



Kuva 8.18: Puhtaan väännön alainen poikkileikkaus

Saint-Venantin väännön siirtymäotaksuma (8.18) ja (8.20) on tällöin

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \theta(x) \bar{\psi}(y, z), \\ v(x, y, z) &= -\varphi_t(x)(z - z_v), \\ w(x, y, z) &= \varphi_t(x)(y - y_v), \end{aligned} \quad (8.95)$$

missä $\bar{\psi}(y, z)$ on tähän koordinaatistoon liittyvä käyristymisfunktio. Vastaavaan tapaan kuin kohdassa 8.2 leikkausjännityksille saadaan nyt lausekkeet

$$\tau_{xy} = G\theta \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} - z + z_v \right), \quad \tau_{xz} = G\theta \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} + y - y_v \right). \quad (8.96)$$

Näiden lausekkeiden ongelmana on se, että niissä esiintyvät vääntökeskiön koordinaatit y_v ja z_v ovat tuntemattomia. Tämän vuoksi otetaan käyttöön uusi käyristymisfunktio $\psi(y, z)$ siten, että

$$\bar{\psi}(y, z) = \psi(y, z) + \psi_0 - z_v y + y_v z, \quad (8.97)$$

missä ψ_0 on vakio. Nyt leikkausjännitysten lausekkeet (8.96) saavat muodon

$$\tau_{xy} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right), \quad \tau_{xz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right). \quad (8.98)$$

ja vääntökeskiön koordinaatteja ei lausekkeissa ole. Ne ovat myös identtiset lausekkeiden (8.22) kanssa. Tästä voidaan päätellä, että edellä

kohdassa 8.4 esitetyt tulokset pätevät soveltuvin osin myös pintakeskiön C sijoitetussa koordinaatistossa.

Jotta voisimme määrittää vääntökeskiön koordinaatit, meidän täytyy tuntea käyristymisfunktio $\psi(y, z)$. Tämän vuoksi johdetaan sille reuna-arvoprobleema seuraavasti. Sijoittamalla leikkausjännitykset (8.98) tasapainoyhtälöön (8.27) saadaan toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \text{ alueessa } A. \quad (8.99)$$

Tämä on reuna-arvoprobleeman kenttäyhtälö, jonka tulee olla voimassa jokaisessa alueen A (poikkileikkauksen) pisteessä. Reunaa vastaan kohtisuoralle leikkausjännitys-komponentille τ_{xn} saadaan

$$\tau_{xn} \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} = n_y G \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) + n_z G \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \quad (8.100)$$

ja reunaehto sille on $\tau_{xn} = 0$ (vrt. kohta 8.46), joten reuna-arvoprobleeman reunaehtoyhtälöksi tulee

$$n_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + n_z \frac{\partial \psi}{\partial z} = n_y z - n_z y \text{ reunalla } s. \quad (8.101)$$

Tämä on reuna-arvoprobleeman reunaehtoyhtälö, jonka tulee olla voimassa jokaisessa poikkileikkauksen reunan s pisteessä. Reuna-arvoprobleema (8.99) ja (8.101) mahdollistaa käyristymisfunktion $\psi(y, z)$ määrittämisen mielivaltaisen muotoiselle poikkileikkaukselle. Probleeman ratkaiseminen voidaan suorittaa numeerisesti käyttäen elementtimenetelmää.

8.93 Vääntökeskiön määrittäminen mielivaltaiselle poikkileikkaukselle

Puhtaan väännön siirtymäotaksuman perusteella normaalijännitykselle saadaan

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E \varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = E \theta'(x) \bar{\psi}(y, z) \\ &= E \theta'(x) [\psi(y, z) + \psi_0 - z_v y + y_v z]. \end{aligned} \quad (8.102)$$

Koska kysymyksessä on puhdas vääntö, poikkileikkauksessa tulee vaikuttaa pelkkä vääntömomentti. Siksi leikkausrasitusten N , M_y ja M_z tulee hävitä. Saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} N &\equiv \int_A \sigma_x dA = E \theta' \left(\int_A \psi dA + \psi_0 \int_A dA - z_v \int_A y dA + y_v \int_A z dA \right) = 0, \\ M_y &\equiv \int_A \sigma_x z dA = E \theta' \left(\int_A \psi z dA + \psi_0 \int_A z dA - z_v \int_A y z dA + y_v \int_A z^2 dA \right) = 0, \\ M_z &\equiv \int_A \sigma_x y dA = E \theta' \left(\int_A \psi y dA + \psi_0 \int_A y dA - z_v \int_A y^2 dA + y_v \int_A y z dA \right) = 0. \end{aligned} \quad (8.103)$$

Ottamalla käyttöön tavanomaiset poikkileikkaussuureet

$$S_y = \int_A z dA, \quad S_z = \int_A y dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_{yz} = \int_A y z dA \quad (8.104)$$

ja seuraavat uudet poikkileikkaussuureet

$$S_{\psi} = \int_A \psi dA, \quad I_{y\psi} = \int_A y \psi dA, \quad I_{z\psi} = \int_A z \psi dA \quad (8.105)$$

sekä huomioimalla, että kysymyksessä on pintakeskiökoordinaatisto, jolloin $S_y = 0$ ja $S_z = 0$ saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} S_{\psi} + A \psi_0 &= 0, \\ I_y y_v - I_{yz} z_v &= -I_{z\psi}, \\ -I_{yz} y_v + I_z z_v &= -I_{y\psi}, \end{aligned} \quad (8.106)$$

jonka ratkaisu vakiolle ψ_0 on

$$\psi_0 = -\frac{S_{\psi}}{A} \quad (8.107)$$

ja vääntökeskiön koordinaateille

$$y_v = \frac{-I_z I_{z\psi} + I_{yz} I_{y\psi}}{I_y I_z - I_{yz}^2}, \quad z_v = \frac{-I_{yz} I_{z\psi} + I_y I_{y\psi}}{I_y I_z - I_{yz}^2}. \quad (8.108)$$

Kun poikkileikkaussuureet (8.104) ja (8.105) on ensin määritetty, voidaan vääntökeskiön koordinaatit y_v ja z_v laskea kaavalla (8.108). Yleisen poikkileikkauksen tapauksessa käyristymisfunktion poikkileikkauks-

suureiden (8.105) määrittäminen edellyttää elementtimenetelmään perustuvaa numeerista käsittelyä. Jos poikkileikkaus on symmetrinen ja y - tai z -akseli yhtyy symmetria-akseliin, tai yleisemminkin, jos koordinaattiakselien suunnat yhtyvät poikkileikkauksen pääjähyysuuntiin, jolloin $I_{yz} = 0$, ja vääntökeskiö V on symmetria-akselilla ja sen toinen koordinaatti saadaan toisella kaavoista

$$y_V = -\frac{I_{yz}}{I_y}, \quad z_V = \frac{I_{yz}}{I_z}. \quad (8.109)$$

Jos poikkileikkaus on kaksoissymmetrinen, vääntökeskiö V yhtyy symmetria-akselien leikkauspisteeseen ja siten myös pintakeskiöön C .

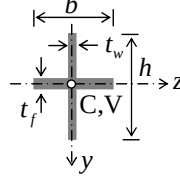
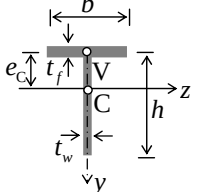
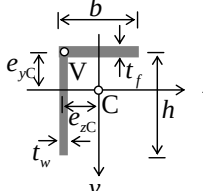
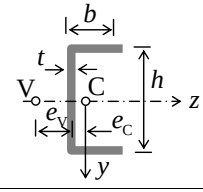
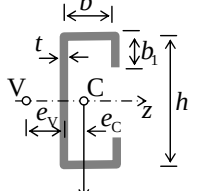
8.94 Ohutseinämäisen poikkileikkauksen vääntökeskiö

Massiivisten poikkileikkausten vääntökeskiön määrittämistä ei oppikirjoissa yleensä juurikaan käsitellä. Tämä johtuu siitä, että palkkien poikkileikkaukset ovat yleensä pystytason suhteen symmetrisiä ja niiden kuormitus on pystysuuntainen. Tällöin vääntökeskiö on symmetria-akselilla ja sen korkeusasema y_V ei laskelmissa tarvitse tuntea. Toinen syy on se, että massiivisten poikkileikkausten vääntökeskiö on usein hyvin lähellä pintakeskiötä, joten suurta virhettä ei tehdä, jos sen otaksutaan sijaitsevan pintakeskiössä. Ohutseinämäisten palkkien tapauksessa epäsymmetrisiä poikkileikkauksia esiintyy yleisemmin ja vääntökeskiön voi sijaita kaukana pintakeskiöstä. Näin vääntökeskiön aseman tunteminen on erityisen tärkeää.

Myös ohutseinämäisten sauvojen vääntökeskiö voidaan määrittää ylläesitettyjä yhtälöitä ja numeerisia menetelmiä hyväksi käyttäen. Näin ei kuitenkaan perinteisesti ole menetelty, vaan systemaattinen analyttinen menetelmä ohutseinämäisten poikkileikkausten vääntökeskiön määrittämiseksi saadaan ohutseinämäisten sauvojen ns. osittain estetyn väännön teorian sivutuotteena. Tämä teoria on tärkeä erityisesti teräsrakenteiden suunnittelussa ja siksi sitä on perinteisesti käsitelty rakenteiden mekaniikan pidemmälle menevissä kursseissa.

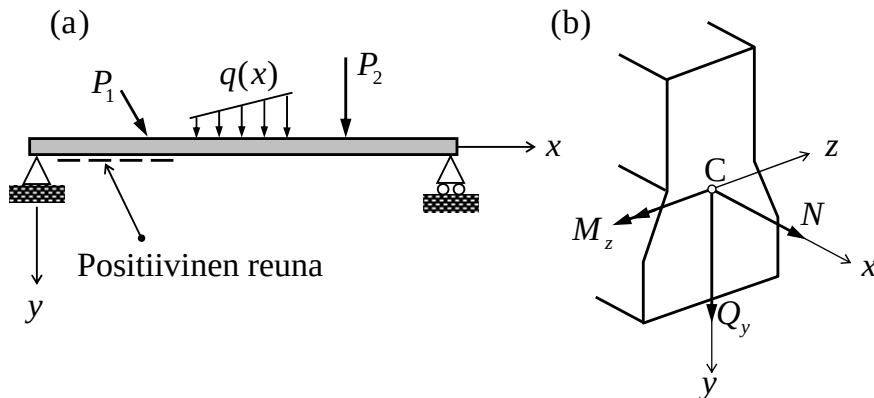
Taulukossa 8.2 on esitetty taivutuksen ja vapaan väännön poikkileikkaussuureita ohutseinämäisille poikkileikkauksille. Siinä on esitetty myös vääntökeskiön asema.

Taukukko 8.2: Ohutseinämäisen avoimen poikkipinnan poikkileikkaussuureita

Poikkileikkaus	Poikkileikkaussuureita
1. +-profiili 	$I_y = \frac{t_f b^3}{12}, \quad I_z = \frac{t_w h^3}{12}$ $I_t = \frac{1}{3}(bt_f^3 + ht_w^3)$
2. T-profiili 	$e_C = \frac{1}{2} \frac{t_w h^2}{t_w h + t_f b}$ $I_y = \frac{t_f b^3}{12}, \quad I_z = \frac{t_w h^3}{12} + t_f b e_C^2$ $I_t = \frac{1}{3}(bt_f^3 + ht_w^3)$
3. Γ-profiili 	$e_{yC} = \frac{1}{2} \frac{t_w h^2}{t_w h + t_f b}, \quad e_{zC} = \frac{1}{2} \frac{t_f b^2}{t_w h + t_f b}$ $I_y = \frac{t_f b^3}{12} + t_w h e_{zC}^2, \quad I_z = \frac{t_w h^3}{12} + t_f b e_{yC}^2$ $I_{yz} = -t_f b e_{yC} \left(\frac{b}{2} - e_{zC}\right) - t_w h \left(\frac{h}{2} - e_{yC}\right) e_{zC}, \quad I_t = \frac{1}{3}(bt_f^3 + ht_w^3)$
4. [-profiili 	$e_C = \frac{b^2}{h + 2b}, \quad e_V = \frac{3b^2}{h + 6b}$ $I_y = \frac{tb^3}{6} + 2bt \cdot \left(\frac{b}{2} - e_C\right)^2 + t h e_C^2, \quad I_z = \frac{th^3}{12} + 2bt \left(\frac{h}{2}\right)^2$ $I_t = \frac{t^3}{3}(h + 2b)$
5. C-profiili 	$e_C = \frac{b^2 + 2bb_1}{h + 2b + 2b_1}, \quad e_V = b \frac{3h^2 b + 6h^2 b_1 - 8b_1^3}{h^3 + 6h^2 b + 6h^2 b_1 + 8b_1^3 - 12hb_1^2}$ $I_y = \frac{tb^3}{6} + 2tb \cdot \left(\frac{b}{2} - e_C\right)^2 + t h e_C^2 + 2tb_1(b - e_C)^2$ $I_z = \frac{th^3}{12} + \frac{tb_1^3}{6} + 2tb_1 \left(\frac{h}{2} - \frac{b_1}{2}\right)^2 + 2tb \left(\frac{h}{2}\right)^2$ $I_t = \frac{t^3}{3}(h + 2b + 2b_1)$

Poikkileikkaus	Poikkileikkaussuureita
6. Hattuprofiili	$e_c = \frac{b^2 + 2bb_1}{h + 2b + 2b_1}, \quad e_v = b \frac{3h^2b + 6h^2b_1 - 8b_1^3}{h^3 + 6h^2b + 6h^2b_1 + 8b_1^3 + 12hb_1^2}$ $I_y = \frac{tb^3}{6} + 2tb \cdot \left(\frac{b}{2} - e_c\right)^2 + t h e_c^2 + 2tb_1(b - e_c)^2$ $I_z = \frac{th^3}{12} + \frac{tb_1^3}{6} + 2tb_1\left(\frac{h}{2} + \frac{b_1}{2}\right)^2 + 2tb\left(\frac{h}{2}\right)^2$ $I_t = \frac{t^3}{3}(h + 2b + 2b_1)$
7. I-profiili	$I_y = \frac{tb^3}{6}$ $I_z = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{tbh^2}{2}$ $I_t = \frac{1}{3}(2t^3b + t_w^3h)$
8. I-profiili	$e_c = \frac{t_w h^2 / 2 + t_1 b_1 h}{t_w h + t_1 b_1 + t_2 b_2}, \quad e_v = \frac{t_1 b_1^3 h}{t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3}$ $I_y = \frac{t_1 b_1^3}{12} + \frac{t_2 b_2^3}{12}$ $I_z = \frac{t_w h^3}{12} + t_w h \left(e_c - \frac{h}{2}\right)^2 + t_1 b_1 (h - e_c)^2 + t_2 b_2 e_c^2$ $I_t = \frac{1}{3}(t_1^3 b_1 + t_2^3 b_2 + t_w^3 h)$
8. Z-profiili	$I_y = \frac{2}{3}tb^3, \quad I_z = \frac{th^3}{12} + \frac{tbh^2}{2}$ $I_{yz} = -\frac{tb^2h}{2}$ $I_t = \frac{t^3}{3}(2b + h)$
8. Ympyräkaariprofiili	$e_c = \frac{\sin \alpha}{\alpha} a, \quad e_v = 2a \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$ $I_y = ta^3(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha})$ $I_z = ta^3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$ $I_t = \frac{2}{3}t^3 a \alpha$

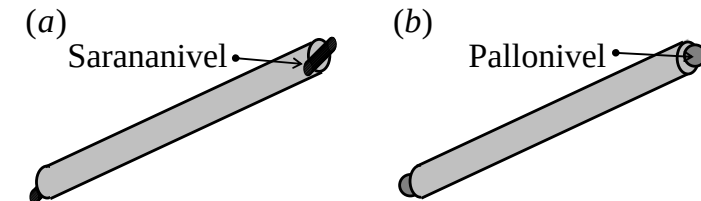
Luentoja, osa II



Tämän luentomonisteen liitteen tarkoituksena on Rakenteiden lujuusopin kurssia varten kerrata ja hieman laajentaa statiikan kurssissa jo esillä ollutta yksinkertaisten staattisesti määrättyjen rakenteiden, kuten ristikoiden, palkkien ja pilarien, leikkausrasitusten määrittämistä. Samalla opiskelijaa tutustutetaan rakenteiden mekaniikan kurssien käytäntöihin, merkintätapoihin ja merkkisääntöihin, jotka voivat hieman poiketa statiikan oppikirjan vastaavista.

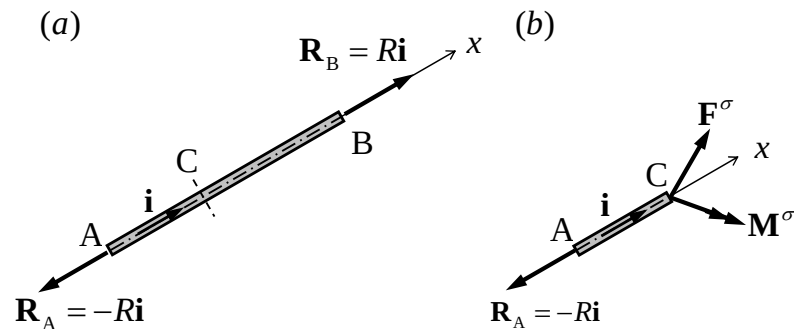
2.1 Nivelsauvan sauvavoima

Niin sanottu **nivelsauva** on sauva, joka otaksutaan painottomaksi ja joka liittyy ympäristöönsä (tuki tai muu rakenne) kitkattomien nivelten välityksellä. Nämä nivelet ovat tasotapauksessa sarananivelet, jotka mahdollistavat kiertymisen tarkastelutasoa vastaan kohtisuoran akselin ympäri, ja 3-dimensioisessa tapauksessa pallonivelet, jotka mahdollistavat kiertymisen kaikkiin suuntiin.



Kuva 2.1: Nivelsauva (a) tasotapauksessa (b) 3-dimensioisessa tapauksessa

Nivelsauvaa voidaan käyttää rakenteen osana tai siitä voidaan muodostaa erityinen rakenne, ristikko.



Kuva 2.2: (a) Sauvaan AB vaikuttavat voimat (b) Sauvan osaan AC vaikuttavat voimasuureet

Tarkastellaan kuvan 2.2 nivelsauvaa AB. Jos sauva ajatellaan irrotetuksi ympäristöstään, sen päihin kohdistuu nivelten vuoksi pelkät reaktiovoimat $\mathbf{R}_A$ ja $\mathbf{R}_B$. Koska irrotetun sauvan tulee olla tasapainossa, nämä voimat ovat statiikan kahden voiman säännön mukaan yhtä suuret $R_A = R_B = R$, vastakkaissuuntaiset ja vaikuttavat samalla suoralla, sauvan akselilla eli $\mathbf{R}_A = -R\mathbf{i}$ ja $\mathbf{R}_B = R\mathbf{i}$ (kuva 2.2a). Jos sauva ajatellaan katkaistuksi kohdasta C, poikkileikkauksessa vaikuttaa leikkausrasitusvektorit $\mathbf{F}^\sigma$ ja $\mathbf{M}^\sigma$. Kirjoittamalla sauvan osan AC voimatasapainoyhtälö, saadaan

$$\mathbf{F}^\sigma - R\mathbf{i} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F}^\sigma = R\mathbf{i}. \quad (2.1)$$

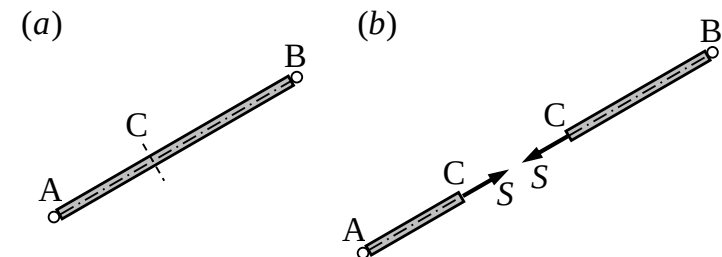
Kirjoittamalla vastaavasti momenttitasapainoyhtälö pisteen C suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^\sigma + \overline{CA} \times \mathbf{R}_A &= \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{M}^\sigma + (-l_{AC}\mathbf{i}) \times (-R\mathbf{i}) = \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{M}^\sigma &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Leikkausrasitusvektorien määrittelyyn (1.1) viitaten nähdään nyt, että ainoa poikkileikkauksessa C vaikuttava leikkausrasitus on normaalivoima N suuruudeltaan $N = R$. Nivelsauvan normaalivoimaa kutsutaan yleensä sauvavoimaksi ja merkitään symbolilla S .

Yhteenvetona toteamme seuraavaa: Nivelsauvan poikkileikkauksen jännitys jakauman redusointituloksena on pelkkä voima, jota kutsutaan **sauvavoimaksi** ja merkitään tavallisesti symbolilla S .

Vetävä sauvavoima on **positiivinen** ja **puristava** on **negatiivinen**. Kuva 2.3 havainnollistaa sauvavoimaa nivelsauvan leikkauksessa.



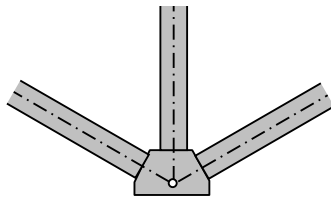
Kuva 2.3: (a) Nivelsauva AB ja (b) sauvavoima S sen leikkauksessa C

2.2 Ristikko

2.21 Ristikkomalli

Ristikko (truss) on nivelsauvoista päistään yhteen liittämällä koottu ideaalinen rakennemalli.

Todellista ristikkoa, jonka sauvojen akselien jatkeet leikkaavat likipitään samassa pisteessä ja jonka liitokset eivät ole kovin jäykkiä tarvittavan kiertymisen mahdollistamiseksi, voidaan analysoida käyttäen ristikkomallia. Kuva 2.4 havainnollistaa todellisen ristikon liitosta.



Kuva 2.4: Todellisen ristikon liitos

2.22 Tasoristikko ja avaruusristikko

Jos ristikon sauvat ovat samassa tasossa ja siihen vaikuttaa tässä tasossa vaikuttava tasovoimasysteemi, ristikkoa sanotaan **tasoristikoksi** (plane truss). Jos näin ei ole, ristikkoa sanotaan **avaruusristikoksi** (space truss). Tasoristikko on tuettu käytännössä tavalla tai toisella siten, että nivelten siirtyminen ristikon tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa on estetty. Tässä kurssissa tarkastellaan vain tasoristikkoa.

2.23 Staattisesti määrätty tasoristikko

Rakenne on **staattisesti määrätty**, jos sen tuntemattomat voimasuureet voidaan ratkaista yksikäsitteisesti käyttäen **tasapainoyhtälöitä**. Jos näin ei ole, rakenne on **staattisesti määräämätön**.

Ristikossa tuntemattomina ovat sauvavoimat ja tukivoimat ja niiden lukumäärä on siten $s+t$, missä s =sauvojen lukumäärä ja t tuentaan liittyvien siirtymärajoitteiden (ns. yksiarvoisten tukien) lukumäärä. Tasoristikossa kutakin niveltä kohti voidaan kirjoittaa kaksi tasapainoyhtälöä, joten yhtälöiden lukumäärä on $2k$, missä k on nivelten lukumäärä. Probleema muodostuu siis $2k$ yhtälöstä, ja niissä on $s+t$ tuntematonta. Jos yhtälöitä on yhtä paljon kuin tuntemattomia, tällaisella yhtälöryhmällä on tavallisesti¹ yksikäsitteinen ratkaisu. Näin voidaan päätellä, että välttämätön ehto sille, että tasoristikko (tukineen) on **staattisesti määrätty**, on

$$s + t = 2k. \quad (2.3)$$

Tasoristikon **staattisen määräämättömyyden kerta-luku** määritellään kaavalla

$$n_s = s + t - 2k. \quad (2.4)$$

Jos $n_s = 0$, ristikko on tavallisesti staattisesti määrätty, jos $n_s > 0$, tuntemattomia on enemmän kuin yhtälöitä ja

¹ Yhtälöryhmän pitää lisäksi olla ratkaistavissa, eli sen kerroinmatriisin tulee olla ei-singulaarinen.

rakenne on staattisesti määräämätön ja jos $n_s < 0$, tuentoja tai sauvoja on liian vähän ja rakenne muodostaa **mekanismiin**.

2.3 Tasoristikon sauvavoimien määrittäminen

Nivelmenetelmä (joint method)

Muodostetaan ristikon **jokaisen nivelen tasapainoyhtälöt**. Tuntemattomat ratkaistaan näin syntyvästä lineaarisesta yhtälöryhmästä.

Saadaan kätevästi ristikon **kaikkien** sauvojen sauvavoimat.

Ratkaisu (käsinlasku):

- Määritetään tukireaktiot (tavallisesti).
- Aloitetaan nivelestä, johon yhtyy **kaksi** (ei yhdensuuntaista) sauvaa ja johon vaikuttavat ulkoiset voimat tunnetaan. Muodostetaan tasapainoyhtälöt ja ratkaistaan sauvavoimat.
- Siirrytään sellaiseen läheiseen niveleen, jossa esiintyy enää **kaksi** tuntematonta sauvavoimaa. Muodostetaan tasapainoyhtälöt ja ratkaistaan sauvavoimat.
- Jne.

Leikkausmenetelmä (section method)

Ristikko jaetaan kuvitelluilla **leikkauksilla** aina **kahteen osaan** ja osille muodostetaan tasapainoyhtälöitä. Tuntemattomat ratkaistaan näin syntyvästä lineaarisesta yhtälöryhmästä.

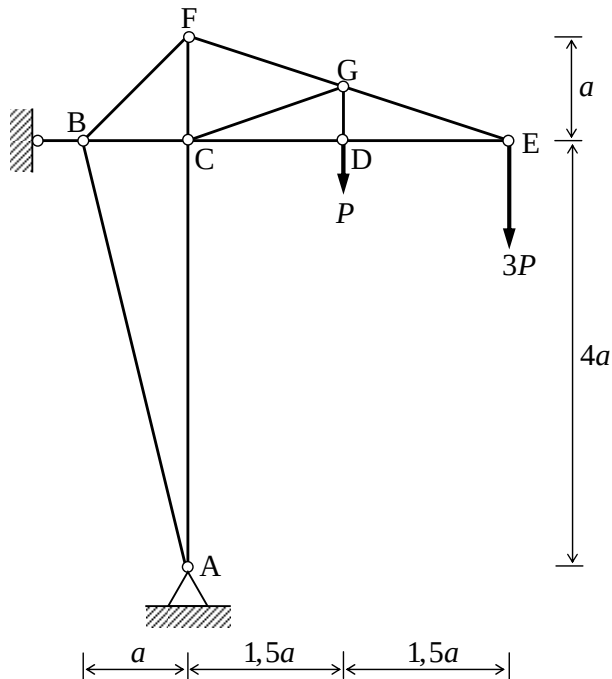
Saadaan kätevästi ristikon **haluttujen** sauvojen sauvavoimat.

Ratkaisu:

- Määritetään tukireaktiot (tavallisesti).
- Valitaan leikkaus, joka jakaa ristikon kahteen osaan, katkaisemalla **kolme** sauvaa. Muodostetaan jomman kumman osan tasapainoyhtälöt ja ratkaistaan sauvavoimat.
- Jne.

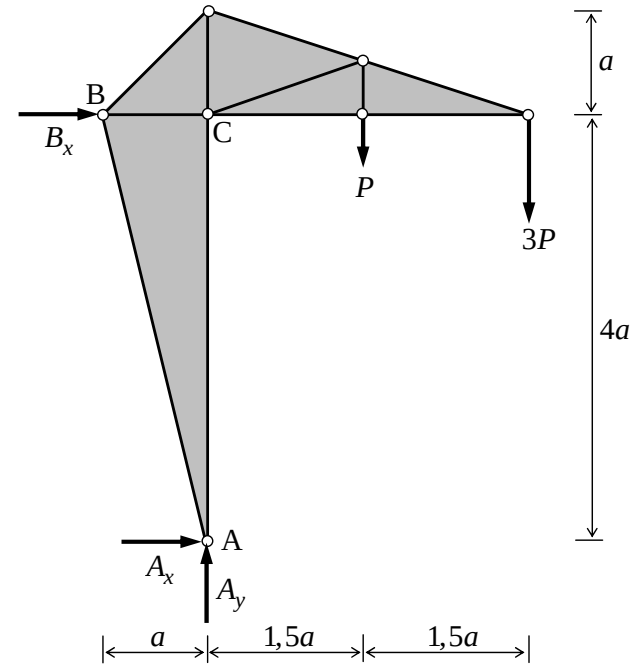
Esimerkki 2.1:

Määritetään oheisen ristikon sauvavoimat nivelmenetelmällä.



Ratkaisu:

Tukireaktiot:



$$\overset{\curvearrowleft}{A)} \quad -B_x \cdot 4a - P \cdot 1,5a - 3P \cdot 3a = 0 \Rightarrow B_x = -\frac{21}{8}P$$

$$\overset{\curvearrowright}{C)} \quad A_x \cdot 4a - P \cdot 1,5a - 3P \cdot 3a = 0 \Rightarrow A_x = \frac{21}{8}P$$

$$\uparrow \quad A_y - P - 3P = 0 \Rightarrow A_y = 4P$$

Huomautus: Tässä tehtävässä sauvavoimat olisi voitu ratkaista, vaikka tukireaktioita ei olisi etukäteen määritetty. Niitä hyväksi käyttäen voidaan kuitenkin suorittaa nivelmenetelmällä tehdyn laskelman tarkistus.

Sauvavoimat:

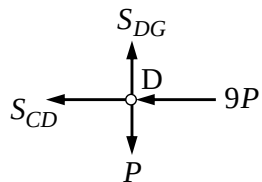
Valitaan aloitusniveleksi nivel E. (Siihen liittyy kaksi sauvaa.) Yhtä hyvin olisi voitu valita nivel A, koska siihen vaikuttavat tukireaktiot nyt tunnetaan.

VKK E:



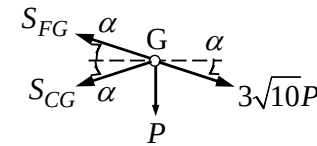
$$\begin{aligned} \uparrow S_{EG} \sin \alpha - 3P &= 0 \Rightarrow S_{EG} = \frac{3P}{\sin \alpha} = 3\sqrt{10}P \approx \underline{\underline{9,49P}} \\ \rightarrow -S_{EG} \cos \alpha - S_{DE} &= 0 \Rightarrow S_{DE} = -S_{EG} \cos \alpha \\ &= -3\sqrt{10}P \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \underline{\underline{-9P}} \end{aligned}$$

VKK D:



$$\begin{aligned} \uparrow S_{DG} - P &= 0 \Rightarrow S_{DG} = \underline{\underline{P}} \\ \rightarrow -S_{CD} - 9P &= 0 \Rightarrow S_{CD} = \underline{\underline{-9P}} \end{aligned}$$

VKK G:



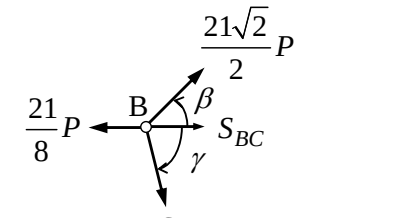
$$\begin{aligned} \rightarrow -S_{FG} \cos \alpha - S_{CG} \cos \alpha + 3\sqrt{10}P \cos \alpha &= 0 \\ \uparrow S_{FG} \sin \alpha - S_{CG} \sin \alpha - 3\sqrt{10}P \sin \alpha - P &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} S_{FG} + S_{CG} = 3\sqrt{10}P \\ S_{FG} - S_{CG} = 4\sqrt{10}P \end{cases} \\ \Rightarrow S_{FG} = \frac{7\sqrt{10}}{2}P \approx \underline{\underline{11,68P}}, S_{CG} = -\frac{\sqrt{10}}{2}P \approx \underline{\underline{-1,58P}} \end{aligned}$$

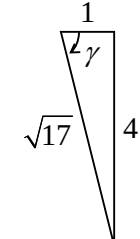
VKK F:



$$\begin{aligned} \rightarrow -S_{BF} \cos \beta + \frac{7\sqrt{10}}{2}P \cos \alpha &= 0 \Rightarrow S_{BF} = \frac{21\sqrt{2}}{2}P \approx \underline{\underline{14,85P}} \\ \uparrow -S_{CF} - S_{BF} \sin \beta - \frac{7\sqrt{10}}{2}P \sin \alpha &= 0 \Rightarrow S_{CF} = \underline{\underline{-14P}} \end{aligned}$$

VKK B:

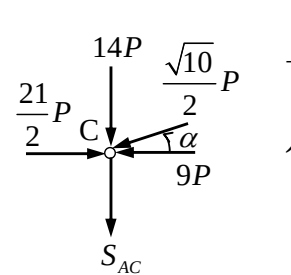


$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \sin \gamma = \frac{4}{\sqrt{17}}$$


$$\uparrow -S_{AB} \frac{4/\sqrt{17}}{2} + \frac{21\sqrt{2}}{2} P \frac{1/\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_{AB} = \frac{21\sqrt{17}}{8} P \approx \underline{\underline{10,82P}}$$

$$\rightarrow S_{BC} + S_{AB} \cos \gamma + \frac{21\sqrt{2}}{2} P \cos \beta - \frac{21}{8} P = 0 \Rightarrow S_{BC} = \underline{\underline{10,5P}}$$

VKK C:

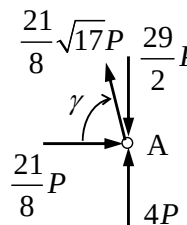


$$\rightarrow \frac{21}{2} P - \frac{\sqrt{10}}{2} \frac{3/\sqrt{10}}{\cos \alpha} P - 9P = 0 \Rightarrow \underline{\underline{0=0, \text{OK}}}$$

$$\uparrow -S_{AC} - 14P - \frac{\sqrt{10}}{2} P \frac{1/\sqrt{2}}{\sin \alpha} = 0$$

$$\Rightarrow S_{AC} = -\frac{29}{2} P \approx \underline{\underline{-14,5P}}$$

VKK A:

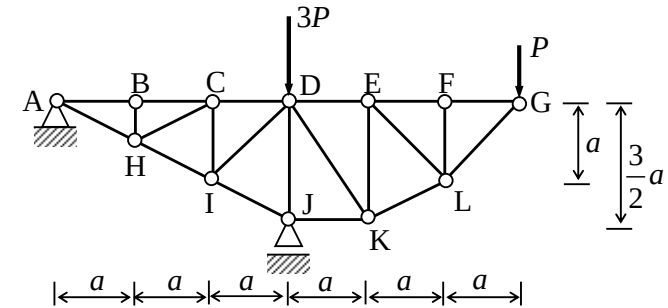


$$\rightarrow -\frac{21\sqrt{17}}{8} P \cos \gamma + \frac{21}{8} P = 0 \Rightarrow \underline{\underline{0=0, \text{OK}}}$$

$$\uparrow \frac{21\sqrt{17}}{8} P \sin \gamma - \frac{29}{2} P + 4P = 0 \Rightarrow \underline{\underline{0=0, \text{OK}}}$$

Esimerkki 2.2:

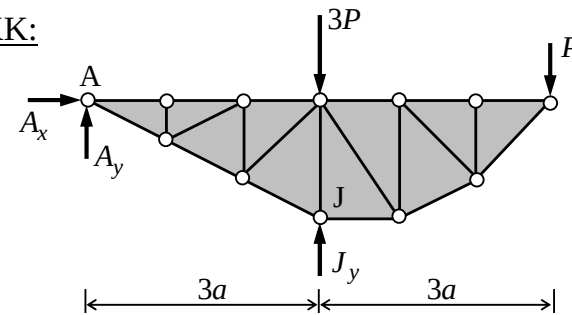
Määritetään leikkausmenetelmällä oikean ristikon sauvojen HI, EK ja KL sauvoivoimat.



Ratkaisu:

Tukireaktiot:

VKK:

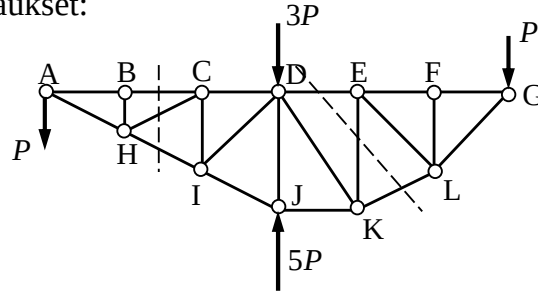


$$\rightarrow A_x = 0$$

$$\overset{A}{\curvearrowright} -J_y \cdot 3a + 3P \cdot 3a + P \cdot 6a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{J_y = 5P}}$$

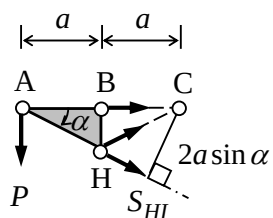
$$\overset{J}{\curvearrowright} A_y \cdot 3a + P \cdot 3a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{A_y = -P}}$$

Leikkaukset:



Sauvan HI sauvavoima:

Leikkauksen vasemman puolen VKK:

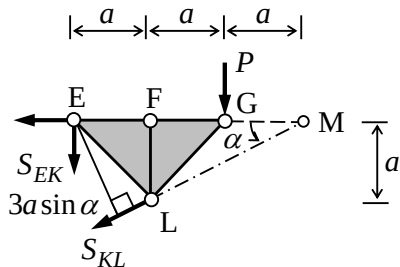


$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sum \overset{\curvearrowright}{M}_H: S_{HI} \cdot 2a \sin \alpha + P \cdot 2a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S_{HI} = P\sqrt{5}}}$$

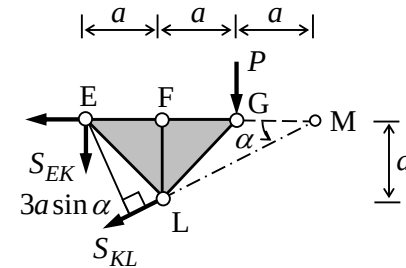
Sauvojen EK ja KL sauvavoimat:

Leikkauksen oikean puolen VKK:



Sauvojen EK ja KL sauvavoimat:

Leikkauksen oikean puolen VKK:



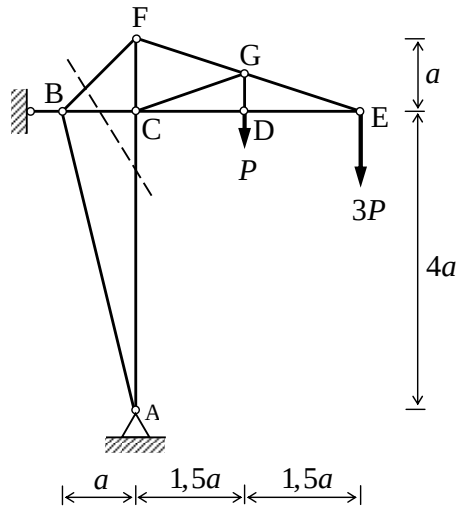
$$\sum \overset{\curvearrowright}{M}_J: S_{EK} \cdot 3a + P \cdot a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S_{EK} = -\frac{P}{3}}}$$

$$\sum \overset{\curvearrowright}{M}_L: -S_{KL} \cdot 3a \sin \alpha - P \cdot 2a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S_{KL} = -\frac{2\sqrt{5}}{3}P}}$$

Huomautus: Määritettäessä tietyn sauvan sauvavoimaa, momenttipiste valittiin muiden ”leikattujen” sauvojen jatkeiden leikkauspisteeseen. Tällöin momentti-tasapainoyhtälöön tulee vain yksi tuntematon.

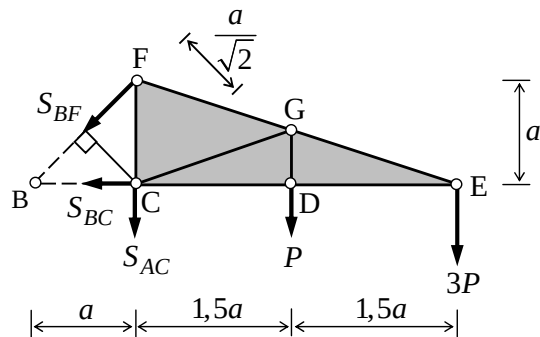
Esimerkki 2.3:

Tarkistetaan esimerkin 2.1 sauvojen AC, BC ja BF sauvavoimat leikkausmenetelmällä.



Ratkaisu:

VKK:

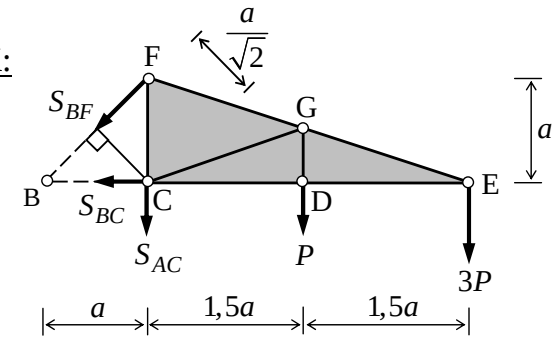


$$\text{B)} \quad -S_{AC} \cdot a - P \cdot 2,5a - 3P \cdot 4a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S_{AC} = -14,5P}} \quad \text{OK.}$$

$$\textcircled{C}) S_{BF} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} - P \cdot 1,5a - 3P \cdot 2a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S_{BF} = 10,5\sqrt{2}P \approx 14,85P \quad \text{OK.}}}$$

$$\text{F)} \quad -S_{BC} \cdot a - P \cdot 1,5a - 3P \cdot 3a = 0 \Rightarrow \underline{S_{BC} = -10,5P} \quad \text{OK.}$$

VKK:



$$\text{B)} \quad -S_{AC} \cdot a - P \cdot 2,5a - 3P \cdot 4a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S_{AC} = -14,5P}} \quad \text{OK.}$$

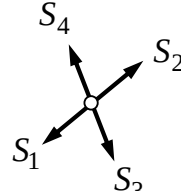
$$\zeta) S_{BF} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} - P \cdot 1,5a - 3P \cdot 2a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S_{BF} = 10,5\sqrt{2}P \approx 14,85P \text{ OK.}}}$$

$$\text{F)} \quad -S_{BC} \cdot a - P \cdot 1,5a - 3P \cdot 3a = 0 \Rightarrow \underline{S_{BC} = -10,5P} \quad \text{OK.}$$

Hyödyllisiä tuloksia (tasoristikko):

Jos ristikon kuormittamattomassa nivelessä yhtyy neljä sauvaa siten, että aina kaksi on samalla suoralla, niin

VKK:

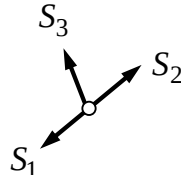


$$S_1 = S_2,$$

$$S_3 = S_4.$$

Jos ristikon kuormittamattomassa nivelessä yhtyy kolme sauvaa, joista kaksi on samalla suoralla, niin

VKK:

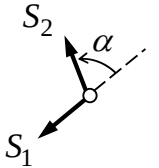


$$S_1 = S_2,$$

$$S_3 = 0.$$

Jos ristikon kuormittamattomassa nivelessä yhtyy kaksi sauvaa, jotka eivät ole samalla suoralla, niin

VKK:



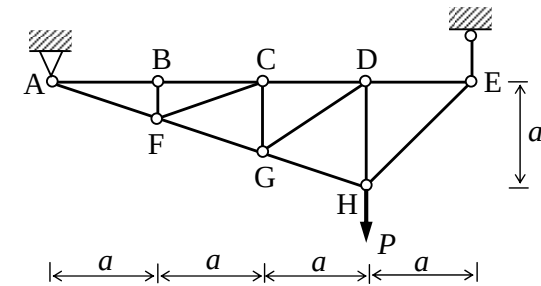
$$S_1 = 0,$$

$$S_2 = 0.$$

Huomautus: Ristikon sauvaa, jonka sauvavoima tietyn kuormituksen alaisena on nolla, kutsutaan **nollasauvaksi**. Nollasauvat voidaan ajatella poistetuiksi ristikosta määrittettäessä kyseisen kuormitustapauksen sauvavoimia.

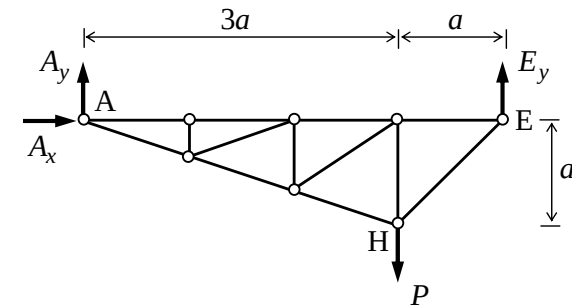
Esimerkki 2.4:

Määritetään oheisen ristikon sauvavoimat siten, että etsitään ensin nollasauvat.



Ratkaisu:

Tukireaktiot:



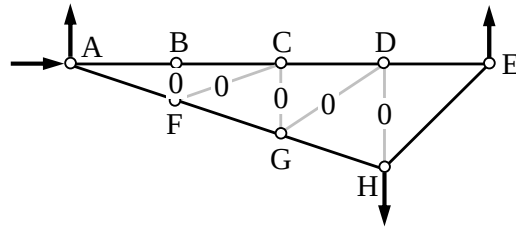
$$\rightarrow A_x = 0$$

$$\overset{A}{\curvearrowright} E_y \cdot 4a - P \cdot 3a = 0 \Rightarrow E_y = \frac{3}{4}P$$

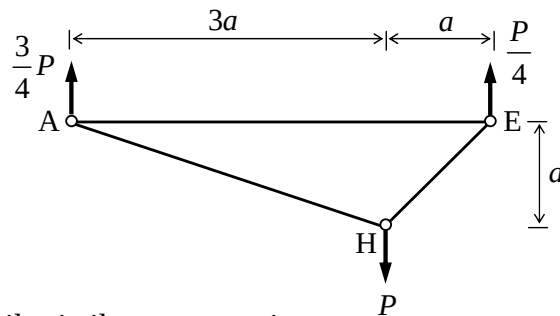
$$\overset{E}{\curvearrowright} -A_y \cdot 4a + P \cdot a = 0 \Rightarrow A_y = \frac{P}{4}$$

Nollasauvat:

Aluksi nähdään, että sauva BF on nollasauva. Kun ajatellaan se poistetuksi, nähdään että myös sauva CF on nollasauva. Kun ajatellaan se poistetuksi, nähdään että sauva CG on nollasauva. Samaan tapaan nähdään vielä, että sauvat DG ja DH ovat nollasauvoja. Saadaan siis $S_{BF} = S_{CF} = S_{CG} = S_{DG} = S_{DH} = 0$. Oheinen kuva havainnollistaa nollasauvoja.

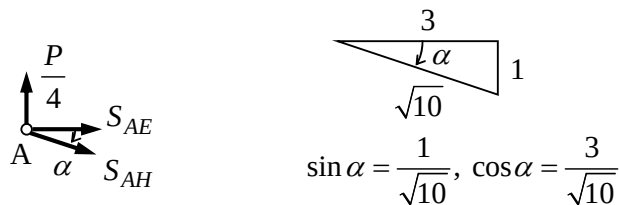


”Korvikeristikko”:



Korvikeristikon sauvavoimat:

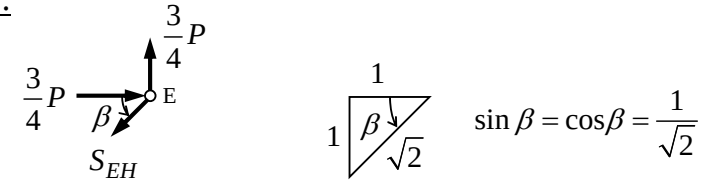
VKK A:



$$\uparrow -S_{AH} \frac{1/\sqrt{10}}{\sin \alpha} + \frac{P}{4} = 0 \Rightarrow S_{AH} = \frac{\sqrt{10}}{4} P$$

$$\rightarrow S_{AE} + S_{AH} \frac{3/\sqrt{10}}{\cos \alpha} = 0 \Rightarrow S_{AE} = -\frac{3}{\sqrt{10}} S_{AH} = -\frac{3}{4} P$$

VKK E:



$$\uparrow -S_{EH} \frac{1/\sqrt{2}}{\sin \beta} + \frac{3}{4} P = 0 \Rightarrow S_{EH} = \frac{3\sqrt{2}}{4} P$$

$$\rightarrow \frac{3}{4} P - S_{EH} \frac{1/\sqrt{2}}{\cos \beta} = 0 \Rightarrow \frac{3}{4} P - \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} P = 0 \Rightarrow 0 = 0, \text{ OK}$$

Tulos on:

$$\underline{S_{BF} = S_{CF} = S_{CG} = S_{DG} = S_{DH} = 0 \text{ (nollasauvat)},}$$

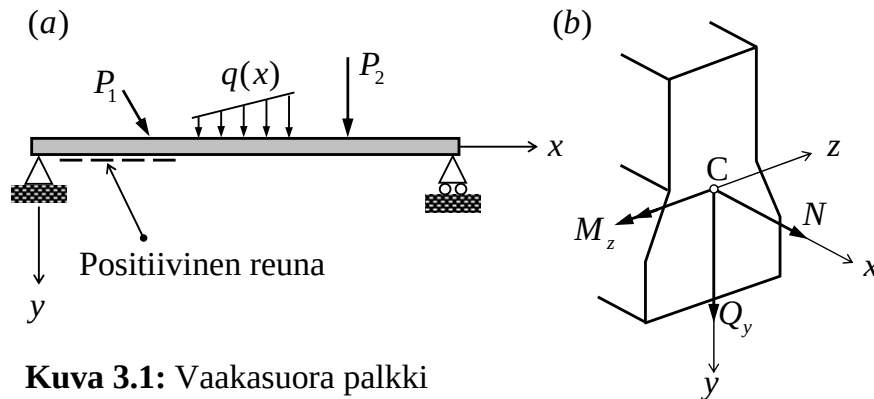
$$\underline{S_{AB} = S_{BC} = S_{CD} = S_{DE} = S_{AE} = -\frac{3}{4} P,}$$

$$\underline{S_{AF} = S_{FG} = S_{GH} = S_{AH} = \frac{\sqrt{10}}{4} P, \quad S_{EH} = \frac{3\sqrt{2}}{4} P}$$

3. Sauvarakenteiden leikkausrasituksista

3.1 Vaakasuora palkki

Tarkastellaan vaakasuoraa palkkia, jota kuormittaa sen akselin kautta kulkevassa pystysuorassa tasossa (x, y -tasossa) oleva **tasovoimasysteemi** (kuva 3.1). Palkin poikkileikkaus on kuvassa 3.1b, kuormitustason suhteen symmetrinen, mutta se voi myös olla epäsymmetrinen.

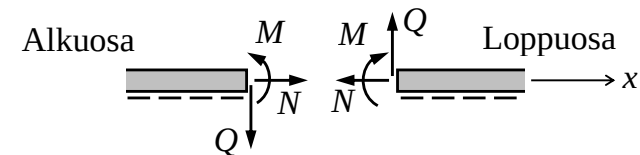


Kuva 3.1: Vaakasuora palkki

Koska kuormitus on tasovoimasysteemi x, y -tasossa ja sillä ei ole z -akselin suuntaisia komponentteja, se ei voi aiheuttaa z -akselin suuntaista leikkausvoimaa Q_z eikä taivutusmomenttia M_y . Se ei myöskään voi aiheuttaa momenttia x -akselin suhteen eikä siten vääntömomenttia M_t . Näin nollasta eroavat leikkausrasitukset ovat tässä tapauksessa normaalivoima N , leikkausvoima Q_y ja taivutusmomentti M_z . Tässä yhteydessä voidaan merkitä $Q_y = Q$ ja $M_z = M$. Jos palkin kuormitus on

pystysuora, kuten usein käytännön tehtävissä, myös normaalivoima N on nolla.

Tarkastelun havainnollistamiseksi on tarkoituksen mukaista ottaa käyttöön sauvan ns. **positiivisen reunan** käsite. Se on poikkileikkauskoordinaatiston positiivisen y -akselin suuntainen reuna, joka vaakasuoran palkin tapauksessa on sen alareuna. Sitä merkitään palkin sivukuissa **katkoviivalla**. Yleisemmin voidaan sanoa, että sauvan positiivinen reuna on sauvan pituuskoordinaatin x (tai s) suuntaan nähden oikealle jäävä palkin reuna (vrt. Kuvat 3.1 ja 3.2).



Kuva 3.2: Vaakasuoran palkin leikkausrasitusten positiiviset suunnat

Vaakasuoran palkin leikkausrasitusten positiiviset suunnat palkin vasemman puoleisessa, **”alkuosassa”** ja oikean puoleisessa **”loppuosassa”** on esitetty kuvassa 3.2. Ne voidaan ilmaista sanallisesti seuraavasti:

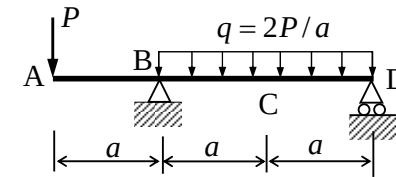
- **Normaalivoima** N on palkin akselin suuntainen (vaakasuora) ja sen positiivinen suunta on tarkasteltavasta sauvan osasta **ulospäin**.
- **Leikkausvoima** Q on sauvan akselia vastaan kohtisuorassa (pystysuora) ja sen positiivinen suunta on sauvan **alkuosassa** y -akselin **positiiviseen**

suuntaan (alaspäin) ja sauvan **loppuosassa** y-akselin **negatiiviseen suuntaan** (ylöspäin).

- Positiivinen **taivutusmomentti** M pyrkii **venyttämään palkin positiivista reunaa**, ts. momenttinuolen häntä on positiivisella puolella.

Esimerkki 3.1:

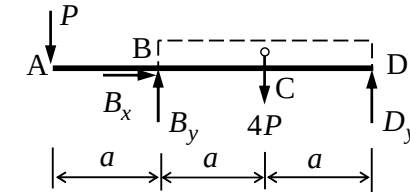
Oheista vaakasuoraa palkkia AD kuormittaa pistekuorma P ja tasainen kuorma $q = 2P/a$. Määritetään normaali-voiman, leikkausvoiman ja taivutusmomentin arvo pisteessä C.



Ratkaisu:

Tukireaktiot:

VKK:

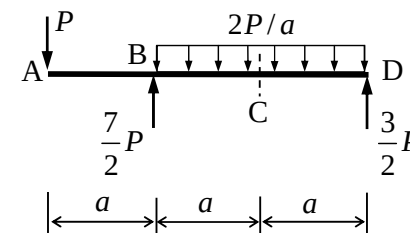


$$\rightarrow B_x = 0,$$

$$\curvearrowright P \cdot a - 4P \cdot a + D_y \cdot 2a = 0 \Rightarrow D_y = \frac{3}{2}Pa$$

$$\curvearrowleft P \cdot 3a - B_y \cdot 2a + 4P \cdot a = 0 \Rightarrow B_y = \frac{7}{2}Pa$$

VKK, jossa kaikki voimat ovat tunnettuja:

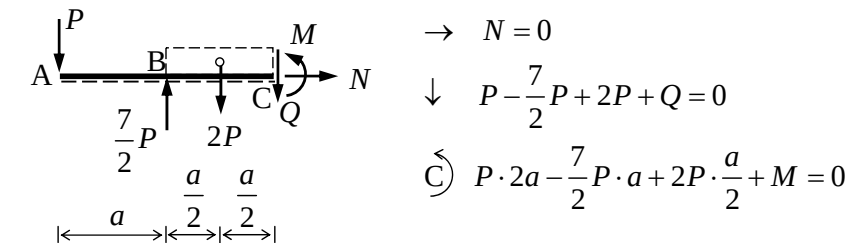


Leikkausrasitukset pisteessä C:

Ajatellaan palkki katkaistuksi pisteen C kohdalta, ja piirretään palkin alkuosan AC vapaakappalekuvio. Katkaisukohtaan merkitään tuntemattomat normaali-voima N , leikkausvoima Q ja taivutusmomentti M . Normaalivoimalle, leikkausvoimalle ja taivutusmomentille saadaan yhtälöt kirjoittamalla kappaleen AC vaakaja pystysuora tasapainoehto sekä momenttitasapainoehto **leikkauskohdan** (piste C) suhteen:

VKK AC:

(Tasainen kuorma $q = 2P/a$ on korvattu resultantillaan $2P$.)



$$\Rightarrow \underline{\underline{N=0}}, \quad \underline{\underline{Q=\frac{P}{2}}}, \quad \underline{\underline{M=\frac{Pa}{2}}}$$

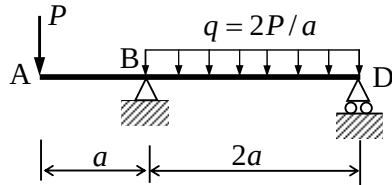
3.2 Vaakasuoran palkin rasituskuviot

Leikkausrasitukset, kuten nimikin ilmaisee, kuvaavat sauvarakenteeseen syntyviä rasituksia. Rakenteiden analyysin eräänä keskeisenä tavoitteena on selvittää rakenteen suurimmat rasitukset. Tämän vuoksi ei useinkaan riitä, että tunnemme rakenteen leikkausrasitukset tietyissä pisteissä, vaan tavoitteenamme on määrittää niiden jakaumat pitkin rakenteen sauvoja. Nämä jakaumat esitetään yleensä ns. **rasituskuvioiden** avulla. Niitä käyttäen voidaan sitten selvittää lujuuden kannalta kriittiset rakenteen kohdat ja niiden leikkausrasitukset.

Seuraavassa tarkastellaan vaakasuoran palkin rasituskuvioiden määrittämistä esimerkkien valossa.

Esimerkki 3.2:

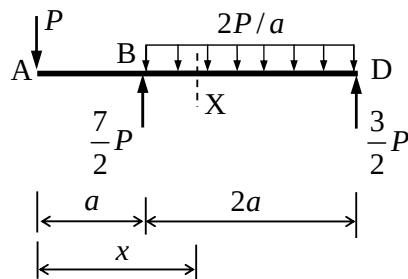
Määritetään edellisen esimerkin palkin rasituskuviot sekä päätellään niiden avulla leikkausrasitusten maksimi ja minimiarvot.



Ratkaisu:

Merkitään katkaisupisteen X asemaa (pisteestä A mitattuna) muuttujalla x ja määritetään leikkausrasitusten lausekkeet tässä muuttuvassa pisteessä.

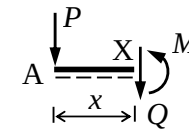
VKK, jossa kaikki voimat ovat tunnettuja:



Koska pisteessä B on pistekuorma (tukireaktio) ja jakautuneen kuorman äkillinen muutos, tulevat leikkausrasitusten lausekkeet olemaan väleillä AB ja BD erilaiset. Tarkastelemme siis erikseen välejä AB ja BD. Kun leikkausrasitusten lausekkeet tunnetaan, rasituskuviot on helppo piirtää.

Väli AB:

Ajatellaan palkki katkaistuksi kohdasta X, joka on välillä AB, ja piirretään palkin alkuosan VKK² sekä lasketaan leikkausvoima ja taivutusmomentti:



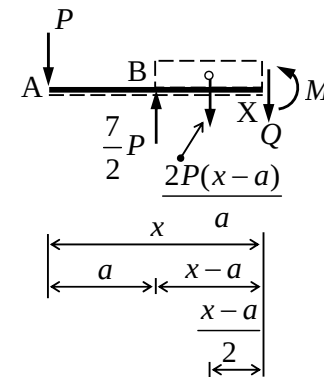
$$\downarrow \quad Q + P = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Q = -P}}$$

$$\curvearrowright \quad M + P \cdot x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{M = -Px}}$$

Väli BD:

Ajatellaan palkki katkaistuksi kohdasta X, joka on nyt välillä BD, ja piirretään palkin alkuosan VKK sekä lasketaan leikkausvoima ja taivutusmomentti:

VKK AX:



$$\downarrow \quad Q + P - \frac{7}{2}P + \frac{2P(x-a)}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q = \left(\frac{9}{2} - 2\frac{x}{a}\right)P}}$$

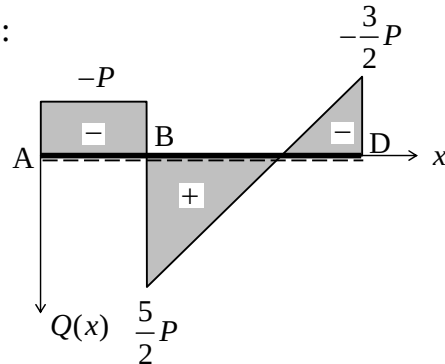
$$\curvearrowright \quad M + P \cdot x - \frac{7}{2}P \cdot (x-a) + \frac{2P(x-a)}{a} \cdot \frac{(x-a)}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M = \left(-\frac{9}{2} + \frac{9x}{2a} - \frac{x^2}{a^2}\right)Pa}}$$

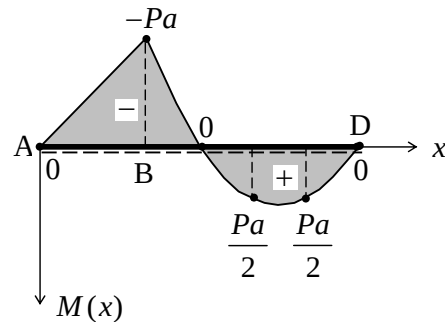
² Koska palkki on vaakasuora ja siihen vaikuttaa vain pystysuoria voimia, on normaalivoima koko palkin alueella nolla. Tämän vuoksi VKK:oon ei ole piirretty normaalivoimaa.

Piirretään leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuviot: Kuvioon piirretään palkki ja sen positiivinen reuna. Palkin positiivinen reuna määrää Q - ja M -akselien suunnan, joka vaakasuoran palkin tapauksessa on siis alaspäin.

Q -kuvio:



M -kuvio:



Leikkausvoiman maksimi- ja minimiarvot nähdään suoraan Q -kuvioista:

$$\underline{\underline{Q_{\max} = \frac{5}{2}P}}, \underline{\underline{Q_{\min} = -\frac{3}{2}P}}$$

Taivutusmomentin maksimiarvo on M -kuvion perusteella välillä BD. Määritetään maksimikohta ja maksimiarvo:

$$M'(x) \equiv \frac{9}{2}P - 2\frac{P}{a}x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_{\max} = \frac{9}{4}a}}$$

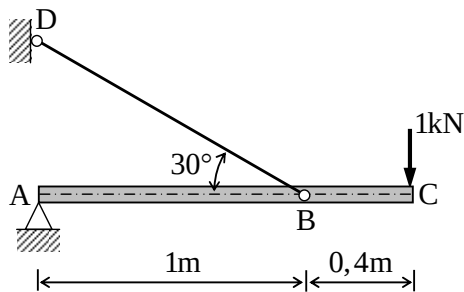
$$M_{\max} = M(x_{\max}) = \left(-\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\frac{x_{\max}}{a} - \frac{x_{\max}^2}{a^2}\right)Pa = \underline{\underline{\frac{9}{16}Pa}}$$

Taivutusmomentin minimiarvo nähdään M -kuvioista:

$$\underline{\underline{M_{\min} = -Pa.}}$$

Esimerkki 3.3:

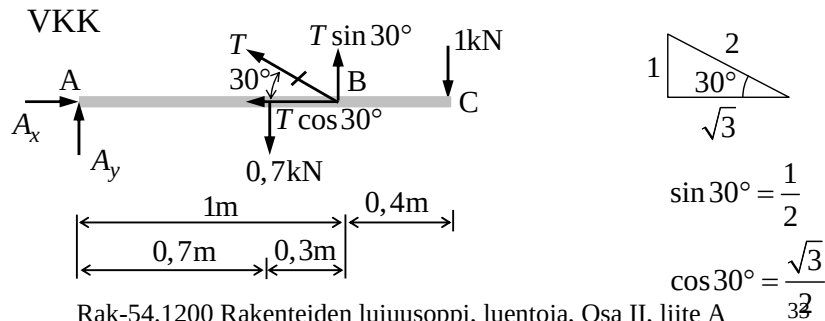
Oheinen kannatin on tuettu kiinteällä niveltuella pisteessä A ja köydellä BD pisteessä B. Kannattimen oma paino on $0,5\text{kN/m}$ ja sitä kuormittaa 1kN suuruinen pistekuorma pisteessä C. Määritetään sen N -, Q - ja M -kuviot.



Ratkaisu:

Tukireaktiot:

Ajatellaan palkki AC irrotetuksi tuistaan ja korvataan tuet tuntemattomilla tukireaktioilla ja piirretään VKK. Köysituesta aiheutuva tukireaktio T on köyden suuntainen. Palkin AC oma paino lasketaan ($0,5\text{kN/m} \cdot 1,4\text{m} = 0,7\text{kN}$) ja asetetaan vaikuttamaan palkin massakeskiöön (keskipisteeseen).

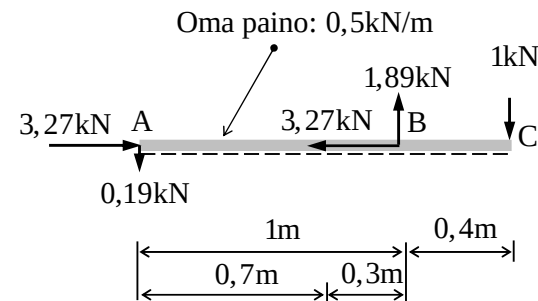


$$\sum \overset{1/2}{A)} -0,7\text{kN} \cdot 0,7\text{m} + T \sin 30^\circ \cdot 1\text{m} - 1\text{kN} \cdot 1,4\text{m} = 0 \Rightarrow T = 3,78\text{kN}$$

$$\sum B) -A_y \cdot 1\text{m} + 0,7\text{kN} \cdot 0,3\text{m} - 1\text{kN} \cdot 0,4\text{m} = 0 \Rightarrow A_y = -0,19\text{kN}$$

$$\rightarrow A_x - T \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow A_x = 3,78\text{kN} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,27\text{kN}$$

VKK, jossa kaikki voimat ovat tunnettuja:



Rasituskuviot:

VKK AX (Väli AB)

Oma paino: $0,5\text{kN/m} \cdot x$

$$\rightarrow N + 3,27\text{kN} = 0$$

$$\Rightarrow N = -3,27\text{kN}$$

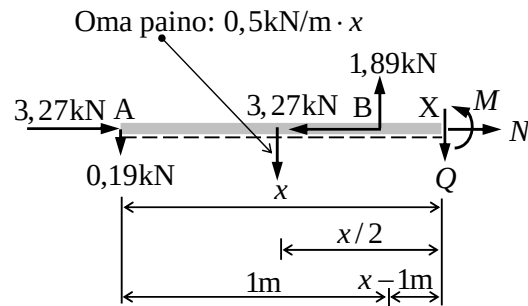
$$\downarrow Q + 0,19\text{kN} + 0,5\text{kN/m} \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow Q = -0,19\text{kN} - 0,5\text{kN/m} \cdot x$$

$$\sum X) M + 0,19\text{kN} \cdot x + 0,5\text{kN/m} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M = -0,19\text{kN} \cdot x - 0,25\text{kN/m} \cdot x^2$$

VKK AX (Väli BC)



$$\rightarrow N + 3,27\text{kN} - 3,27\text{kN} = 0 \Rightarrow \underline{N = 0}$$

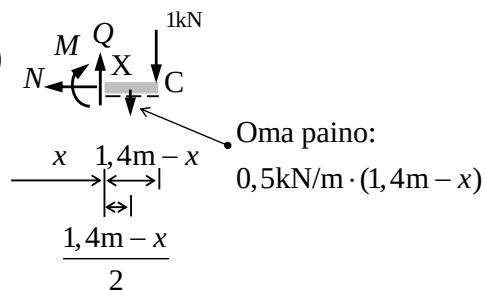
$$\downarrow Q + 0,19\text{kN} + 0,5\text{kN} \cdot x - 1,89\text{kN} \Rightarrow \underline{Q = 1,7\text{kN} - 0,5\text{kN} \cdot x}$$

$$\curvearrowright M + 0,19\text{kN} \cdot x + 0,5\text{kN/m} \cdot x \cdot \frac{x}{2} - 1,89\text{kN} \cdot (x - 1\text{m}) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{M = -1,89\text{kNm} + 1,7\text{kN} \cdot x - 0,25\text{kN/m} \cdot x^2}$$

Tarkistetaan välin BC tulos käyttäen palkin loppupään VKK:ta:

VKK XC (Väli BC)



$$\rightarrow \underline{N = 0}$$

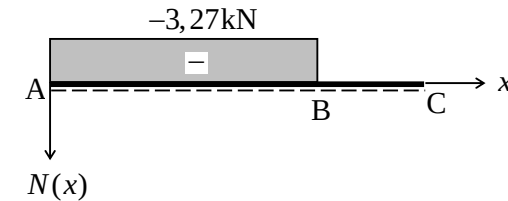
$$\uparrow Q - 0,5\text{kN/m} \cdot (1,4\text{m} - x) - 1\text{kN} = 0 \Rightarrow \underline{Q = 1,7\text{kN} - 0,5\text{kN/m} \cdot x}$$

$$\curvearrowright M + 0,5\text{kN/m} \cdot (1,4\text{m} - x) \cdot \frac{1,4\text{m} - x}{2} + 1\text{kN} \cdot (1,4\text{m} - x) = 0$$

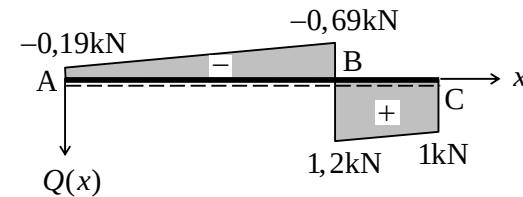
$$\Rightarrow \underline{M = -1,89\text{kNm} + 1,7\text{kN} \cdot x - 0,25\text{kN/m} \cdot x^2}$$

Rasituskuviot:

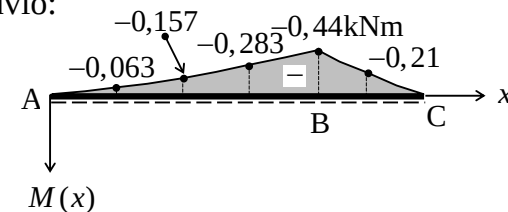
N-kuvio:



Q-kuvio:

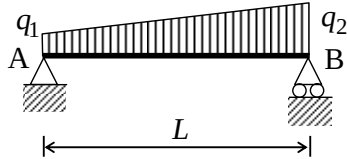


M-kuvio:



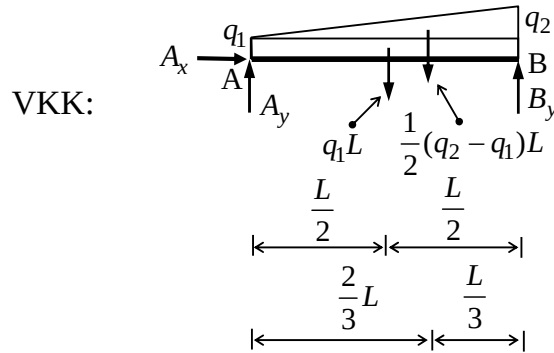
Esimerkki 3.4:

Oheista kaksitukista palkkia kuormittaa lineaarisesti muuttuva jakautunut kuorma, jonka arvot palkin päissä ovat q_1 ja q_2 . Määritetään palkin leikkausvoiman ja taivutusmomentin lausekkeet.



Ratkaisu:

Tukireaktiot:

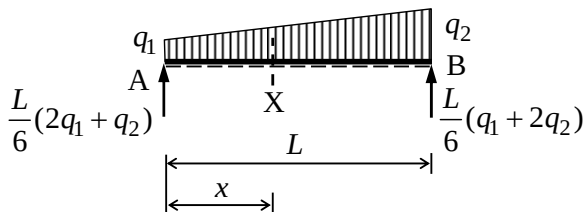


$$\rightarrow A_x = 0,$$

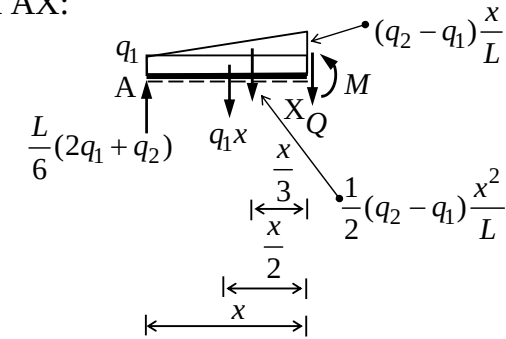
$$\hat{A}) B_y \cdot L - q_1 L \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{2}(q_2 - q_1)L \cdot \frac{2}{3}L = 0 \Rightarrow B_y = \frac{L}{6}(q_1 + 2q_2)$$

$$\hat{B}) -A_y \cdot L + q_1 L \cdot \frac{L}{2} + \frac{1}{2}(q_2 - q_1)L \cdot \frac{1}{3}L = 0 \Rightarrow A_y = \frac{L}{6}(2q_1 + q_2)$$

VKK, jossa kaikki voimat ovat tunnettuja:



VKK AX:



$$\downarrow Q - \frac{L}{6}(2q_1 + q_2) + q_1 x + \frac{1}{2L}(q_2 - q_1)x^2 = 0$$

$$\Rightarrow Q = \frac{L}{6}(2q_1 + q_2) - q_1 x - \frac{1}{2L}(q_2 - q_1)x^2$$

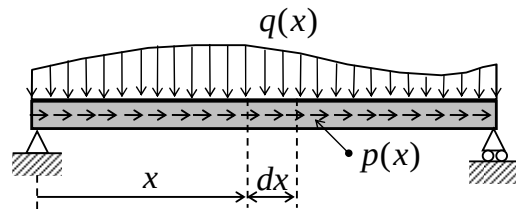
$$\hat{X}) M - \frac{L}{6}(2q_1 + q_2) \cdot x + q_1 x \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{2L}(q_2 - q_1)x^2 \cdot \frac{x}{3} = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{L}{6}(2q_1 + q_2)x - \frac{q_1}{2}x^2 - \frac{1}{6L}(q_2 - q_1)x^3$$

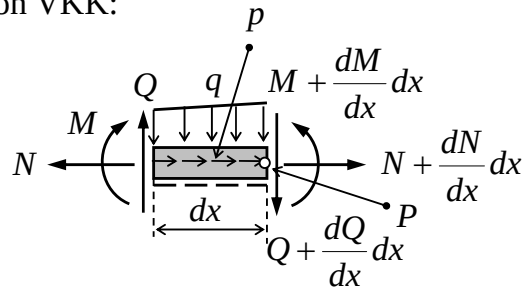
3.3 Suoran sauvan leikkausrasitusten määrittämistä helpottavia tuloksia

3.31 Suoran sauvan differentiaaliset tasapainoyhtälöt

Tarkastellaan suoraa sauvaa (kuvassa 3.3 vaakasuora), jota kuormittaa pituutta kohti jakautunut aksiaalinen kuorma $p(x)$ ja poikittainen kuorma $q(x)$.



Sauva-alkion VKK:



Kuva 3.3: Suora sauva ja sen differentiaalinen alkio

Pitkittäinen tasapainoehto:

$$\begin{aligned} \rightarrow N + \frac{dN}{dx} dx - N + p dx &= 0 \Rightarrow \left(\frac{dN}{dx} + p \right) dx = 0 \\ \Rightarrow \underline{\frac{dN}{dx} + p} &= 0 \end{aligned}$$

Poikittainen tasapainoehto:

$$\begin{aligned} \uparrow -Q - \frac{dQ}{dx} dx + Q - q dx &= 0 \Rightarrow \left(\frac{dQ}{dx} + q \right) dx = 0 \\ \Rightarrow \underline{\frac{dQ}{dx} + q} &= 0 \end{aligned}$$

Momenttitasapainoehto pisteen P suhteen:

$$\begin{aligned} \curvearrowright M + \frac{dM}{dx} dx - M - Q dx + q dx \cdot \frac{dx}{2} &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{dM}{dx} - Q + q \cdot \frac{dx}{2} \right) dx &= 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} - Q + q \cdot \frac{\overset{\approx 0}{dx}}{2} = 0 \\ \Rightarrow \underline{\frac{dM}{dx}} &= Q \end{aligned}$$

Saadaan seuraavat tulokset:

- **Pitkittäiskuorma** on **normaalivoiman derivaatan vastaluku**, eli

$$p = -N'. \quad (3.1)$$

- **Poikittaiskuorma** on **leikkausvoiman derivaatan vastaluku**, eli

$$q = -Q'. \quad (3.2)$$

- **Leikkausvoima** on **taivutusmomentin derivaatta**, eli

$$Q = M'. \quad (3.3)$$

Näitä tuloksia voidaan käyttää hyväksi rasiuskuvioiden oikeellisuuden tarkistuksessa. Erityisen tärkeää on pitää mielessä viimeinen tulos.

3.32 Suoran sauvan rasiuskuvioiden määrittämistä helpottavia lauseita

Lause 1: Sauvan *kuormittamattomalla* osalla ($p = 0$) N on *vakio*. Sauvan *kuormittamattomalla* osalla ($q = 0$) Q on vakio ja M on *lineaarinen* suoran kulmakertoimen ollessa ko. leikkausvoiman arvo.

Lause 2: *Tasaisen* kuormituksen p_0 alueella N on *lineaarinen* suoran kulmakertoimen ollessa $-p_0$. *Tasaisen* kuormituksen q_0 alueella Q on *lineaarinen* kulmakertoimen ollessa $-q_0$ ja M on *kvadraattinen* (paraabeli).

Lause 3: Kohdassa, jossa Q häviää, M saa *ääriarvon*.

Lause 4: Aksiaalisen *pistevoiman* kohdalla N :n arvossa on tämän voiman suuruinen *hyppäys*. Poikittaisen *pistekuorman* Q :n arvossa on tämän voiman suuruinen *hyppäys* ja M -kuviossa *kärki*.

Lause 5: *Pistemomentin* kohdalla on M :n arvossa tämän momentin suuruinen *hyppäys*. Q -kuviossa ei ole kärkeä eikä hyppäystä.

Todistus: Tarkastellaan esimerkiksi palkkia, jota kuormittaa tasainen kuorma q_0 . Saadaan

$$Q' = -q_0 \Rightarrow Q = -q_0 x + C_1$$

ja

$$M' = -q_0 x + C_1 \Rightarrow M = -\frac{q_0}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

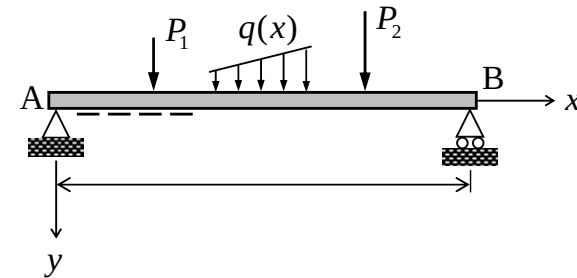
Havaitaan lauseessa 2 esitetyt tulokset: Tasaisen kuormituksen q_0 alueella Q on *lineaarinen* kulmakertoimen ollessa $-q_0$ ja M on *kvadraattinen*. Muut lauseiden 1 ja 2 tulokset voidaan todistaa vastaavaa tapaan.

Lause 3 perustuu siihen, että funktio saa ääriarvon derivaatan nollakohdassa ja että kaavan perusteella leikkausvoima on taivutusmomentin derivaatta.

Tarkastellaan palkkia, jota kuormittaa poikittainen pistekuorma P . Olkoon piste v juuri pistekuorman vasemmalla puolella ja piste o juuri sen oikealla puolella. Leikkauksessa v vaikuttava leikkausvoima Q_v saadaan pisteen v vasemmalla puolella olevaan palkin osaan vaikuttavien pystysuuntaisten voimien summana pitäen suuntaa alhaalta ylöspäin positiivisena. Leikkauksessa o vaikuttava leikkausvoima Q_o saadaan vastaavaan tapaan. Sen arvo kasvaa täten Q_v :n arvoon nähden lisäyksellä $-P$ (P :n positiivinen suunta alaspäin), joten sille saadaan

$Q_0 = Q_v - P$. Leikkausvoimakuviossa on siis voiman P kohdalla sen suuruinen hyppäys. Koska leikkausvoimat Q_v ja Q_o ovat erisuuret, ovat siis taivutusmomentin kulmakertoimet erisuuret ja taivutusmomenttikuviossa on näin voiman P kohdalla kärki. Nämä tulokset ovat osa lausetta 4. Muut lauseiden 4 ja 5 tulokset voidaan perustella vastaavaan tapaan.

3.33 Leikkausvoima ja taivutusmomentti palkin nivelellisesti tuetuissa päissä



Kuva 3.4: Nivelellisesti tuettu palkki

Tarkastellaan kuvan 3.4 niveltuilla tuettua palkkia. Taivutusmomentin ja leikkausvoiman arvot palkin vasemmalla tuella A ja oikealla tuella B saadaan oheisella kuvan 3.5 tarkasteluilla.

(a)

$$\downarrow \quad Q(0) - A_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{Q(0) = A_y}$$

$$\curvearrowright \quad M(0) - A_y \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{M(0) = 0}$$

(b)

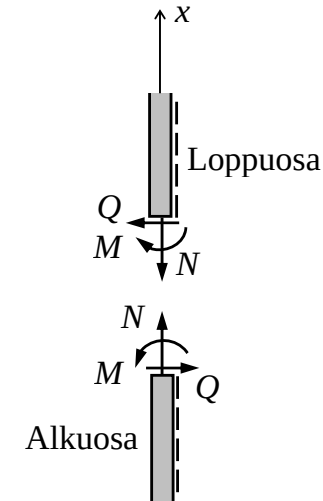
$$\uparrow \quad Q(L) + B_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{Q(L) = -B_y}$$

$$\curvearrowleft \quad M(L) - B_y \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{M(L) = 0}$$

Kuva 3.5: Taivutusmomentti ja leikkausvoima palkin niveltuilla tuetuissa päissä: (a) vasen pää (b) oikea pää

Saadaan seuraavat tulokset, jotka kannattaa painaa visusti mieleen: **Leikkausvoima** palkin nivelellisesti tuetussa **vasemmassa** päässä on **tukireaktion** suurunen ja **oikeassa** päässä **tukireaktion vastaluvun** suuruinen sekä **taivutusmomentti** palkin nivelellisesti tuetussa päässä on **nolla**. (Jälkimmäinen tulos edellyttää, että palkin päässä ei vaikuta pistemäistä ulkoista momenttia.)

3.4 Pilari (pystysuora sauva)



Kuva 3.6: Pilarin leikkausrasitusten positiiviset suunnat

Pilarin pääasiallisena tarkoituksena on kantaa oman akselinsa suuntaisia kuormia, joten sen oleellinen jännitysresultantti on normaalivoima N . Useimmiten se on samanaikaisesti myös taivutettu. Rajoitutaan tässä tapaukseen, jossa pilariin vaikuttaa tasovoimasysteemi ja nollasta eroavat leikkausrasitukset ovat N , $Q_y = Q$ ja $M_z = M$. (Yleisessä tapauksessa, jossa pilarin leikkausrasitukset ovat N , Q_y , Q_z , M_y ja M_z käsittely on saman tapaista, tarkastelu joudutaan vain suorittamaan ensin x, y – tasossa ja sitten x, z – tasossa.)

Pilarin leikkausrasitusten määrittämiseksi, valitaan ensin sauvan positiivinen reuna. Samalla määräytyvät sauvan akselin (x – akselin) suunta, sen ”alku-” ja ”loppuosa”

sekä leikkausrasitusten positiiviset suunnat kuvan 3.6 mukaisesti. Ne voidaan ilmaista sanallisesti seuraavasti:

- **Normaalivoima** N on sauvan akselin suuntainen ja sen positiivinen suunta on tarkasteltavasta sauvan osasta **ulospäin**.
- **Leikkausvoima** Q on sauvan akselin normaalin suuntainen ja sen positiivinen suunta on sauvan **alkuosassa** kohti **positiivista reunaa** ja sauvan **loppuosassa** kohti **negatiivista reunaa**.
- Positiivinen **taivutusmomentti** M pyrkii **venyttämään palkin positiivista reunaa**, ts. momenttinuolen häntä on positiivisella puolella.

Jos määritettävänä on pelkästään pilarin normaalivoima N , positiivisen reunan valitseminen on tarpeetonta ja tarkastelu on varsin yksinkertaista.