

HELSINGIN TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Helsinki University of Technology

RAKENNETEKNIIKAN LAITOS
Division of Structural Engineering

Julkaisu **36**

Martti Mikkola

KIMMOISELLA ALUSTALLA OLEVA PALKKI

ISBN 951-752-203-7

Otaniemi 1981

TKK OFFSET

KIMMOISELLA ALUSTALLA OLEVA PALKKI

=====

1. PALKIN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖ JA SEN RATKAISU

Tarkastellaan kimmoisella alustalla olevaa palkkia (kuva 1). Otaksutaan:

- palkille pätee tekninen taivutusteoria
- palkki pysyy aina kiinni alustassa
- alustan painuma = palkin akselin taipuma
- painumat ovat pieniä

Palkille pätevät seuraavat yhtälöt

1) taipuman ja käyristymän välinen yhtälö

$$(1) \quad \kappa(x) = -v''(x)$$

2) tasapainoyhtälöt

$$(2) \quad \begin{aligned} M'(x) - Q(x) &= 0, \quad Q'(x) + q(x) - r(x) = 0 \\ \Rightarrow M''(x) + q(x) - r(x) &= 0 \end{aligned}$$

3) taivutusmomentin ja käyristymän välinen yhtälö

$$(3) \quad M(x) = EI\kappa(x)$$

Näistä seuraa palkin differentiaaliyhtälö

$$(4) \quad (EIV''')' = q - r$$

Alustapaineen r eliminoimiseksi tarkastellaan alustan kimmoista toimintaa. Yksinkertaisin alustamalli on Winklerin alusta (Winkler 1867), jonka mukaan

$$(5) \quad r(x) = kv(x)$$

k on alustakerroin $[KN/mm^2]$. Usein määritetään alustakerroin c $[KN/mm^2]$ ja otaksutaan k :n olevan suo-

raan verrannollisen palkin levyteen b eli $k = cb$. Winklerin alustan mekaaninen malli on toisistaan irti olevien jousien muodostama alusta (kuva 1) tai neste (ilman pintajännitystä, $c =$ nesteen ominaisrasko). Alustakertoimen c arvoja annettu taulukossa I.

Hiukan täydellisempi, mutta myös monimutkaisempi on W i e g h a r d t i n a l u s t a (Wieghardt 1922, Pasternak 1926), jonka mukaan

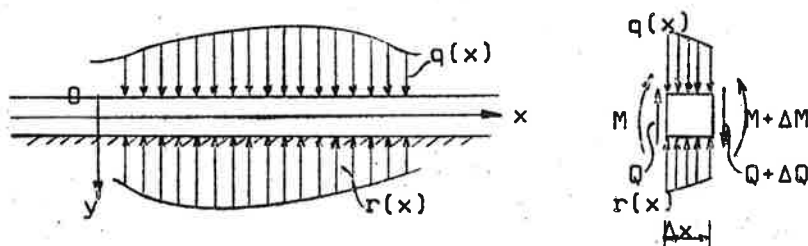
$$(6) \quad v(x) = \int_0^L K(|x - \xi|) r(\xi) d\xi$$

Wieghardt ehdottaa ydinfunktioksi eksponenttifunktiota

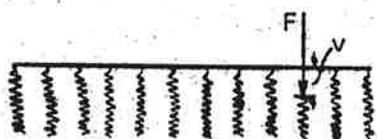
$$(7) \quad K(|x - \xi|) = de^{-\gamma|x-\xi|}$$

jossa d ja γ ovat alustan kimmoisia ominaisuuksia kuvaavia vakioita. Wieghardt'n alustan mekaanisia malleja ovat

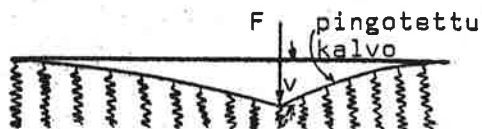
(a) jousisysteemi, jossa jousien päälle on asetettu pingotettu taipuisa kalvo (Filonenko - Borodich), (b) jousisysteemi, jossa jousien välille on asetettu leikkausta ottavat kimmoiset siteet (Pasternak), (c) neste, jonka pintajännitys otetaan huomioon (Schiel), (kuva 3).



Kuva 1. Kimmoisella alustalla oleva palkki.



Kuva 2. Winklerin alusta.



Kuva 3. Wiegardt'in alusta

Taulukko I. Alustakertoimen arvoja

Alusta	c [KN/mm ²]
Löyhä maa	1 - 5
Keskinkertaisen tiivis maa	5 - 50
Tiivis maa (sullottu hiekka, sora)	50 - 100
Hyvin tiivis maa	100 - 200
Kova maa (rikkoutunut kallio, hiekka- ja kalkkikivi)	200 - 1000
Kallio	1000 - 15000
Tiiliseinä	5000 - 6000
Betoni	8000 - 15000

Seuraavassa tarkastellaan Winklerin alustalla olevaa palkkia. Sijoittamalla alustapaineen lauseke (5) tasapainoyhtälöön (4) saadaan kimmoisella alustalla olevan palkin differentiaaliyhtälö

$$(8) \quad (EIv''')'' + kv = q$$

Käsitellään tapausta, jossa EI on vakio. Silloin yhtälöstä (8) tulee

$$(9) \quad EIv^{(4)} + kv = q$$

Otetaan käyttöön dimensioton muuttuja $\xi = \beta x$, jossa

$$(10) \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad \text{eli} \quad 4\beta^4 = \frac{k}{EI}$$

Silloin yhtälö (9) saadaan muotoon

$$(11) \quad \frac{d^4 v}{d\xi^4} + 4v = \frac{4q}{k}$$

Yhtälön (11) ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$(12) \quad v(\xi) = v_0(\xi) + \bar{v}(\xi)$$

jossa $v_0(\xi)$ on jokin yksityisratkaisu ja $\bar{v}(\xi)$ homogeenisen yhtälön $d^4 v/d\xi^4 + 4v = 0$ ratkaisu. Hakemalla ratkaisua muodossa $v = e^{r\xi}$ saadaan karakteristiseksi yhtälöksi $r^4 + 4 = 0$, jonka juuret ovat

$$r_{1,2} = 1 \pm i, \quad r_{3,4} = -(1 \pm i), \quad i = \sqrt{-1}$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu on siten

$$\bar{v}(\xi) = C_1 e^{(1+i)\xi} + C_2 e^{(1-i)\xi} + C_3 e^{-(1+i)\xi} + C_4 e^{-(1-i)\xi}$$

Ottamalla huomioon kaavat

$$e^{\pm\xi} = \cosh \xi \pm \sinh \xi, \quad e^{\pm i\xi} = \cos \xi \pm i \sin \xi$$

voidaan \bar{v} :n lauseke esittää muodossa

$$(13) \quad \begin{aligned} \bar{v}(\xi) = & A_1 \cosh \xi \cos \xi + A_2 \cosh \xi \sin \xi + A_3 \sinh \xi \cos \xi + \\ & + A_4 \sinh \xi \sin \xi \end{aligned}$$

tai

$$(14) \quad \bar{v}(\xi) = e^{\xi}(B_1 \cos \xi + B_2 \sin \xi) + e^{-\xi}(B_3 \cos \xi + B_4 \sin \xi)$$

Palkin kaltevuuden, taivutusmomentin ja leikkausvoiman lausekkeet ovat

$$(15)_1 \quad \phi(\xi) = \beta \frac{dv}{d\xi} = \left\{ \begin{array}{l} \beta \frac{dv_0}{d\xi} + \beta [(A_2 + A_3) \cosh \xi \cos \xi + (-A_1 + A_4) \cosh \xi \sin \xi + \\ + (A_1 + A_4) \sinh \xi \cos \xi + (A_2 - A_3) \sinh \xi \sin \xi] \\ \beta \frac{dv_0}{d\xi} + \beta \{ e^\xi [(B_1 + B_2) \cos \xi + (-B_1 + B_2) \sin \xi] + \\ + e^{-\xi} [(-B_2 + B_4) \cos \xi + (-B_3 - B_4) \sin \xi] \} \end{array} \right.$$

$$(15)_2 \quad M(\xi) = -EI\beta^2 \frac{d^2 v}{d\xi^2} = \left\{ \begin{array}{l} -EI\beta^2 \frac{d^2 v_0}{d\xi^2} + 2EI\beta^2 (-A_4 \cosh \xi \cos \xi + \\ + A_3 \cosh \xi \sin \xi + \\ - A_2 \sinh \xi \cos \xi + \\ + A_1 \sinh \xi \sin \xi) \\ -EI\beta^2 \frac{d^2 v_0}{d\xi^2} + 2EI\beta^2 [e^\xi (-B_2 \cos \xi + B_1 \sin \xi) + \\ + e^{-\xi} (B_4 \cos \xi - B_3 \sin \xi)] \end{array} \right.$$

$$(15)_3 \quad Q(\xi) = -EI\beta^3 \frac{d^3 v}{d\xi^3} = \left\{ \begin{array}{l} -EI\beta^3 \frac{d^3 v_0}{d\xi^3} + 2EI\beta^3 [(A_3 - A_2) \cosh \xi \cos \xi + \\ + (A_4 + A_1) \cosh \xi \sin \xi + \\ + (-A_4 + A_1) \sinh \xi \cos \xi + \\ + (A_3 + A_2) \sinh \xi \sin \xi] \\ -EI\beta^3 \frac{d^3 v_0}{d\xi^3} + 2EI\beta^3 \{ e^\xi [(-B_2 + B_1) \cos \xi + \\ + (B_2 + B_1) \sin \xi] + \\ + e^{-\xi} [(-B_4 - B_3) \cos \xi + \\ + (-B_4 + B_3) \sin \xi] \} \end{array} \right.$$

Erittäin hyödylliseksi osoittautuu sellainen homogeneeninen differentiaaliyhtälön ratkaisu, joka saa origossa (palkin vasen pää) arvot $\bar{v}(0) = v_0$, $\bar{\phi}(0) = \phi_0$, $\bar{M}(0) = M_0$, $\bar{Q}(0) = Q_0$. Kaavojen (13), (14) ja (15) perusteella saadaan

$$A_1 = v_0, \quad B_1 + B_3 = v_0$$

$$\beta(A_2 + A_3) = \phi_0, \quad \beta(B_1 + B_2 - B_3 + B_4) = \phi_0$$

$$-2EI\beta^2 A_4 = M_0, \quad 2EI\beta^2 (-B_2 + B_4) = M_0$$

$$2EI\beta^3 (A_3 - A_2) = Q_0, \quad 2EI\beta^3 (-B_2 + B_1 - B_4 - B_3) = Q_0$$

Ratkaistaan vakiot A_i ja B_i näistä yhtälöistä $v_0:n$, $\phi_0:n$, $M_0:n$ ja $Q_0:n$ funktioina. Sijoitetaan ne lausekkeisiin (13) ja (14). Silloin homogeenisen yhtälön ratkaisulle saadaan esitysmuoto

$$(16) \quad \bar{v}(\xi) = C_1 Y_1(\xi) + C_2 Y_2(\xi) + C_3 Y_3(\xi) + C_4 Y_4(\xi)$$

jossa

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_1(\xi) = \cosh \xi \cos \xi = \frac{1}{2} (e^{\xi} \cos \xi + e^{-\xi} \cos \xi) \\ Y_2(\xi) = \frac{1}{2} (\cosh \xi \sin \xi + \sinh \xi \cos \xi) = \\ \quad = \frac{1}{4} [e^{\xi} (\cos \xi + \sin \xi) + e^{-\xi} (-\cos \xi + \sin \xi)] \\ Y_3(\xi) = \frac{1}{2} \sinh \xi \sin \xi = \frac{1}{4} (e^{\xi} \sin \xi - e^{-\xi} \sin \xi) \\ Y_4(\xi) = \frac{1}{4} (\cosh \xi \sin \xi - \sinh \xi \cos \xi) = \\ \quad = \frac{1}{8} [e^{\xi} (-\cos \xi + \sin \xi) + e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi)] \end{array} \right.$$

Integroimisvakioilla C_1 , C_2 , C_3 ja C_4 on merkitys

$$(18) \quad C_1 = v_0, C_2 = \phi_0/\beta, C_3 = -M_0/EI\beta^2, C_4 = -Q_0/EI\beta^3$$

Funktioiden Y_i derivaatat voidaan mukavasti esittää taulukon muodossa

i	Y_i	$dY_i/d\xi$	$d^2Y_i/d\xi^2$	$d^3Y_i/d\xi^3$	$d^4Y_i/d\xi^4$
1	Y_1	$-4Y_4$	$-4Y_3$	$-4Y_2$	$-4Y_1$
2	Y_2	Y_1	$-4Y_4$	$-4Y_3$	$-4Y_2$
3	Y_3	Y_2	Y_1	$-4Y_4$	$-4Y_3$
4	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	$-4Y_4$

Yksityisratkaisu $v_0(\xi)$ voidaan esittää $Y_4:n$ avulla

$$(20) \quad v_0(\xi) = \frac{4}{k} \int_0^{\xi} Y_4(\xi - \tau) q(\tau) d\tau$$

Peräkkäisillä derivoinneilla saadaan, koska $Y_4(0) = Y_3(0) = Y_2(0) = 0$ ja $Y_1(0) = 1$

$$\frac{dV_0}{d\xi} = \frac{4}{k} \int_0^\xi Y_3(\xi - \tau)q(\tau) d\tau + \frac{4}{k} Y_4(0)q(\xi) =$$

$$= \frac{4}{k} \int_0^\xi Y_3(\xi - \tau)q(\tau) d\tau$$

$$\frac{d^2V_0}{d\xi^2} = \frac{4}{k} \int_0^\xi Y_2(\xi - \tau)q(\tau) d\tau$$

$$\frac{d^3V_0}{d\xi^3} = \frac{4}{k} \int_0^\xi Y_1(\xi - \tau)q(\tau) d\tau$$

$$\frac{d^4V_0}{d\xi^4} = \frac{4q(\xi)}{k} - \frac{16}{k} \int_0^\xi Y_4(\xi - \tau)q(\tau) d\tau$$

Sijoittamalla v_0 ja sen neljäs derivaatta differentiaaliyhtälöön (11) todetaan että lauseke (20) on todella sen ratkaisu.

Merkitään seuraavassa

$$(21) \quad \Phi(\xi) = \frac{4}{k} \int_0^\xi Y_4(\xi - \tau)q(\tau) d\tau$$

ja muodostetaan Φ :n lauseke eräille tavallisille kuormituksille:

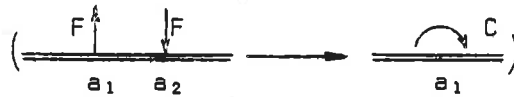
a) tasainen kuorma q_0 välillä $a_1 \leq x \leq a_2$, ($\alpha_1 = \beta a_1$)

$$(22) \quad \Phi(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{kun } \xi \leq \alpha_1 \\ \frac{4}{k} \int_{\alpha_1}^{\xi} \frac{1}{4} Y_1(\xi - \tau)q_0 = \frac{q_0}{k} [1 - Y_1(\xi - \alpha_1)], & \\ \text{kun } \alpha_1 < \xi \leq \alpha_2 \\ \frac{4}{k} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{4} Y_1(\xi - \tau)q_0 = \frac{q_0}{k} [Y_1(\xi - \alpha_2) - Y_1(\xi - \alpha_1)], & \text{kun } \alpha_2 < \xi \end{cases}$$

- b) pistekuorma F pisteessä $x = a_1$. ϕ saadaan rajatapauksena a) - kohdan tuloksesta merkitsemällä $F = q_0(a_2 - a_1)$ ja $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ ja antamalla $\delta \rightarrow 0$.

$$(23) \quad \phi(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{kun } \xi < \alpha_1 \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{q_0 \beta (a_2 - a_1)}{k} \frac{Y_1(\xi - \alpha_1 - \delta) - Y_1(\xi - \alpha_1)}{\delta} = \\ = \frac{4F\beta}{k} Y_4(\xi - \alpha_1), & \text{kun } \alpha_1 < \xi \end{cases}$$

- c) voimapari C pisteessä $x = a_1$. ϕ saadaan rajatapauksena b) - kohdan tuloksesta merkitsemällä $C = F(a_2 - a_1)$ ja $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ ja antamalla $\delta \rightarrow 0$



$$(24) \quad \phi(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{kun } \xi < \alpha_1 \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{4F\beta^2(a_2 - a_1)}{k} \frac{Y_4(\xi - \alpha_1 - \delta) - Y_4(\xi - \alpha_1)}{\delta} = \\ = -\frac{4C\beta^2}{k} Y_3(\xi - \alpha_1), & \text{kun } \alpha_1 < \xi \end{cases}$$

Ratkaisuja (16) ja (20) käyttäen palkin taipuman, kaltevuuden, taivutusmomentin ja leikkausvoiman lausekkeet saavat muodon

$$(25) \quad \begin{aligned} v(\xi) &= C_1 Y_1(\xi) + C_2 Y_2(\xi) + C_3 Y_3(\xi) + C_4 Y_4(\xi) + \phi(\xi) \\ \phi(\xi) &= \beta \left[-4C_1 Y_4 + C_2 Y_1 + C_3 Y_2 + C_4 Y_3 + \frac{d\phi}{d\xi} \right] \\ M(\xi) &= -EI\beta^2 \left[-4C_1 Y_3 - 4C_2 Y_4 + C_3 Y_1 + C_4 Y_2 + \frac{d^2\phi}{d\xi^2} \right] \\ Q(\xi) &= -EI\beta^3 \left[-4C_1 Y_2 - 4C_2 Y_3 - 4C_3 Y_4 + C_4 Y_1 + \frac{d^3\phi}{d\xi^3} \right] \end{aligned}$$

Funktioiden Y_i taulukoituja arvoja on teoksessa [8].

2. ÄÄRETTÖMÄN PITKÄ PALKKI

2.1 Pistekuorman kuormittama äärettömän pitkä palkki

Tarkastellaan kuvan 4 mukaista kuormitustapausta. Symmetrian takia on riittävää muodostaa ratkaisu vain oikealle puoleliskolle $\xi \geq 0$. Yksityisratkaisu $v_0(\xi)$ on $\equiv 0$, ja homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisuksi on sopivaa valita lauseke (14). Kun $\xi \rightarrow \infty$, taipuma $v(\xi) \rightarrow 0$, joten täytyy olla $B_1 = B_2 = 0$. Origossa reunaehdoiksi saadaan symmetrian takia

$$(26) \quad \phi(0) = 0, \quad Q(+0) = -F/2$$

Lausekkeista (15)₁ ja (15)₃ seuraavat silloin yhtälöt

$$-B_3 + B_4 = 0, \quad -2EI\beta^2(B_4 + B_3) = -F/2$$

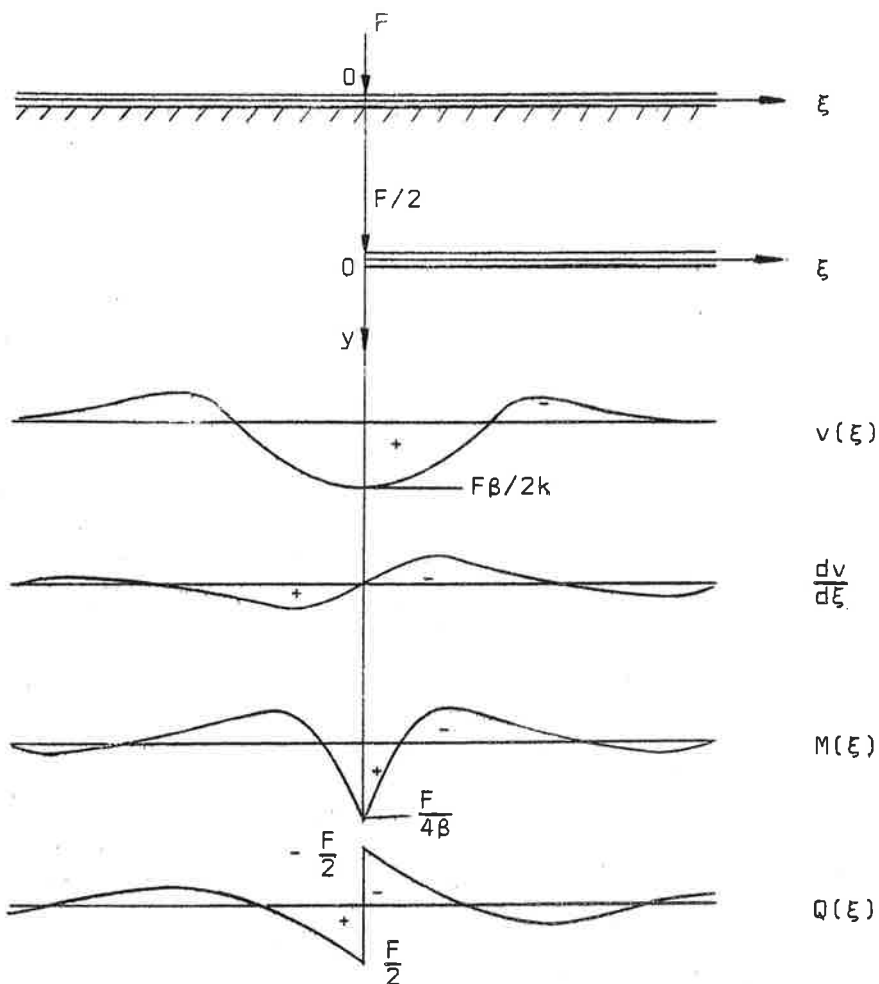
joiden ratkaisu on

$$(27) \quad B_3 = B_4 = \frac{F}{8EI\beta^3} = \frac{F}{2k}$$

Sijoittamalla B_3 ja B_4 lausekkeisiin (14) ja (15) saadaan

$$(28) \quad \begin{aligned} v(\xi) &= \frac{F\beta}{2k} e^{-\xi} (\cos\xi + \sin\xi) \\ \phi(\xi) &= -\frac{F\beta^2}{k} e^{-\xi} \sin\xi \\ M(\xi) &= \frac{F}{4\beta} e^{-\xi} (\cos\xi - \sin\xi) \quad (\xi \geq 0) \\ Q(\xi) &= -\frac{F}{2} e^{-\xi} \cos\xi \\ r(\xi) &= kv(\xi) = \frac{F\beta}{2} e^{-\xi} (\cos\xi + \sin\xi) \end{aligned}$$

Funktioiden (28) arvoja on löydettävissä taulukoituina useissa teoksissa [1, 2, 3]. Niiden kuvaajat on esitetty kuvassa 4.



Kuva 4. Pistekuorman kuormittama äärettömän pitkä palkki

Peräkkäisten 0-kohtien samoin kuin max- ja min-kohtien välit ovat $\xi_0 = \pi$ eli $x_0 = \pi/\beta = \pi\sqrt{4EI/k}$. Vaimennuskerroin on

$$\frac{|v(\xi)|}{|v(\xi+\pi)|} = \frac{|e^{-\xi}|}{|e^{-\xi-\pi}|} = e^{\pi} \approx 23.14$$

ξ :n negatiivisilla arvoilla pätevät tulokset saadaan sijoittamalla lausekkeisiin (28) ξ :n tilalle $-\xi$ ja vaihtamalla lisäksi parittomien suureiden ϕ ja Q merkki

$$\begin{aligned}
 v(\xi) &= \frac{F\beta}{2k} e^{\xi} (\cos\xi - \sin\xi) \\
 \phi(\xi) &= -\frac{F\beta^2}{k} e^{\xi} \sin\xi \\
 (29) \quad M(\xi) &= \frac{F}{4\beta} e^{\xi} (\cos\xi + \sin\xi) \quad (\xi < 0) \\
 Q(\xi) &= \frac{F}{2} e^{\xi} \cos\xi \\
 r(\xi) &= \frac{F\beta}{2} e^{\xi} (\cos\xi - \sin\xi)
 \end{aligned}$$

Pistekuorman kuormittaman palkin ratkaisusta (28) saadaan helposti eri suureiden vaikutusviivat. Pisteeseen $\xi = \beta x$ taipuma etäisyydellä $\alpha = \beta a$ olevasta kuormasta $F = 1$ on

$$v(\xi) = \frac{\beta}{2k} e^{-\alpha} (\cos\alpha + \sin\alpha)$$

Taivutusmomentti on vastaavasti

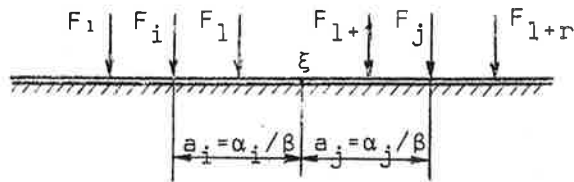
$$M(\xi) = \frac{1}{4\beta} e^{-\alpha} (\cos\alpha - \sin\alpha)$$

Parittomissa suureissa ϕ ja Q on otettava huomioon, onko voiman vaikutuspiste pisteestä ξ vasemmalle vai oikealle

$$\left. \begin{aligned}
 \phi(\xi) &= \pm \frac{\beta^2}{2k} e^{-\alpha} \sin\alpha \\
 Q(\xi) &= \pm \frac{1}{2} e^{-\alpha} \cos\alpha
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Jos voima pisteessä } \xi - \alpha : \\ \text{ylempi merkki} \\ \\ \text{Jos voima pisteessä } \xi + \alpha : \\ \text{alempi merkki. } \alpha \geq 0. \end{array}$$

Esimerkki 1. Ks. kuva 5.

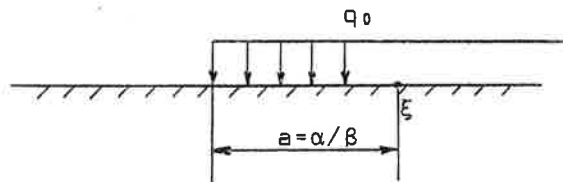
$$\begin{aligned}
 v(\xi) &= \frac{\beta}{2k} \sum_{k=1}^{1+r} F_i e^{-\alpha_i} (\cos\alpha_i + \sin\alpha_i) \\
 \phi(\xi) &= \frac{\beta^2}{2k} \left[-\sum_{j=1}^1 F_j e^{-\alpha_j} \sin\alpha_j + \sum_{j=1+1}^{1+r} F_j e^{-\alpha_j} \sin\alpha_j \right]
 \end{aligned}$$



Kuva 5.

Esimerkki 2. Ks. kuva 6.

$$\begin{aligned}
 M(\xi) &= \frac{1}{4\beta} \left[\int_0^{\alpha} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) q_0 \frac{d\xi}{\beta} + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) q_0 \frac{d\xi}{\beta} \right] \\
 &= \frac{q_0}{4\beta^2} \left[\int_0^{\alpha} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) d\xi + \int_0^{\infty} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) d\xi \right] \\
 &= \frac{q_0}{4\beta^2} \left[\int_0^{\alpha} e^{-\xi} \sin \xi + \int_0^{\infty} e^{-\xi} \sin \xi \right] = \frac{q_0}{4\beta^2} e^{-\alpha} \sin \alpha \\
 Q(\xi) &= -\frac{1}{2} \int_0^{\alpha} e^{-\xi} \cos \xi q_0 \frac{d\xi}{\beta} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \cos \xi q_0 \frac{d\xi}{\beta} \\
 &= -\frac{q_0}{2\beta} \int_0^{\alpha} e^{-\xi} \cos \xi d\xi + \frac{q_0}{2\beta} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \cos \xi d\xi \\
 &= -\frac{q_0}{2\beta} \int_0^{\alpha} \frac{1}{2} e^{-\xi} (-\cos \xi + \sin \xi) + \frac{q_0}{2\beta} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\xi} (-\cos \xi + \sin \xi) \\
 &= \frac{q_0}{4\beta} e^{-\alpha} (\cos \alpha - \sin \alpha)
 \end{aligned}$$



Kuva 6.

2.2 Voimaparin kuormittama äärettömän pitkä palkki

Seuraavana käsitellään voimaparin kuormittamaa palkkia (kuva 7). Haetaan ratkaisu palkin oikealle puoliskolle. Antisymmetriasta johtuen reunaehdot ovat origossa

$$(30) \quad v(0) = 0, \quad M(+0) = M_0/2$$

Ottaen huomioon että $B_1 = B_2 = 0$ lausekkeista (14) ja (15) saadaan yhtälöt

$$B_3 = 0, \quad 2EI\beta^2 B_4 = M_0/2$$

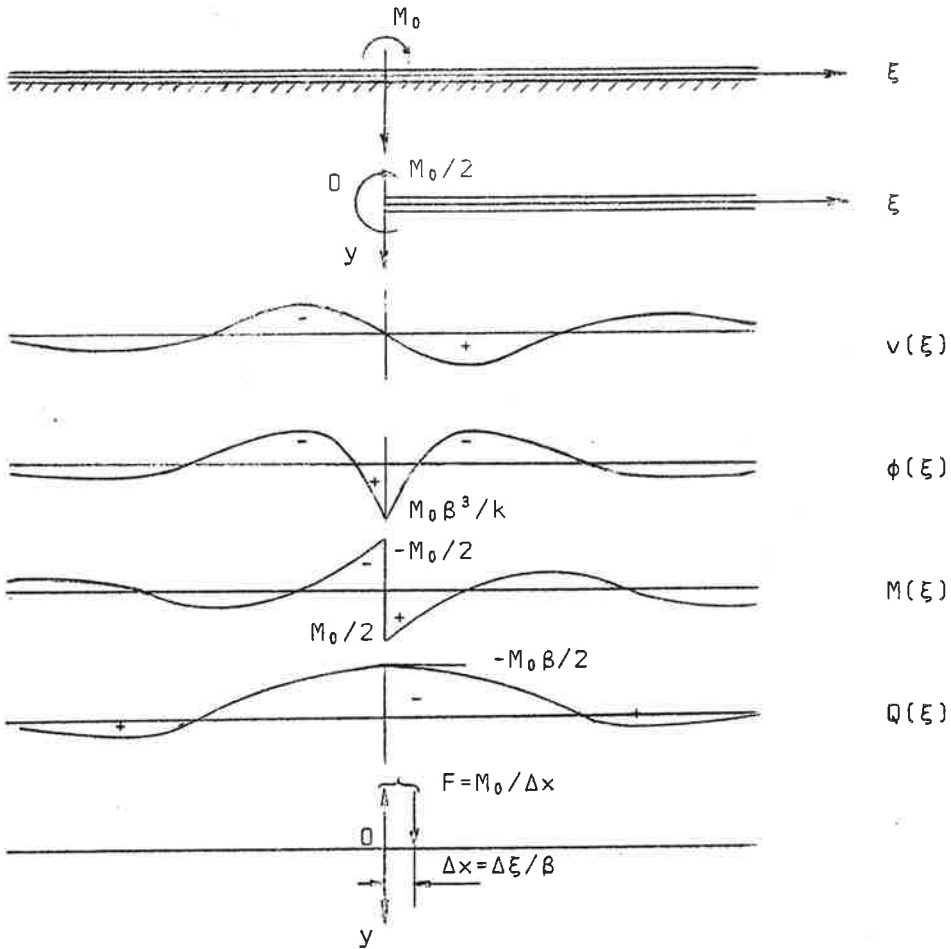
Taipumalle ym. suureille saadaan silloin lausekkeet

$$(31) \quad \begin{aligned} v(\xi) &= \frac{M_0 \beta^2}{k} e^{-\xi} \sin \xi \\ \phi(\xi) &= \frac{M_0 \beta^3}{k} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) \\ M(\xi) &= \frac{M_0}{2} e^{-\xi} \cos \xi \quad (\xi > 0) \\ Q(\xi) &= -\frac{M_0 \beta}{2} e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) \\ r(\xi) &= M_0 \beta^2 e^{-\xi} \sin \xi \end{aligned}$$

Negatiivisilla ξ :n arvoilla pätevät tulokset saadaan vaihtamalla ξ :n paikalle $-\xi$ ja muuttamalla lisäksi parittomien suureiden v ja M merkki

$$(32) \quad \begin{aligned} v(\xi) &= \frac{M_0 \beta^2}{k} e^{\xi} \sin \xi \\ \phi(\xi) &= \frac{M_0 \beta^3}{k} e^{\xi} (\cos \xi + \sin \xi) \\ M(\xi) &= -\frac{M_0}{2} e^{\xi} \cos \xi \quad (\xi < 0) \\ Q(\xi) &= -\frac{M_0 \beta}{2} e^{\xi} (\cos \xi - \sin \xi) \\ r(\xi) &= M_0 \beta^2 e^{\xi} \sin \xi \end{aligned}$$

Funktioiden (31) kuvaajat on esitetty kuvassa 7.



Kuva 7. Voimaparin kuormittama äärettömän pitkä palkki.

Voimaparin kuormittaman palkin ratkaisu v_M saadaan myös derivoimalla pistekuormalla kuormitetun palkin taipuman lauseke v_F (28). Kuvan 7 mukaan saadaan

$$\begin{aligned}
 v_M(\xi) &= \lim_{\Delta \xi \rightarrow 0} \left[\frac{M_0 \beta}{\Delta \xi} v_F(\xi - \Delta \xi) - \frac{M_0 \beta}{\Delta \xi} v_F(\xi) \right] \\
 &= \lim_{\Delta \xi \rightarrow 0} M_0 \beta \frac{v_F(\xi - \Delta \xi) - v_F(\xi)}{\Delta \xi} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= M_0 \beta \left(- \frac{dv_F}{d\xi} \right) = - \frac{M_0 \beta^2}{2k} \frac{d}{d\xi} \left[e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) \right] \\
 &= \frac{M_0 \beta^2}{2k} e^{-\xi} \sin \xi
 \end{aligned}$$

2.3 Pistekuorman ja voimaparin kuormittama "puoliääretön" palkki

Palkin vasemmassa päässä vaikuttavat pistekuorma F ja voimapari M_0 (kuva 8). Reunaehdot ovat

$$(33) \quad M(0) = M_0, \quad Q(0) = -F$$

Yksityisratkaisu on $v_0 \equiv 0$, ja homogeenisen yhtälön ratkaisussa (14) on $B_1 = B_2 = 0$, sillä $v(\xi) \rightarrow 0$ kun $\xi \rightarrow \infty$. Reunaehtojen perusteella saadaan yhtälöt

$$2EI\beta^2 B_4 = M_0, \quad -2EI\beta^3 (B_3 + B_4) = -F$$

joista seuraa

$$B_3 = (F - M_0\beta)/2EI\beta^3 = 2(F - M_0\beta)\beta/k,$$

$$B_4 = M_0/2EI\beta^2 = 2M_0\beta^2/k.$$

Siirtymä- ja jännitystilaa kuvaavat lausekkeet ovat silloin

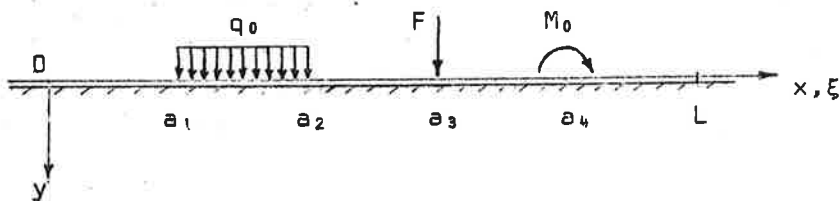
$$\begin{aligned}
 v(\xi) &= \frac{2\beta}{k} e^{-\xi} [(F - M_0\beta)\cos\xi + M_0\beta\sin\xi] \\
 \phi(\xi) &= - \frac{2\beta^2}{k} e^{-\xi} [(F - 2M_0\beta)\cos\xi + F\sin\xi] \\
 (34) \quad M(\xi) &= \frac{1}{\beta} e^{-\xi} [M_0\beta\cos\xi - (F - M_0\beta)\sin\xi] \\
 Q(\xi) &= - e^{-\xi} [F\cos\xi - (F - 2M_0\beta)\sin\xi] \\
 r(\xi) &= 2\beta e^{-\xi} [(F - M_0\beta)\cos\xi + M_0\beta\sin\xi]
 \end{aligned}$$



Kuva 8. Pistekuorman ja voimaparin kuormittama palkki.

3. ÄÄRELLINEN PALKKI

Äärellisen palkin ratkaisemiseen on edullista käyttää lausekkeita (25). Ratkaisun muodostamisen periaate selviää kuvan 9 kaavioista ja seuraavista esimerkeistä.



Väli	Ratkaisu
$0 \leq x \leq a_1$	$\sum_{i=1}^4 C_i Y_i(\xi)$
$a_1 \leq x \leq a_2$	- " - $+ \frac{q_0}{k} [1 - Y_1(\xi - a_1)]$
$a_2 \leq x \leq a_3$	- " - $+ \frac{q_0}{k} [Y_1(\xi - a_2) - Y_1(\xi - a_1)]$
$a_3 \leq x \leq a_4$	- " - $+ \frac{4FB}{k} Y_4(\xi - a_3)$
$a_4 \leq x \leq L$	- " - $- \frac{4M_0\beta^2}{k} Y_3(\xi - a_4)$

Kuva 9. Äärellisen palkin ratkaisun muodostaminen

Esimerkki 1.

Kuormitustapauksen 0) ratkaisu saadaan supernomilla tapaukset 1) ja 2).

Tapaus 1: $P_1 = (F_1 + F_2)/2$

Reunaehdot:

$$\begin{cases} \phi(0) = 0, Q(0) = 0 \text{ (symmetria)} \\ M(L) = 0, Q(L) = P_1 \end{cases}$$

Kaavojen (25) perusteella $C_2^{(1)} = C_4^{(1)} = 0$.

$$\begin{cases} -4C_1^{(1)}Y_3(\lambda) + C_3^{(1)}Y_2(\lambda) = 0 \\ -4C_1^{(1)}Y_2(\lambda) - 4C_3^{(1)}Y_4(\lambda) = -P_1/EI\beta^3 \end{cases} \quad (\lambda = \beta L)$$

Integroimisvakiot ovat

$$\begin{cases} C_1^{(1)} = \frac{4P_1\beta}{k} \frac{Y_1(\lambda)}{16Y_3(\lambda)Y_4(\lambda) + 4Y_1(\lambda)Y_2(\lambda)} = \\ = \frac{4P_1\beta}{k} \frac{\cosh \beta L \cos \beta L}{\sinh 2\beta L + \sin 2\beta L} \\ C_3^{(1)} = \frac{4P_1\beta}{k} \frac{4Y_3(\lambda)}{16Y_3(\lambda)Y_4(\lambda) + 4Y_1(\lambda)Y_2(\lambda)} = \\ = \frac{8P_1\beta}{k} \frac{\sinh \beta L \sin \beta L}{\sinh 2\beta L + \sin 2\beta L} \end{cases}$$

Ratkaisu on $v_1(\xi) = C_1^{(1)}Y_1(\xi) + C_3^{(1)}Y_3(\xi)$

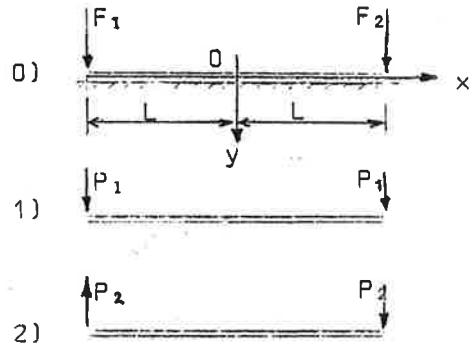
Tapaus 2. $P_2 = (F_2 - F_1)/2$

Reunaehdot:

$$\begin{cases} v(0) = 0, M(0) = 0 \text{ (antisymmetria)} \\ M(L) = 0, Q(L) = P_2 \end{cases}$$

Kaavojen (25) perusteella $C_1^{(2)} = C_3^{(2)} = 0$

$$\begin{cases} -4C_2^{(2)}Y_4(\lambda) + C_4^{(2)}Y_2(\lambda) = 0 \\ -4C_2^{(2)}Y_3(\lambda) + C_4^{(2)}Y_1(\lambda) = -P_2/EI\beta^3 \end{cases}$$



Kuva 10.

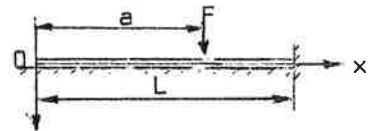
Integroimisvakiot ovat:

$$\left\{ \begin{aligned} C_2^{(2)} &= \frac{4P_2\beta}{k} \frac{Y_2(\lambda)}{4Y_2(\lambda)Y_3(\lambda) - 4Y_1(\lambda)Y_4(\lambda)} = \\ &= \frac{4P_2\beta}{k} \frac{\cosh \beta L \sin \beta L + \sinh \beta L \cos \beta L}{\sinh 2\beta L - \sin 2\beta L} \\ C_4^{(2)} &= \frac{4P_2\beta}{k} \frac{4Y_4(\lambda)}{4Y_2(\lambda)Y_3(\lambda) - 4Y_1(\lambda)Y_4(\lambda)} = \\ &= \frac{8P_2\beta}{k} \frac{\cosh \beta L \sin \beta L - \sinh \beta L \cos \beta L}{\sinh 2\beta L - \sin 2\beta L} \end{aligned} \right.$$

Ratkaisu on $v_2(\xi) = C_2^{(2)} Y_2(\xi) + C_4^{(2)} Y_4(\xi)$

Esimerkki 2.

$$\text{Reunaehdot: } \begin{cases} M(0) = 0, Q(0) = 0 \\ v(L) = 0, \phi(L) = 0 \end{cases}$$



Y Kuva 11.

Reunaehdoista ja kaavoista (25) seuraa:

$$\begin{aligned} C_3 &= C_4 = 0 \\ C_1 Y_1(\lambda) + C_2 Y_2(\lambda) + \frac{4F\beta}{k} Y_4(\lambda - \alpha) &= 0 \\ -4C_1 Y_4(\lambda) + C_2 Y_1(\lambda) + \frac{4F\beta}{k} Y_3(\lambda - \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Integroimisvakiot ovat:

$$\begin{aligned} C_1 &= - \frac{4F\beta}{k} \frac{Y_1(\lambda) Y_4(\lambda - \alpha) - Y_2(\lambda) Y_3(\lambda - \alpha)}{[Y_1(\lambda)]^2 + 4Y_2(\lambda)Y_4(\lambda)} \\ C_2 &= - \frac{4F\beta}{k} \frac{Y_1(\lambda) Y_3(\lambda - \alpha) + 4Y_4(\lambda) Y_4(\lambda - \alpha)}{[Y_1(\lambda)]^2 + 4Y_2(\lambda)Y_4(\lambda)} \end{aligned}$$

Ratkaisu on

$$v(\xi) = \begin{cases} C_1 Y_1(\xi) + C_2 Y_2(\xi), & \text{kun } 0 \leq \xi \leq \alpha = \beta a \\ C_1 Y_1(\xi) + C_2 Y_2(\xi) + \frac{4F\beta}{k} Y_4(\xi - \alpha), & \text{kun} \\ \alpha \leq \xi \leq \beta L \end{cases}$$

Äärellisen palkin kuormitustapauksia voidaan ratkaista myös superponoimalla äärettömän pitkän palkin ratkaisuja. Käsitellään lyhyesti H e t é n y i n esittämää tapaa (kuva 12). Tarkastellaan äärettömän pitkää palkkia,

johon kuormitus vaikuttaa. Se aiheuttaa palkin päiden kohdalla jännitysresultantit M_{i0} , Q_{i0} $i = 1, 2$. Sitten sijoitetaan palkin päiden kohdalle, hiukan palkin ulkopuolelle, toistaiseksi tuntemattomat kuormat T_k , R_k , jotka aiheuttavat äärettömän pitkään palkkiin palkin päiden kohdalle jännitysresultantit M_{ik}^T , Q_{ik}^T , M_{ik}^R , Q_{ik}^R . Kuormat T_k ja R_k määritetään siten että palkin päiden kohdalla taivutusmomentti ja leikkausvoima häviävät

$$(a) \quad \begin{cases} M_{i0} + M_{i1}^T + M_{i2}^T + M_{i1}^R + M_{i2}^R = 0 \\ Q_{i0} + Q_{i1}^T + Q_{i2}^T + Q_{i1}^R + Q_{i2}^R = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2$$

Merkitään pisteessä 1 sijaitsevan yksikkömomentin $T_1 = 1$ ja yksikkövoiman $R_1 = 1$ pisteissä 1 ja 2 aiheuttamia taivutusmomentteja ja leikkausvoimia seuraavasti

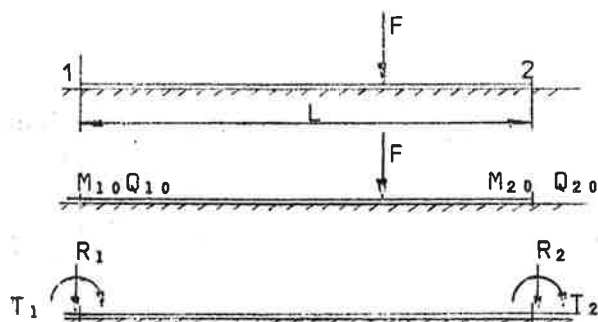
$$(35) \quad \begin{cases} T_1 = 1 \Rightarrow m_{11}^t = \frac{1}{2}, \quad m_{21}^t = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \cos \lambda, \quad q_{11}^t = -\frac{\beta}{2}, \\ \quad \quad \quad q_{21}^t = -\frac{\beta}{2} e^{-\lambda} (\cos \lambda + \sin \lambda) \\ R_1 = 1 \Rightarrow m_{11}^r = \frac{1}{4\beta}, \quad m_{21}^r = \frac{1}{4\beta} e^{-\lambda} (\cos \lambda - \sin \lambda), \\ \quad \quad \quad q_{11}^r = -\frac{1}{2}, \quad q_{21}^r = -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \cos \lambda \end{cases}$$

Silloin yhtälöt (a) voidaan kirjoittaa muotoon

$$(36) \quad \begin{cases} M_{10} + m_{11}^t T_1 - m_{21}^t T_2 + m_{11}^r R_1 + m_{21}^r R_2 = 0 \\ Q_{10} + q_{11}^t T_1 + q_{21}^t T_2 + q_{11}^r R_1 - q_{21}^r R_2 = 0 \\ M_{20} + m_{21}^t T_1 - m_{11}^t T_2 + m_{21}^r R_1 + m_{11}^r R_2 = 0 \\ Q_{20} + q_{21}^t T_1 + q_{11}^t T_2 + q_{21}^r R_1 - q_{11}^r R_2 = 0 \end{cases}$$

Näistä yhtälöistä T_1 , T_2 , R_1 ja R_2 ovat ratkaistavissa. Symmetrian tai antisymmetrian hyväksikäyttö vähentää tun-

temattomien lukumäärän kahteen. Muut reunaehtotapaukset ovat käsiteltävissä vastaavalla tavalla.



Kuva 12. Äärellisen palkin ratkaisu Hetényin tavalla.

4. LEIKKAUSMUODONMUUTOKSEN VAIKUTUS

Leikkausjännitysten vaikutuksesta palkissa syntyy myös leikkausmuodonmuutoksia eli liukumia, jotka lisäävät palkin taipumaa, tosin yläensä vain vähän. Leikkausjännitysten epätasaisesta jakautumisesta johtuu, että liukumien eivät ole yhtä suuria poikkileikkausten kaikissa pisteissä. Tästä on seurauksena poikkileikkaustasojen käyristymisen. Leikkausjännitysten vaikutus palkin taipumaan voidaan hyvällä tarkkuudella ottaa huomioon laskemalla keskimääräinen liukuma

$$(37) \quad \gamma = \frac{\zeta}{GA} Q$$

Poikkipinnan siirtymäkerroin ζ lasketaan kaavasta

$$\zeta = \frac{A}{I^2} \int_{-h_1}^{h_2} \frac{[S(y)]^2}{b(y)} dy$$

Suorakaitteelle $\zeta = 1,2$, I-palkille $\zeta = 2,0 - 2,4$.

Palkin kinemaattiset suureet on esitetty kuvassa 13. Poikkileikkaustason kiertymää on merkitty ψ :lla, ja sen derivaatta kuvaa taivutusmomentin aiheuttamaa muodonmuutosta κ . Siirtymien ja muodonmuutosten väliset yhteydet ovat

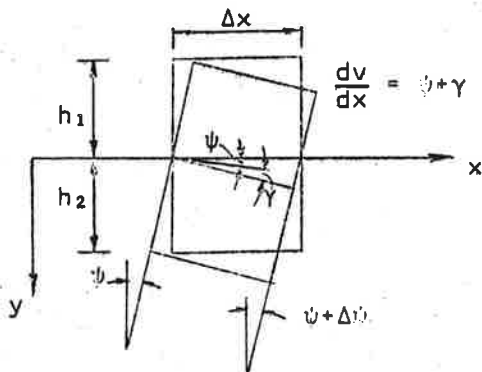
$$(38) \quad \gamma = \frac{dv}{dx} - \psi, \quad \kappa = -\frac{d\psi}{dx} = -\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d\gamma}{dx}$$

Palkin differentiaaliyhtälö saadaan yhtälöistä (38), (2), (3) ja (37) eliminoimalla muut suureet lukuunottamatta taipumaa v

$$M = -EI \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\zeta EI}{GA} \frac{dQ}{dx} = -EI \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\zeta EI \kappa}{GA} v(x) - \frac{\zeta EI}{GA} q(x)$$

$$(39) \quad EI \frac{d^4v}{dx^4} - \frac{\zeta EI \kappa}{GA} \frac{d^2v}{dx^2} + kv(x) = q(x) - \frac{\zeta EI}{GA} \frac{d^2q}{dx^2}$$

Yhtälön (39) ratkaisuja on esitetty julkaisuissa [6, 7]. Niissä on myös osoitettu, että leikkausmuodonmuutoksen vaikutus on merkittävän suuri, jos palkki on lyhyt tai jos alustakerroin on suuri verrattuna palkin kimmomoduuliin.



Kuva 13. Palkin muodonmuutokset

5. AKSIAALISESTI KUORMITETTU PALKKI

Palkkiin vaikuttaa aksiaalinen kuorma F , jonka vaikutus tasapainoyhtälöihin otetaan huomioon. Kuvan 14 mukaan y -suuntaisten voimien tasapainoehdoiksi tulee

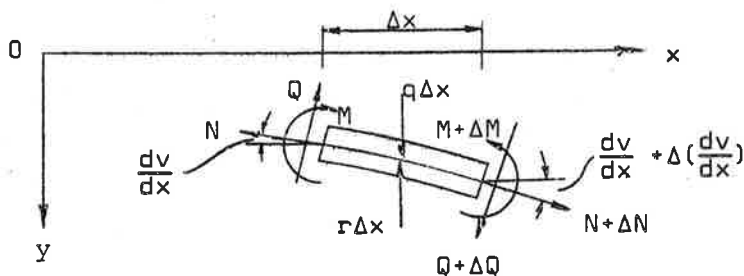
$$\frac{dQ}{dx} + q - r + \frac{d}{dx}(N \frac{dv}{dx}) = 0$$

Jos x -akselin suuntaisia ^{jakautuneita} kuormia ei vaikuta, on $N = F$ ja $\frac{dN}{dx} \equiv 0$. Eliminoimalla leikkausvoima saadaan tasapainoyhtälö

$$(40) \quad \frac{d^2 M}{dx^2} + F \frac{d^2 v}{dx^2} + q(x) - r(x) = 0$$

Taipuman differentiaaliyhtälöksi tulee sijoittamalla $M = -EIv''$ ja $r = kv$

$$(41) \quad \frac{d^2}{dx^2}(EI \frac{d^2 v}{dx^2}) - F \frac{d^2 v}{dx^2} + kv(x) = q(x)$$



Kuva 14. Aksiaalisesti kuormitettu palkki.

Tarkastellaan lähemmin tapausta, jossa $EI = \text{vakio}$ ja F on puristava voima $F = -P$, $P > 0$. Silloin yhtälö (41) voidaan kirjoittaa muotoon

$$(42) \quad \frac{d^4 v}{dx^4} + 4\beta^2 \omega \frac{d^2 v}{dx^2} + 4\beta^4 v(x) = \frac{q(x)}{EI}$$

tai

$$(42)_2 \quad \frac{d^4 v}{d\xi^2} + 4\omega \frac{d^2 v}{d\xi^2} + 4v(\xi) = \frac{4q(\xi)}{k}$$

jossa

$$(43) \quad \omega = \frac{P}{EI} \cdot \frac{1}{4\beta^2} = \frac{P}{EI} \sqrt{\frac{EI}{4k}}, \quad (\omega > 0)$$

Yhtälöä (42)₂ vastaava karakteristinen yhtälö on $r^4 + 4\omega r^2 + 4 = 0$ jonka juuret ovat

$$a) \quad \omega < 1 \quad r_{1,2,3,4} = \pm(\alpha_1 \pm i\alpha_2), \quad \alpha_1 = \sqrt{1-\omega}, \quad \alpha_2 = \sqrt{1+\omega}$$

$$b) \quad \omega = 1 \quad r_{1,2} = +i\sqrt{2}, \quad r_{3,4} = -i\sqrt{2}$$

$$c) \quad \omega > 1 \quad r_{1,2} = \pm i\gamma_1, \quad r_{3,4} = \pm i\gamma_2, \quad \gamma_1 = \sqrt{\omega - \sqrt{\omega^2 - 1}}, \\ \gamma_2 = \sqrt{2} \sqrt{\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}}$$

Yhtälön (42)₂ ratkaisu on silloin

$$a) \quad v(\xi) = \cos\alpha_2 \xi (C_1 \cosh\alpha_1 \xi + C_2 \sinh\alpha_1 \xi) + \sin\alpha_2 \xi (C_3 \cosh\alpha_1 \xi + C_4 \sinh\alpha_1 \xi) + v_0(\xi)$$

$$(44) \quad b) \quad v(\xi) = \cos\sqrt{2}\xi (C_1 + C_2 \xi) + \sin\sqrt{2}\xi (C_3 + C_4 \xi) + v_0(\xi)$$

$$c) \quad v(\xi) = C_1 \cos\gamma_1 \xi + C_2 \sin\gamma_1 \xi + C_3 \cos\gamma_2 \xi + C_4 \sin\gamma_2 \xi + v_0(\xi)$$

Esimerkki. Kimmoisesti tuetun pilarin nurjahtaminen.

Aksiaalinen kuorma P , poikittainen kuorma $q \equiv 0$. Tarkastellaan nivelöityä sauvaa, jonka reunaehdot ovat:

$$v(0) = M(0) = 0, \quad v(L) = M(L) = 0$$

Tarkastellaan aluksi tapausta $c) \omega > 1$. Integroimisvakioiden C_i määrittämiseksi saadaan yhtälöryhmä

C_1	C_2	C_3	C_4	k
1	0	1	0	0
γ_1^2	0	γ_2^2	0	0
$\cos\gamma_1 \lambda$	$\sin\gamma_1 \lambda$	$\cos\gamma_2 \lambda$	$\sin\gamma_2 \lambda$	0
$\gamma_1^2 \cos\gamma_1 \lambda$	$\gamma_1^2 \sin\gamma_1 \lambda$	$\gamma_2^2 \cos\gamma_2 \lambda$	$\gamma_2^2 \sin\gamma_2 \lambda$	0

Yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu vain jos sen determinantti on nolla

$$\text{Det} = -(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \sin \gamma_1 \lambda \sin \gamma_2 \lambda = 0$$

Det = 0, jos

a) $\sin \gamma_1 \lambda = 0$ eli $\gamma_1 \lambda = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow 2\omega - 2\sqrt{\omega^2 - 1} = \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2$

b) $\sin \gamma_2 \lambda = 0$ eli $\gamma_2 \lambda = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow 2\omega + 2\sqrt{\omega^2 - 1} = \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2$

Tästä seuraa $\pm 2\sqrt{\omega^2 - 1} = \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 - 2\omega$, josta saadaan

$$\omega = \left(\frac{\lambda}{n\pi}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2$$

Haetaan ω :n minimi n :n muuttuessa, ts. se n :n arvo, jolla erotus

$$\begin{aligned} \omega(n+1) - \omega(n) &= \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \left[\frac{4}{(n+1)^2} + \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^4 (n+1)^2 - \frac{4}{n^2} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^4 n^2 \right] = \frac{2n+1}{4} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \left[\frac{-4}{(n+1)^2 n^2} + \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^4 \right] \end{aligned}$$

muuttaa merkkinsä negatiivisesta positiiviseksi. Ko. arvo on

$$\frac{1}{2} \sqrt{8\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 + 1} - \frac{1}{2} \leq n^* < \frac{1}{2} \sqrt{8\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 + 1} + \frac{1}{2}$$

Nurjahduskuorman arvo on

$$\begin{aligned} P_{kr} &= 4\beta^2 EI \omega(n^*) = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \left[(n^*)^2 + \frac{4}{(n^*)^2} \left(\frac{\beta L}{\pi}\right)^4 \right] \approx \\ &\approx 4\beta^2 EI = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \left(\frac{2\beta L}{\pi}\right)^2 \end{aligned}$$

Tapauksessa $\omega = 1$ on $P = 4\beta^2 EI = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \left(\frac{2\beta L}{\pi}\right)^2$. Ker-
toimien C_i determinantin tarkastelu osoittaa, että nurjah-
taminen on mahdollista vain jos $\sqrt{2}\lambda = n\pi$ eli $\beta L = n\pi/\sqrt{2}$.
Tapauksessa $\omega < 1$ tasapainotila on stabiili.

6. MUITA RATKAISUMENETELMIÄ

6.1 Potentiaalienergian minimin periaate

Palkin muodonmuutosenergia, jossa vain taivutus on otettu huomioon, on

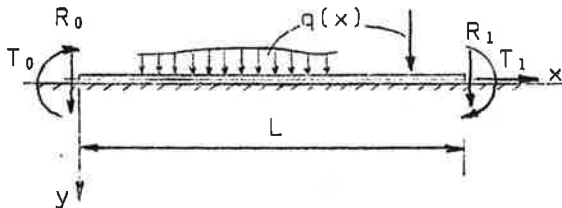
$$(45) \quad U_p = \frac{1}{2} \int_0^L M_k dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx$$

Alustan muodonmuutosenergia on

$$(46) \quad U_a = \frac{1}{2} \int_0^L rv dx = \frac{1}{2} \int_0^L kv^2 dx$$

Ulkoisten kuormien potentiaali on (kuva 15)

$$(47) \quad V = - \int_0^L qv dx - R_0 v(0) - R_1 v(L) - T_0 \phi(0) - T_1 \phi(L)$$



Kuva 15.

Edellä U_p :n ja U_a :n lausekkeissa palkin jäykkyyden EI ja alustakertoimen k ei tarvitse olla vakioita, vaan ne saattavat olla x :n funktioita.

Potentiaalienergian minimin periaatteen mukaan kokonaispotentiaalienergialla on minimiarvo tasapainotilassa

$$(48) \quad \Pi = U_p + U_a + V = \min$$

Minimiehdosta voidaan johtaa tasapainoyhtälö ts. palkin

kimmoiviivan differentiaaliyhtälö ja reunaehdot. Sitä voidaan käyttää myös suoraan likiratkaisujen määrittämiseen.

Likiratkaisua määritettäessä menetellään seuraavasti. Valitaan funktiojono

$$\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$$

jolle asetetaan vaatimukset

1. funktiot ϕ_i lineaarisesti riippumattomia,
2. funktiot ϕ_i toteuttavat olennaiset, so. kinemaattiset reunaehdot
3. jono on täydellinen siinä mielessä, että jokainen kahdesti derivoituva, kinemaattiset reunaehdot toteuttava funktio voidaan mielivaltaisella tarkkuudella esittää sarjana $\sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x)$.

Tällaisia funktiojonoja ovat esim. polynomit ja trigonometriset funktiot.

Haetaan likiratkaisu muodossa

$$(49) \quad v_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x)$$

jossa kertoimet a_i määritetään ehdon (48) perusteella. Kun v_n :n lauseke sijoitetaan potentiaalienergian Π lausekkeeseen siitä tulee kertoimien a_i funktio $\Pi(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Minimin välttämättömät ehdot ovat

$$(50) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Nämä muodostavat lineaarisen yhtälöryhmän

$$(51) \quad \sum_{k=1}^n B_{ik} a_k - C_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

jossa

$$(52) \quad B_{ik} = \int_0^L (EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_k}{dx^2} + k \phi_i \phi_k) dx, \quad C_i = \int_0^L q \phi_i dx +$$

$$+ R_0 \phi_i(0) + R_1 \phi_i(L) + T_0 \left. \frac{d\phi_i}{dx} \right|_0 + T_1 \left. \frac{d\phi_i}{dx} \right|_L$$

Menetelmän tarkkuus riippuu suuresti koordinaattifunktioiden ϕ_i valinnasta; jos siinä onnistutaan, antaa jo muutamien termien käyttö hyvän tuloksen.

Esimerkki. Jäykästi kiinnitetty palkki, jolla on tasainen kuorma $q(x) = q_0$. Kinemaattiset (olennaiset) reunaehdot ovat

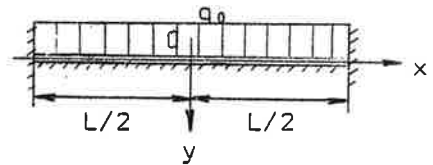
$$v(-\frac{L}{2}) = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=-\frac{L}{2}} = 0, \quad v(\frac{L}{2}) = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=\frac{L}{2}} = 0$$

Valitaan koordinaattifunktioiksi

$$\phi_i(x) = \left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 - x^2 \right]^2 x^{2(i-1)},$$

$$i = 1, 2, \dots$$

jossa symmetrisyys origon suhteen on otettu huomioon. Käytetään vain 1. termiä $\phi_1 = \left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 - x^2 \right]^2$, jolloin saadaan yhtälö



Kuva 16.

$$B_{11} a_1 - C_1 = 0$$

$$B_{11} = 2 \int_0^{L/2} \{ EI [12x^2 - 4\left(\frac{L}{2}\right)^2]^2 + k \left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 - x^2 \right]^4 \} dx =$$

$$= \frac{4}{5} EIL^5 + \frac{1}{630} kL^9$$

$$C_1 = 2 \int_0^{L/2} q_0 \left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 - x^2 \right]^2 dx = \frac{1}{30} q_0 L^5$$

a_1 :n arvo on $a_1 = \frac{1}{24 [1 + (\beta L)^4 / 126]} \frac{q_0}{EI}$. Esim tapauksessa $\beta L = 2$ saadaan $v(0) = 0.148 \frac{q_0}{k}$ tarkan ratkaisun ollessa $v(0) = 0.1473 \frac{q_0}{k}$.

6.2 Vaikutusfunktioiden käyttö

Tarkastellaan asiaa erään esimerkin valossa (kuva 17). Taipuman vaikutusfunktio 2-tukiselle vapaasti tuetulle palkille on

$$G(x, \xi) = \frac{L^3}{6EI} \begin{cases} \left(\frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(1 - \frac{\xi}{L}\right)^2\right], & 0 \leq x \leq \xi \\ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{\xi}{L}\right) \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{L}\right)^2\right], & \xi \leq x \leq L \end{cases}$$

Vastaavan kimmoisella alustalla

olevan palkin kuorma on

$q(x) - k(x)v(x)$ joten taipuma on

$$(53) \quad v(x) = \int_0^L G(x, \xi) [q(\xi) - k(\xi)v(\xi)] d\xi = \\ = v_0(x) - \int_0^L G(x, \xi) k(\xi)v(\xi) d\xi$$

v_0 on 2-tukisen vapaasti tuetun palkin taipuma tunnetusta kuormasta q . Yhtälö (53) saadaan symmetriseen muotoon ottamalla uudeksi tuntemattomaksi $\bar{v}(x) = \sqrt{k(x)} v(x)$

$$(54) \quad \bar{v}(x) = \bar{v}_0(x) - \int_0^L K(x, \xi) \bar{v}(\xi) d\xi$$

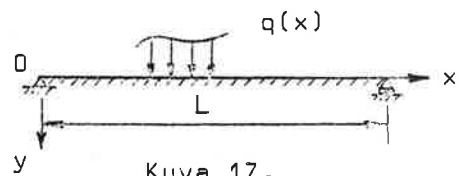
Yhtälön (54) ydin on symmetrinen

$$K(x, \xi) = \sqrt{k(x)k(\xi)} G(x, \xi)$$

Edellä saatu integraaliyhtälö on 2. lajin Fredholm'n yhtälö, jonka ratkaiseminen käy päinsä varsin helposti [9].

Integraaliyhtälöä (53) tai (54) voidaan käyttää iteratiiviseen ratkaisemiseen myös siinä tapauksessa, että alusta on epälineaarisesti kimmainen. Otaksutaan, että alustapaineen ja painuman välinen riippuvuus on

$$p(x) = k(x)v(x) [1 + \gamma(v(x))^2]$$



Silloin integraaliyhtälö (53) saa muodon

$$v(x) = v_0(x) - \int_0^L G(x, \xi) k(\xi) v(\xi) [1 + \gamma(v(\xi))^2] d\xi$$

josta saadaan iteraatioprosessi

$$v^{(n+1)} = v_0 - \int_0^L G(x, \xi) k(\xi) v^{(n)}(\xi) [1 + \gamma(v^{(n)}(\xi))^2] d\xi$$

$$n = 0, 1, \dots$$

Ensimmäiseksi likiarvoksi $v^{(0)}$ voidaan ottaa lineaarisen tapauksen ratkaisu.

6.3 Muut menetelmät

Sopivia ratkaisutapoja ovat myös

- differenssimenetelmä
- trigonometrinen sarjojen käyttö

7. LASKENTATAVAN VALINTA

Palkin pituutta karakterisoi suure βL , jossa

$\beta = \sqrt{k/4EI}$ ja L palkin pituus. Timoshenkon mukaan [2] voidaan jaotella

- 1) lyhyet palkit $\beta L < 0.6$
- 2) keskipitkät palkit $0.6 < \beta L < 5$
- 3) pitkät palkit $5 < \beta L$

Lyhyitä palkkeja voidaan pitää täysin jäykkänä alustaan verrattuna ($EI = \infty \Rightarrow \beta = 0, \beta L = 0$). Keskipitkiä palkkeja

on käsiteltävä äärellisen pituisina, kun taas pitkiin palkkeihin voidaan soveltaa äärettömän pitkän palkin tuloksia.

Kirjallisuutta

1. Ylinen, A., Kimmo- ja lujuusoppi I. 2, painos, Porvoo 1965. s. 305 - 320.
2. Timoshenko, S.P., Strength of materials II. 3. painos. Van Nostrand Company 1956. s. 1 - 25.
3. Hetényi, M., Beams on elastic foundation. Ann Arbor, Univ. of Michigan Press, 1946.
4. Asplund, S.O., Structural mechanics. Prentice - Hall, 1966. s. 275 - 286.
5. Prager, W., ZAMM, 1927. s. 354.
6. Mikkola, M. ja Ylinen, A., Acta Polytechnica Scandinavica. Ci 23, 1964.
7. Mikkola, M., VTT:n julk. 121. Helsinki 1967.
8. Filonenko - Boroditsch, M.M., Festigkeitslehre II. Berlin 1954. s. 128 - 153.
9. Tricomi, F.G., Integral equations. Interscience, 1957.
10. Kerr, A.D., Elastic and viscoelastic foundation models. Journal of Appl. Mech. ASME, Sept. 1964. s. 491 - 498.

JULKAISUJA - PUBLICATIONS

1. V a u l a m o, Rauno, Kirjallisuustutkimus kovettuneen betonin pinnan laatuun vaikuttavista tekijöistä. 55 s. 1970.
2. L a a k s o, Mikko, Yhdistetyn väännön, taivutuksen ja normaalivoiman kuormittama teräsbetoninen suorakaidepalkki.
3. P u l l i a i n e n, Veli-Pekka, Yhdistetyn väännön, taivutuksen ja normaalivoiman kuormittama teräsbetoninen suorakaidepalkki. 203 s. 1972.
4. K a j a v a, Antero - K a n e r v a, Pekka, Katsaus kovettuneen betonin ominaisuuksiin, 126 s. 1973.
5. V i i p u r i, Hannu, Lasikuituvahvisteiset lujitemuovi-muotit. 23 s. 1973.
6. L e p p ä v u o r i, Erkki, Jään fysikaaliset ominaisuudet. 55 s. 1974. T u o m i o j a, M. - J u m p p a n e n, P. - R e c h a r d t, T., Jään lujuudesta ja muodonmuutoksista. 4 s. 1973.
7. R e c h a r d t, Tapani, Rajatilamitoituksen soveltaminen betonirakenteisiin. 8 s. 1974.
8. K a n e r v a, Pekka, Reiällisen teräsbetonipalkin mitoittaminen. 170 s. 1974.
9. K a n e r v a, Pekka, Design of reinforced concrete beams with large web openings. 32 s. 1974.
10. J u m p p a n e n, Pauli - M ä k e l ä i n e n, Pentti, On the creep properties of polynivyl-cloride, Aika-lämpötilasuperpositioperiaatteen soveltaminen muovien käyttäytymiseen. 47 s. 1975.
11. T u o m a l a, Markku, Taipuisten laattojen analysointi elementtimenetelmällä. 98 s. 1975.
12. S a l o v i i n, Keijo, Viskoplastisen ja elastoviskoplastisen laatan analysointi elementtimenetelmällä. 75 s. 1978.
13. Tiivistelmät rakennetekniikan laitoksessa vuosina 1972-1973 valmistuneista diplomitöistä. 110 s. 1976.
14. Tiivistelmät rakennetekniikan laitoksessa vuosina 1974-1975 valmistuneista diplomitöistä. 115 s. 1976.
15. Summaries of theses for the degree of diploma engineer 1972-75. 116 p. 1976.
16. K a i r a, Heikki, Taipuisten laattojen ja laakeiden kuorten geometrisesti ja materiaalisesti epälineaarinen analysointi elementtimenetelmällä. 84 s. 1976.

17. T i l a n t e r ä, T. - R e c h a r d t, T., Bond of reinforcement in lightweight aggregate concrete. 36 p. 1977.
S o l o d o v n i k, A. - K u n n o s, G. - J o h a n s o n R, On Calculation of the porous structure change in the swelling gas-concrete.
18. Licensiaattiseminaari kevät 1976: Jännitetyn betonipalkin laskeminen. 308 s. 1977.
19. Tiivistelmät rakennetekniikan laitoksessa v. 1976-1977 valmistuneista diplomitöistä. 118 s. 1978.
20. Summaries of theses for the degree of diploma engineer 1976-1977. 84 p. 1978.
21. E r a n t i, Esa, Indentation experiments with natural ice plates. 23 s. 1979.
22. P e n t t a l a, Vesa, Avoinpoikkileikkaukselliset ristikko- ja levykannattimet. 61 s. 1979.
23. P a a s i k a l l i o, Kari, Teräsbetonipilarin analysointi ja mitoittaminen. Kirjallisuustutkimus. 153 s. 1980.
24. H a k k a r a i n e n, Tarja, H i r s i, Hannu, K a n e r v a Pekka, Masuunikuonan soveltuvuus lämpökäsiteltävän betonin sideaineeksi. 52 s. 1979.
25. H a k k a r a i n e n, Tarja - H i r s i, Hannu - K a n e r v a, Pekka, Masuunikuona betonin sideaineena. 31 s. 1980.
26. L o i k k a n e n, Pentti, Langer-palkkisillan ominaisvärähtelyt. 119 s. 1980.
27. Tiivistelmät rakennetekniikan laitoksessa vuosina 1978-1979 valmistuneista diplomitöistä. 85 s. 1980.
28. Summaries of theses for the degree of diploma engineer 1978-1979. 68 s. 1980.
29. H a k k a r a i n e n, Tarja Lisäaineiden käyttö masuunikuona-betonissa 42 s. 1980
30. T u o m a l a, Markku, Eräiden yksinkertaisten rakenteiden staattisen ja dynaamisen vasteen analysointi elementtimenettelmällä. 183 s. 1980.
31. H i r s i, Hannu, K a n e r v a, Pekka, Kevytrunkoainesbetonirakenteet. 74 s. 1980.
32. P u r s i a i n e n, Jorma, L e h t o n e n, Ritva ja K a n e r v a, Pekka, The Strength of reinforced concrete beams subjected to combined shear and normal force. 30 p. 1980.

33. P e n t t a l a, Vesa, Reiällinen liimapuupalkki.
101 p. 1980.
34. H ä k k i n e n, Tarja - K a n e r v a, Pekka,
Katsaus kipsin rakennusteknisiin ominaisuuksiin. 75 p.
1980.
35. H ä k k i n e n, Tarja, Masuunikuonabetonin pakkasen-
kestävyys. 23 p. 1981.
36. M i k k o l a, Martti, Kimmoisella alustalla oleva
palkki, 30 p. 1981.
37. H ä k k i n e n, Tarja, Katsaus kipsin rakennustekniseen
käyttöön. 45 s. 1981.
38. T y r v ä i n e n, Hannu - L u m m e, Pentti -
K a n e r v a, Pekka, Betoniteräksen käytön jakauma ja.....
hukkamenekki rakennustuotannossa. 75 s. 1981.
39. O k s a n e n, Tuuli - L u m m e, Pentti - K a n e r v a,
Pekka, Harjatangon A500HW käyttö pilarin raudoituksena.
119 s. 1981.
40. L a i t i l a, Jorma - L u m m e, Pentti -
K a n e r v a, Pekka Harjatangon A500HW käyttö palkin
raudoituksena. 52 s. 1981.
41. H a r a, Risto, Solupolyuretaanin leikkausominaisuuksien
määrittäminen ja virumismallien hakeminen. 38 s. 1981

