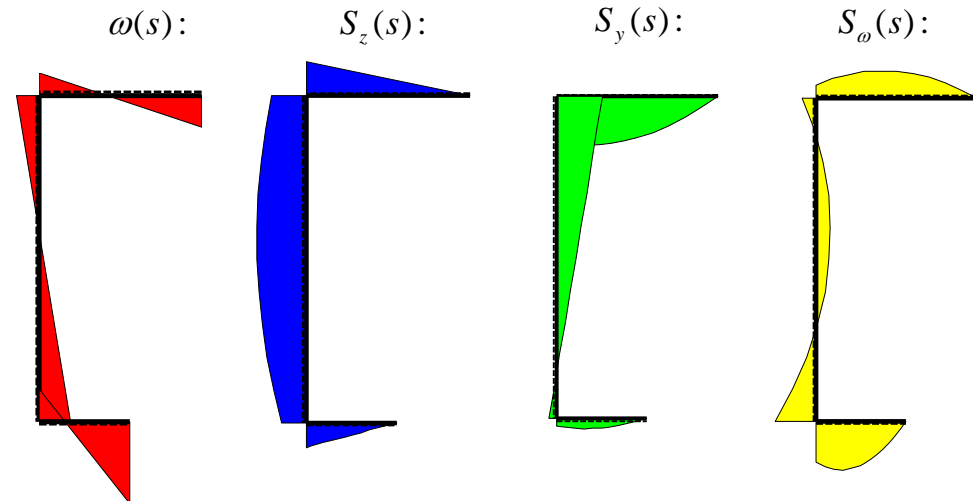
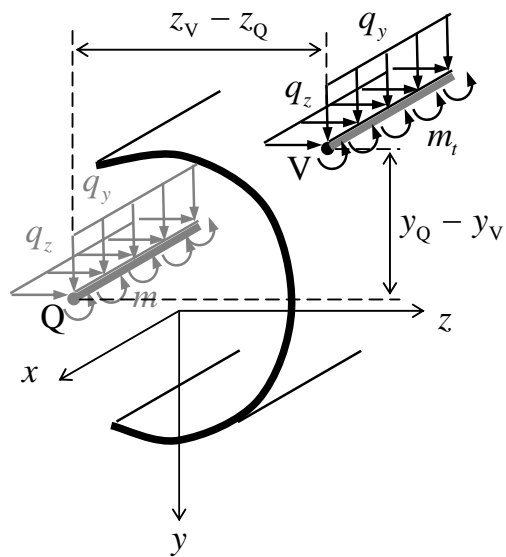


Rak-54.3100 RAKENTEIDEN MEKANIikka III

Luentomoniste

Osa I: Ohutseinämäiset rakenteet

Jukka Aalto



TEKNILLINEN KORKEAKOULU
TEKNISKA HÖGSKOLAN
HELSINKI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

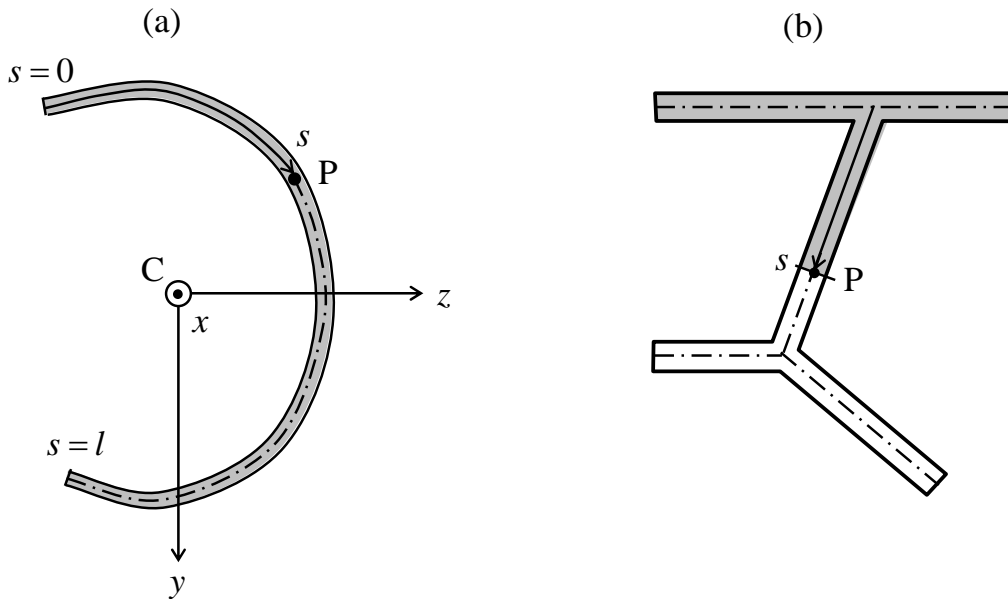
1. Avointen ohutseinämäisten sauvojen toiminnasta

1.1 Siirtymäotaksuma

Tarkastellaan suoraa sauva, jolla on ohutseinämäinen avoin poikkileikkaus ja jonka akseli yhtyy x -akseliin (vrt. kuva 1.1). Otaksutaan, että poikkileikkaus on sauvan akselin suunnassa muuttumaton. Merkitään pitkin poikkipinnan keskiviivaa mitattua pituuskoordinaattia symbolilla s . Näin keskiviivan parametrimuotoiset yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}y &= y(s), \\z &= z(s).\end{aligned}\tag{1.1}$$

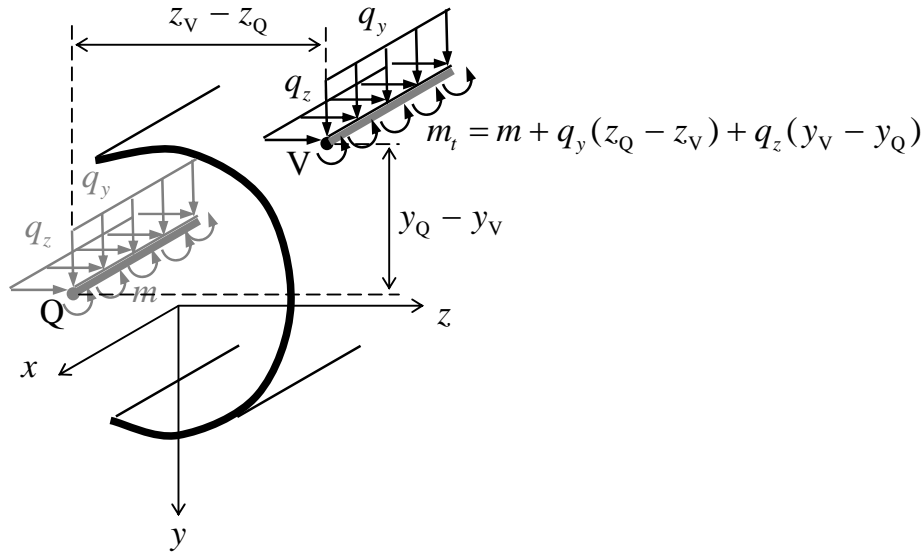
Merkitään koordinaattia s vastaavaa profiilin keskiviivan yleistä pistettä kirjaimella P .



Kuva 1.1: Avoin ohutseinämäinen poikkileikkaus (a) haarautumaton ja (b) haarautuva

Tässä tarkasteltavassa avointen ohutseinämäisten sauvojen teoriassa otaksutaan, että palkkia kuormitettaessa sen poikkileikkauksen projektiio y, z -tasossa (vrt. kuva 1.1) säilyttää muotonsa eli projektion liike on **jäykän kappaleen tasoliikettä**. Kun sauva kuormitetaan se taipuu,

jolloin sen poikkileikkauksen projektio saa translaation, ja vääntyy, jolloin poikkileikkauksen projektio saa rotaation. Kutsutaan poikkileikkauksen liikkeen siirtopistettä **vääntökeskiöksi** V: (y_V, z_V) . Sille käytetään myös nimitystä **leikkauskeskiö**.



Kuva 1.2: Poikittaisen jakautuneen kuorman redusointi vaikutus-suoraltaan vääntökeskiöakselille

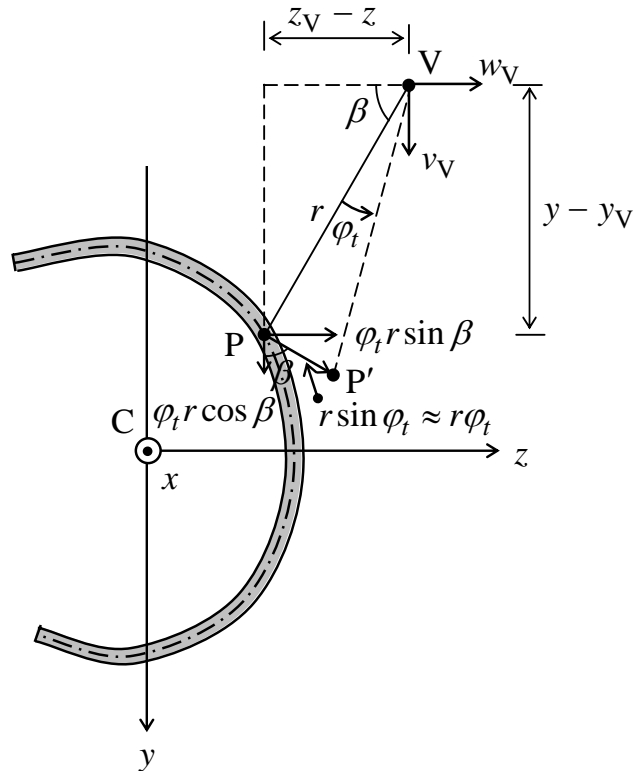
Sauvaan vaikuttavan **jakautuneen kuormituksen** ajatellaan muodostuvan **pitkittäisestä** viivakuormasta $q_x(x)$, joka vaikuttaa **pintakeskiöakselilla**, **poikittaisista** viivakuormista $q_y(x)$ ja $q_z(x)$, joiden **vaikutussuoran** ja poikkileikkauksen leikkauspiste on Q: (y_Q, z_Q) sekä **vääntävästä** pituutta kohti lasketusta voimaparista $m(x)$. Esitettävän teorian yhteydessä poikittainen kuormitus on tarkoituksen mukaista redusoida (siirtää) vaikuttamaan **vääntökeskiöakselille** (vrt. kuva 1.2). Tällöin jakautuneeksi **vääntäväksi momentiksi vääntökeskiakselin suhteen** tulee

$$m_t = m - q_y(z_Q - z_V) + q_z(y_V - y_Q). \quad (1.2)$$

Merkitään poikkileikkauksen yleisen pisteen P x, y, z -siirtymäkomponentteja symboleilla u , v ja w . Piste P poikittaiset siirtymät $v(x, s)$ ja $w(x, s)$ saadaan **vääntökeskiön** V translaatiosta ja sekä sen ympäri tapahtuvan rotaatiosta aiheutuvien siirtymien (vrt. kuva 1.3) summana eli

$$\begin{aligned} v &= v_V + \varphi_t r \cos \beta = v_V - \varphi_t (z - z_V), \\ w &= w_V + \varphi_t r \sin \beta = w_V + \varphi_t (y - y_V), \end{aligned} \quad (1.3)$$

missä $v_V(x)$ ja $w_V(x)$ ovat **vääntökeskiön V poikittaiset siirtymät** ja $\varphi_t(x)$ on poikkileikkauksen **vääntökulma**.



Kuva 1.3: Vääntökeskiön V siirtymät v ja w sekä rotaatiosta aiheutuva pisteen P siirtymät $\varphi_t r \cos \beta$ ja $\varphi_t r \sin \beta$

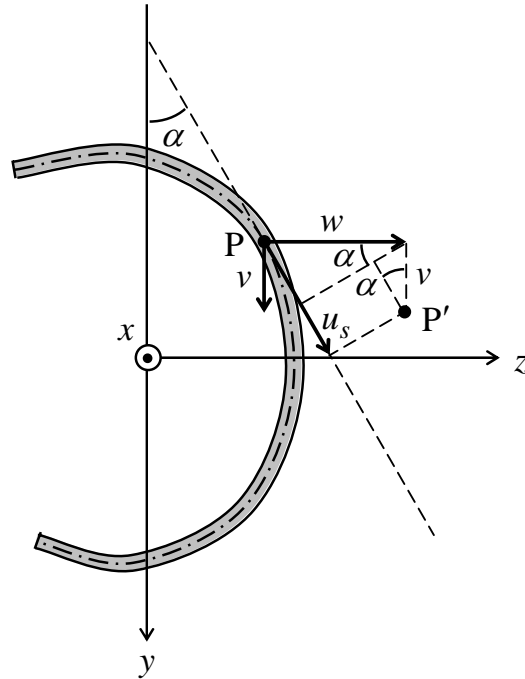
Profiilin keskiviivan suuntaiselle siirtymäkomponentille $u_s(x, s)$ saadaan kuvan 1.4 perusteella

$$u_s = v \cos \alpha + w \sin \alpha, \quad (1.4)$$

missä α on profiilin keskiviivan tangentin ja y – akselin välinen kulma.

Tehdään teknisen taivutusteorian mukainen otaksuma, jonka mukaan liukuma γ_{xs} profiilin seinämän tasossa häviää. Saadaan

$$\gamma_{xs} \equiv \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial u_s}{\partial x}. \quad (1.5)$$



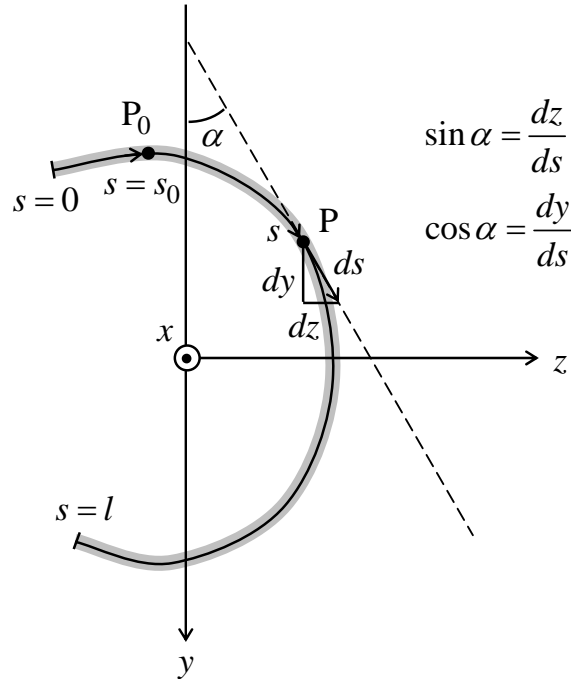
Kuva 1.4: Pisteen P siirtymän poikkileikkauksen keskiviivan suuntaisen komponentin u_s määrittäminen

Integroimalla saadaan tästä pisteen P aksiaaliselle siirtymälle lauseke

$$u(x, s) = u(x, s_0) - \int_{P_0}^P \frac{\partial u_s}{\partial x} ds, \quad (1.6)$$

missä piste P_0 on niin sanottu **nollapiste** (vrt. kuva 1.5) ja $u(x, s_0)$ on nollapisteen aksiaalinen siirtymä. Siirtymän u_s x -osittaisderivaatalle saadaan (koska kulma α ei riipu koordinaatista x)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \sin \alpha = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dz}{ds} \\ &= v'_V \frac{dy}{ds} + w'_V \frac{dz}{ds} + \varphi'_t [-(z - z_V) \frac{dy}{ds} + (y - y_V) \frac{dz}{ds}], \end{aligned} \quad (1.7)$$



Kuva 1.5: Koordinaatti s , nollapiste P_0 sekä keskiviivan suuntakulman α sini ja kosini pisteessä P .

missä tavallisille derivaatoille koordinaatin x suhteen käytetään tavanomaista yläpilkkumerkintää. Lausekkeesta (1.6) seuraa nyt

$$\begin{aligned}
 u(x, s) &= u(x, s_0) - v'_V \int_{P_0}^P dy - w'_V \int_{P_0}^P dz \\
 &\quad - \phi'_t \int_{P_0}^P [-(z - z_V)dy + (y - y_V)dz] \\
 &= u(x, s_0) - v'_V(x)[y(s) - y_0] - w'_V[z(s) - z_0] \\
 &\quad - \phi'_t \int_{P_0}^P [-(z - z_V)dy + (y - y_V)dz],
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

missä $y_0 = y(s_0)$, $z_0 = z(s_0)$ ovat nollapisteen koordinaatit. Ottamalla huomioon, että nollapisteen aksiaalinen siirtymä on

$$u(x, s_0) = u_C(x) - v'_V(x)y_0 - w'_V(x)z_0, \tag{1.9}$$

missä $u_C(x)$ on **palkin akselin aksiaalinen siirtymä** sekä merkitsemällä

$$\omega(s) = \int_{P_0}^P [-(z - z_V)dy + (y - y_V)]dz \quad (1.10)$$

saadaan profiilin yleisen pisteen P aksiaaliselle siirtymälle lauseke

$$u(x, s) = u_C(x) - v'_V(x)y(s) - w'_V(x)z(s) - \varphi'_t(x)\omega(s). \quad (1.11)$$

Suure $\omega(s) = \omega_V(s)$ on poikkileikkauksen niin sanottu **sektoriaalinen koordinaatti** pisteen V eli **vääntökeskiön suhteen**. Poikkileikkauksen sektoriaalinen koordinaatti ω on siis sen keskiviivalla määritelty koordinaatista s riippuva funktio (samalla tavalla kuin myös koordinaatit y ja z kaavassa (1.11)). Sen ja vääntökeskiön määrittämisen problematiikkaa tarkastellaan yksityiskohtaisesti **liitteessä A**. Todetaan että, jos kysymyksessä on puhdas veto tai puristus, sauva ei taivu eikä väännä eli $v'_V = w'_V = \varphi'_t = 0$ ja $u = u_C$. Tällöin kaikki poikkileikkauksen pisteet saavat **vakio** siirtymän u_C . Jos on kysymyksessä puhdas taivutus x, y -tasossa, $u_C = w'_V = \varphi'_t = 0$ ja $u = -v'_V y$. Tällöin poikkileikkauksen aksiaalinen siirtymä u on **suoraan verrannollinen koordinaattiin** y verrannollisuuskertoimen ollessa vääntökeskiön taipuman derivaatan v'_V vastaluku. Jos on kysymyksessä puhdas taivutus x, z -tasossa, $u_C = v'_V = \varphi'_t = 0$ ja $u = -w'_V z$. Tällöin poikkileikkauksen aksiaalinen siirtymä u on **suoraan verrannollinen koordinaattiin** z verrannollisuuskertoimen ollessa vääntökeskiön taipuman derivaatan w'_V vastaluku. Jos on kysymyksessä puhdas vääntö $u_C = v'_V = w'_V = 0$ ja $u = -\varphi'_t \omega$. Tällöin poikkileikkauksen aksiaalinen siirtymä u on **suoraan verrannollinen sektoriaaliseen koordinaattiin** ω verrannollisuuskertoimen ollessa vääntökulman derivaatan φ'_t vastaluku. Todetaan edelleen, että puhtaassa vedossa tai puristuksessa poikkileikkauksen aksiaalinen siirtymä u oli siis **vakio**, puhtaassa taivutuksessa x, y - ja x, z -tasossa vastaavasti y - ja z -suunnissa **lineaarinen**. Puhtaassa väännössä poikkileikkauksen aksiaalinen siirtymä u on **sektoriaalisen koordinaatin muotoinen**. Todetaan lopuksi, että **nollapiste** P_0 on se profiilin piste, jossa **sektoriaalinen koordinaatti häviää**. Se on myös se poikkileikkauksen piste, jossa **puhtaan väännön tapauksessa aksiaalinen siirtymä on nolla**.

1.2 Poikkileikkauksen normaalijännitys ja sitä vastaavat jännitysresultantit

Poikkileikkauksen yleisen pisteen P aksiaaliselle venymälle $\varepsilon_x(x, s)$ saadaan venymän ε_x ja siirtymän u yhteydestä

$$\varepsilon_x(x, s) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = u'_C(x) - v''_V(x)y(s) - w''_V(x)z(s) - \varphi'_t(x)\omega(s)$$

ja edelleen

$$\varepsilon_x(x, s) \equiv \varepsilon(x) + \kappa_z(x)y(s) + \kappa_y(x)z(s) - \theta'(x)\omega(s), \quad (1.12)$$

missä

$$\varepsilon(x) = u'_C(x), \quad \kappa_z(x) = -v''_V(x), \quad \kappa_y(x) = -w''_V(x), \quad \theta(x) = \varphi'_t(x). \quad (1.13)$$

ovat vastaavasti sauvan pintakeskiöakselin **venymä**, vääntökeskiöakselin **käyritymä** x, y – tasossa, vääntökeskiöakselin **käyritymä** x, z – tasossa ja **vääntymä**. Todetaan, että puhtaassa vedossa tai puristuksessa poikkileikkauksen aksiaalinen venymä ε_x on siis **vakio**, puhtaassa taivutuksessa x, y – ja x, z – tasossa vastaavasti y – ja z – suunnissa **lineaarinen** sekä puhtaassa väännössä poikkileikkauksen aksiaalinen venymä ε_x on **sektoriaalisen koordinaatin muotoinen**.

Poikkileikkauksen yleisen pisteen P normaalijännitykselle $\sigma_x(x, s)$ saadaan nyt Hooken lain ja lausekkeen (1.12) perusteella tulos

$$\sigma_x(x, s) = E\varepsilon(x) + E\kappa_z(x)y(s) + E\kappa_y(x)z(s) - E\theta'(x)\omega(s). \quad (1.14)$$

Todetaan taas, että puhtaassa vedossa tai puristuksessa poikkileikkauksen normaalijännitys σ_x on **vakio**, puhtaassa taivutuksessa x, y – ja x, z – tasossa vastaavasti y – ja z – suunnissa **lineaarinen** sekä puhtaassa väännössä poikkileikkauksen normaalijännitys σ_x on **sektoriaalisen koordinaatin muotoinen**.

Poikkileikkauksen aksiaaliseen rasitukseen ja taivutukseen **jännitysresultantit** normaalivoima $N(x)$, leikkausvoimat $Q_y(x)$ ja

$Q_z(x)$ taivutusmomentit $M_y(x)$ ja $M_z(x)$ määritellään tavanomaiseen tapaan kaavoilla

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_x dA, \\
 Q_y &= \int_A \tau_{xy} dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA, \\
 M_y &= \int_A \sigma_x z dA, \quad M_z = \int_A \sigma_x y dA.
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

Vääntöön liittyvät jännitysresultantit vääntömomentti $M_x(x)$ ja niin sanottu **bimomentti** $B(x)$ määritellään kaavoilla

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_A [-\tau_{xy}(z - z_V) + \tau_{xz}(y - y_V)] dA, \\
 B &= \int_A \sigma_x \omega dA.
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

Normaalivoiman, leikkausvoiman ja taivutusmomenttien määrittelykaavat (1.15) ovat tavanomaista muotoa. Vääntömomentin määrittelykaava (1.16a) poikkeaa Rakenteiden lujuusopin kurssissa esitetystä määrittelystä siinä, että kaavassa (1.16a) vääntömomentti määritellään leikkausjännitysten momentiksi vääntökeskiön suhteen. Massiivisten poikkileikkausten Sain Venant'in vääntömomentti määriteltiin leikkausjännitysten momentiksi pintakeskiön suhteen. Tämä johtuu siitä, että tavanomaisten massiivisten poikkileikkausten vääntökeskiön voidaan usein otaksua sijaitsevan pintakeskiössä, jolloin $y_V = z_V = 0$ ja kaava (1.16a) Rakenteiden lujuusopin kurssissa esitetyn muodon. Kaava (1.16b) mukainen bimomentti on kokonaan uusi jännitysresultantti, jonka käyttökelpoisuus käy ilmi jatkossa. Havaitaan, että taivutusmomenttien M_z ja M_y määrittelykaavoissa (1.15d ja e) integrandeina (momenttivarsina) ovat **koordinaatit** y ja z . Bimomentin määrittelykaavassa (1.16b) integrandina on vastaavasti **sektoriaalinen koordinaatti** ω . Sijoittamalla normaalijännityksen lauseke (1.14) jännitysresultanttien lausekkeisiin (1.15) ja (1.16b) ne saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
N &= EA\varepsilon + ES_z\kappa_z + ES_y\kappa_y - ES_\omega\theta', \\
M_z &= ES_z\varepsilon + EI_z\kappa_z + EI_{yz}\kappa_y - EI_{z\omega}\theta', \\
M_y &= ES_y\varepsilon + EI_{yz}\kappa_z + EI_y\kappa_y - EI_{y\omega}\theta', \\
B &= ES_\omega\varepsilon + EI_{z\omega}\kappa_z + EI_{y\omega}\kappa_y - EI_\omega\theta',
\end{aligned} \tag{1.17}$$

missä

$$A = \int_A dA \tag{1.18}$$

on poikkipinnan pinta ala,

$$S_z = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A z dA, \quad S_\omega = \int_A \omega dA \tag{1.19}$$

ovat poikkileikkauksen staattiset momentit z – ja y – akselien suhteen ja niin sanottu **sektoriaalinen staattinen momentti**,

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_\omega = \int_A \omega^2 dA \tag{1.20}$$

ovat poikkileikkauksen jäyhyysmomentit z – ja y – akselien suhteen ja ns. **sektoriaalinen jäyhyysmomentti** sekä

$$I_{yz} = \int_A yz dA, \quad I_{z\omega} = \int_A z\omega dA, \quad I_{y\omega} = \int_A y\omega dA, \tag{1.21}$$

ovat poikkileikkauksen tulomomentti ja ns. **sektoriaaliset tulomomentit**.

Koordinaatisto x, y, z valitaan tavanomaiseen tapaan siten, että x – akseli yhtyy poikkileikkauksen pintakeskiöakseliin, jolloin **staattiset momentit** S_y ja S_z **häviävät**. Tässä tarkastelussa edelleen sektoriaalisen koordinaatin **nollapisteen** P_0 asema s_0 tullaan valitsemaan siten, että **sektoriaalinen staattinen momentti** S_ω myös **häviää**. Jatkossa tullaan myös näkemään, että vääntökeskiön V suhteen määritetyn sektoriaalisen koordinaatin avulla lasketut **sektoriaaliset tulomomentit** $I_{y\omega}$ ja $I_{z\omega}$

häviävät. Näin jännitysresultanttien ja muodonmuutossuureiden yhteydet (1.17) saavat yksinkertaisemman muodon

$$\begin{aligned}
 N &= EA\varepsilon, \\
 M_z &= EI_z\kappa_z + EI_{yz}\kappa_y, \\
 M_y &= EI_{yz}\kappa_z + EI_y\kappa_y, \\
 B &= -EI_\omega\theta'.
 \end{aligned}
 \tag{1.22}$$

Jos lisäksi koordinaattiakselien y ja z suunnat yhtyvät poikkileikkauksen pääjäyhyysuuntiin myös **tulomomentti** I_{yz} **häviää** ja kaavat (1.22) yksinkertaistuvat vielä muotoon

$$\begin{aligned}
 N &= EA\varepsilon, \\
 M_z &= EI_z\kappa_z, \\
 M_y &= EI_y\kappa_y, \\
 B &= -EI_\omega\theta'.
 \end{aligned}
 \tag{1.23}$$

Tämä tilanne esiintyy, jos poikkileikkaus on **symmetrinen**. Tällöin esimerkiksi koordinaatiston y -akseli voidaan asettaa yhtymään poikkileikkauksen symmetria-akseliin, joka on toinen pääjäyhyysakseli.

Ratkaisemalla muodonmuutossuureet jännitysresultanttien avulla yhtälöistä (1.22) saadaan

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \frac{N}{EA}, \\
 \kappa_z &= \frac{I_y M_z - I_{yz} M_y}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)}, \\
 \kappa_y &= \frac{I_z M_y - I_{yz} M_z}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)}, \\
 \theta' &= -\frac{B}{EI_\omega}.
 \end{aligned}
 \tag{1.24}$$

Sijoittamalla nämä poikkileikkauksen normaalijännityksen lausekkeeseen (1.14) saadaan

$$\sigma_x(s) = \frac{N}{A} + \frac{I_y M_z - I_{yz} M_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} y(s) + \frac{I_z M_y - I_{yz} M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} z(s) + \frac{B}{I_\omega} \omega(s). \quad (1.25)$$

Jos koordinaattiakselien y, z suunnat yhtyvät poikkileikkauksen pääjäyhyysuuntiin tai poikkileikkaus on symmetrinen, lauseke (1.25) yksinkertaistuu muotoon

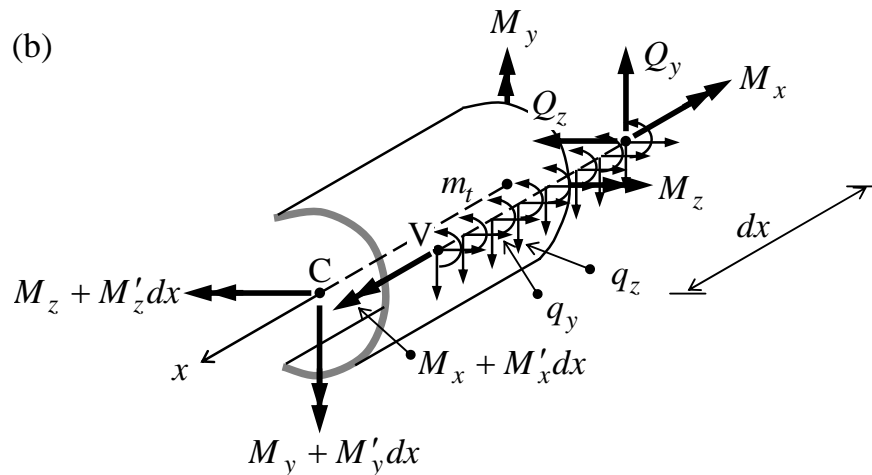
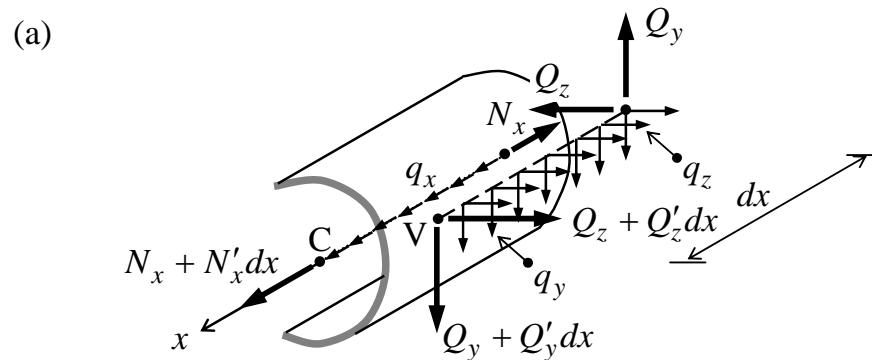
$$\sigma_x(s) = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y(s) + \frac{M_y}{I_y} z(s) + \frac{B}{I_\omega} \omega(s). \quad (1.26)$$

Koska kaavoissa (1.25) ja (1.26) tarkastellaan jännityksen jakautumista tietyssä poikkileikkauksessa, on siinä esiintyvien suureiden riippuvuus koordinaatista x jätetty selkeyden vuoksi merkitsemättä. Kaavalla (1.25) tai (1.26) voidaan määrittää **poikkileikkauksen normaalijännitys-jakauma**, kun **jännitysresultantit tunnetaan**. Todetaan, että lausekkeiden oikean puolen ensimmäinen termi ilmaisee normaalivoiman N osuuden, toinen ja kolmas termi taivutusmomenttien M_z ja M_y osuudet sekä viimeinen termi bimomentin B osuuden normaali-jännityksestä. Todetaan edelleen, että **normaalivoiman** aiheuttama normaalijännitys on **vakio**, **taivutusmomenttien** aiheuttamat jännitykset **jakautuvat lineaarisesti** sekä **bimomentin** aiheuttama jännitys-jakauma on **sektoriaalisen koordinaatin muotoinen**.

1.3 Tasapainoyhtälöt

Kuvan 1.6a perusteella saadaan sauva-alkion voimatasapainoyhtälöiksi

$$\begin{aligned} \swarrow_x & -N + N + N'dx + q_x dx = 0 \\ \downarrow_y & -Q_y + Q_y + Q'_y dx + q_y dx = 0 \\ \rightarrow_z & -Q_z + Q_z + Q'_z dx + q_z dx = 0 \end{aligned}$$



Kuva 1.6: Sauva-alkion vapaakappalekuvio (a) voimatasapainoyhtälöitä ja (b) momenttitasapainoyhtälöitä varten

ja kuvan 1.6b perusteella sen momenttitasapainoyhtälöiksi

$$\begin{aligned} \swarrow_x^V & -M_x + M_x + M'_x dx + m_t dx = 0 \\ \downarrow_y^C & -M_y + M_y + M'_y dx - Q_z dx = 0 \end{aligned}$$

$$C \rightarrow z \quad -M_z + M_z + M'_z dx - Q_y dx = 0$$

eli

$$\begin{cases} N' + q_x = 0, \\ Q'_y + q_y = 0, \\ Q'_z + q_z = 0, \\ M'_x + m_t = 0, \\ Q_y = M'_z, \\ Q_z = M'_y. \end{cases} \quad (1.27)$$

Eliminoimalla näistä leikkausvoimat $Q_y(x)$ ja $Q_z(x)$ saadaan neljä yhtälöä

$$\begin{cases} N' + q_x = 0, \\ M'_x + m_t = 0, \\ M''_z + q_y = 0, \\ M''_y + q_z = 0, \end{cases} \quad (1.28)$$

joissa on neljä tuntematonta: normaalivoima $N(x)$, vääntömomentti $M_x(x)$ sekä taivutusmomentit $M_z(x)$ ja $M_y(x)$. Yhtälöissä (1.28) on siten neljä yhtälöä ja neljä tuntematonta, joten siinä tapauksessa, että myös reunaehdot voidaan ilmaista normaalivoiman ja momenttien avulla, yhtälöt on ratkaistavissa. Tällöin kysymyksessä on **staattisesti määrätty** tehtävä. Tehtävän ratkaisu voidaan suorittaa joko ratkaisemalla differentiaaliyhtälöt (1.28) ja huomioimalla reunaehdot tai tavanomaisia statiikan keinoja soveltamalla. Leikkausvoimat voidaan lopuksi määrittää lausekkeista (1.27 e ja f). Jos kuitenkin tehtävän reunaehtoja ei kyetä ilmaisemaan pelkästään voimasuureiden avulla tehtävä on **staattisesti määräämätön**. Siinä tapauksessa tasapainoyhtälöt ilmaistaan siirtymäsuureiden $u_C(x)$, $v_V(x)$, $w_V(x)$ ja $\varphi_t(x)$ avulla, kuten selviää jatkossa.

1.4 Leikkausvuo ja vastaava keskimääräinen leikkausjännitys

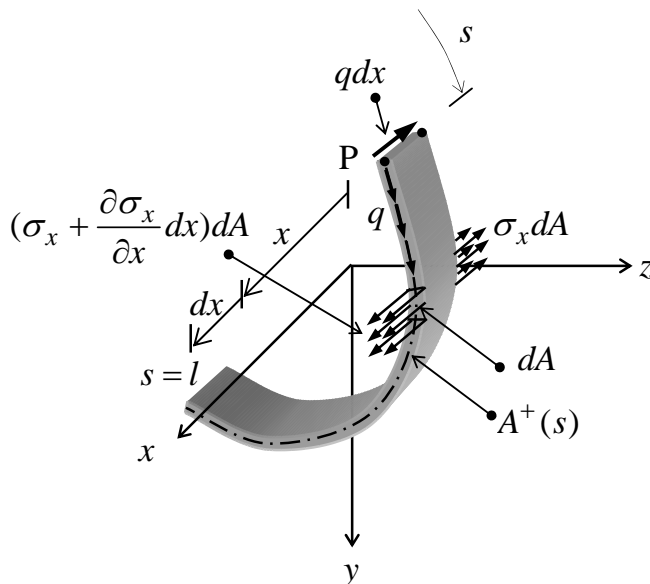
Ohuen poikkileikkauksen **leikkausvuolla** ymmärretään leikkausvoimaa poikkileikkauksen keskiviivan pituutta kohti. Merkitään leikkausvuota poikkipinnan kohdassa s symbolilla $q(s)$. (Tätä merkintää ei pidä sekoittaa jakautuneen kuorman komponentteihin q_x , q_y ja q_z .) Poikkileikkauksen keskiviivan suuntainen **keskimääräinen leikkausjännitys** $\bar{\tau}_{xs}$ leikkausvuon avulla lausuttuna on

$$\bar{\tau}_{xs}(s) = \frac{q(s)}{t(s)}, \quad (1.29)$$

missä $t(s)$ on poikkileikkauksen paksuus.

Leikkausvuo $q(s)$ vaikuttaa myös kohdassa s olevassa profiilin pituussuuntaisessa leikkauksessa. Tarkastellaan kuvan 1.7 mukaisen dx :n pituisen profiilin alaosan tasapainoa. Saadaan x -akselin suuntainen tasapainoyhtälö

$$-qdx + \frac{A^+}{A} q_x - \int_{A^+} \sigma_x t dAs + \int_{A^+} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dA = 0.$$



Kuva 1.7: dx :n pituisen profiilin alaosan ($s \leq s' \leq l$) vapaakappalekuvio

Leikkausvuolle saadaan tästä

$$q = \frac{A^+}{A} q_x + \int_s^l \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} ds' = \frac{A^+}{A} q_x + \frac{\overbrace{N'}^{-q_x}}{A} \int_{A^+}^{A^+} dA + \frac{I_y \overbrace{M'_z}^{Q_y} - I_{yz} \overbrace{M'_y}^{Q_z}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_{A^+} \overbrace{S_z(s)}^{S_z(s)} y dA$$

$$+ \frac{I_z \overbrace{M'_y}^{Q_z} - I_{yz} \overbrace{M'_z}^{Q_y}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_{A^+} \overbrace{S_y(s)}^{S_y(s)} z dA + \frac{B'}{I_\omega} \int_{A^+} \overbrace{S_\omega(s)}^{S_\omega(s)} \omega dA$$

missä sovellettiin kaavoja (1.25), (1.27e ja f). Saadaan edelleen

$$q(s) = \frac{I_y Q_y - I_{yz} Q_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} S_z(s) + \frac{I_z Q_z - I_{yz} Q_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} S_y(s) + \frac{B'}{I_\omega} S_\omega(s), \quad (1.30)$$

missä

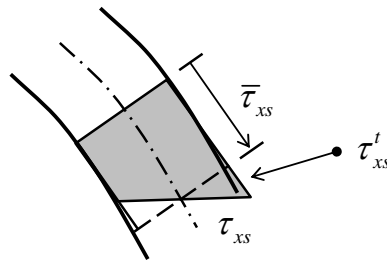
$$\boxed{\begin{aligned} S_z(s) &= \int_{A^+} y dA, \\ S_y(s) &= \int_{A^+} z dA, \\ S_\omega(s) &= \int_{A^+} \omega dA \end{aligned}} \quad (1.31)$$

ovat ns. **osapoikkipinnan** pinta-ala, staattinen momentti z -akselin suhteen, staattinen momentti y -akselin suhteen sekä sektoriaalinen staattinen momentti. Merkinnällä $A^+(s)$ kaavoissa (1.31) ymmärretään sitä poikkipinnan osaa, joka jää tarkasteltavasta kohdasta s katsottuna positiivisen suunnan osoittamalle puolelle (vrt. kuva 1.7). Sille poikkipinnan osalle, joka jää vastaavasti negatiivisen suunnan osoittamalle puolelle, tullaan käyttämään merkintää $A^-(s)$. Poikkileikkauksen keskiviivan suuntaiselle keskimääräiselle leikkausjännitykselle saadaan nyt tulos

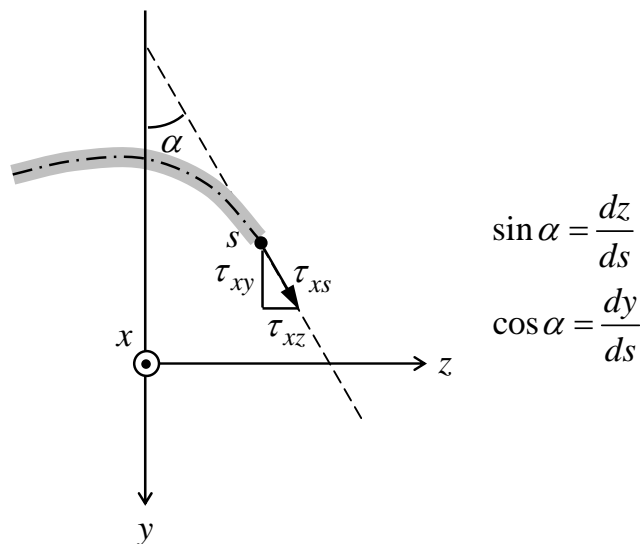
$$\bar{\tau}_{xy}(s) = \frac{I_y Q_y - I_{yz} Q_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} \frac{S_z(s)}{t(s)} + \frac{I_z Q_z - I_{yz} Q_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \frac{S_y(s)}{t(s)} + \frac{B'}{I_\omega} \frac{S_\omega(s)}{t(s)}. \quad (1.32)$$

1.5 Poikkileikkauksen vääntömomentti

Poikkileikkauksen **keskiviivan suuntainen leikkausjännitys** τ_{xs} koostuu leikkausvuota vastaavasta **keskimääräisestä leikkausjännityksestä** $\bar{\tau}_{xs}$, joka on poikkileikkauksen paksuussuunnassa **vakio**, sekä **Saint Venant'in väännön leikkausjännityksestä** τ_{xs}^t , joka on jakautuu paksuussuunnassa **linearisesti** ollen keskiviivalla nolla (vrt. kuva 1.8).



Kuva 1.8: Poikkileikkauksen keskiviivan suuntainen leikkausjännitys



Kuva 1.9: Leikkausjännityskomponentit τ_{xy} ja τ_{xz}

Poikkileikkauksen keskiviivan suuntainen leikkausjännitys on siis

$$\tau_{xs}(s) = \bar{\tau}_{xs}(s) + \tau_{xs}^t(s). \quad (1.33)$$

Leikkausjännityskomponenteille τ_{xy} ja τ_{xz} saadaan kuvan 1.9 perusteella

$$\tau_{xy} = \tau_{xs} \cos \alpha = \tau_{xs} \frac{dy}{ds}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xs} \sin \alpha = \tau_{xs} \frac{dz}{ds}, \quad (1.34)$$

Poikkileikkauksen vääntömomentille M_x saadaan määrittelykaavansa (1.16a) ja kaavan (1.33) perusteella aluksi

$$\begin{aligned} M_x &= \int_A [-\tau_{xy}(z - z_V) + \tau_{xz}(y - y_V)] dA \\ &= \int_A [-\bar{\tau}_{xy}(z - z_V) + \bar{\tau}_{xz}(y - y_V)] dA \\ &\quad + \int_A [-\tau_{xy}^t(z - z_V) + \tau_{xz}^t(y - y_V)] dA. \end{aligned}$$

ja edelleen

$$\boxed{M_x = M_\omega + M_t}, \quad (1.35)$$

missä

$$M_\omega = \int_A [-\bar{\tau}_{xy}(z - z_V) + \bar{\tau}_{xz}(y - y_V)] dA \quad (1.36)$$

on keskimääräisestä leikkausjännitystä aiheutuva vääntömomentti, jota kutsutaan **sektoriaaliseksi vääntömomentiksi**, ja

$$M_t = \int_A [-\tau_{xy}^t(z - z_V) + \tau_{xz}^t(y - y_V)] dA. \quad (1.37)$$

on vapaan väännön leikkausjännityksistä aiheutuva eli **Saint venant'in vääntömomentti**.

Soveltamalla sitten kaavoja (1.34), sekä siirtymällä selkeyden vuoksi tarkastelemaan haarautumatonta poikkileikkausta¹, sektoriaaliselle vääntömomentille M_ω saadaan

$$M_\omega = \int_0^l \overbrace{\tau_{xs} \left[-(z - z_V) \frac{dy}{ds} + \tau_{xz} (y - y_V) \frac{dz}{ds} \right]}^{d\omega/ds} t ds = \int_0^l q \frac{d\omega}{ds} ds \quad (1.38)$$

¹ Johdettava tulos pätee myös haarautuvalle poikkileikkaukselle.

Soveltamalla seuraavaksi osittaisintegrointia saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
 M_\omega &= \left| q\omega - \int_0^l \frac{dq}{ds} \omega ds \right. \\
 &= \overbrace{q(l)}^0 \omega(l) - \overbrace{q(0)}^0 \omega(0) - \int_0^l \frac{dq}{ds} \omega ds = - \int_0^l \frac{dq}{ds} \omega ds.
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

Tässä otettiin huomioon, että leikkausvuon arvot profiilin päissä $s = 0$ ja $s = l$ häviävät. Sijoittamalla tähän leikkausvuon lauseke (1.30) saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
 M_\omega &= - \frac{I_y Q_y - I_{yz} Q_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_0^l \overbrace{\frac{dS_z}{ds}}^{-yt} \omega ds - \frac{I_z Q_z - I_{yz} Q_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_0^l \overbrace{\frac{dS_y}{ds}}^{-zt} \omega ds - \frac{B'}{I_\omega} \int_0^l \overbrace{\omega \frac{dS_\omega}{ds}}^{-\omega t} ds \\
 &= \frac{I_y Q_y - I_{yz} Q_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_0^l \overbrace{y\omega t ds}^{I_{y\omega}=0} + \frac{I_z Q_z - I_{yz} Q_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int_0^l \overbrace{z\omega t ds}^{I_{z\omega}=0} + \frac{B'}{I_\omega} \int_0^l \overbrace{\omega^2 t ds}^{I_\omega} = B'.
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Sektoriaaliselle vääntömomentille saatiin siis lopulta yksinkertainen tulos

$$\boxed{M_\omega = B'}. \tag{1.42}$$

Sektoriaalinen vääntömomentti on siis **bimomentin derivaatta**. Sijoittamalla tulos (1.42) keskiviivan suuntaisen keskimääräisen leikkausjännityksen lausekkeeseen (1.32) saadaan

$$\boxed{\bar{\tau}_{xs}(s) = \frac{I_y Q_y - I_{yz} Q_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} \frac{S_z(s)}{t(s)} + \frac{I_z Q_z - I_{yz} Q_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \frac{S_y(s)}{t(s)} + \frac{M_\omega}{I_\omega} \frac{S_\omega(s)}{t(s)}}. \tag{1.43}$$

Tämä on keskiviivan suuntaisen **keskimääräisen leikkausjännityksen lauseke** lopullisessa muodossaan. Jos koordinaattiakselien y, z suunnat yhtyvät poikkileikkauksen pääjähyyssuuntiin tai poikkileikkaus on symmetrinen, lauseke (1.43) yksinkertaistuu muotoon

$$\boxed{\bar{\tau}_{xs}(s) = \frac{Q_y}{I_z} \frac{S_z(s)}{t(s)} + \frac{Q_z}{I_y} \frac{S_y(s)}{t(s)} + \frac{M_\omega}{I_\omega} \frac{S_\omega(s)}{t(s)}}. \tag{1.44}$$

Saint Venant'in vääntöteorian mukainen vääntömomentin ja vääntymän yhteys (vrt. Rakenteiden lujuusoppi kaava (6.8)) on

$$M_t = GI_t\theta = GI_t\varphi_t', \quad (1.45)$$

missä G on leikkausmoduuli ja I_t on vääntöjäyhyysmomentti. Sektoriaaliselle vääntömomentille saadaan kaavojen (1.42) ja (1.23d) perusteella

$$M_\omega = -EI_\omega\theta'' = -EI_\omega\varphi_t'''. \quad (1.46)$$

Näin poikkileikkauksen kokonaisvääntömomentti $M_x = M_\omega + M_t$ saadaan lausutuksi vääntökulman φ_t avulla seuraavasti

$$\boxed{M_x = -EI_\omega\varphi_t'' + GI_t\varphi_t'} \quad (1.47)$$

1.6 Aksiaalisen siirtymän, taipumien ja vääntökulman differentiaaliyhtälöt

Kaavojen (1.13), (1.22) ja (1.47) avulla saadaan normaalivoima, taiputusmomentit ja kokonaisvääntömomentti lausutuksi pintakeskiöakselin aksiaalisen siirtymän, vääntökeskiöakselin taipumien ja vääntökulman avulla seuraavasti

$$\begin{aligned}
 N &= EAu'_C, \\
 M_x &= -EI_\omega \varphi_t''' + GI_t \varphi_t', \\
 M_y &= -EI_{yz} v_V'' - EI_y w_V'', \\
 M_z &= -EI_z v_V'' - EI_{yz} w_V''.
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

Sijoittamalla nämä lausekkeet tasapainoyhtälöihin (1.28) saadaan differentiaaliyhtälöt

$$\begin{aligned}
 EAu_C'' + q_x &= 0, \\
 EI_z v_V^{(4)} + EI_{yz} w_V^{(4)} &= q_y, \\
 EI_{yz} v_V^{(4)} + EI_y w_V^{(4)} &= q_z, \\
 EI_\omega \varphi_t^{(4)} - GI_t \varphi_t'' &= m_t.
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

Ratkaisemalla keskimmäisistä yhtälöistä $v_V^{(4)}$ ja $w_V^{(4)}$ saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
 u_C'' &= \frac{q_x}{EA}, \\
 v_V^{(4)} &= \frac{1}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} (I_y q_y - I_{yz} q_z), \\
 w_V^{(4)} &= \frac{1}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} (-I_{yz} q_y + I_z q_z), \\
 \varphi_t^{(4)} - \frac{GI_t}{EI_\omega} \varphi_t'' &= \frac{m_t}{EI_\omega}.
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Havaitaan, että näissä neljässä differentiaaliyhtälössä on kussakin yksi tuntematon ja ne **voidaan** siten ratkaista **toisistaan riippumatta**. Ensimmäinen yhtälö on sauvan pintakeskiöakselin aksiaalisen siirtymän $u_C(x)$ differentiaaliyhtälö, toinen ja kolmas ovat vääntökeskiöakselin

taipumien $v_V(x)$ ja $w_V(x)$ differentiaaliyhtälöt sekä viimeinen yhtälö on vääntökulman $\varphi_t(x)$ differentiaaliyhtälö. Nähdään siis, että aksiaalisen siirtymän, taipumien sekä vääntökulman määrittystehtävät ovat erillisiä. Jos kysymyksessä on symmetrinen poikkileikkaus tai koodinaattiakselit y ja z yhtyvät pääjäyhyysakseleihin, jolloin $I_{yz} = 0$, taipumien differentiaaliyhtälöt (1.50 b ja c) saavat tutumman muodon

$$v_V^{(4)} = \frac{q_y}{EI_z}, \quad w_V^{(4)} = \frac{q_z}{EI_y}. \quad (1.51)$$

Nämä yhtälöt ovat palkin taipuman differentiaaliyhtälöt x, z - ja x, y -tasoissa. Niiden, samoin kuin aksiaalisesti kuormitetun sauvan differentiaaliyhtälön (1.50a) ratkaiseminen on tuttua jo Rakenteiden lujuusopin kurssista. Tämä merkitsee myös sitä, että Rakenteiden mekaniikka I:ssä käsitellyt kehittyneemmät tasosauvarakenteiden kimmoiset analysointimenetelmät, ovat myös käytettävissä, kun käsitellään avoimista ohuista profiileista koostuvien rakenteiden veto- tai puristus- sekä taivutustehtävää.

2. Avointen ohutseinämäisten sauvojen vääntötehtävän ratkaiseminen

2.1 Johdanto

Todetaan siis, että sauvojen, joilla ohutseinämäinen avoin poikkileikkaus, käsittely ei vedon ja puristuksen sekä taivutuksen osalta juurikaan poikkea tavanomaisten sauvarakenteiden käsittelystä. Ainoastaan poikkileikkaussuureiden määrittäminen sekä jännitysten määrittäminen ja esittäminen voidaan käytännössä suorittaa hieman eri tavalla. Näin ohutseinämäisten avoimen profiilien analyysin **erityispiirre** on sen **vääntötehtävä**. Käytännössä analyysi voidaan siis usein suorittaa erikseen aksiaaliselle kuormitukselle, taivutukselle sekä väännölle. Lopputulos saadaan sitten soveltamalla superpositioperiaatetta. Seuraavassa tarkastellaan siis erityisesti ohutseinämäisten avoimien profiilien vääntötehtävän ratkaisemista. Se miten vääntötehtävä liittyy osana kokonaistehtävän ratkaisemiseen esitetään esimerkkitehtävien yhteydessä.

2.1 Vääntötehtävän jaottelu

Ohutseinämäisten avoimien profiilien väännön vääntökulman differentiaaliyhtälö (1.50d) voidaan esittää muodossa

$$\varphi_t^{(4)} - \left(\frac{k}{L}\right)^2 \varphi_t'' = \frac{m_t}{EI_\omega}, \quad (2.1)$$

missä

$$k = L \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} \quad (2.2)$$

on dimensioton vakio. Yhtälö (2.1) on ns. **estetyn väännön** differentiaaliyhtälö. Riippuen kertoimen k arvoista, voidaan esittää kaksi tämän yhtälön ratatapausta.

Kirjoitetaan differentiaaliyhtälö (2.1) muotoon

$$\left(\frac{L}{k}\right)^2 \varphi_t^{(4)} - \varphi_t'' = \frac{m}{GI_t}$$

ja kokonaisvääntömomentin lauseke (1.47) käyttäen hyväksi vääntymän ja vääntökulman yhteyttä $\theta = \varphi_t'$ muotoon

$$M_x = GI_t \left[-\left(\frac{L}{k}\right)^2 \theta'' + \theta \right].$$

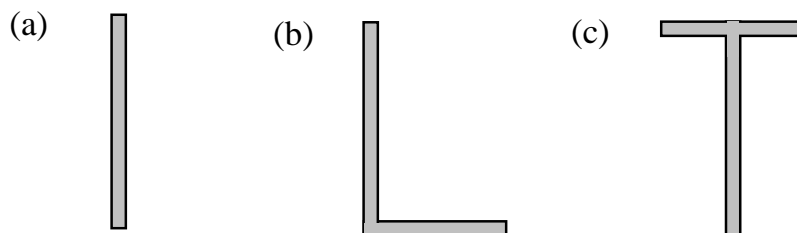
Jos nyt k on **riittävän suuri**, termi $(L/k)^2$ on häviävän pieni, ja vääntötehtävän differentiaaliyhtälöksi ja kokonaisvääntömomentin lausekkeeksi saadaan

$$\varphi_t'' = -\frac{m}{GI_t} \quad (2.3)$$

ja

$$M_x \equiv M_t = GI_t \theta. \quad (2.4)$$

Tällainen tilanne syntyy, jos poikkileikkaus on sellainen, että sen sektoriaalinen koordinaatti ja siten myös sektoriaalinen jäyhyysmomentti häviävät. Tällaisia avoimia ohuita poikkileikkauksia ovat esimerkiksi kapea suorakaide, L-profiili ja T-profiili. Kysymyksessä on **vapaa vääntö**, jota on käsitelty jo rakenteiden lujuusopin kurssissa.



Kuva 1.7: Ohutseinämäisiä poikkileikkauksia, joiden sektoriaalinen koordinaatti vääntökeskiön suhteen häviää: (a) kapea suorakaide, (b) L-profiili ja T-profiili

Kirjoitetaan kokonaisvääntömomentin lauseke (1.47) muotoon

$$M_x = -EI_\omega [\theta'' - (\frac{k}{L})^2 \theta].$$

Jos nyt k on **riittävän pieni**, termi $(k/L)^2$ on häviävän pieni, ja vääntötehtävän differentiaaliyhtälöksi (2.1) ja kokonaisvääntömomentin lausekkeeksi saadaan

$$\varphi_t^{(4)} = \frac{m}{EI_\omega} \quad (2.5)$$

ja

$$M_x \equiv M_\omega = -EI_\omega \theta''. \quad (2.6)$$

Kysymyksessä on ns. **täysin estetty vääntö**.

Käytännön tarpeita varten voidaan tehdä seuraava luokittelu:

Jos $k > 10(\dots 20)$, voimme laskelmissa käyttää yhtälöitä (2.3) ja (2.4). Kysymyksessä on siis **vapaan väännön** malli. Se soveltuu **massiivisiin- ja kotelopoikkileikkauksiin**. Tämän lisäksi tähän luokkaan kuuluvat, kuten edellä totesimme, ohuet avoimet ohutseinämäiset poikkileikkaukset, joiden sektoriaalinen koordinaatti ja sektoriaalinen jäyhyysmomentti häviävät (vrt. kuva 7.1).

Jos $k < 1/2$, voimme laskelmissa käyttää yhtälöitä (2.5) ja (2.6). Kysymyksessä on siis **täysin estetyn väännön** malli. Tähän luokkaan kuuluvat **ohutseinämäiset kylmämuokatusta teräksestä kootut profiilit**.

Jos $1/2 < k < 10(\dots 20)$ joudumme laskelmissa ratkaisemaan täydellisen estetyn väännön differentiaaliyhtälön (2.1). Tässä yhteydessä voimme puhua **osittain estetyn väännön** mallista. Tähän luokkaan kuuluvat **valssatut teräsprofiilit ja ohutseinämäiset teräsbetoniset kannattajat**.

2.2 Vääntökulman differentiaaliyhtälön ratkaisu

Vääntökulman differentiaaliyhtälön (2.1) yleinen ratkaisu, **vääntökulma**, voidaan esittää muodossa

$$\varphi_t(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sinh\left(\frac{k}{L}x\right) + C_4 \cosh\left(\frac{k}{L}x\right) + \varphi_{tm}(x), \quad (2.7)$$

missä $\varphi_{tm}(x)$ on jakautunutta vääntävää ulkoista momenttia $m_t(x)$ vastaava yksityisratkaisu. Sitä vastaten saadaan **vääntymälle**

$$\theta(x) \equiv \varphi_t'(x) = C_2 + C_3 \frac{k}{L} \cosh\left(\frac{k}{L}x\right) + C_4 \frac{k}{L} \sinh\left(\frac{k}{L}x\right) + \theta_m(x), \quad (2.8)$$

missä $\theta_m(x) = \varphi_{tm}'(x)$ on yksityisratkaisua vastaavaa vääntymä. **Saint Venant'in vääntömomentille** saadaan

$$\begin{aligned} M_t(x) &\equiv GI_t \theta(x) \\ &= GI_t \left[C_2 + C_3 \frac{k}{L} \cosh\left(\frac{k}{L}x\right) + C_4 \frac{k}{L} \sinh\left(\frac{k}{L}x\right) \right] + M_{tm}(x), \end{aligned} \quad (2.9)$$

missä $M_{tm}(x) = GI_t \theta_m(x)$ on yksityisratkaisua vastaavaa Saint Venant'in vääntömomentti. **Bimomentille** saadaan

$$B(x) \equiv -EI_\omega \theta'(x) = -GI_t \left[C_3 \sinh\left(\frac{k}{L}x\right) + C_4 \cosh\left(\frac{k}{L}x\right) \right] + B_m(x) \quad (2.10)$$

missä $B_m(x) = -EI_\omega \theta_m'(x)$ on yksityisratkaisua vastaava bimomentti. **Sektoriaaliselle vääntömomentille** saadaan

$$\begin{aligned} M_\omega(x) &\equiv B'(x) \\ &= -GI_t \left[C_3 \frac{k}{L} \cosh\left(\frac{k}{L}x\right) + C_4 \frac{k}{L} \sinh\left(\frac{k}{L}x\right) \right] + M_{\omega m}(x) \end{aligned} \quad (2.12)$$

missä $M_{\omega m} = B_m'(x)$ on yksityisratkaisua vastaava estetyn sektoriaalinen vääntömomentti. **Kokonaisvääntömomentille** saadaan

$$M_x(x) \equiv M_\omega(x) + M_t(x) = GI_t C_2 + M_{xm}(x), \quad (2.13)$$

missä $M_{xm}(x) \equiv M_{om}(x) + M_{tm}(x)$ on yksityisratkaisua vastaava kokonaisvääntömomentti.

Seuraavassa annetaan ilman johtoa joitain käytännön tehtävissä käyttökelpoisia differentiaaliyhtälön (2.1) yksityisratkaisuja. Niiden oikeellisuus on mahdollista todentaa sijoittamalla yhtälöön. Tasan jakautunutta ulkoista momenttia $m_t = m_0$ vastaava yksityisratkaisu on

$$\varphi_{tm}(x) = -\frac{1}{2} \frac{m_0}{GI_t} x^2. \quad (2.14a)$$

Lineaarisesti jakautunutta ulkoista momenttia $m_t = m_1 + (m_2 - m_1)x/L$, missä m_1 ja m_2 ovat sen arvot sauvan päissä, vastaava yksityisratkaisu on

$$\varphi_{tm}(x) = -\frac{1}{GI_t} \left[\frac{1}{2} m_1 x^2 + \frac{1}{3} (m_2 - m_1) x^3 \right]. \quad (2.14b)$$

Pisteessä $x = a$ vaikuttavaa pistemäistä ulkoista vääntävää momenttia \bar{M} vastaava yksityisratkaisu on

$$\varphi_{tm}(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 \leq x \leq a, \\ \frac{\bar{M}L}{GI_t} \left[-\frac{x-a}{L} + \frac{1}{k} \sinh\left(k \frac{x-a}{L}\right) \right], & \text{kun } a \leq x \leq L. \end{cases} \quad (2.14c)$$

Pisteessä $x = a$ vaikuttavaa pistemäistä ulkoista bimomenttia \bar{B} vastaava yksityisratkaisu on

$$\varphi_{tm}(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 \leq x \leq a, \\ \frac{\bar{B}}{GI_t} \left[-1 + \cosh\left(k \frac{x-a}{L}\right) \right], & \text{kun } a \leq x \leq L. \end{cases} \quad (2.14d)$$

Integrintivakiot C_1 , C_2 , C_3 ja C_4 saadaan määritetyksi ottamalla huomioon reunaehdot sauvan päissä.

2.3 Vääntökulman differentiaaliyhtälön reunaehdot

Vääntökulman differentiaaliyhtälö (2.1) on neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälö, ja sen yleisessä ratkaisussa (2.7) on siten neljä integrointivakiota. Nämä integrointivakiot määritetään ottamalla huomioon kaksi reunaehto tarkasteltavan sauvan kummassakin päässä. Tavallisimman reunaehtotyypit ovat

1. **Kiertymä** vääntökeskiöakselin ympäri sauvan päässä $x = x_0$ on **estetty**, eli vääntökulma $\varphi_t(x)$ häviää. Tämä reunaehto on

$$\varphi_t(x_0) = 0. \quad (2.15a)$$

2. Sauvan poikkipinnan **käyristyminen** sauvan päässä $x = x_0$ on **estetty**. Tämä tarkoittaa sitä, että poikkileikkauksen aksiaalinen siirtymä $u(x_0, s) \equiv -\omega_v(s)\theta(x_0)$ häviää. Tämä seuraa vääntymälle $\theta \equiv \varphi_t'$ reunaehto on

$$\theta(x_0) = 0. \quad (2.15b)$$

3. Sauvan päähän vaikuttaa ulkoinen vääntökeskiön ympäri **vääntävä** momentti. Vääntömomentilla $M_x(x)$ on siten sauvan päässä $x = x_0$ **annettu arvo** \bar{M}_x , eli reunaehto on

$$M_x(x) = \bar{M}_x. \quad (2.15c)$$

4. Sauvan päähän vaikuttaa ulkoinen **bimomentti**. Bimomentilla $B(x)$ on siten sauvan päässä $x = x_0$ **annettu arvo** \bar{B} , eli reunaehto on

$$B(x_0) = \bar{B}. \quad (2.15d)$$

Päistään tuetun väännetyin sauvan tavallisimmat tuentatapaukset ja niitä vastaavat reunaehdot ovat:

Kiertymätön ja käyristymätön pää: Sauvan pään kiertyminen vääntökeskiön ympäri ja sen poikkileikkauksen käyristyminen on estetty. Tällaista tuentaa kutsutaan myös (vääntöön nähden) **jäykäksi kiinnitykseksi**. Reunaehdot ovat

$$\varphi_t(x_0) = 0, \quad \theta(x_0) = 0 \quad (2.16a)$$

Kiertymätön ja vapaasti käyristyvä pää: Sauvan pään kiertyminen vääntökeskiön ympäri on estetty, mutta poikkileikkauksen käyristyminen saa tapahtua vapaasti. Tällaista tuentaa kutsutaan myös **haarukka-laakeroinniksi**. Reunaehdot ovat

$$\varphi_t(x_0) = 0, \quad B(x_0) = 0 \quad (2.16b)$$

Vapaasti kiertyvä ja käyristymätön pää: Sauvan pää saa kiertyä vapaasti, mutta poikkileikkauksen käyristyminen on estetty. Reunaehdot ovat

$$M_x(x_0) = 0, \quad \theta(x_0) = 0. \quad (2.16c)$$

Vapaasti kiertyvä ja käyristyvä pää: Sauvan pään kiertyminen ja poikkileikkauksen käyristyminen saa tapahtua vapaasti. Tällaista sauvan päätä voidaan kutsutaan myös (vääntöön nähden) **vapaaksi** pääksi. Reunaehdot ovat

$$M_x(x_0) = 0, \quad B(x_0) = 0 \quad (2.16d)$$

2.4 Ulkoinen bimomentti

Seuraavassa selostetaan mitä tarkoitetaan ulkoisella bimomentilla ja kuinka se määritetään. Kuvan 7.2 esittää sauvan päätä, johon vaikuttaa annettu ulkoinen traktiokomponentti $\bar{t}_x(s) = \bar{t}_x^{(i)}(s)$. Reunaehto sauvan päässä on

$$\sigma_x(x_0, s) = \bar{t}_x(s). \quad (2.17)$$

Kertomalla tämä yhtälö puolittain sektorialisella koordinaatilla $\omega(s) = \omega_v(s)$ ja integroimalla edelleen puolittain poikkipinnan yli saadaan

$$B(x_0) = \bar{B}, \quad (2.18)$$

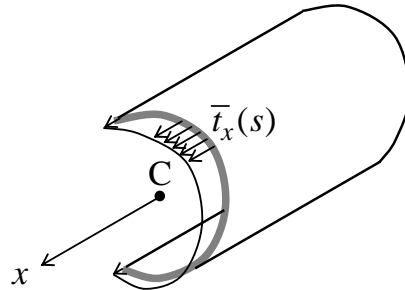
missä

$$B(x_0) = \int \sigma_x(x_0, s) \omega(s) t(s) ds \quad (2.19)$$

on bimomentti sauvan päässä ja

$$\bar{B} = \int \omega(s) \bar{t}_x(s) t(s) ds. \quad (2.20)$$

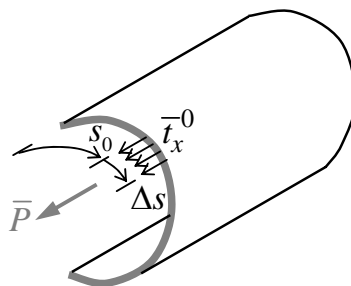
on **annettu ulkoinen bimomentti** sauvan päässä.



Kuva 2.2: Sauvan päässä vaikuttava annettu ulkoinen traktiokomponentti $\bar{t}_x(s)$

Sanallisesti voidaan sanoa, että sauvan päässä annettu ulkoinen bimomentti on sauvan päässä vaikuttavan ulkoisen traktion eräänlainen momentti, jossa **momenttivartena on sektorიაალინე კოორდინატი**.

Tarkastellaan sauva päätä, johon vaikuttaa x -akselin suuntainen pistekuorma \bar{P} poikkileikkauksen keskiviivan kohdassa $s = s_0$. Ajatellaan nyt että kuorma onkin \bar{P} jakautunut tasan kuvan 2.3 pienellä välillä s_0 ja $s_0 + \Delta s$ intensiteetin ollessa \bar{t}_x^0 . Jos väli Δs on riittävän pieni, voidaan kirjoittaa $\bar{P} \approx \bar{t}_x^0 \cdot t(s_0) \Delta s$.



Kuva 2.3: Sauvan päässä välillä s_0 ja $s_0 + \Delta s$ tasan jakautunutta annettu traktio \bar{t}_x^0 ja sen resultantti \bar{P} .

Vastaavalle annetulle bimomentille saadaan nyt

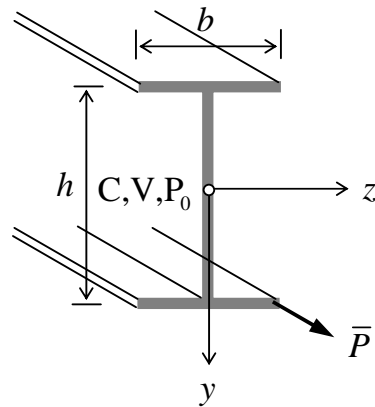
$$\bar{B} = \int_0^l \omega(s) \bar{t}_x^0 t(s) ds = \int_{s_0}^{s_0+\Delta s} \omega(s) \bar{t}_x^0 t(s) ds \approx \omega(s_0) \bar{t}_x^0 t(s_0) \Delta s = \bar{P} \omega(s_0). \quad (2.21)$$

Jos nyt väli Δs lähestyy nollaa siten, pätee kaava (2.21) edelleen, joten poikkileikkauksen keskiviivan pisteessä $s = s_0$ vaikuttavaa ulkoista aksiaalista **pistekuormaa** \bar{P} vastaava **bimomentti** on

$$\bar{B} = \bar{P} \omega(s_0). \quad (2.22)$$

Havaitaan siis, poikkileikkauksen päähän vaikuttavaa **pistekuormaa** **vastaava bimomentti** on tämän **voiman** ja voiman vaikutuspisteessä määritetyn **sektoriaalisen koordinaatin tulo**.

Pyritään edelleen selvittämään bimomentin luonnetta kuvan 2.4 avulla. Se esittää I – palkin päätä, johon vaikuttaa ulkoinen aksiaalinen pistekuorma alalaipan keskiviivan oikeassa päässä.



Kuva 2.4: I – palkin pää, johon vaikuttaa aksiaalinen pistekuorma

Pistevoimaa \bar{P} vastaavat ulkoiset taivutusmomentin arvot ovat

$$\bar{M}_y = \bar{P} \cdot \frac{b}{2}, \quad \bar{M}_z = \bar{P} \cdot \frac{h}{2}, \quad (2.23)$$

eli ne ovat voiman momentit y – ja z – akselien suhteen. Lasketaan vertailun vuoksi pistevoimaa \bar{P} vastaava bimomentti. Sektoriaalisen koordinaatin arvo voiman vaikutuspisteessä on

$$\omega_v = \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2},$$

joten **bimomentille** saadaan

$$\bar{B} = \bar{P} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2}. \quad (2.24)$$

Havaitaan, että se on pistevoiman \bar{P} eräänlainen **kaksoismomentti**, joka määritetään laskemalla ensin voiman \bar{P} momentti y – akselin suhteen ja sen jälkeen näin saadun momentin momentti z – akselin suhteen. Tämä tulkinta havainnollistaneekin bimomentin luonnetta, joskaan tulos ei ole laajennettavissa yleisemmän muotoisiin poikkileikkauksiin.

2.5 Hyppäysehdot

Jos esimerkiksi sauvan jossakin pisteessä sen vääntöjäykkyydet muuttuvat äkillisesti tai siinä on välituki, joka estää kiertymisen (haarukkalaakerointi), vääntökulman differentiaaliyhtälöllä tämän pisteen eri puolilla on erilainen ratkaisu, jolla on eri integrointivakiot. Tällöin reunaehtojen lisäksi tarvitaan myös ns. **hyppäysethdoja**. Seuraavassa tarkasteltavan pisteen x_0 vasemman ja oikean puoleisiin taipuman differentiaaliyhtälön ratkaisuihin liitetään alaindeksit v ja o .

Jos palkin vääntöjäykkyydet (GI_t ja EI_o) muuttuvat äkillisesti pisteessä $x = x_0$, hyppäysehdoista ovat

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t^v(x_0) &= \varphi_t^o(x_0) \\ \theta^v(x_0) &= \theta^o(x_0) \\ M_x^v(x_0) &= M_x^o(x_0) \\ B^v(x_0) &= B^o(x_0) \end{aligned} \right\}. \quad (2.25)$$

Jos pisteessä $x = x_0$ on kiertymisen estävä välituki, hyppäysehdoista ovat

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t^v(x_0) &= 0 \\ \varphi_t^o(x_0) &= 0 \\ \theta^v(x_0) &= \theta^o(x_0) \\ B^v(x_0) &= B^o(x_0) \end{aligned} \right\}. \quad (2.26)$$

2.6 Bimomentin differentiaaliyhtälö

Tarkastellaan vääntötehtävää, joka on sillä tavoin **ulkoisesti staattisesti määrätty** siten, kokonaisvääntömomentti $M_x(x)$ voidaan määrittää tavanomaisella tasapainotarkastelulla etukäteen. Jos tavoitteena on määrittää väännön jännitysresultantit tulisi lisäksi määrittää bimomentti $B(x)$, sektoriaalinen vääntömomentti $M_\omega(x)$ ja Saint Venantin vääntömomentti $M_t(x)$. Tässä tapauksessa voidaan usein tulokseen päästä hieman mukavammin käyttäen **Bimomentin differentiaaliyhtälön** ratkaisua. Johdetaan aluksi tämä yhtälö.

Bimomentin ja vääntymän sekä vääntymän ja vääntökulman yhteyksistä (1.24d) ja (1.13d) seuraa

$$\varphi_t'' = -\frac{B}{EI_\omega} \quad (2.27)$$

ja Saint Venat'in vääntömomentin ja vääntökulman yhteydestä (1.46) seuraa nyt

$$M_t' = GI_t \varphi_t'' = -\frac{GI_t}{EI_\omega} B. \quad (2.28)$$

Kokonaisvääntömomentin $M_x = M_\omega + M_t$ derivaatalle saadaan tämän jälkeen

$$M_x' = M_\omega' + M_t' = B'' - \frac{GI_t}{EI_\omega} B. \quad (2.29)$$

Sijoittamalla tämä väännön tasapainoyhtälöön (1.27d) saadaan differentiaaliyhtälö

$$\boxed{B'' - \left(\frac{k}{L}\right)^2 B = -m_t.} \quad (2.30)$$

Tätä yhtälöä kutsutaan tässä **bimomentin differentiaaliyhtälöksi**. Sen yleinen ratkaisu on

$$\boxed{B(x) = C_1 \cosh\left(\frac{k}{L}x\right) + C_2 \sinh\left(\frac{k}{L}x\right) + B_m(x),} \quad (2.34)$$

missä C_1 ja C_2 ovat integrointivakiot ja $B_m(x)$ on jakautunutta ulkoista vääntävää momenttia $m_t(x)$ vastaava yksityisratkaisu.

Seuraavassa annetaan ilman johtoa joitain käytännön tehtävissä käyttökelpoisia differentiaaliyhtälön (2.30) yksityisratkaisuja. Niiden oikeellisuus on mahdollista todentaa sijoittamalla yhtälöön. Tasan jakautunutta ulkoista momenttia $m_t = m_0$ vastaava yksityisratkaisu on

$$B_m = \left(\frac{L}{k}\right)^2 m_0 = \frac{EI_\omega}{GI_t} m_0. \quad (2.35a)$$

Lineaarisesti jakautunutta ulkoista momenttia $m_t = m_1 + (m_2 - m_1)x/L$, missä m_1 ja m_2 ovat sen arvot sauvan päissä, vastaava yksityisratkaisu on

$$B_m(x) = \left(\frac{L}{k}\right)^2 [m_1 + (m_2 - m_1)\frac{x}{L}] = \frac{EI_\omega}{GI_t} [m_1 + (m_2 - m_1)\frac{x}{L}]. \quad (2.35b)$$

Pisteessä $x = a$ vaikuttavaa pistemäistä ulkoista vääntävää momenttia \bar{M} vastaava yksityisratkaisu on

$$B_m(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 \leq x \leq a, \\ -\frac{\bar{M}L}{k} \sinh\left[\frac{k}{L}(x-a)\right], & \text{kun } a \leq x \leq L. \end{cases} \quad (2.35c)$$

Pisteessä $x = a$ vaikuttavaa pistemäistä ulkoista bimomenttia B vastaava yksityisratkaisu on

$$B_m(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 \leq x \leq a, \\ -\bar{B} \cosh\left[\frac{k}{L}(x-a)\right], & \text{kun } a \leq x \leq L. \end{cases} \quad (2.35d)$$

Integrointivakiot C_1 ja C_2 saadaan määritetyksi ottamalla huomioon reunaehdot sauvan päissä. Reunaehto annetaan joko bimomentille B tai vääntömomentille $M_\omega = B'$.

2.7 Bimomentin differentiaaliyhtälön reunaehdot

Bimomentin differentiaaliyhtälö (2.30) on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, ja sen yleisessä ratkaisussa (2.31) on siten kaksi integrointivakiota. Nämä integrointivakiot määritetään ottamalla huomioon kaksi reunaehto. Nämä reunaehdot voidaan antaa bimomentille $B(x)$ tai sen derivaatalle $B'(x)$ eli sektoriaaliselle vääntömomentille $M_\omega(x)$. Reunaehtotyypit ovat

1. Sauvan poikkipinnan **käyristyminen** sauvan päässä $x = x_0$ on **estetty** (esim. jäykästi kiinnitetty pää). Tämä tarkoittaa sitä, että poikkileikkauksen aksiaalinen siirtymä $u(x_0, s) \equiv -\omega_v(s)\theta(x_0)$ häviää. Tästä seuraa vääntymälle ehto $\theta(x_0) = 0$ ja edelleen Saint Venantin vääntömomentille $M = GI_t\theta$ ehto $M_t(x_0) = 0$. Kokonaisvääntömomentti $M_x = M_\omega + M_t$ sauvan päässä on nyt $M_x(x_0) = M_\omega(x_0) \equiv B'(x_0)$, joten reunaehdoksi bimomentin derivaatalle saadaan

$$B'(x_0) = M_x(x_0), \quad (2.36a)$$

missä $M_x(x_0)$ on kokonaisvääntömomentin arvo sauvan päässä, joka voidaan määrittää tasapainotarkastelun avulla etukäteen.

2. Sauvan päähän vaikuttaa annettu ulkoinen **bimomentti**. Bimomentilla $B(x)$ on siten sauvan päässä $x = x_0$ **annettu arvo** \bar{B} , eli reunaehto on

$$B(x_0) = \bar{B}. \quad (2.36b)$$

Jos poikkipinnan **käyristyminen** sauvan päässä **saa tapahtua vapaasti** (esim. vapaa tai haarukkalaakeroitu pää), $\bar{B} = 0$ ja tämä reunaehto saa muodon

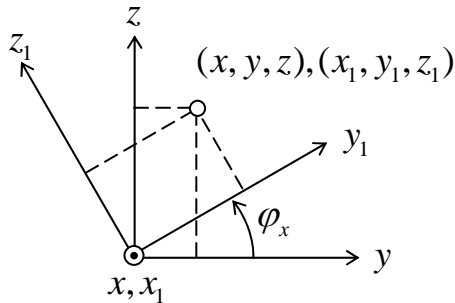
$$B(x_0) = 0. \quad (2.36c)$$

3. Ohutseinämäinen avoin taipuisa sauva

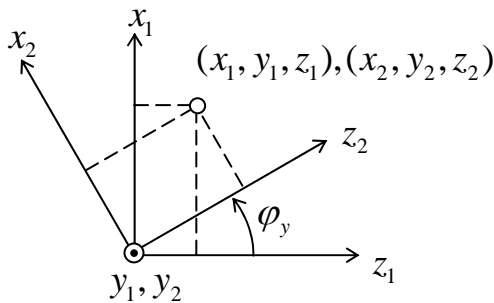
3.1 Taipuisan sauvan yhtälöitä

3.11 Deformoituvan kappaleen partikkelin rotaatio

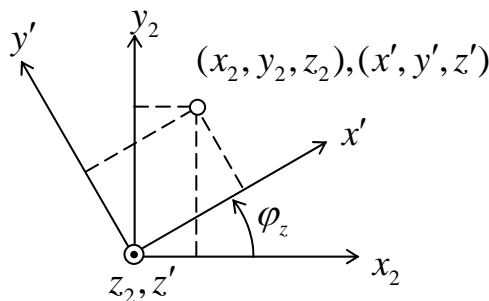
Tarkastellaan kappaleen partikkelia. Kappaleen deforminguessa, tämä partikkeli saa rotaation siten, että siihen liittyvät, alussa x -, y - ja z -akselien suuntaiset, materiaalisäikeet kiertyvät koordinaattiakselien x' , y' , z' suuntaisiksi. Rotaation ajatellaan muodostuvan kolmesta peräkkäisestä osarotaatiosta, joihin liittyvät koordinaatistot on esitetty kuvassa 3.1.



$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ y_1 &= y \cos \varphi_x + z \sin \varphi_x, \\ z_1 &= -y \sin \varphi_x + z \cos \varphi_x, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \\ z_2 &= z_1 \cos \varphi_y + x_1 \sin \varphi_y, \\ x_2 &= -z_1 \sin \varphi_y + x_1 \cos \varphi_y, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} z' &= z_2 \\ x' &= x_2 \cos \varphi_z + y_2 \sin \varphi_z, \\ y' &= -x_2 \sin \varphi_z + y_2 \cos \varphi_z, \end{aligned}$$

Kuva 3.1: Partikkelin osarotaatioihin liittyvät koordinaatiston muutokset

Ensin tapahtuu rotaatio φ_x x -akselin ympäri (vrt. kuva 3.1a), jonka seurauksena materiaalisäikeet kiertyvät koordinaattiakselien x_1, y_1, z_1 , suuntaisiksi, toiseksi rotaatio φ_y y_1 -akselin ympäri (vrt. kuva 3.1b), jonka seurauksena materiaalisäikeet kiertyvät koordinaattiakselien x_2, y_2, z_2 , suuntaisiksi ja kolmanneksi rotaatio φ_z z_2 -akselin ympäri (vrt. kuva 3.1c), jonka seurauksena materiaalisäikeet kiertyvät koordinaattiakselien x', y', z' suuntaisiksi.

Nämä peräkkäiset koordinaatiston muutokset voidaan esittää muodossa

$$\{x_1\} = [T_x]\{x\}, \{x_2\} = [T_y]\{x_1\}, \{x'\} = [T_z]\{x_2\}, \quad (3.1)$$

missä

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad \{x\}_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}, \quad \{x\}_2 = \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}, \quad \{x'\} = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix}, \quad (3.2)$$

ja

$$[T_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & \sin \varphi_x \\ 0 & -\sin \varphi_x & \cos \varphi_x \end{bmatrix},$$

$$[T_y] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_y & 0 & -\sin \varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$[T_z] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & \sin \varphi_z & 0 \\ -\sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ovat vastaavat koordinaatiston muunnosmatriisit.

Soveltamalla yhteyksiä (3.1) peräkkäin, koordinaatiston muunnokseksi koordinaatistosta x, y, z koordinaatistoon x', y', z' saadaan

$$\{x'\} = [T]\{x\}, \quad (3.4)$$

missä

$$[T] = [T_z][T_y][T_x] \quad (3.5)$$

on **koordinaatiston muunnosmatriisi**. Seuraavassa rajoitutaan **pieniin rotaatioihin**, jolloin kullekin rotaatiokulmalle φ voidaan merkitä $\cos \varphi \approx 1$ ja $\sin \varphi \approx \varphi$ sekä osarotaatioiden koordinaatiston muunnosmatriisit saavat muodon

$$[T_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varphi_x \\ 0 & -\varphi_x & 1 \end{bmatrix}, [T_y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \varphi_y & 0 & 1 \end{bmatrix}, [T_z] = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_z & 0 \\ -\varphi_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Näin koko rotaation koordinaatiston muunnosmatriisille saadaan

$$\begin{aligned} [T] &= \begin{bmatrix} 1 & \varphi_z & 0 \\ -\varphi_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \varphi_y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varphi_x \\ 0 & -\varphi_x & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \varphi_x \varphi_y + \varphi_z & -\varphi_y + \varphi_x \varphi_z \\ -\varphi_z & -\varphi_x \varphi_y \varphi_z + 1 & \varphi_y \varphi_z + \varphi_x \\ \varphi_y & -\varphi_x & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Otaksutaan edelleen, että rotaatiokulmat ovat niin pieniä, että niiden tulot voidaan jättää pois. Tällöin koordinaatiston muunnosmatriisi saa muodon

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_z & -\varphi_y \\ -\varphi_z & 1 & \varphi_x \\ \varphi_y & -\varphi_x & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Nyt on $\varphi_x = \varphi_t$, $\varphi_y = -dw/dx \equiv -w'$ ja $\varphi_z = dv/dx \equiv v'$, missä φ_t on vääntökulma sekä v' ja w' ovat taipumien derivaatat, joten koordinaatiston muunnosmatriisi on saa lopullisen muodon

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & v' & w' \\ -v' & 1 & \varphi_t \\ -w' & -\varphi_t & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

3.12 Traktiokomponentit deformatiivisessa poikkileikkauksessa

Traktiovektorin \mathbf{t} komponentit deformatiiviseen palkin poikkileikkauksen tarkasteltavassa pisteessä P ovat x, y, z -koordinaatistossa ja x', y', z' -koordinaatistossa pystyvektoreina esitettyinä vastaavasti

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix}, \quad \{t'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (3.10)$$

Vektorille $\{t\}$ saadaan siten

$$\{t\} = [T]^T \{t'\} = \begin{bmatrix} 1 & -v' & -w' \\ v' & 1 & -\varphi_t \\ w' & \varphi_t & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x - v'\tau_{xy} - w'\tau_{xz} \\ v'\sigma_x + \tau_{xy} - \varphi_t\tau_{xz} \\ w'\sigma_x + \varphi_t\tau_{xy} + \tau_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (3.11)$$

Näin deformatiiviseen poikkipinnan traktiokomponenteiksi x, y, z -koordinaatistossa tulee

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_x - v'\tau_{xy} - w'\tau_{xz}, \\ t_y &= v'\sigma_x + \tau_{xy} - \varphi_t\tau_{xz}, \\ t_z &= w'\sigma_x + \varphi_t\tau_{xy} + \tau_{xz}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.13 Poikkileikkauksen yleisen pisteen siirtymät

Poikkileikkauksen pisteen P: (y, z) siirtymät¹ ovat

¹ Koska tarkastellaan tiettyä poikkileikkausta, riippuvuus koordinaatista x on jätetty selkeyden vuoksi merkittämättä.

$$v = v_V - \varphi_t(z - z_V), \quad w = w_V + \varphi_t(y - y_V), \quad (3.13)$$

missä v_V ja w_V ovat vääntökeskiön siirtymät, φ_t on vääntökulma sekä y_V ja z_V ovat vääntökeskiön koordinaatit.

3.14 Deformoituneen tilan jännitysresultanttivektorien komponentit

Poikkileikkauksen jännitysresultanttivektorin \mathbf{F}^σ x' -, y' - ja z' -akselien suuntaiset komponentit ovat normaalivoima N sekä leikkausvoimat Q_y ja Q_z . Merkitään poikkileikkauksen jännitysresultanttivektorin \mathbf{F}^σ x -, y - ja z -akselien suuntaisia komponentteja symboleilla U , V ja W . Niille saadaan

$$\begin{aligned} U &= \int_A t_x dA = \int_A (\sigma_x - v' \tau_{xy} - w' \tau_{xz}) dA \\ &= \int_A \sigma_x dA - \int_A [v'_V - \varphi'_t(z - z_V)] \tau_{xy} dA - \int_A [w'_V + \varphi'_t(y - y_V)] \tau_{xz} dA \\ &= \underbrace{\int_A \sigma_x dA}_N - v'_V \underbrace{\int_A \tau_{xy} dA}_{Q_y} - w'_V \underbrace{\int_A \tau_{xz} dA}_{Q_z} + \varphi'_t \underbrace{\int_A [\tau_{xz}(y - y_V) - \tau_{xz}(z - z_V)] dA}_{M_\omega} \\ &= \underline{N - Q_y v'_V - Q_z w'_V + \varphi'_t M_\omega}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} V &= \int_A t_y dA = \int_A (\sigma_x v' + \tau_{xy} - \varphi_t \tau_{xz}) dA \\ &= \int_A \sigma_x [v'_V - \varphi'_t(z - z_V)] dA + \int_A \tau_{xy} dA - \varphi_t \int_A \tau_{xz} dA \\ &= v'_V \underbrace{\int_A \sigma_x dA}_N - \varphi'_t \underbrace{\int_A \sigma_x z dA}_{M_y} + \varphi'_t z_V \underbrace{\int_A \sigma_x dA}_N + Q_y - \varphi_t \underbrace{\int_A \tau_{xz} dA}_{Q_z} \\ &= \underline{Q_y + N(v'_V + \varphi'_t z_V) - (M_y \varphi_t)'}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
W &= \int_A t_z dA = \int_A (\sigma_x w' + \varphi_t \tau_{xy} + \tau_{xz}) dA \\
&= \int_A \sigma_x [w'_V + \varphi'_t (y - y_V)] dA + \varphi_t \int_A \tau_{xy} dA + \int_A \tau_{xz} dA \\
&= w'_V \int_A \sigma_x dA + \varphi'_t \int_A \sigma_x y dA - \varphi_t y_V \int_A \sigma_x dA + \varphi_t \overbrace{Q_y}^{M'_z} + Q_z \\
&= \underline{Q_z + N(w'_V - \varphi'_t y_V) + (M_z \varphi_t)'}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Poikkileikkauksen jännitysresultanttimomenttivektorin \mathbf{M}^σ x -akselin suuntaiselle komponentille, jota merkitään tässä symbolilla T_x saadaan aluksi

$$\begin{aligned}
T_x &= \int_A [t_z (y + v - y_V) - t_y (z + w - z_V)] dA \\
&= \int_A [t_z (y - y_V) - t_y (z - z_V)] dA + \int_A (t_z v - t_y w) dA,
\end{aligned}$$

soveltamalla yhteyksiä (3.12) edelleen

$$\begin{aligned}
T_x &= \int_A [(w' \sigma_x + \varphi_t \tau_{xy} + \tau_{xz})(y - y_V) - (v' \sigma_x + \tau_{xy} - \varphi_t \tau_{xz})(z - z_V)] dA \\
&\quad + \int_A [\overbrace{w' v}^0 \sigma_x + \overbrace{\varphi_t v}^0 \tau_{xy} + \tau_{xz} v - \overbrace{v' w}^0 \sigma_x - \tau_{xy} w + \overbrace{\varphi_t w}^0 \tau_{xz}] dA,
\end{aligned}$$

missä kahden siirtymäsuureen tulot otaksuttiin häviävän pieniksi. Soveltamalla yhteyksiä (3.13) saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
T_x &= w'_V \overbrace{\int_A \sigma_x y dA}^{M_z} - y_V w'_V \overbrace{\int_A \sigma_x dA}^N - v'_V \overbrace{\int_A \sigma_x z dA}^{M_y} + z_V v'_V \overbrace{\int_A \sigma_x dA}^N \\
&+ \varphi'_t \left[\int_A \sigma_x (y - y_V)^2 dA + \int_A \sigma_x (z - z_V)^2 dA \right] \\
&+ \cancel{\varphi_t \int_A [\tau_{xy} (y - y_V) + \tau_{xz} (z - z_V)] dA} \\
&+ \overbrace{\int_A [\tau_{xz} (y - y_V) - \tau_{xy} (z - z_V)] dA}^{M_x} \\
&+ v_V \overbrace{\int_A \tau_{xz} dA}^{Q_z} - w_V \overbrace{\int_A \tau_{xy} dA}^{Q_y} \\
&- \cancel{\varphi_t \int_A [\tau_{xz} (z - z_V) + \tau_{xy} (y - y_V)] dA},
\end{aligned}$$

missä sovellettiin myös jännitysresultanttien määrittelykaavoja (1.15) ja edelleen

$$\begin{aligned}
T_x &= M_x + v_V Q_z - w_V Q_y + w'_V M_z - y_V w'_V N - v'_V M_y + v'_V z_V N \\
&+ \varphi'_t \left[\int_A \sigma_x y^2 dA - 2y_V \overbrace{\int_A \sigma_x y dA}^{M_z} + y_V^2 \overbrace{\int_A \sigma_x dA}^N \right. \\
&\left. + \int_A \sigma_x z^2 dA - 2z_V \overbrace{\int_A \sigma_x z dA}^{M_y} + z_V^2 \overbrace{\int_A \sigma_x dA}^N \right] \\
&= M_x + Q_z v_V - Q_y w_V + (M_z - N y_V) w'_V + (-M_y + N z_V) v'_V \\
&- 2y_V \varphi'_t M_z - 2\varphi'_t z_V M_y + N(y_V^2 \varphi'_t + z_V^2 \varphi'_t) \\
&+ \varphi'_t \int_A \sigma_x (y^2 + z^2) dA.
\end{aligned}$$

Soveltamalla lopuksi normaalijännityksen lauseketta (1.25) saadaan

$$\begin{aligned}
T_x &= M_x + Q_z v_V - Q_y w_V + (M_z - N y_V) w'_V + (-M_y + N z_V) v'_V \\
&\quad - 2 y_V M_z \phi'_t - 2 z_V M_y \phi'_t + N (y_V^2 \phi'_t + z_V^2 \phi'_t) \\
&\quad + \phi'_t \left[\frac{N}{A} \int (y^2 + z^2) dA + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int z (y^2 + z^2) dA \right. \\
&\quad \left. + \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int y (y^2 + z^2) dA + \frac{B}{I_\omega} \int \omega (y^2 + z^2) dA \right] \\
&= M_x + Q_z v_V - Q_y w_V + (-M_y + N z_V) v'_V + (M_z - N y_V) w'_V \\
&\quad + N \phi'_t \left(\frac{I_y + I_z}{A} + y_V^2 + z_V^2 \right) \\
&\quad + M_z \phi'_t \left[\frac{I_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int y (y^2 + z^2) dA - \frac{I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int z (y^2 + z^2) dA - 2 y_V \right] \\
&\quad + M_y \phi'_t \left[\frac{I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int z (y^2 + z^2) dA - \frac{I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \int y (y^2 + z^2) dA - 2 z_V \right] \\
&\quad + B \phi'_t \frac{1}{I_\omega} \int \omega (y^2 + z^2) dA
\end{aligned}$$

ja lopulta

$$\begin{aligned}
T_x &= \frac{M_x + v_V Q_z - w_V Q_y + (z_V N - M_y) v'_V + (-y_V N + M_z) w'_V}{} \\
&\quad + \phi'_t (N r^2 + 2 \beta_y M_z + 2 \beta_z M_y + 2 \beta_\omega B)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Kaavassa (3.17) on otettu käyttöön seuraavat uudet poikkileikkaussuureet

$$\begin{aligned}
r^2 &= \frac{I_y + I_z}{A} + y_v^2 + z_v^2, \\
\beta_y &= \frac{I_y}{2(I_y I_z - I_{yz}^2)} \int_A y(y^2 + z^2) dA - \frac{I_{yz}}{2(I_y I_z - I_{yz}^2)} \int_A z(y^2 + z^2) dA - y_v \\
\beta_z &= \frac{I_z}{2(I_y I_z - I_{yz}^2)} \int_A z(y^2 + z^2) dA - \frac{I_{yz}}{2(I_y I_z - I_{yz}^2)} \int_A y(y^2 + z^2) dA - z_v \\
\beta_\omega &= \frac{1}{2I_\omega} \int_A \omega(y^2 + z^2) dA.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

3.15 Vääntävä momentti

Sauvaan vaikuttava jakautunut kuormitus muodostuu alun perin pitkittäisestä viivakuormasta $q_x(x)$, joka vaikuttaa **pintakeskiöakselilla**, poikittaisista viivakuormista $q_y(x)$ ja $q_z(x)$, jonka **vaikutussuoran** ja poikkileikkauksen leikkauspiste on Q: (y_Q, z_Q) sekä **vääntävästä** pituutta kohti lasketusta voimaparista $m(x)$. Deformoitumattomaan sauvaan kohdistuvan jakautuneen kuormituksen vääntävä momentti vääntökeskiakselin suhteen on

$$m_t = m - q_y(z_Q - z_v) + q_z(y_Q - y_v).$$

Sauvan deforminguessa pisteessä Q vaikuttavat poikittaiset kuormat q_y ja q_z siirtyvät uuteen pisteeseen Q': $(y_Q + v_Q, z_Q + w_Q)$. Näin deforminguuneeseen sauvaan kohdistuvan jakautuneen kuormituksen vääntävä momentti vääntökeskiöakselin suhteen on

$$m_x = m - q_y(z_Q + w_Q - z_v) + q_z(y_Q + v_Q - y_v)$$

Vähentämällä edelliset yhtälöt puolittain saadaan

$$m_x = m_t - q_y w_Q + q_z v_Q$$

ja soveltamalla yhteyksiä (3.13) pisteessä Q saadaan lopulta

$$m_x = m_t - q_y[w_v + \varphi_t(y_Q - y_v)] + q_z[v_v - \varphi_t(z_Q - z_v)]. \tag{3.19}$$

3.16 Tasapainoyhtälöt

Deformoituneen sauvan sauva-alkion x -, y - ja z -akselinen suuntaiset voimatasapainoyhtälöt sekä momenttitasapainoyhtälö x -akselin suhteen voidaan suorittaa samaan tapaan kuin deformoitumattoman sauvan tapauksessa kohdassa 1.2. Tulos on

$$\begin{aligned} U' + q_x &= 0, \\ V' + q_y &= 0, \\ W' + q_z &= 0, \\ T'_x + m_x &= 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Ensimmäisestä tasapainoyhtälöstä saadaan

$$N' - (Q_y v'_V)' - (Q_z w'_V)' + (M_\omega \varphi'_t)' + q_x = 0 \tag{3.21}$$

Toisesta tasapainoyhtälöstä saadaan

$$Q'_y + [N(v'_V + \varphi'_t z_V)]' - (M_y \varphi_t)'' + q_y = 0 \tag{3.22}$$

Kolmannesta tasapainoyhtälöstä saadaan

$$Q'_z + [N(w'_V - \varphi'_t y_V)]' + (M_z \varphi_t)'' + q_z = 0 \tag{3.23}$$

Neljännestä tasapainoyhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} M'_x + (v_V Q_z)' - (w_V Q_y)' + [(z_V N - M_y) v'_V]' + [(-y_V N + M_z) w'_V]' \\ + [\varphi'_t (N r^2 + 2\beta_y M_z + 2\beta_z M_y + 2\beta_\omega B)]' \\ + m_t - q_y [w_V + \varphi_t (y_Q - y_V)] + q_z [v_V - \varphi_t (z_Q - z_V)] = 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Sijoittamalla yhteydet

$$\begin{aligned} N &= EA u_C, \\ M_z &= -EI_z v''_V - EI_{yz} w''_V, \quad Q_y = M'_z, \\ M_y &= -EI_{yz} v''_V - EI_y w''_V, \quad Q_z = M'_y, \\ M_t &= GI_t \varphi'_t, \quad M_\omega = -EI_\omega \varphi''_t, \\ M_x &= M_t + M_\omega \end{aligned} \tag{3.25}$$

yhtälöihin (3.21)-(3.24), muodostuu niistä differentiaaliyhtälöryhmä tuntemattomien $u_C(x)$, $v_V(x)$, $w_V(x)$ ja $\varphi_t(x)$ ratkaisemiseksi. Yhtälöryhmä on epälineaarinen ja sen ratkaisu suljetussa ei onnistu.

Tarkastellaan, kuinka tämä epälineaarinen tehtävä voitaisiin ratkaista iteratiivisesti ratkaisemalla peräkkäin lineaarisia tehtäviä. Sijoitetaan jännitysresultanttien N , M_y , M_z ja M_x lausekkeet (3.25) yhtälöiden (3.21)-(3.24) ensimmäisiin termeihin, jolloin saadaan differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} EAU_C'' - (Q_y v_V')' - (Q_z w_V')' + (M_\omega \varphi_t')' + q_x = 0, \\ -EI_z v_V^{(4)} - EI_{yz} w_V^{(4)} + [N(v_V' + \varphi_t' z_V)]' - (M_y \varphi_t)'' + q_y = 0, \\ -EI_{yz} v_V^{(4)} - EI_y w_V^{(4)} + [N(w_V' - \varphi_t' y_V)]' + (M_z \varphi_t)'' + q_z = 0, \\ -EI_\omega \varphi_t^{(4)} + GI_t \varphi_t^{(2)} + (v_V Q_z)' - (w_V Q_y)' + [(z_V N - M_y) v_V']' + [(-y_V N + M_z) w_V']' \\ + [\varphi_t' (Nr^2 + 2\beta_y M_z + 2\beta_z M_y + 2\beta_\omega B)]' \\ + m_t - q_y [w_V + \varphi_t (y_Q - y_V)] + q_z [v_V - \varphi_t (z_Q - z_V)] = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

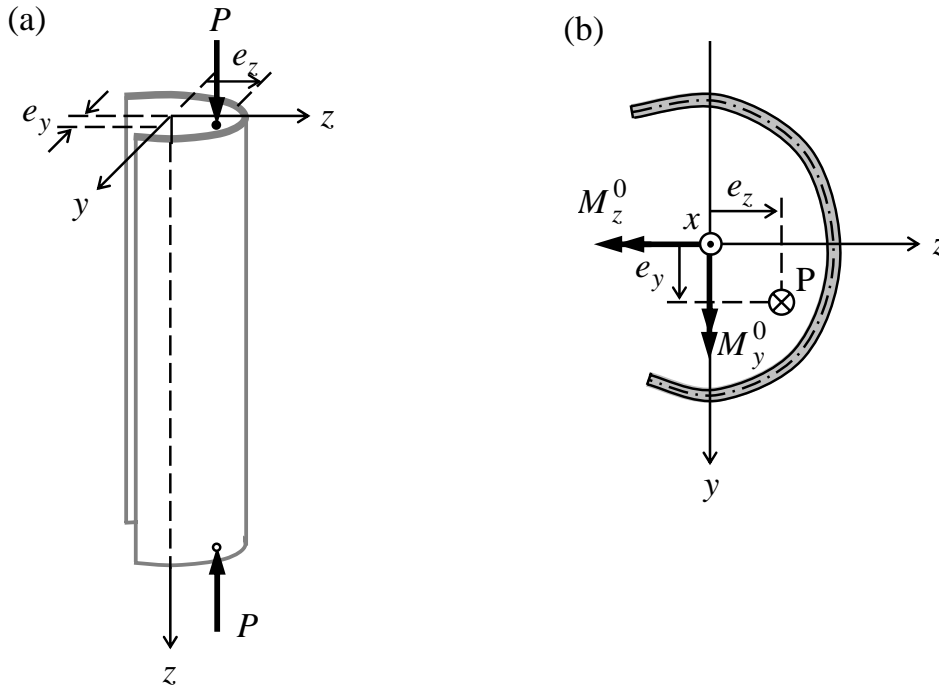
Jos nyt yhtälöissä (3.26) olevat jännitysresultantit olisivat tunnettuja, olisi tämä yhtälöryhmä lineaarinen ja ratkaistavissa numeerisesti esimerkiksi differenssimenetelmällä. Näin ei kuitenkaan ole, vaan ne riippuvat kaavojen (3.25) mukaisesti tuntemattomista $u_C(x)$, $v_V(x)$, $w_V(x)$ ja $\varphi_t(x)$. Iteratiivinen ratkaisu saadaan kuitenkin otaksumalla tuntemattomille alkuarvot $u_C^0 = 0$, $v_V^0 = 0$, $w_V^0 = 0$ ja $\varphi_t^0 = 0$. Kun ollaan iterointikierröksellä i , edellisen kierroksen ratkaisu u_C^{i-1} , v_V^{i-1} , w_V^{i-1} ja φ_t^{i-1} tunnetaan. Sen avulla voidaan ratkaista vastaavat jännitysresultantit N^{i-1} , M_y^{i-1} , M_z^{i-1} , B^{i-1} , Q_y^{i-1} , Q_z^{i-1} ja M_ω^{i-1} . Sijoitetaan nämä yhtälöryhmään (3.26) ja ratkaistaan sen avulla u_C^i , v_V^i , w_V^i ja φ_t^i . Ensimmäisellä iterointikierröksellä yhtälö (3.26) saa muodon

$$\begin{cases} EAU_C'' + q_x = 0, \\ -EI_z v_V^{(4)} - EI_{yz} w_V^{(4)} + q_y = 0, \\ -EI_{yz} v_V^{(4)} - EI_y w_V^{(4)} + q_z = 0, \\ -EI_\omega \varphi_t^{(4)} + GI_t \varphi_t^{(2)} + m_t = 0. \end{cases}$$

Nämä ovat lineaarisen tehtävän yhtälöt (1.49), joten ensimmäisellä iterointi-
kierroksella saadaan lineaarisen tehtävän tulos.

4. Epäkeskisesti puristettu avoin ohutseinämäinen sauva

4.1 Tehtävänasettelu



Kuva 4.1: Epäkeskisesti puristettu ohutseinämäinen sauva

Tarkastellaan kuvan 4.1a ohutseinämäistä suoraa sauvaa, jonka päihin vaikuttaa epäkeskinen puristava voima P . Määritetään sauvan jännitysresultantit soveltamalla geometrisesti lineaarista teoriaa (luku 1). Tässä yksinkertaisessa kuormitustapauksessa leikkausrasitukset saadaan helposti tavanomaiseen tapaan kirjoittamalla tarkasteltavan poikkileikkauksen kohdalta katkaisun sauvan tasapainoyhtälöt. Näin nollasta eroaville jännitysresultanteille saadaan

$$N^0 = -P, M_y^0 = -Pe_z, M_z^0 = -Pe_y, \quad (4.1)$$

missä yläindeksi 0 viittaa deformoitumattomaan tilaan ja e_z ja e_y ovat puristusvoiman P epäkeskisyydet (puristusvoiman P vaikutuspisteen y - ja z -koordinaatit). Näitä jännitysresultantteja vastaavat siirtymät u_C^0 , v_V^0 ja w_V^0 otaksutaan niin pieniksi, että ne eivät vaikuta

tasapainoyhtälöihin sekä vääntökulma φ_t^0 on nolla. Tarkastellaan mitä tapahtuu, kun kuormaa P kasvatetaan ja siirtymät u_C , v_V ja w_V sekä vääntökulma φ_t alkavat kasvaa. Käytetään sellaista yksinkertaistettua tarkastelua, jossa tasapainoyhtälöt kirjoitetaan deformatiivisessa tilassa, sauvan sisäinen jännitystilan ollessa kuitenkin kaavojen (4.1) mukainen. Tämä merkitsee sitä, että jännitysresultanttien N , M_z ja M_y paikalle yhtälöissä (3.26) sijoitetaan kaavojen (4.1) mukaiset arvot, muut jännitysresultantit pannaan nolliksi sekä myös kuormat q_x , q_y , q_z ja m_t pannaan nolliksi. Näin saadaan differentiaaliyhtälöt

$$\begin{cases} EAu_C'' = 0, \\ EI_z v_V^{(4)} + EI_{yz} w_V^{(4)} + P[v'' + (z_V - e_z)\varphi_t''] = 0, \\ EI_{yz} v_V^{(4)} + EI_y w_V^{(4)} + P[w'' - (y_V - e_y)\varphi_t''] = 0, \\ EI_\omega \varphi_t^{(4)} - GI_t \varphi_t'' + P[(z_V - e_z)v'' - (y_V - e_y)w'' \\ + (r^2 + 2\beta_y e_y + 2\beta_z e_z)\varphi_t''] = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

4.2 Epäkeskisesti puristetun avoimen ohutseinämäisen sauvan differentiaaliyhtälöt

Ensimmäinen yhtälöistä (4.2) on sauvan pintakeskiöakselin aksiaalisen siirtymän differentiaaliyhtälö, joka voidaan ratkaista muista yhtälöistä riippumatta. Sen ratkaisulla ei kuitenkaan tässä yhteydessä ole suurta merkitystä. Suoritetaan vielä sellainen merkinnällinen muutos, että pintakeskiöakselin vääntökeskiön poikittaisista siirtymistä v_V ja w_V jätetään alaindeksi V pois, eli niille käytetään merkintöjä v ja w . Näin saadaan epäkeskisesti puristetun avoimen ohutseinämäisen sauvan vääntökeskiön poikittaisille siirtymille ja vääntökulmalle differentiaaliyhtälöt

$$\begin{cases} EI_z v^{(4)} + EI_{yz} w^{(4)} + P[v'' + (z_V - e_z)\varphi_t''] = 0, \\ EI_{yz} v^{(4)} + EI_y w^{(4)} + P[w'' - (y_V - e_y)\varphi_t''] = 0, \\ EI_\omega \varphi_t^{(4)} - GI_t \varphi_t'' + P[(z_V - e_z)v'' - (y_V - e_y)w'' \\ + (r^2 + 2\beta_y e_y + 2\beta_z e_z)\varphi_t''] = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

missä

$$\begin{aligned}
r^2 &= \frac{I_y + I_z}{A} + y_v^2 + z_v^2, \\
\beta_y &= \frac{I_y}{2(I_y I_z - I_{yz}^2)} \int_A y(y^2 + z^2) dA - \frac{I_{yz}}{2(I_y I_z - I_{yz}^2)} \int_A z(y^2 + z^2) dA - y_v, \\
\beta_z &= \frac{I_z}{2(I_y I_z - I_{yz}^2)} \int_A z(y^2 + z^2) dA - \frac{I_{yz}}{2(I_y I_z - I_{yz}^2)} \int_A y(y^2 + z^2) dA - z_v.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Yhtälöt (4.3) ovat kolmen differentiaaliyhtälön muodostava **homogeeninen** yhtälöryhmä. Ne ovat **epäkeskisesti** ($e_y \neq 0$, $e_z \neq 0$) **puristetun** (muuten kuormittamattoman $q_y = q_z = m_t = 0$) **avoimen ohutseinämäisen sauvan differentiaaliyhtälöt**. Näiden yhtälöiden ratkaiseminen on yleisessä tapauksessa, jossa kuormitus on epäkeskinen ($e_y \neq 0$, $e_z \neq 0$), niin sanottu **jännitystehtävä**. Jos kuormitus on keskeinen ($e_y = 0$, $e_z = 0$), ja tuenta on sopivasti valittu kysymyksessä on **nurjahdustehtävä** ja problemaa kutsutaan **vääntönurjahdukseksi**.

Vääntönurjahdustehtävässä syntyvän differentiaaliyhtälöiden ja niiden reunaehtoyhtälöiden tulee olla homogeenisia yhtälöitä. Tällöin niillä (vastaavasti kuin tavanomaisessa nurjahdustehtävässä) on nollassa eroava ratkaisu ainoastaan tietyillä kriittisillä kuorman P arvoilla P_1 , P_2 , jne. Näistä pienin on sauvan nurjahduskuorma P_{kr} . Sitä vastaava ratkaisu $v(x)$, $w(x)$ ja $\varphi_t(x)$ on sauvan nurjahdusmuoto. Havaitaan, että yleisessä tapauksessa vääntönurjahdukseen sisältyy sekä **vääntymistä** että **poikittaista siirtymistä**.

Jos y, z – koordinaatisto on poikkileikkauksen **pääjähyyskoordinaatisto**, yhtälöt (4.3) ja (4.4) yksinkertaistuvat muotoon

$$\begin{aligned}
EI_z v^{(4)} + P[v'' + (z_v - e_z)\varphi_t''] &= 0, \\
EI_y w^{(4)} + P[w'' - (y_v - e_y)\varphi_t''] &= 0, \\
EI_\omega \varphi_t^{(4)} - GI_t \varphi_t'' + P[(z_v - e_z)v'' - (y_v - e_y)w'' \\
&\quad + (r^2 + 2\beta_y e_y + 2\beta_z e_z)\varphi_t''] &= 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ja

$$\begin{aligned}
 r^2 &= \frac{I_y + I_z}{A} + y_v^2 + z_v^2, \\
 \beta_y &= \frac{1}{2I_z A} \int y(y^2 + z^2) dA - y_v, \\
 \beta_z &= \frac{1}{2I_y A} \int z(y^2 + z^2) dA - z_v.
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Tavanomaisia erikoistapauksia:

(a) Poikkileikkaus on **symmetrinen** ja **kuormitus vaikuttaa symmetriatasossa**. Jos esimerkiksi y -akseli on poikkileikkauksen symmetria-akseli $z_v = 0$, $\beta_z = 0$ ja $e_z = 0$, joten yhtälöt (4.5) saavat muodon

$$\begin{aligned}
 EI_z v^{(4)} + Pv'' &= 0, \\
 EI_y w^{(4)} + P[w'' - (y_v - e_y)\varphi_t''] &= 0, \\
 EI_\omega \varphi_t^{(4)} - GI_t \varphi_t'' + P[-(y_v - e_y)w'' + (r^2 + 2\beta_y e_y)\varphi_t''] &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

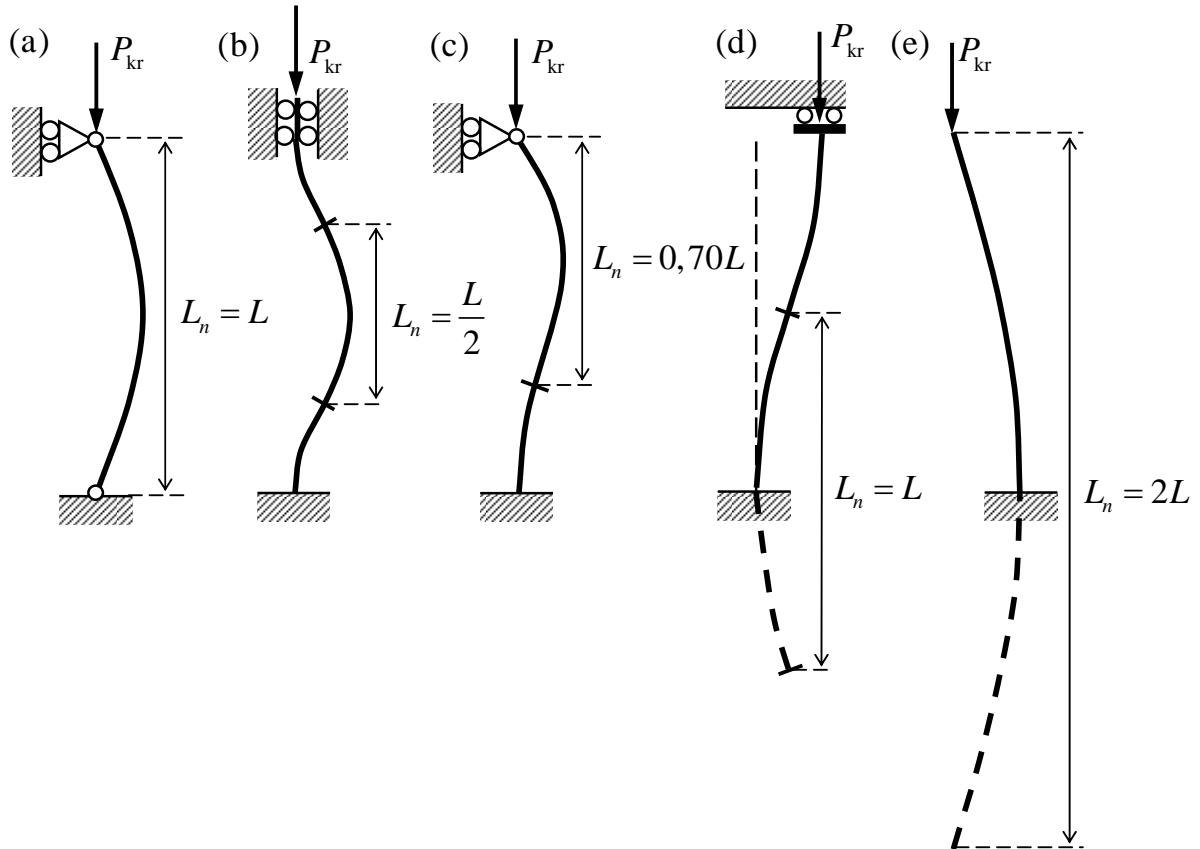
Havaitaan, että ensimmäinen yhtälö on tavanomainen Eulerin nurjahduksen differentiaaliyhtälö siirtymälle $v(x)$ ja kaksi viimeistä yhtälöä muodostavat yhtälöparin, jossa tuntemattomina ovat siirtymä $w(x)$ ja vääntökulma $\varphi_t(x)$. Tässä tapauksessa siis symmetriatasoa vastaan kohtisuorassa y -suunnassa tapahtuu tavanomainen Eulerin nurjahdus. Siinä tapauksessa, että kuormitus on epäkeskeinen eli $e_y \neq 0$ kaksi viimeistä yhtälöä reunaehtoineen johtavat yleensä jännitystehtävään. Jos taas kuormitus on keskeinen ($e_y = 0$) nämä yhtälöt reunaehtoineen muodostavat vääntönurjahdustehtävän. Nurjahdusmuotoon sisältyvät tällöin siirtymäkomponentti $w(x)$ ja vääntökulma $\varphi_t(x)$.

(b) Poikkileikkaus on **kaksoissymmetrinen** ja **kuormitus on keskeinen**. Tällöin $y_v = z_v = 0$, $\beta_y = \beta_z = 0$ ja $e_y = e_z = 0$, joten yhtälöt (4.5) saavat muodon

$$\begin{aligned}
 EI_z v^{(4)} + Pv'' &= 0, \\
 EI_z w^{(4)} + Pw'' &= 0, \\
 EI_\omega \varphi_t^{(4)} - GI_t \varphi_t'' + Pr^2 \varphi_t'' &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Havaitaan, että ensimmäinen ja toinen yhtälö ovat Eulerin nurjahduksen differentiaaliyhtälöt siirtymille $v(x)$ ja $w(x)$ sekä kolmannessa yhtälössä on tuntemattomana pelkästään vääntökulma $\varphi_1(x)$. Tässä tapauksessa siis tapahtuu erillinen tavanomainen Eulerin nurjahdus sekä x, y – että x, z – tasoissa sekä niin sanottu **puhdas vääntönurjahdus**, jossa nurjahtaminen tapahtuu puhtaasti vääntymällä.

4.3 Vääntönurjahdustehtävän ratkaisu nurjahduksen perustapauksissa



Kuva 4.2: Eri tavoin tuettujen sauvoja ja niiden nurjahduspituuksia.

Seuraavassa tarkastellaan kuinka Eulerin nurjahdustehtävälle tyypillinen nurjahduspituuteen (kuva 4.2) perustuvaa tarkastelutapaa voidaan hyödyntää vääntönurjahdustehtävän kriittisen kuorman määrittämisessä, kun kuvassa 4.2 esitetyissä yksinkertaisissa tuentatapauksissa.

Vääntönurjahduksen differentiaaliyhtälöt tapauksessa, jossa y, z –koordinaatisto on poikkileikkauksen pääjäyhyyskoordinaatisto, saadaan epäkeskisesti puristetun sauvan yhtälöistä (4.5) panemalla epäkeskisyydet e_y ja e_z nolliksi.

$$\begin{aligned}
 EI_z v^{(4)} + P v'' + P z_v \varphi_t'' &= 0, \\
 EI_y w^{(4)} + P w'' - P y_v \varphi_t'' &= 0, \\
 EI_\omega \varphi_t^{(4)} - GI_t \varphi_t'' + P z_v v'' - P y_v w'' + P r^2 \varphi_t'' &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Jos vääntökeskiö yhtyy poikkileikkauksen pintakeskiöön

$$\begin{aligned} EI_z v^{(4)} + P v'' &= 0, \\ EI_y w^{(4)} + P w'' &= 0, \\ EI_\omega \varphi_t^{(4)} - GI_t \varphi_t'' + Pr^2 \varphi_t'' &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Nämä ovat puhtaan nurjahduksen x, y - ja x, z -tasoissa sekä puhtaan vääntönurjahduksen yhtälöt. Näiden puhtaiden nurjahdustapausten kriittiset kuormat voidaan tyypillisissä käytännön tapauksissa esittää seuraavasti:

$$P_v = \frac{\pi^2 EI_z}{L_v^2}, \quad P_w = \frac{\pi^2 EI_y}{L_w^2}, \quad P_\varphi = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{L_\varphi^2} + GI_t \right), \quad (4.11)$$

missä L_v , L_w ja L_φ ovat vastaavat nurjahduspituudet.

Etsitään nyt yhtälön (4.9) ratkaisua tapauksessa, jossa taivutukseen liittyvät nurjahduspituudet L_v ja L_w sekä vääntöön liittyvä nurjahduspituus L_φ ovat kaikki yhtä suuret ja merkitään tätä nurjahduspituutta symbolilla L_n . Otetaan tuntemattomille esitykset

$$\begin{aligned} v(x) &= A_1 + B_1 x + C_1 \sin\left[\frac{\pi}{L_n}(x - x_0)\right], \\ w(x) &= A_2 + B_2 x + C_2 \sin\left[\frac{\pi}{L_n}(x - x_0)\right], \\ \varphi_t(x) &= A_3 + B_3 x + C_3 \sin\left[\frac{\pi}{L_n}(x - x_0)\right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sijoittamalla nämä differentiaaliyhtälöihin (1) saadaan

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\pi^2 EI_z}{L_n^2} - P \right) C_1 - P z_v C_3 \right] \sin\left[\frac{\pi}{L_n}(x - x_0)\right] &= 0, \\ \left[\left(\frac{\pi^2 EI_y}{L_n^2} - P \right) C_2 + P y_v C_3 \right] \sin\left[\frac{\pi}{L_n}(x - x_0)\right] &= 0, \\ \left[-P z_v C_1 + P y_v C_2 + \left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{L_n^2} + GI_t - Pr^2 \right) C_3 \right] \sin\left[\frac{\pi}{L_n}(x - x_0)\right] &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

⇒

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\pi^2 EI_z}{L_n^2} - P\right)C_1 - Pz_v C_3 &= 0, \\
 \left(\frac{\pi^2 EI_y}{L_n^2} - P\right)C_2 + Py_v C_3 &= 0, \\
 -Pz_v C_1 + Py_v C_2 + \left(\frac{\pi^2 EI_\omega}{L_n^2} + GI_t - Pr^2\right)C_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ottamalla huomioon puhtaiden nurjahdustapausten sekä puhtaan vääntönurjahdustapausten kriittisen kuormien lausekkeet (4.11) saadaan nämä yhtälöt muotoon

$$\begin{aligned}
 (P_v - P)C_1 - z_v PC_3 &= 0, \\
 (P_w - P)C_2 + y_v PC_3 &= 0, \\
 -z_v PC_1 + y_v PC_2 + (r^2 P_\varphi - r^2 P)C_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

eli matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} P_v - P & 0 & -z_v P \\ 0 & P_w - P & y_v P \\ -z_v P & y_v P & r^2 P_\varphi - r^2 P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.15}$$

Ehto tämän yhtälön ei-triviaalille ratkaisulle on

$$\begin{vmatrix} P_v - P & 0 & -z_v P \\ 0 & P_w - P & y_v P \\ -z_v P & y_v P & r^2 P_\varphi - r^2 P \end{vmatrix} = 0, \tag{4.16}$$

Kehittämällä determinanti, siitä saadaan

$$\begin{aligned}
 (P_v - P) \begin{vmatrix} P_w - P & y_v P \\ y_v P & r^2 P_\varphi - r^2 P \end{vmatrix} - z_v P \begin{vmatrix} 0 & P_w - P \\ -z_v P & y_v P \end{vmatrix} &= 0 \\
 \Rightarrow \\
 (P_v - P)[(P_w - P)(r^2 P_\varphi - r^2 P) - y_v^2 P^2] - z_v P(P_w - P)z_v P &= 0
 \end{aligned}$$

ja lopulta kolmannen asteen yhtälö kriittisen kuorman määrittämiseksi

$$\left(1 - \frac{y_v^2}{r^2} - \frac{z_v^2}{r^2}\right)P^3 - (P_v + P_w + P_\varphi - \frac{y_v^2}{r^2}P_v - \frac{z_v^2}{r^2}P_w)P^2 + (P_vP_w + P_vP_\varphi + P_wP_\varphi)P - P_vP_wP_\varphi = 0 \quad (4.17)$$

Jos tehtävä halutaan ohjelmoida, saatetaan yhtälön (4.15) ominaisarvotehtävä muotoon

$$([A] - P[B])\{C\} = 0, \quad (4.19)$$

missä

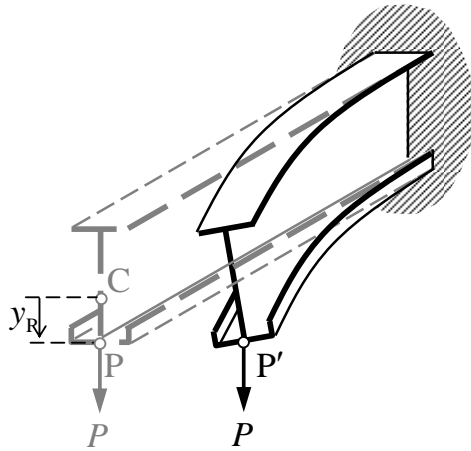
$$[A] = \begin{bmatrix} P_v & 0 & 0 \\ 0 & P_w & 0 \\ 0 & 0 & r^2P_\varphi \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_v \\ 0 & 1 & -y_v \\ z_v & -y_v & r^2 \end{bmatrix}, \quad \{C\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix}. \quad (4.20)$$

Tämä tehtävä voidaan helposti ratkaista esimerkiksi MATLAB ohjelmointiympäristössä käyttäen sen ominaisarvoratkaisijaa (EIG).

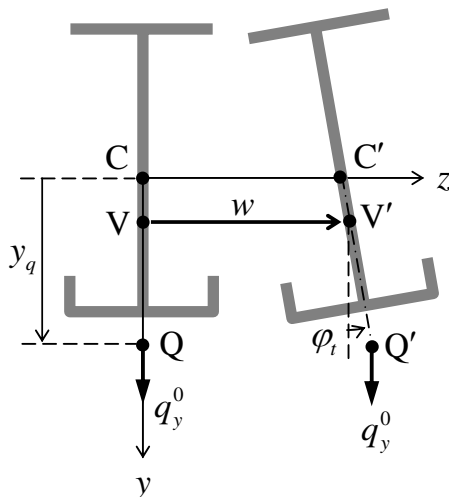
5. Kiepahdus

5.1 Tehtävänasettelu

Tarkastellaan pystytason (x, y -tason) suhteen symmetristä avointa ohutseinämäistä palkkia, jota kuormittaa symmetriatasossa vaikuttava kuormitus (pistekuormat vrt. kuva 5.1 ja/tai jakautunut kuorma vrt. kuva 5.2). Kuorman vaikutuspisteen asema (y_p tai y_q kuvissa 5.1 ja 5.2) poikkileikkauksen pintakeskiöön C nähden on tunnettu ja kuorman otaksutaan palkin deformoituessa säilyttävän suuntansa. Tämän tyyppinen palkki voi menettää stabiiliutensa **kiepahtamalla**, jota ilmiötä havainnollistaa pistekuorman kuormittaman ulokepalkin tapauksessa kuva 5.1.



Kuva 5.1: Pistekuorman P vaikutuksesta kiepahtava ulokepalkki



Kuva 5.2: Palkin poikkileikkauksen siirtyminen kiepahduksessa

5.2 Kiepahduksen differentiaaliyhtälöt

Sauvan rasiustila juuri ennen kiepahdusta käsittää palkin yksiakselisen taivutuksen jännitysresultantit eli leikkausvoiman ja taivutusmomentin, jotka voidaan määrittää tavanomaiseen tapaan. Niitä merkitään symboleilla $Q_y^0(x)$ ja $M_z^0(x)$. Käytetään sellaista yksinkertaistettua tarkastelua, jossa tasapinoyhtälöt kirjoitetaan deformatiivisessa tilassa, sauvan sisäinen jännitystilän $Q_y^0(x)$ ja $M_z^0(x)$ sekä kuormituksen $q_y^0(x)$ pysyessä kuitenkin vakiona. Tämä merkitsee sitä, että taivutusmomentin $M_y(x)$ paikalle yhtälöissä (3.26 c ja d) sijoitetaan $M_z^0(x)$ ja muut jännitysresultantit pannaan nolliksi sekä kuorman $q_y(x)$ paikalle sijoitetaan $q_y^0(x)$ ja muut kuormat pannaan nolliksi. Kun lisäksi otetaan huomioon, että kysymyksessä on x, y -tason suhteen symmetrisen palkki, jolloin $I_{yz} = 0$, saadaan aluksi yhtälöpari

$$\begin{cases} -EI_y w_V^{(4)} + (M_z^0 \varphi_t)'' = 0, \\ -EI_\omega \varphi_t^{(4)} + GI_t \varphi_t'' - (Q_y^0 w_V)' + (M_z^0 w_V')' + 2\beta_y (M_z^0 \varphi_t)' \\ \qquad \qquad \qquad - q_y^0 [w_V + \varphi_t (y_q - y_V)] = 0 \end{cases}$$

Käyttäen tulon derivointia, deformatiivisessa tilassa jännitysresultanteille voimassa olevia tasapainoyhtälöitä $Q_y^0 + q_y^0 = 0$ ja $Q_y^0 = M_z^0$ sekä jättämällä vielä vääntökeskiön poikittaisesta siirtymästä w_V alaindeksi V pois, saadaan tämä yhtälöpari muotoon

$$\begin{cases} EI_y w^{(4)} - (M_z^0 \varphi_t)'' = 0, \\ EI_\omega \varphi_t^{(4)} - GI_t \varphi_t'' - M_z^0 w'' - 2\beta_y (M_z^0 \varphi_t)' + q_y^0 (y_q - y_V) \varphi_t = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Tämä yhtälöpari muodostaa palkin **kiepahduksen differentiaaliyhtälöt**. Koska se on johdettu tarkastelemalla **avointa ohutseinämistä** palkkia, se pitää sisällään myös **suljetut ohutseinämäiset ja massiiviset** palkit, kun yhtälöissä (5.1) pannaan yksinkertaisesti $I_\omega = 0$. Kun poikkileikkaus on **kaksoissymmetrinen**, $y_V = 0$ ja $\beta_y = 0$, yhtälöt (5.1) yksinkertaistuvan hieman muotoon

$$\begin{cases} EI_y w^{(4)} - (M_z^0 \varphi_t)'' = 0, \\ EI_\omega \varphi_t^{(4)} - GI_t \varphi_t'' - M_z^0 w'' + q_y^0 y_q \varphi_t = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

5.3 Kiepahduksen differentiaaliyhtälöiden reunaehdot

Alla esitellään kiepahduksen differentiaaliyhtälöiden tavallisimpia reunaehtotyyppisiä. Näitä reunaehtoyhtälöitä tulee palkin kumpaakin päähän 4 kpl ja siten koko tehtävään yhteensä 8 kpl.

(a) Taipuminen z – akselin suunnassa sauvan päässä $x = x_0$ on estetty:

$$\boxed{w(x_0) = 0} \quad (5.3a)$$

(b) Kiertyminen y – akselin ympäri sauvan päässä $x = x_0$ on estetty:

$$\boxed{\varphi_y(x_0) \equiv w'(x_0) = 0} \quad (5.3b)$$

(c) Kiertyminen vääntökeskiöakselin ympäri sauvan päässä $x = x_0$ on estetty:

$$\boxed{\varphi_t(x_0) = 0} \quad (5.3c)$$

(d) Poikkileikkauksen käyristyminen sauvan päässä $x = x_0$ on estetty:

$$u(x_0, s) \equiv -\omega(s)\varphi_t'(x_0) = 0$$

\Rightarrow

$$\boxed{\varphi_t'(x_0) = 0} \quad (5.3d)$$

(e) Taipuminen z – akselin suunnassa sauvan päässä $x = x_0$ voi tapahtua vapaasti:

Tässä tapauksessa sauvan päähän ei vaikuta ulkoista z – akselin suuntaista voimaa. Tämän merkitsee sitä, että kaavan (3.16) mukaisen jännitysresultanttivektorin z – akselin suuntaisen komponentin W tulee hävitä. Palkin $N = 0$ tapauksessa tämä ehto on

$$W(x_0) \equiv Q_z(x_0) + (M_z \varphi_t)'(x_0) = 0$$

Tähän yhtälöön sijoitetaan $Q_z = -EI_y w''$ ja $M_z = M_0$, jolloin reunaehdoksi tulee

$$\boxed{-EI_y w'''(x_0) + (M_z^0 \varphi_t)'(x_0) = 0} \quad (5.3e)$$

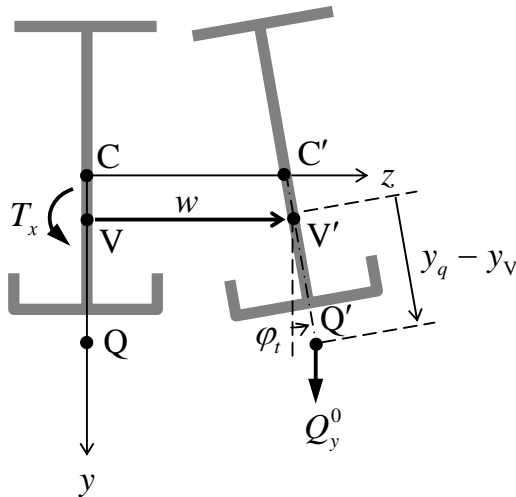
(f) Kiertyminen y – akselin ympäri sauvan päässä $x = x_0$ voi tapahtua vapaasti:

$$M_y(x_0) \equiv -EI_y w''(x_0) = 0$$

\Rightarrow

$$\boxed{w''(x_0) = 0} \quad (5.3f)$$

(g) Kiertyminen vääntökeskiöakselin ympäri sauvan päässä $x = x_0$ voi tapahtua vapaasti:



Kuva 5.3: Reunaehto, joka sallii poikkileikkauksen kiertymistä vääntökeskiöakselin ympäri tapahtua vapaasti

Kuvassa 5.3 leikkausvoiman $Q_y^0(x_0)$ momentti vääntökeskiön suhteen on yhtä suuri kuin momentti $T_x(x_0)$ eli

$$T_x(x_0) = -Q_y^0(x_0)[w(x_0) + (y_q - y_v)\varphi_t(x_0)].$$

Tarkasteltavan palkin ($N = 0, Q_y = Q_y^0, Q_z = 0, M_y = 0$ ja $M_z = M_z^0$) tapauksessa momentin T_x kaavasta (3.17) saadaan

$$T_x = M_x - wQ_y^0 + M_z^0 w' + 2\beta_y M_z^0 \varphi_t'$$

$$= -EI_\omega \varphi_t''' + GI_t \varphi_t' - wQ_y^0 + M_z^0 w' + 2\beta_y M_z^0 \varphi_t'$$

joten reunaehtoyhtälöksi tulee

$$\boxed{-EI_\omega \varphi_t'''(x_0) + GI_t \varphi_t'(x_0) + M_z^0 w'(x_0) + 2\beta_y M_z^0 \varphi_t'(x_0) + Q_y^0(x_0)(y_q - y_v) \varphi_t(x_0) = 0}$$
(5.3g)

(h) Poikkileikkauksen käyristyminen sauvan päässä $x = x_0$ voi tapahtua vapaasti:

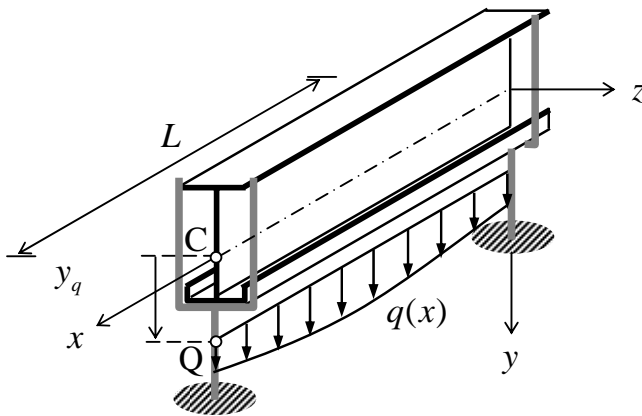
$$B(x_0) \equiv -EI_\omega \varphi_t''(x_0) = 0$$

⇒

$$\boxed{\varphi_t''(x_0) = 0}$$
(5.3h)

5.4 Päistään haarukkalaakeroitu palkki

Käytännössä hyvin yleinen tapaus on kaksitukinen päistään haarukkalaakeroitu palkki (kuva 5.4). Tässä tapauksessa kiepahduksen yhtälöitä voidaan yksinkertaistaa seuraavassa esitettävällä tavalla.



Kuva 5.4: Kaksitukinen päistään haarukkalaakeroitu palkki

Haarukkalaakeroidulla tuella taipuminen z -suunnassa on estetty, kiertyminen y -akselin (suuntaisen akselin) ympäri saa tapahtua vapaasti, kiertyminen vääntökeskiöakselin ympäri on estetty ja käyristyminen saa tapahtua vapaasti. Näin tehtävän reunaehdot ovat

$$\begin{aligned}
 w(0) = 0, M_y(0) = 0, \varphi_t(0) = 0, B(0) = 0, \\
 w(L) = 0, M_y(L) = 0, \varphi_t(L) = 0, B(L) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Integroidaan yhtälö (5.1a) puolittain kahdesti, jolloin saadaan

$$EI_y w'' - M_z^0 \varphi_t = Ax + B,
 \tag{5.5}$$

missä A ja B ovat integrointivakiot. Kirjoittamalla nämä yhtälöt sauvan päissä ja huomioimalla reunaehdot saadaan

$$\left. \begin{aligned}
 \overbrace{EI_y w''(0)}^{-M_y(0)=0} - M_z^0 \overbrace{\varphi_t(0)}^0 &= A \cdot 0 + B, \\
 \overbrace{EI_y w''(L)}^{-M_y(L)=0} - M_z^0 \overbrace{\varphi_t(L)}^0 &= A \cdot L + B,
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 0, B = 0,$$

joten yhtälöstä (5.5) seuraa

$$w'' = \frac{M_z^0}{EI_y} \varphi_t.
 \tag{5.6}$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (5.1b) saadaan

$$EI_\omega \varphi_t^{(4)} - GI_t \varphi_t'' - \frac{(M_z^0)^2}{EI_y} \varphi_t - 2\beta_y (M_z^0 \varphi_t') + q_y^0 (y_q - y_v) \varphi_t = 0
 \tag{5.7}$$

ja edelleen käyttäen tulon derivointia ja yhteyttä $Q_y^0 = M_z^{0'}$ edelleen differentiaaliyhtälö

$$\boxed{EI_\omega \varphi_t^{(4)} - (GI_t + 2\beta_y M_z^0) \varphi_t'' - 2\beta_y Q_y^0 \varphi_t' - \left[\frac{(M_z^0)^2}{EI_y} - q_y^0 (y_q - y_v) \right] \varphi_t = 0.}
 \tag{5.8}$$

Differentiaaliyhtälöparin (5.1) sijasta saatiin tässä reunaehtotapauksessa yksi **neljännen kertaluvun** homogeeninen differentiaaliyhtälö vääntökulmalle $\varphi_t(x)$. Tässä tapauksessa reunaehtoja sauvan kummassakin päässä on kaksi ja reunaehtotyypit ovat kaavojen (5.3c) ja (5.3h) mukaiset.

Jos kysymyksessä on massiivipoikkileikkaus, kotelopoikkileikkaus tai poikkileikkaus, jonka sektoriaalinen koordinaatti ω muuten on nolla, $I_\omega = 0$ ja differentiaaliyhtälö (5.7) saa muodon

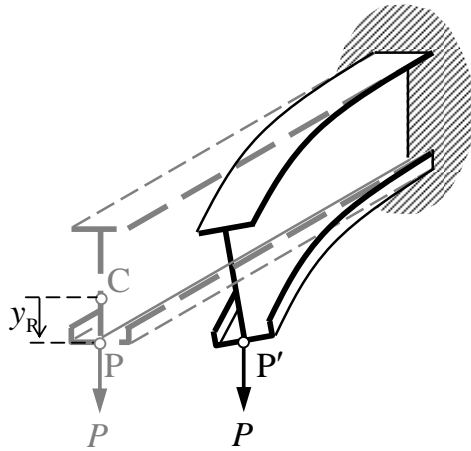
$$\boxed{(GI_t + 2\beta_y M_z^0)\varphi_t'' + 2\beta_y Q_y^0 \varphi_t' + \left[\frac{(M_z^0)^2}{EI_y} - q_y^0(y_q - y_v)\right]\varphi_t = 0} \quad (5.9)$$

Tämä on **toisen kertaluvun** homogeeninen differentiaaliyhtälö. Tässä tapauksessa reunaehtoja sauvan kummassakin päässä on yksi kappale ja reunaehtotyyppi on kaavan (5.3c) mukainen.

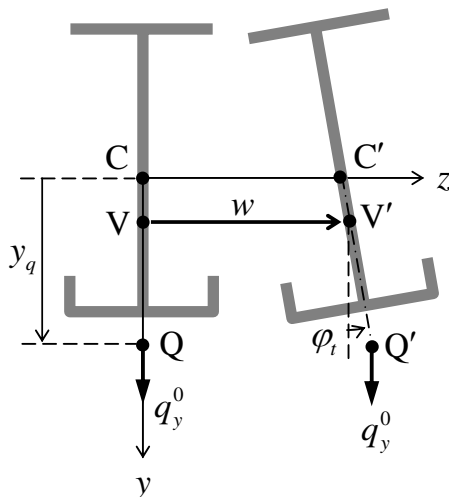
5. Kiepahdus

5.1 Tehtävänasettelu

Tarkastellaan pystytason (x, y -tason) suhteen symmetristä avointa ohutseinämäistä palkkia, jota kuormittaa symmetriatasossa vaikuttava kuormitus (pistekuormat vrt. kuva 5.1 ja/tai jakautunut kuorma vrt. kuva 5.2). Kuorman vaikutuspisteen asema (y_p tai y_q kuvissa 5.1 ja 5.2) poikkileikkauksen pintakeskiöön C nähden on tunnettu ja kuorman otaksutaan palkin deformoituessa säilyttävän suuntansa. Tämän tyyppinen palkki voi menettää stabiiliutensa **kiepahtamalla**, jota ilmiötä havainnollistaa pistekuorman kuormittaman ulokepalkin tapauksessa kuva 5.1.



Kuva 5.1: Pistekuorman P vaikutuksesta kiepahtava ulokepalkki



Kuva 5.2: Palkin poikkileikkauksen siirtyminen kiepahduksessa

5.2 Kiepahduksen differentiaaliyhtälöt

Sauvan rasiustila juuri ennen kiepahdusta käsittää palkin yksiakselisen taivutuksen jännitysresultantit eli leikkausvoiman ja taivutusmomentin, jotka voidaan määrittää tavanomaiseen tapaan. Niitä merkitään symboleilla $Q_y^0(x)$ ja $M_z^0(x)$. Käytetään sellaista yksinkertaistettua tarkastelua, jossa tasapinoyhtälöt kirjoitetaan deformatiivisessa tilassa, sauvan sisäinen jännitystilän $Q_y^0(x)$ ja $M_z^0(x)$ sekä kuormituksen $q_y^0(x)$ pysyessä kuitenkin vakiona. Tämä merkitsee sitä, että taivutusmomentin $M_y(x)$ paikalle yhtälöissä (3.26 c ja d) sijoitetaan $M_z^0(x)$ ja muut jännitysresultantit pannaan nolliksi sekä kuorman $q_y(x)$ paikalle sijoitetaan $q_y^0(x)$ ja muut kuormat pannaan nolliksi. Kun lisäksi otetaan huomioon, että kysymyksessä on x, y -tason suhteen symmetrisen palkki, jolloin $I_{yz} = 0$, saadaan aluksi yhtälöpari

$$\begin{cases} -EI_y w_V^{(4)} + (M_z^0 \varphi_t)'' = 0, \\ -EI_\omega \varphi_t^{(4)} + GI_t \varphi_t'' - (Q_y^0 w_V)' + (M_z^0 w_V')' + 2\beta_y (M_z^0 \varphi_t)' \\ \quad - q_y^0 [w_V + \varphi_t (y_q - y_V)] = 0 \end{cases}$$

Käyttäen tulon derivointia, deformatiivisessa tilassa jännitysresultanteille voimassa olevia tasapainoyhtälöitä $Q_y^0 + q_y^0 = 0$ ja $Q_y^0 = M_z^0$ sekä jättämällä vielä vääntökeskiön poikittaisesta siirtymästä w_V alaindeksi V pois, saadaan tämä yhtälöpari muotoon

$$\begin{cases} EI_y w^{(4)} - (M_z^0 \varphi_t)'' = 0, \\ EI_\omega \varphi_t^{(4)} - GI_t \varphi_t'' - M_z^0 w'' - 2\beta_y (M_z^0 \varphi_t)' + q_y^0 (y_q - y_V) \varphi_t = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Tämä yhtälöpari muodostaa palkin **kiepahduksen differentiaaliyhtälöt**. Koska se on johdettu tarkastelemalla **avointa ohutseinämistä** palkkia, se pitää sisällään myös **suljetut ohutseinämäiset ja massiiviset** palkit, kun yhtälöissä (5.1) pannaan yksinkertaisesti $I_\omega = 0$. Kun poikkileikkaus on **kaksoissymmetrinen**, $y_V = 0$ ja $\beta_y = 0$, yhtälöt (5.1) yksinkertaistuvan hieman muotoon

$$\begin{cases} EI_y w^{(4)} - (M_z^0 \varphi_t)'' = 0, \\ EI_\omega \varphi_t^{(4)} - GI_t \varphi_t'' - M_z^0 w'' + q_y^0 y_q \varphi_t = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

5.3 Kiepahduksen differentiaaliyhtälöiden reunaehdot

Alla esitellään kiepahduksen differentiaaliyhtälöiden tavallisimpia reunaehtotyyppisiä. Näitä reunaehtoyhtälöitä tulee palkin kumpaakin päähän 4 kpl ja siten koko tehtävään yhteensä 8 kpl.

(a) Taipuminen z – akselin suunnassa sauvan päässä $x = x_0$ on estetty:

$$\boxed{w(x_0) = 0} \quad (5.3a)$$

(b) Kiertyminen y – akselin ympäri sauvan päässä $x = x_0$ on estetty:

$$\boxed{\varphi_y(x_0) \equiv w'(x_0) = 0} \quad (5.3b)$$

(c) Kiertyminen vääntökeskiöakselin ympäri sauvan päässä $x = x_0$ on estetty:

$$\boxed{\varphi_t(x_0) = 0} \quad (5.3c)$$

(d) Poikkileikkauksen käyristyminen sauvan päässä $x = x_0$ on estetty:

$$u(x_0, s) \equiv -\omega(s)\varphi_t'(x_0) = 0$$

\Rightarrow

$$\boxed{\varphi_t'(x_0) = 0} \quad (5.3d)$$

(e) Taipuminen z – akselin suunnassa sauvan päässä $x = x_0$ voi tapahtua vapaasti:

Tässä tapauksessa sauvan päähän ei vaikuta ulkoista z – akselin suuntaista voimaa. Tämän merkitsee sitä, että kaavan (3.16) mukaisen jännitysresultanttivektorin z – akselin suuntaisen komponentin W tulee hävitä. Palkin $N = 0$ tapauksessa tämä ehto on

$$W(x_0) \equiv Q_z(x_0) + (M_z \varphi_t)'(x_0) = 0$$

Tähän yhtälöön sijoitetaan $Q_z = -EI_y w''$ ja $M_z = M_0$, jolloin reunaehdoksi tulee

$$\boxed{-EI_y w'''(x_0) + (M_z^0 \varphi_t)'(x_0) = 0} \quad (5.3e)$$

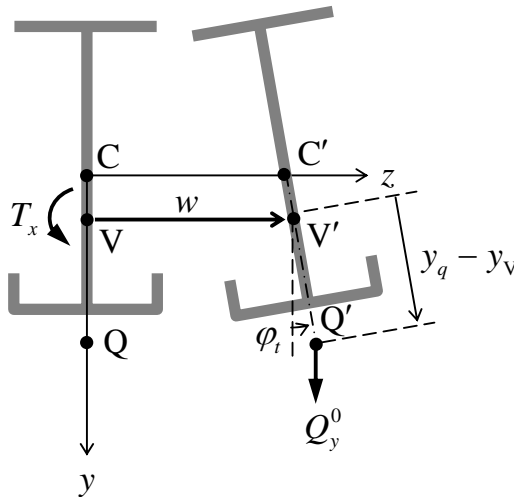
(f) Kiertyminen y – akselin ympäri sauvan päässä $x = x_0$ voi tapahtua vapaasti:

$$M_y(x_0) \equiv -EI_y w''(x_0) = 0$$

\Rightarrow

$$\boxed{w''(x_0) = 0} \quad (5.3f)$$

(g) Kiertyminen vääntökeskiöakselin ympäri sauvan päässä $x = x_0$ voi tapahtua vapaasti:



Kuva 5.3: Reunaehto, joka sallii poikkileikkauksen kiertymisen vääntökeskiöakselin ympäri tapahtua vapaasti

Kuvassa 5.3 leikkausvoiman $Q_y^0(x_0)$ momentti vääntökeskiön suhteen on yhtä suuri kuin momentti $T_x(x_0)$ eli

$$T_x(x_0) = -Q_y^0(x_0)[w(x_0) + (y_q - y_v)\varphi_t(x_0)].$$

Tarkasteltavan palkin ($N = 0, Q_y = Q_y^0, Q_z = 0, M_y = 0$ ja $M_z = M_z^0$) tapauksessa momentin T_x kaavasta (3.17) saadaan

$$T_x = M_x - wQ_y^0 + M_z^0 w' + 2\beta_y M_z^0 \varphi_t'$$

$$= -EI_\omega \varphi_t''' + GI_t \varphi_t' - wQ_y^0 + M_z^0 w' + 2\beta_y M_z^0 \varphi_t'$$

joten reunaehtoyhtälöksi tulee

$$\boxed{-EI_\omega \varphi_t'''(x_0) + GI_t \varphi_t'(x_0) + M_z^0 w'(x_0) + 2\beta_y M_z^0 \varphi_t'(x_0) + Q_y^0(x_0)(y_q - y_v) \varphi_t(x_0) = 0}$$
(5.3g)

(h) Poikkileikkauksen käyristyminen sauvan päässä $x = x_0$ voi tapahtua vapaasti:

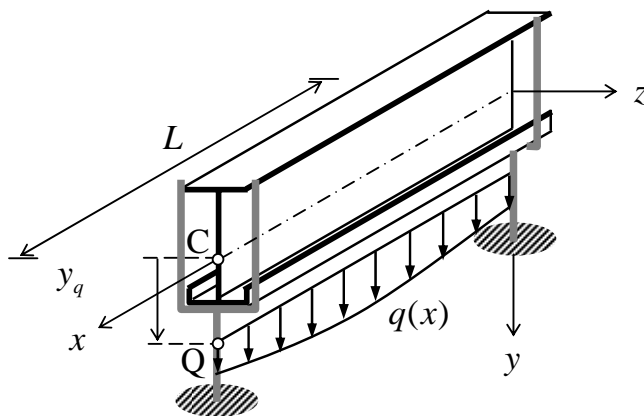
$$B(x_0) \equiv -EI_\omega \varphi_t''(x_0) = 0$$

⇒

$$\boxed{\varphi_t''(x_0) = 0}$$
(5.3h)

5.4 Päistään haarukkalaakeroitu palkki

Käytännössä hyvin yleinen tapaus on kaksitukinen päistään haarukkalaakeroitu palkki (kuva 5.4). Tässä tapauksessa kiepahduksen yhtälöitä voidaan yksinkertaistaa seuraavassa esitettävällä tavalla.



Kuva 5.4: Kaksitukinen päistään haarukkalaakeroitu palkki

Haarukkalaakeroidulla tuella taipuminen z -suunnassa on estetty, kiertyminen y -akselin (suuntaisen akselin) ympäri saa tapahtua vapaasti, kiertyminen vääntökeskiöakselin ympäri on estetty ja käyristyminen saa tapahtua vapaasti. Näin tehtävän reunaehdot ovat

$$\begin{aligned}
 w(0) = 0, M_y(0) = 0, \varphi_t(0) = 0, B(0) = 0, \\
 w(L) = 0, M_y(L) = 0, \varphi_t(L) = 0, B(L) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Integroidaan yhtälö (5.1a) puolittain kahdesti, jolloin saadaan

$$EI_y w'' - M_z^0 \varphi_t = Ax + B,
 \tag{5.5}$$

missä A ja B ovat integrointivakiot. Kirjoittamalla nämä yhtälöt sauvan päissä ja huomioimalla reunaehdot saadaan

$$\left. \begin{aligned}
 \overbrace{EI_y w''(0)}^{-M_y(0)=0} - M_z^0 \overbrace{\varphi_t(0)}^0 &= A \cdot 0 + B, \\
 \overbrace{EI_y w''(L)}^{-M_y(L)=0} - M_z^0 \overbrace{\varphi_t(L)}^0 &= A \cdot L + B,
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 0, B = 0,$$

joten yhtälöstä (5.5) seuraa

$$w'' = \frac{M_z^0}{EI_y} \varphi_t.
 \tag{5.6}$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (5.1b) saadaan

$$EI_\omega \varphi_t^{(4)} - GI_t \varphi_t'' - \frac{(M_z^0)^2}{EI_y} \varphi_t - 2\beta_y (M_z^0 \varphi_t)' + q_y^0 (y_q - y_v) \varphi_t = 0
 \tag{5.7}$$

ja edelleen käyttäen tulon derivointia ja yhteyttä $Q_y^0 = M_z^{0'}$ edelleen differentiaaliyhtälö

$$\boxed{EI_\omega \varphi_t^{(4)} - (GI_t + 2\beta_y M_z^0) \varphi_t'' - 2\beta_y Q_y^0 \varphi_t' - \left[\frac{(M_z^0)^2}{EI_y} - q_y^0 (y_q - y_v) \right] \varphi_t = 0.}
 \tag{5.8}$$

Differentiaaliyhtälöparin (5.1) sijasta saatiin tässä reunaehtotapauksessa yksi **neljännen kertaluvun** homogeeninen differentiaaliyhtälö vääntökulmalle $\varphi_t(x)$. Tässä tapauksessa reunaehtoja sauvan kummassakin päässä on kaksi ja reunaehtotyypit ovat kaavojen (5.3c) ja (5.3h) mukaiset.

Jos kysymyksessä on massiivipoikkileikkaus, kotelopoikkileikkaus tai poikkileikkaus, jonka sektoriaalinen koordinaatti ω muuten on nolla, $I_\omega = 0$ ja differentiaaliyhtälö (5.7) saa muodon

$$\boxed{(GI_t + 2\beta_y M_z^0)\varphi_t'' + 2\beta_y Q_y^0 \varphi_t' + \left[\frac{(M_z^0)^2}{EI_y} - q_y^0(y_q - y_v)\right]\varphi_t = 0} \quad (5.9)$$

Tämä on **toisen kertaluvun** homogeeninen differentiaaliyhtälö. Tässä tapauksessa reunaehtoja sauvan kummassakin päässä on yksi kappale ja reunaehtotyyppi on kaavan (5.3c) mukainen.

Liite A: Avoimen ohutseinämäisen poikkileikkauksen poikkileikkaussuureet

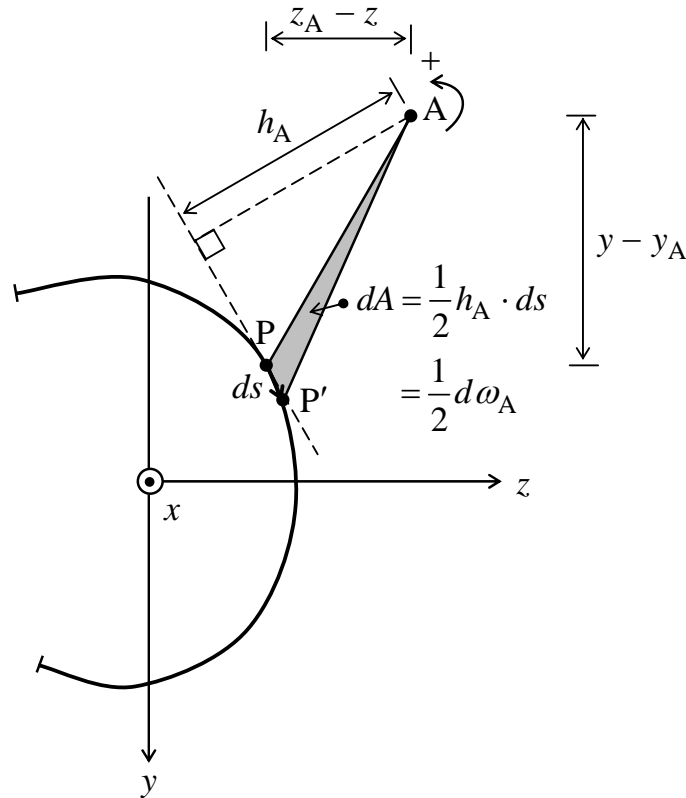
A1 Sektoriaalinen koordinaatti

A1.1 Sektoriaalisen koodinaatin määrittely

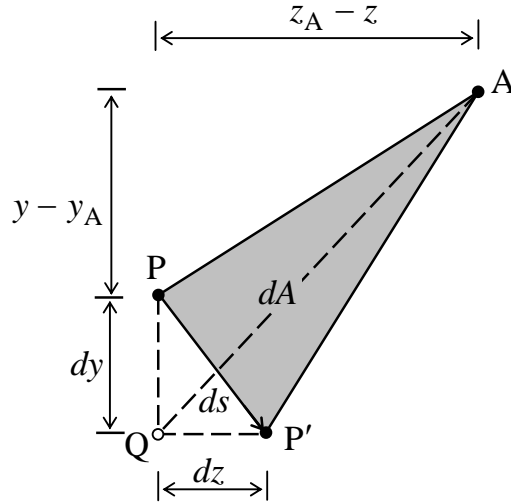
Tarkastellaan tasokäyrään y, z -tasossa. Käyrän **sektoriaalisen koordinaatin** ω_A , jonka napa on piste A: (y_A, z_A) , **differentiaalin muutos** määritellään kaavalla

$$d\omega_A = \pm h_A ds, \quad (\text{A1.1})$$

missä (vrt. kuva A.1) $h_A(s)$ on käyrän tarkasteltavaan pisteeseen P asetetun tangentin etäisyys napapistestä A. Muutos on positiivinen, jos koordinaatin s muutosta ds vastaava kiertosuunta napapisteen ympäri on positiivinen (vrt. kuva A.1), muussa tapauksessa se on negatiivinen.



Kuva A.1: Sektoriaalisen koordinaatin differentiaali



Kuva A.2: Pinta-ala dA

Kuvan A.1 perusteella nähdään toisaalta, että

$$d\omega_A = 2dA, \quad (\text{A1.2})$$

missä dA on napapisteen A sekä jana-alkion ds määrittelemä differentiaalinen pinta-ala¹. Kuvan A.2 perusteella sille saadaan

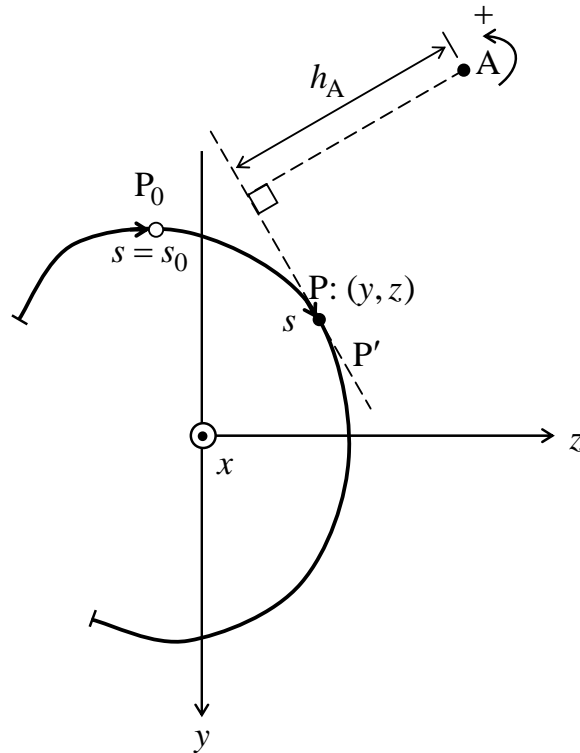
$$\begin{aligned} dA &= \Delta(\text{PQA}) + \Delta(\text{QP'A}) - \Delta(\text{QP'P}) \\ &= \frac{1}{2}dy(z_A - z) + \frac{1}{2}dz(y - y_A + dy) - \frac{1}{2}dzdy \\ &= \frac{1}{2}[-(z - z_A)dy + (y - y_A)dz]. \end{aligned} \quad (\text{A1.3})$$

Sektoriaaliseen koordinaattiin liitetään **napa** A : (y_A, z_A) sekä (käyrällä sijaitseva) ns. **nollapiste** P_0 (vrt. kuva A.3). Niiden avulla **sektoriaalinen koodinaatti** $\omega_A(s)$ käyrän yleisessä pisteessä P määritellään seuraavasti kaavalla

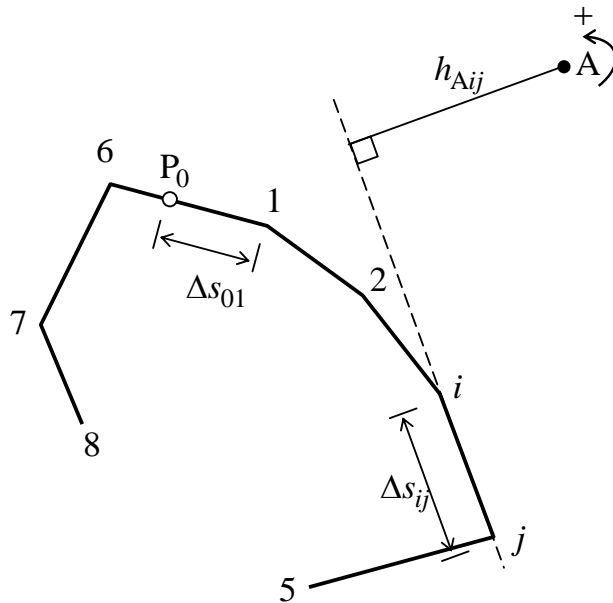
$$\boxed{\omega_A = \int_{P_0}^P d\omega_A = \int_{P_0}^P \pm h_A(s) ds.} \quad (\text{A1.4})$$

¹ Pinta-ala dA määritellään tässä suureena, jolla on merkki, joka vastaa kaavan (A1.1) merkkisääntöä.

Sektoriaalisen koordinaatin arvo nollassa pisteessä P_0 on nolla. Kaavojen (A1.2) ja (A1.3) avulla sektoriaaliselle koordinaatille saadaan lauseke



Kuva A.3: Sektoriaalisen koordinaatin määrittelyyn liittyvät suureet



Kuva A.4 Suorista osista koostuvan poikkileikkauksen sektoriaalisen koordinaatin määrittäminen

$$\omega_A = \int_{P_0}^P [-(z - z_A)dy + (y - y_A)dz]. \quad (\text{A1.5})$$

A1.2 Suorista osista koostuvan poikkileikkauksen sektoriaalinen koodinaatti

Käytännössä ohuet poikkileikkaukset muodostuvat usein **suorista osista**. Tarkastellaan kuvan A.4 murtoviivaa. Jos sektoriaalisen koodinaatin arvo ω_{Ai} nurkkapisteessä i tunnetaan, saadaan sen arvo etenemissuuntaan seuraavassa nurkkapisteessä j kaavalla

$$\omega_{Aj} = \omega_{Ai} \pm h_{Aij} \Delta s_{ij}. \quad (\text{A1.6})$$

Jos etenemissuunta kiertää napapistettä kuvan positiiviseen suuntaan, tulee kaavaan $+$ -merkki, päinvastaisessa tapauksessa tulee $-$ -merkki. Laskeminen aloitetaan nollapisteestä, jossa $\omega_{A0} = 0$. Esimerkiksi kuvan A.4 tapauksessa voidaan lähtien nollapisteestä laskea ensin sektoriaalisen koordinaatin arvot pisteissä 1, 2, ..., 5 ja sitten lähtien uudelleen nollapisteestä laskea sen arvot pisteissä 6, 7 ja 8.

Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää kaavaa

$$\omega_{Aj} = \omega_{Ai} - (z_j - z_A) \Delta y_{ij} + (y_j - y_A) \Delta z_{ij}, \quad (\text{A1.7})$$

missä

$$\Delta y_{ij} = y_j - y_i, \quad \Delta z_{ij} = z_j - z_i. \quad (\text{A1.8})$$

Jälkimmäistä kaavaa (A1.7) käytettäessä ei tarvitse huolehtia merkistä. Kun sektoriaalisen koordinaatin arvot nurkkapisteissä on määritetty, on sen jakautuma koko poikkileikkauksen alueella tunnettu, koska sektoriaalinen koordinaatti **jakautuu poikkileikkauksen suorilla osilla lineaarisesti**.

A1.3 Kaareva poikkileikkaus

Jos poikkileikkauksen tai sen osan keskiviiva on **kaareva**, joudutaan käyttämään kaavaa (A1.4) tai (A1.5), jossa viivaintegrointi suoritetaan joko analyttisesti tai numeerisesti. Numeerista integrointia tarkastellaan

kohdassa A3. Käytännön tarpeita varten riittävän tarkkoja tuloksia saadaan kuitenkin kuvaamalla keskiviivan kaarevaa osaa riittävän tiheällä murtoviivalla ja soveltamalla kaavaa (A1.7). Tällainen laskelma on melko työläs, mutta tehtävä on helppo ohjelmoida vaikkapa MATLAB-ympäristössä.

A1.4 Haarautuva poikkileikkaus

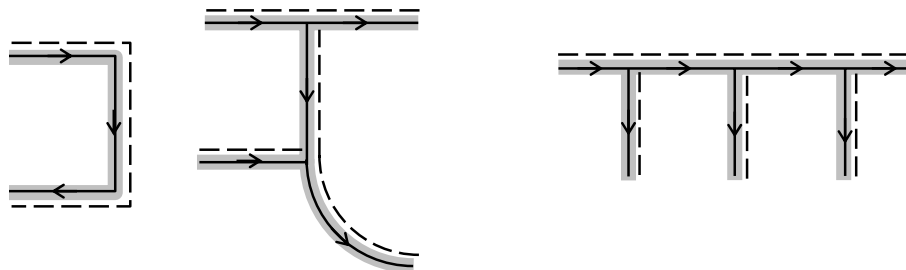
Myös tapauksessa, jossa poikkileikkaus on **haarautuva** (vrt. kuva A.5), kaavat (A1.6) tai (A1.7) ovat edelleen käyttökelpoisia.



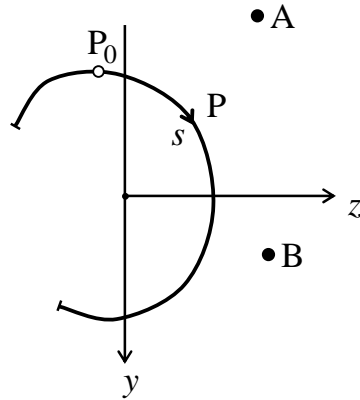
Kuva A.5: Haarautuvia poikkileikkauksia

A1.5 Sektoriaalisen koordinaatin esittäminen

Sektoriaalisen koodinaatin jakautuma samoin kuin avoimen ohuiden poikkileikkausten jännitysjakautumat on tarkoituksen mukaista esittää graafisesti vastaavaan tapaan kuin esimerkiksi tasosauvarakenteiden jännitysresultantit. Valitaan poikkileikkauksen kullekin osalle **positiivinen suunta** ja (esimerkiksi) siihen nähden **vasemmalle** profiilin **positiivien reuna** (vrt. kuva A.6). Kuvaajien ordinaatat piirretään kohtisuorina etäisyyksinä profiilin keskiviivasta siten, että positiivien suunta on positiiviseen reunaan (katkoviivaan) päin.



Kuva A.6: Poikkileikkauksen osien positiiviset suunnat (nuoli) ja positiiviset reunat (katkoviiva)



Kuva A.7: Sektoriaalisen koordinaatin napapisteet A ja B

A1.6 Sektoriaalisen koodinaatin napapisteen vaihto

Tarkastellaan tilannetta, jossa sektoriaalinen koordinaatti $\omega_A(s)$ navan A suhteen tunnetaan, ja halutaan määrittää sektoriaalinen koordinaatti $\omega_B(s)$ navan B suhteen (vrt. kuva A.7). Muokkaamalla $\omega_B(s)$:n lauseketta saadaan

$$\begin{aligned}
 \omega_B &= \int_{P_0}^P [-(z - z_B)dy + (y - y_B)dz] \\
 &= \int_{P_0}^P [-(z - z_A + z_A - z_B)dy + (y - y_A + y_A - y_B)dz] \\
 &= \int_{P_0}^P [-(z - z_A)dy + (y - y_A)dz] + \int_{P_0}^P [-(z_A - z_B)dy + (y_A - y_B)dz] \\
 &= \omega_A - (z_A - z_B) \int_{P_0}^P dy + (y_A - y_B) \int_{P_0}^P dz \\
 &= \omega_A - (z_A - z_B)(y - y_0) + (y_A - y_B)(z - z_0).
 \end{aligned}$$

Näin saatiin kaava

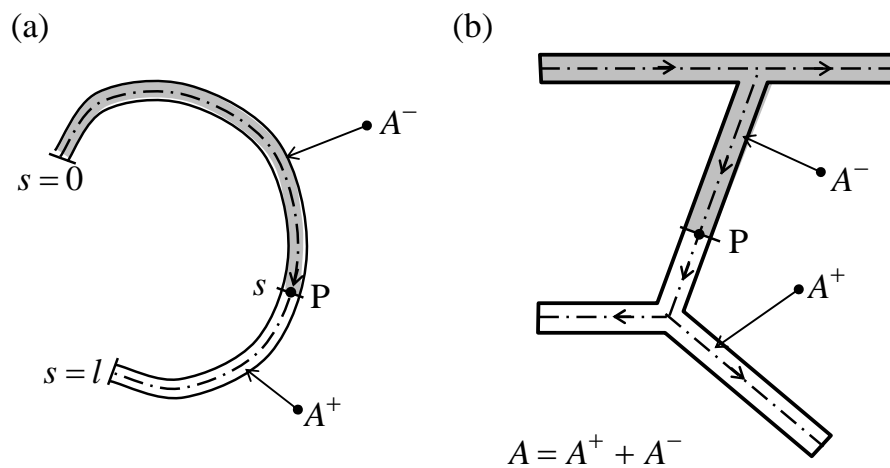
$$\boxed{\omega_B = \omega_A + (z_B - z_A)(y - y_0) - (y_B - y_A)(z - z_0)}, \quad (A1.9)$$

jota voidaan käyttää, kun halutaan vaihtaa sektoriaalisen koodinaatin napapiste. Sitä kutsutaan tässä **napapisteen vaihtokaavaksi**.

A2 Avointen ohuiden profiilien poikkileikkaussuureet

A2.1 Merkintöjä

Poikkileikkauksen pinnalle ja vastaavalle pinta-alalle käytetään merkintää A . Tarkasteltavaan poikkileikkauksen keskiviivalla sijaitsevaan yleiseen pisteeseen P , liitetään ns. **osapoikkipinta** $A^+(s)$, jolla ymmärretään sitä poikkipinnan osaa, joka jää tarkasteltavasta pisteestä P katsottuna positiivisen suunnan osoittamalle puolelle. Vastaavasti pisteestä P katsottuna negatiivisen suunnan puolelle jäävälle pinnan osalle käytetään merkintää $A^-(s)$ (vrt. kuva A.8).



Kuva A.8: Osapoikkipintojen määrittely: (a) haarautumaton ja (b) haarautuva poikkileikkaus

Olkoon $f(s)$ poikkipinnalla määritelty koordinaatista s riippuva funktio. Sen integraalille **koko poikkipinnan** A yli käytetään merkintöjä

$$\int_A f dA = \int_0^l f(s)t(s) ds = \int f(s)t(s) ds \quad (\text{A2.1a})$$

sen integraalille **osapoikkipinnan** $A^+(s)$ yli käytetään merkintöjä

$$\int_{A^+} f dA = \int_s^l f(s)t(s) ds = \int_+ f(s)t(s) ds \quad (\text{A2.1b})$$

ja sen integraalille **osapoikkipinnan** A^- yli merkintöjä

$$\int_{A^-} f dA = \int_0^s f(s)t(s)ds = \int_- f(s)t(s)ds. \quad (\text{A2.1c})$$

Kaavoissa (A2.1) $t(s)$ on poikkileikkauksen paksuus. Keskimmäiset lausekkeet näissä kaavoissa liittyvät haarautumattomaan poikkipintaan (kuva A.8 a), missä koordinaatti s on valittu lähtemään poikkileikkauksen keskiviivan toisesta päästä, jossa sen arvo on $s = 0$. Tällöin sen arvo toisessa päässä on $s = l$, missä l on profiilin keskiviivan pituus. Integrointi oikean puoleisessa lausekkeessa (A2.1a) tapahtuu yli koko poikkipinnan A keskiviivan sekä oikean puoleisissa lausekkeessa (A2.1b) ja (A2.1c) yli poikkipinnan osan A^+ tai A^- keskiviivan. Kirjallisuudessa haarautuvan poikkipinnan keskiviivan yli tapahtuvalle integraalille käytetään usein merkintää

$$\oint f(s)t(s)ds \quad (\text{A2.2})$$

Tässä ei kuitenkaan tekstinkäsittelyllisistä syistä tällaista merkintätapaa käytetä.

A2.2 Taivutukseen liittyvät poikkileikkaussuureet

Taivutukseen liittyvät tavanomaiset poikkileikkaussuureet esiteltiin jo rakenteiden lujuusopin kurssissa. Siellä niitä käytettiin lähinnä massiivisten poikkileikkausten yhteydessä. Ohutseinämäisille poikkileikkauksille niiden määrittely on hyvin samanlainen. Johtuen poikkipinnan pienestä paksuudesta, niiden määrittämistä voidaan kuitenkin hieman yksinkertaistaa.

Taivutukseen liittyvät tavanomaiset **koko poikkipinnan poikkileikkaussuureet** ovat **pinta-ala**

$$A = \int_A dA = \int_0^l t(s)ds = \int t(s)ds, \quad (\text{A2.3})$$

staattiset momentit eli lineaariset momentit y – ja z – akselien suhteen

$$S_y = \int_A z dA = \int_0^l z(s)t(s) ds = \int z(s)t(s) ds, \quad (\text{A2.4})$$

$$S_z = \int_A y dA = \int_0^l y(s)t(s) ds = \int y(s)t(s) ds,$$

jäyhyysmomentit eli neliömomentit² y – ja z – akselien suhteen

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_0^l z(s)^2 t(s) ds = \int z(s)^2 t(s) ds, \quad (\text{A2.5})$$

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_0^l y(s)^2 t(s) ds = \int y(s)^2 t(s) ds$$

sekä **tulomomentti**

$$I_{yz} = \int_A yz dA = \int_0^l y(s)z(s)t(s) ds = \int y(s)z(s)t(s) ds. \quad (\text{A2.6})$$

Taivutukseen liittyvät **osapoikkipinnan poikkileikkaussuureet** ovat osapoikkipinnan **pinta-ala**

$$A(s) = \int_{A^+} dA = \int_s^l t(s) ds = \int_+ t(s) ds \quad (\text{A2.7})$$

ja osapoikkipinnan **staattiset momentit**

$$S_y(s) = \int_{A^+} z dA = \int_s^l z(s)t(s) ds = \int_+ z(s)t(s) ds, \quad (\text{A2.8})$$

$$S_z(s) = \int_{A^+} y dA = \int_s^l y(s)t(s) ds = \int_+ y(s)t(s) ds.$$

² Poikkileikkaussuureille käytetään tässä perinteisiä nimityksiä staattinen momentti, jäyhyysmomentti ja tulomomentti. Nimitykset lineaarinen momentti ja neliömomentti kahdelle edelliselle ovat myös käytössä.

Näissä kaavoissa integrointi tapahtuu yli osapoikkipinnan A^+ keskiviivan. Kaavasta (A2.8) saadaan

$$S_y(s) = \int_s^l z(s)t(s)ds = \overbrace{\int_0^l z(s)t(s)ds}^{S_y} - \int_0^s z(s)t(s)ds = S_y - \int_0^s z(s)t(s)ds.$$

Jos nyt koordinaatisto on asetettu poikkileikkauksen pintakeskiöön on koko poikkileikkauksen staattinen momentti $S_y = 0$. Näin saadaan tulos

$$S_y(s) = \int_s^l z(s)t(s)ds = -\int_0^s z(s)t(s)ds.$$

Tällä periaatteella saadaan osapoikkipinnan staattisille momenteille vaihtoehdotseiset lausekkeet

$$\begin{aligned} S_y(s) &= -\int_{A^-} z dA = -\int_0^s z(s)t(s)ds = -\int_- z(s)t(s)ds, \\ S_z(s) &= -\int_{A^-} y dA = -\int_0^s y(s)t(s)ds = -\int_- y(s)t(s)ds, \end{aligned} \tag{A2.9}$$

joissa integrointi tapahtuu yli osapoikkipinnan A^- keskiviivan. Näiden kaavojen käyttö on käytännössä joissain tapauksessa hieman suoraviivaisempaa kuin kaavojen (A2.8).

A2.3 Sektoriaaliset poikkileikkaussuureet

Sektoriaalinen koordinaatti $\omega(s)$ on ohutseinämäisten poikkileikkausten teoriassa eräänlainen lisäkoordinaatti koordinaattien $y(s)$ ja $z(s)$ ohella. Siihen liittyy niin sanottuja **sektoriaalisia poikkileikkaussuureita**. **Koko poikkipintaan** liittyvät **sektoriaalinen staattinen momentti** eli sektoriaalinen lineaarinen momentti on

$$S_\omega = \int_A \omega dA = \int_0^l \omega(s)t(s)ds = \int \omega(s)t(s)ds, \tag{A2.10}$$

sektoriaalinen jäyhyysmomentti eli sektoriaalinen neliömomentti on

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA = \int_0^l \omega(s)^2 t(s) ds = \int \omega(s)^2 t(s) ds, \quad (\text{A2.11})$$

sekä **sektoriaaliset tulomomentit** ovat

$$I_{y\omega} = \int_A y\omega dA = \int_0^l y(s)\omega(s)t(s) ds = \int y(s)\omega(s)t(s) ds, \quad (\text{A2.12})$$

$$I_{z\omega} = \int_A z\omega dA = \int_0^l z(s)\omega(s)t(s) ds = \int z(s)\omega(s)t(s) ds.$$

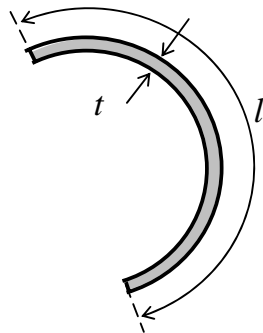
Osapoikkipinnan sektoriaalinen poikkileikkaussuure on osapoikkipinnan **sektoriaalinen staattinen momentti**

$$S_{\omega}(s) = \int_{A^+} \omega dA = \int_s^l \omega(s)t(s) ds = \int^+ \omega(s)t(s) ds \quad (\text{A2.13})$$

$$= - \int_{A^-} \omega dA = - \int_0^s \omega(s)t(s) ds = - \int^- \omega(s)t(s) ds.$$

A2.4 Vapaan väännön vääntöjäyhyysmomentti

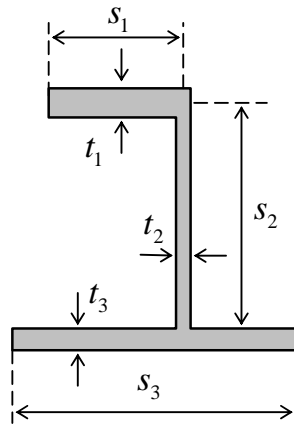
Rakenteiden mekaniikan perusteiden luentomonisteen kohdassa 6.62 käsiteltiin ohutseinämäisen avoimen poikkipinnan vääntöjäyhyysmomentin määrittämistä. Kerrataan tässä joitakin saatuja tuloksia.



Kuva A.9: Ohutseinäinen avoin poikkipinta, jonka paksuus t on vakio.

Kuvan A.9 ohutseinämäisen avoimen poikkileikkauksen, jonka seinämän paksuus t on vakio ja pituus on l , vääntöjäyhyysmomentti on

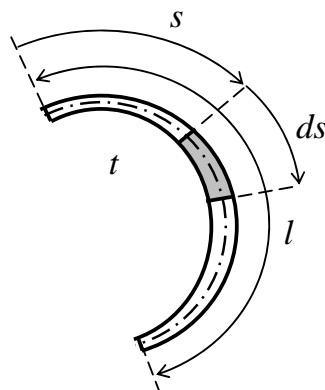
$$I_t = \frac{1}{3} t^3 l . \quad (\text{A2.14})$$



Kuva A.10: Ohutseinäinen avoin poikkipinta, jonka paksuus on paloittain vakio.

Kuvassa A.10 on esitetty poikkileikkaus, jonka paksuus on paloittain vakio. Tämän tyyppisen poikkileikkauksen vääntöjäyhyysmomentti on

$$I_t = \frac{1}{3} \sum t_i^3 s_i . \quad (\text{A2.14})$$



Kuva A.11: Ohutseinäinen avoin poikkipinta, jonka paksuus $t(s)$ vaihtelee.

Jos poikkipinnan paksuus vaihtelee, saadaan sen vääntöjäyhyysmomentti seuraavasti: Poikkileikkauksen differentiaalisen osan (vrt. kuva A.11), jonka pituus on ds , osuus poikkileikkauksen vääntöjäyhyysmomentista on $dI_t = 1/3 \cdot t^3 ds$. Integroimalla yli poikkileikkauksen keskiviivan saadaan nyt

$$I_t = \int dI_t = \frac{1}{3} \int_0^l t^3(s) ds.$$

Tämä tulos paksuudeltaan vaihtelevan ohutseinämäisen poikkileikkauksen vääntöjäyhyysmomentille voidaan esittää seuraavissa muodoissa

$$\boxed{I_t = \frac{1}{3} \int_A t^2 dA = \frac{1}{3} \int_0^l t^3(s) ds = \frac{1}{3} \int t^3(s) ds.} \quad (\text{A2.15})$$

A3 Avointen ohuiden poikkileikkausten poikkileikkaussuureiden laskemisesta

A3.1 Analyytinen integrointi

Joissakin tapauksissa on tarkoituksenmukaista suorittaa poikkileikkaussuureiden lausekkeissa esiintyvät viivaintegroinnit analyttisesti.

A3.2 Integraalitalukkojen käyttö

Suorista osista koostuvan ohuen avoimen poikkileikkauksen tapauksessa integrandit poikkileikkaussuureiden lausekkeissa ovat korkeintaan ensimmäisen asteen polynomeja, niiden tuloja tai neliöitä. Tällöin integrointi on kätevä suorittaa Taulukon A.1 mukaisia, jo Rakenteiden mekaniikka I:n kurssissa esillä olleita, $\int \bar{f} f ds$ integraalien määrittämissä kaavoja käyttäen.

A3.3 Numeeriset integrointikaavat

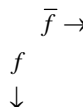
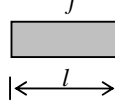
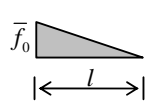
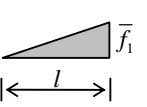
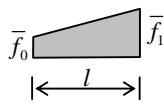
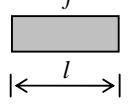
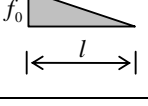
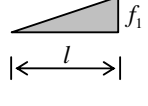
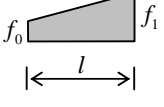
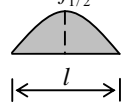
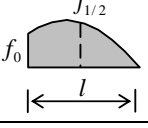
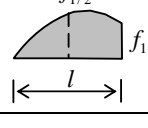
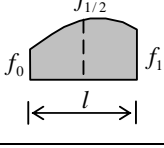
Jos poikkileikkauksen keskiviiva on kaareva tai sen paksuus vaihtelee, voidaan soveltaa numeerista integrointia. Tässä tapauksessa käyttökelpoinen on Simpsonin kaava. Sitä käytettäessä integroimisväli l jaetaan tasavälein **parilliseen** määrään n jakovälejä. Tällöin Simpsonin kaava on

$$\int_0^l f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n), \quad (\text{A3.1})$$

missä $\Delta x = l/n$ ja $f_i = f(i\Delta x)$. Kaava on likikaava, jonka tarkkuus paranee, kun jakovälien lukumäärää n lisätään. Mikäli integroitava funktio on **polynomi**, jonka **asteluku on kolme tai alempi**, Simpsonin kaava antaa tarkan tuloksen. Suorista osista koostuvan ohuen avoimen poikkileikkauksen tapauksessa asia on näin, jolloin voidaan käyttää kahden jakovälin Simpsonin kaavaa

$$\int_0^l f(x) dx = \frac{l}{6} (f_0 + 4f_1 + f_2). \quad (\text{A3.2})$$

Taulukko A.1: Integraalien $\int \bar{f} f dx$ määrittystaulukko

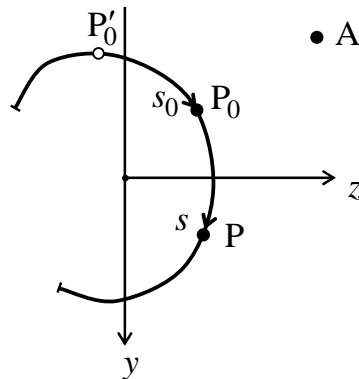
				
	$l\bar{f}f$	$\frac{l}{2}\bar{f}_0f$	$\frac{l}{2}\bar{f}_1f$	$\frac{l}{2}(\bar{f}_0 + \bar{f}_1)f$
	$\frac{l}{2}\bar{f}f_0$	$\frac{l}{3}\bar{f}_0f_0$	$\frac{l}{6}\bar{f}_1f_0$	$\frac{l}{6}(2\bar{f}_0 + \bar{f}_1)f_0$
	$\frac{l}{2}\bar{f}f_1$	$\frac{l}{6}\bar{f}_0f_1$	$\frac{l}{3}\bar{f}_1f_1$	$\frac{l}{6}(\bar{f}_0 + 2\bar{f}_1)f_1$
	$\frac{l}{2}\bar{f}(f_0 + f_1)$	$\frac{l}{6}\bar{f}_0(2f_0 + f_1)$	$\frac{l}{6}\bar{f}_1(f_0 + 2f_1)$	$\frac{l}{6}[\bar{f}_0(2f_0 + f_1) + \bar{f}_1(f_0 + 2f_1)]$
	$\frac{2}{3}l\bar{f}f_{1/2}$	$\frac{l}{3}\bar{f}_0f_{1/2}$	$\frac{l}{3}\bar{f}_1f_{1/2}$	$\frac{l}{3}(\bar{f}_0 + \bar{f}_1)f_{1/2}$
	$\frac{l}{6}\bar{f}(f_0 + 4f_{1/2})$	$\frac{l}{6}\bar{f}_0(f_0 + 2f_{1/2})$	$\frac{l}{3}\bar{f}_1f_{1/2}$	$\frac{l}{6}[\bar{f}_0f_0 + 2(\bar{f}_0 + \bar{f}_1)f_{1/2}]$
	$\frac{l}{6}\bar{f}(4f_{1/2} + f_1)$	$\frac{l}{3}\bar{f}_0f_{1/2}$	$\frac{l}{6}\bar{f}_1(2f_{1/2} + f_1)$	$\frac{l}{6}[2(\bar{f}_0 + \bar{f}_1)f_{1/2} + \bar{f}_1f_1]$
	$\frac{l}{6}\bar{f}(f_0 + 4f_{1/2} + f_1)$	$\frac{l}{6}\bar{f}_0(f_0 + 2f_{1/2})$	$\frac{l}{6}\bar{f}_1(2f_{1/2} + f_1)$	$\frac{l}{6}[\bar{f}_0f_0 + 2(\bar{f}_0 + \bar{f}_1)f_{1/2} + \bar{f}_1f_1]$
$\int \bar{f}^2 dx$	$l\bar{f}^2$	$\frac{l}{3}\bar{f}_0^2$	$\frac{l}{3}\bar{f}_1^2$	$\frac{l}{3}(\bar{f}_0^2 + \bar{f}_0\bar{f}_1 + \bar{f}_1^2)$

A4 Sektoriaalisen koordinaatin normeeraus

A4.1 Normeerattu sektoriaalinen koordinaatti

Sektoriaalista koordinaattia, jonka nollopiste on valittu siten, että sitä vastaava poikki­pinnan sektoriaalinen staattinen momentti S_ω häviää, kutsutaan **normeeratuksi sektoriaaliseksi koordinaatiksi**.

A4.2 Sektoriaalisen koordinaatin normeeraus



Kuva A.12: Sektoriaalisen koordinaatin apunollopiste P'_0 ja nollopiste P_0 .

Sektoriaaliselle koordinaatille, jonka napa on A ja nollopiste on P_0 (vrt. kuva A.12) saadaan

$$\omega_A(s) = \int_{P_0}^P \pm h_A t ds = \int_{P'_0}^P \pm h_A t ds - \int_{P'_0}^{P_0} \pm h_A t ds = \omega'_A(s) - \omega'_A(s_0), \quad (\text{A4.1})$$

missä $\omega'_A(s)$ on sektoriaalinen koordinaatti, jonka nollopiste on P'_0 . Sektoriaalista koordinaattia $\omega_A(s)$ vastaavalle sektoriaaliselle staattiselle momentilla saadaan nyt

$$\begin{aligned} S_{\omega_A} &= \int \omega_A(s) t(s) ds = \int \omega'_A(s) t(s) ds - \omega'_A(s_0) \int t(s) ds \\ &= S_{\omega'_A} - \omega'_A(s_0) A, \end{aligned} \quad (\text{A4.2})$$

missä

$$S_{\omega'_A} = \int \omega'_A(s)t(s)ds \quad (\text{A4.3})$$

on sektoriaalista koordinaattia $\omega'_A(s)$ vastaava sektoriaalinen staattinen momentti. Merkitsemällä edellinen nolllaksi (normeeraus) saadaan

$$\omega'_A(s_0) = \frac{S_{\omega'_A}}{A}. \quad (\text{A4.4})$$

Sijoittamalla tämä tulos lausekkeeseen (A4.1) saadaan

$$\boxed{\omega_A(s) = \omega'_A(s) - \frac{S_{\omega'_A}}{A}}. \quad (\text{A4.5})$$

Otaksutaan nyt, että piste P'_0 on **valittu apunollapiste** ja sitä vastaava sektoriaalinen koordinaatti $\omega'_A(s)$ ja sektoriaalinen staattinen momentti $S_{\omega'_A}$ on määritetty. Kaavalla (A4.5) voidaan nyt laskea **normeerattu** sektoriaalinen koordinaatti $\omega_A(s)$. Kaavaa (A4.5) kutsutaan tässä sektoriaalisen koordinaatin **normeerauskaavaksi**.

A4.3 Symmetrisen poikkileikkauksen normeerattu sektoriaalinen koordinaatti

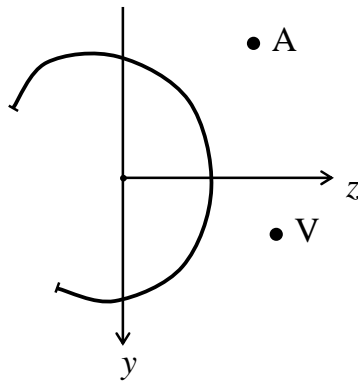
Symmetrisen poikkileikkauksen tapauksessa sektoriaalisen koordinaatin napapiste on tarkoituksen mukaista asettaa symmetria-akselille. Tässä tapauksessa poikkileikkauksen **normeerattu sektoriaalinen koordinaatti** saadaan suoraan asettamalla sen **nollapiste** P_0 **poikkileikkauksen symmetriapisteeseen** (symmetria-akselin ja poikkileikkauksen keski-
viivan leikkauspisteeseen). Tämä tulos osoitetaan kohdassa A5.3.

A5 Vääntökeskiö

A5.1 Vääntökeskiön määrittely

Sen normeeratun sektoriaalisen koordinaatin ω_V napapiste V, jota käyttäen lasketut sektoriaaliset tulomomentit $I_{y\omega_V}$ ja $I_{z\omega_V}$ häviävät, on poikkipinnan **vääntökeskiö** eli **leikkauskeskiö**.

A5.2 Vääntökeskiön määrittäminen



Kuva A.13: Apunapa A ja vääntökeskiö V

Jos sektoriaalinen koordinaatti ω_A apunavan A suhteen tunnetaan, sektoriaaliselle koordinaatille vääntökeskiön V suhteen saadaan napapisteen vaihtokaavaa (A1.9) käyttäen

$$\omega_V = \omega_A + (z_V - z_A)(y - y_0) - (y_V - y_A)(z - z_0). \quad (\text{A5.1})$$

Sijoittamalla tämä sektoriaalisen tulomomentin $I_{y\omega}$ lausekkeeseen (A2.12a) saadaan aluksi

$$\begin{aligned} I_{y\omega_V} &= \int_A y\omega_V dA = \int_A y[\omega_A + (z_V - z_A)(y - y_0) - (y_V - y_A)(z - z_0)]dA \\ &= \int_A y\omega_A dA + (z_V - z_A)\left(\int_A y^2 dA - y_0 \int_A y dA\right) \\ &\quad - (y_V - y_A)\left(\int_A yz dA - z_0 \int_A y dA\right), \\ &= I_{y\omega_A} + (z_V - z_A)(I_z - y_0 S_z) - (y_V - y_A)(I_{yz} - z_0 S_z). \end{aligned}$$

Koska y, z –koordinaatiston origo on pintakeskiössä, staattinen momentti S_z häviää, ja sektoriaalinen tulomomentti $I_{y\omega_V}$ saa muodon

$$I_{y\omega_V} = I_{y\omega_A} + (z_V - z_A)I_z - (y_V - y_A)I_{yz}. \quad (\text{A5.2a})$$

Vastaavalla tavalla saadaan sektoriaaliselle tulomomentille $I_{z\omega_V}$ lauseke

$$I_{z\omega_V} = I_{z\omega_A} + (z_V - z_A)I_{yz} - (y_V - y_A)I_y. \quad (\text{A5.2b})$$

Ehdoista $I_{y\omega_V} = 0$ ja $I_{z\omega_V} = 0$ seuraa yhtälöpari, jonka ratkaisu on

$$\boxed{\begin{aligned} y_V &= y_A + \frac{I_z I_{z\omega_A} - I_{yz} I_{y\omega_A}}{I_y I_z - I_{yz}^2}, \\ z_V &= z_A - \frac{I_y I_{y\omega_A} - I_{yz} I_{z\omega_A}}{I_y I_z - I_{yz}^2}. \end{aligned}} \quad (\text{A5.3})$$

Nämä ovat kaavat, joilla voidaan laskea **vääntökeskiön V koordinaatit** y_V ja z_V , kun apunavan A koordinaatit y_A ja z_A , poikkileikkauksen jäyhyysmomentit I_y , I_z tulomomentti I_{yz} sekä sektoriaaliset tulomomentit $I_{y\omega_A}$ ja $I_{z\omega_A}$ pintakeskiökoordinaatistossa y, z on ensin määritetty. Jos y, z –koordinaatisto on lisäksi **pääjäyhyyskoordinaatisto**, jolloin $I_{yz} = 0$, kaavat (A5.3) saavat muodon

$$\boxed{\begin{aligned} y_V &= y_A + \frac{I_{z\omega_A}}{I_y}, \\ z_V &= z_A - \frac{I_{y\omega_A}}{I_z}. \end{aligned}} \quad (\text{A5.4})$$

A5.3 Symmetrisen poikkipinnan vääntökeskiö

Valitaan y, z –koordinaatisto siten, että y –akseli yhtyy symmetria-akseliin. Asetetaan **apunapa A symmetria-akselille** (y –akselille) ja **nollapiste P_0** poikkileikkauksen **symmetriapisteeseen** (keskiviivan ja y –akselin leikkauspisteeseen). Nyt sektoriaalisen koordinaatin

differentiaali pisteessä P: (y, z) on $d\omega_A = +h_A ds$ ja siihen nähden symmetrisessä pisteessä P': $(y, -z)$ se on $d\omega'_A = -h_A ds$, joten kaavan (A1.4) mukainen integrointi tuottaa $\omega_A = -\omega'_A$. Sektoriaalinen koordinaatti on siten pariton funktio ja sektoriaalisen staattisen momentin (A2.10) integrandi on myös, joten sille pätee $S_{\omega_A} = 0$. Kysymyksessä on siten **normeerattu** sektoriaalinen koordinaatti. Myös sektoriaalisen tulomomentin $I_{y\omega_A}$ lausekkeessa (A2.11a) integrandi on pariton funktio, joten $I_{y\omega_A} = 0$. Vääntökeskiön y -koordinaatille saadaan tällöin

$$y_V = y_A + \frac{I_{z\omega_A}}{I_y} \quad (\text{A5.5})$$

ja se on siis y – eli **symmetria-akselilla**.

Todetaan siis, että **symmetrisen poikkileikkauksen vääntökeskiö on symmetria-akselilla**. Sitä vastaava **normeerattu sektoriaalinen koordinaatti** saadaan asettamalla nollapiste P_0 poikkileikkauksen symmetriapisteseen.

Jos poikkileikkaus on **kaksoissymmetrinen**, samoin kuin pintakeskiö C, normeeratun sektoriaalisen koordinaatin nollapiste P_0 ja vääntökeskiö V sijaitsevat **symmetria-akseleiden leikkauspisteessä**.

A.6 Muita poikkileikkaussuureita

Tarkastellaan lopuksi vääntönurjahduksen ja kiepahduksen yhteydessä esiintyvien β -poikkileikkaussuureiden määrittämistä. Niissä esiintyy seuraavan tyyppisiä integraaleja

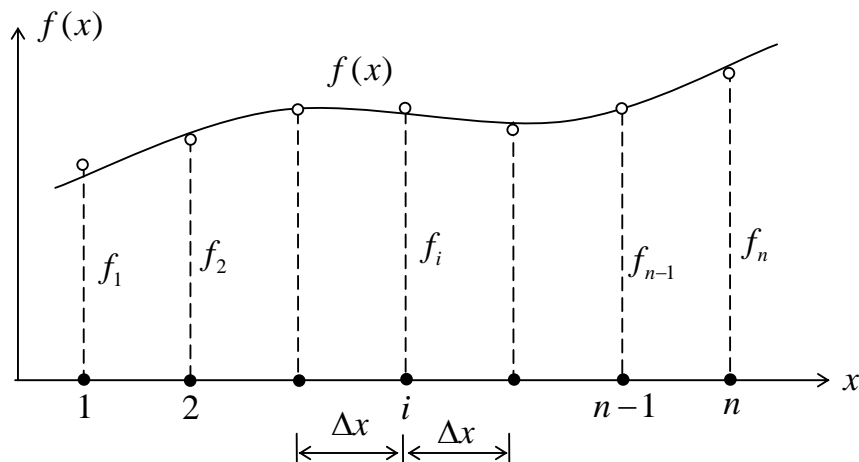
$$\begin{aligned}\int_A y(y^2 + z^2)dA &= \int y(s)[y(s)^2 + z(s)^2]tds, \\ \int_A z(y^2 + z^2)dA &= \int z(s)[y(s)^2 + z(s)^2]tds, \\ \int_A \omega(y^2 + z^2)dA &= \int \omega(s)[y(s)^2 + z(s)^2]tds.\end{aligned}\tag{A6.1}$$

Siinä tapauksessa, että poikkileikkaus muodostuu suorista osista, riippuvuudet $y = y(s)$, $z = z(s)$ ja $\omega = \omega(s)$ ovat lineaarisia. Jos poikkileikkauksen paksuus t kullakin suoralla osalla on vakio, integrandit koostuvat lineaarisen funktion $y(s)$, $z(s)$ tai $\omega(s)$ ja kvadraattisen funktion $y(s)^2 + z(s)^2$ tuloista. Integrointiin voidaan tässäkin käyttää taulukon A.1 kaavoja, ja ne antavat tarkan tuloksen.

Liite B: Differenssimenetelmän käyttö yhden muuttujan reuna-arvot tehtävien ratkaisemisessa

B.1 Funktion differenssiapproksimaatio

Tarkastellaan yhden muuttujan funktiota $f(x)$. Differenssimenetelmässä sitä ja sen derivaattoja approksimoidaan diskreeteissä tasavälisissä pisteissä (vrt. kuva B.1).



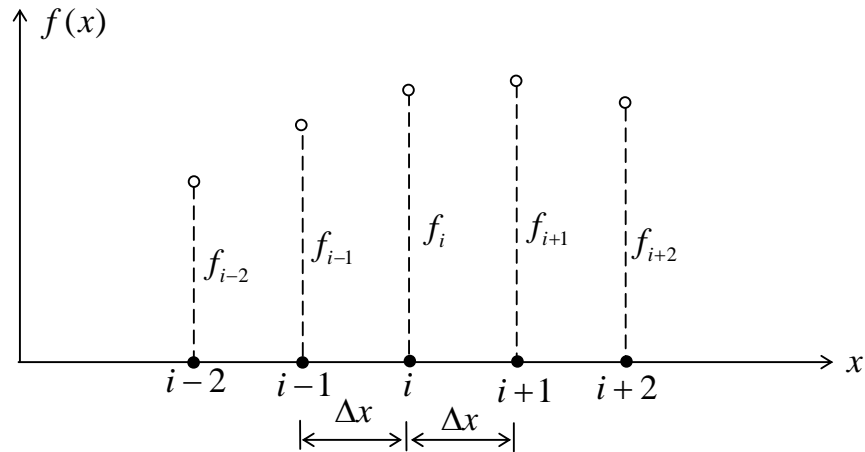
Kuva B.1: Funktion $f(x)$ approksimointi differenssipisteissä $i = 1, \dots, n$.

B.2 Funktion derivaattojen differenssilausekkeita

Differenssimenetelmässä kehitetään lausekkeet, joiden avulla funktion derivaattojen $f'(x)$, $f''(x)$ jne. differenssiarvot (arvot differenssipisteissä) f'_i , f''_i , jne. voidaan lausua lineaarisina lausekkeina funktion differenssiarvoista f_i . Seuraavassa johdetaan nämä lausekkeet.

Muodostetaan funktion $f(x)$ Taylor kehitelmä pisteen i ympäristössä. Se on

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2!} f''(x_i)(x - x_i)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_i)(x - x_i)^3 + \dots \quad (\text{B.1})$$



Kuva B.2: Funktion differenssisarvoja pisteen i ympäristössä

Määritetään sitä käyttäen funktion $f(x)$ arvot pisteissä $i-1$ ja $i+1$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \frac{1}{2!} f''(x_i)(x_{i-1} - x_i)^2 + \dots \quad (\text{B.2})$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!} f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots$$

Katkaisemalla sarjat kaavoissa (B.2) näkyviin toisen asteen termeihin ja ottamalla käyttöön sovitut merkinnät $f_i = f(x_i)$, $f'_i = f'(x_i)$, $f''_i = f''(x_i)$ jne. saadaan yhtälöt

$$f_{i-1} \approx f_i - f'_i \Delta x + \frac{1}{2} f''_i \Delta x^2, \quad (\text{B.3})$$

$$f_{i+1} \approx f_i + f'_i \Delta x + \frac{1}{2} f''_i \Delta x^2.$$

Tästä yhtälöparista voidaan ratkaista ensimmäisen ja toisen derivaatan arvot f'_i ja f''_i differenssipisteessä i . Niille saadaan

$$\boxed{f'_i \approx \frac{1}{2\Delta x} (-f_{i-1} + f_{i+1})}, \quad (\text{B.4})$$

$$\boxed{f''_i \approx \frac{1}{\Delta x^2} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})}. \quad (\text{B.5})$$

Differenssilausekkeet korkeammille derivaatoille saadaan käyttäen hyväksi ensimmäisen ja toisen derivaatan lausekkeitä. Kolmannelle derivaatalle saadaan näin

$$f_i''' \approx \frac{1}{2\Delta x}(-f_{i-1}'' + f_{i+1}'') = \frac{1}{2\Delta x} \left(-\frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{\Delta x^2} + \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{\Delta x^2} \right),$$

josta seuraa tulos

$$\boxed{f_i''' \approx \frac{1}{2\Delta x^3}(-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2})}. \quad (\text{B.6})$$

Neljännelle derivaatalle saadaan vastaavaan tapaan

$$\begin{aligned} f_i^{(4)} &\approx \frac{1}{\Delta x^2}(f_{i-1}'' - 2f_i'' + f_{i+1}'') \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{\Delta x^2} - 2\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2} + \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{\Delta x^2} \right), \end{aligned}$$

josta seuraa tulos

$$\boxed{f_i^{(4)} \approx \frac{1}{\Delta x^4}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2})}. \quad (\text{B.7})$$

B.3 Reuna-arvot tehtävän ratkaiseminen differenssimenetelmällä

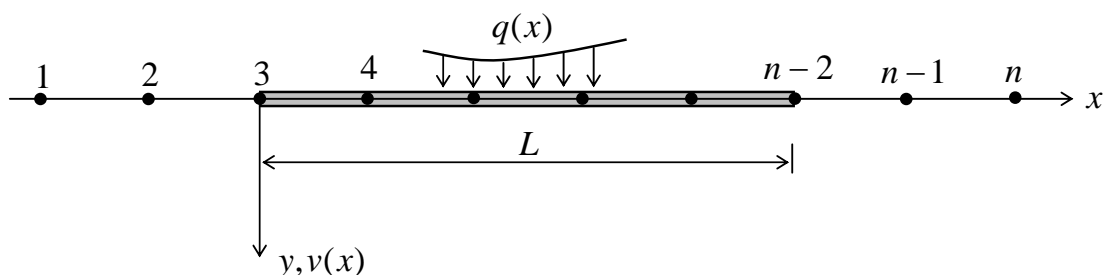
Yhden muuttujan reuna-arvot tehtävä muodostuu differentiaaliyhtälöstä (tai useammasta), niin sanotu(i)sta kenttäyhtälö(i)stä, sekä sen reunaehdoista. Kenttäyhtälön tulee olla voimassa probleeman määrittelyalueessa, joka yhden muuttujan x tapauksessa on väli x -akselilla, ja reunaehtojen tulee olla voimassa välin päissä.

Differenssimenetelmässä kenttäyhtälö(t) diskretoidaan muodostamalla kussakin määrittelyalueeseen kuuluvassa differenssipisteessä i vastaava differenssiyhtälö. Se saadaan sijoittamalla kunkin differentiaaliyhtälössä esiintyvän funktion paikalle sen differenssiarvo ja derivaatan paikalle sen differenssilauseke. Näin kutakin differenssipistettä kohti saadaan tuntemattoman funktion differenssiarvojen välinen yhtälö. Reunaehtoyhtälöt reunapisteissä diskretoidaan vastaavaan tapaan.

Differenssiverkon valinnassa ja reunaehtojen käsittelyssä on olemassa erilaisia käytäntöjä. Tarkastellaan niitä seuraavassa:

(a) Yleispätevä menettely

Tarkastellaan ensin johdonmukaista ja mahdollisimman yleispätevää käytäntöä, joka soveltuu tämän vuoksi hyvin myös ohjelmointiin. Siinä differenssipisteitä sijoitetaan myös määrittelyalueen ulkopuolelle niin monta, että kenttäyhtälön korkeimman derivaatan differenssilauseketta voidaan soveltaa ko. reunalla olevassa differenssipisteessä. Tämä merkitsee sitä, että esimerkiksi **toisen kertaluvun** differentiaaliyhtälöä ratkaistaessa reunalla olevan differenssipisteen ulkopuolelle tarvitaan **yksi ulkoinen differenssipiste** ja **neljännen kertaluvun** differentiaaliyhtälön tapauksessa tarvitaan **kaksi ulkoista differenssipistettä**. Jos esimerkiksi kysymyksessä on palkin differentiaaliyhtälö $EIV^{(4)}(x) = q(x)$, joka on neljättä kertalukua, differenssiverkko on kuvan B.3 mukainen. Muodostamalla kenttäyhtälöä vastaavat differenssiyhtälöt määrittelyalueen sisällä ja reunoilla (päissä) olevissa differenssipisteissä sekä reunaehtoja vastaavat differenssiyhtälöt reunoilla olevissa differenssipisteissä saadaan probleeman tuntemattoman funktion differenssiarvoille yhtälöryhmä, jossa yhtä monta yhtälöä kuin tuntemattomia. Tämä yhtälöryhmä voidaan sitten ratkaista. Koska tuloksena saadaan tuntemattoman funktion differenssiarvot kaikissa differenssipisteissä (myös ulkoisissa), voidaan tehtävän muu ratkaisu (ns. derivaattasuureet), esimerkiksi palkkitehtävässä taivutusmomentin $M = -EIv''$ ja leikkausvoiman $Q = -EIv'''$ differenssiarvot, määrittää suoraviivaisesti.



Kuva B.3: Differenssiverkko palkin ratkaisemiseksi differenssimenetelmällä

(b) Laskentatyötä säästävät menettelyt

Yleispätevässä menettelyssä syntyy jo pienestä tehtävästä suuri yhtälöryhmä. Tämän vuoksi esiintyy erilaisia käytäntöjä, joilla päädytään erityisesti käsilaskua silmälläpitäen pienempään yhtälöryhmään.

Periaatteena näissä käytännöissä on se, että reunaehtoja vastaavia differenssiyhtälöitä, joko yksin tai yhdessä reunapisteessä muodostetun kenttäyhtälöä vastaavan differenssiyhtälön kanssa, käytetään hyväksi ulkoisten differenssiarvojen eliminoimiseen etukäteen lopullisesta yhtälöryhmästä. Näin lopulliseen yhtälöryhmään tulee yhtälöiksi vain kenttäyhtälöitä vastaavia differenssiyhtälöitä ja tuntemattomiksi vain määrittelyalueeseen kuuluvien differenssipisteiden differenssiarvoja.