

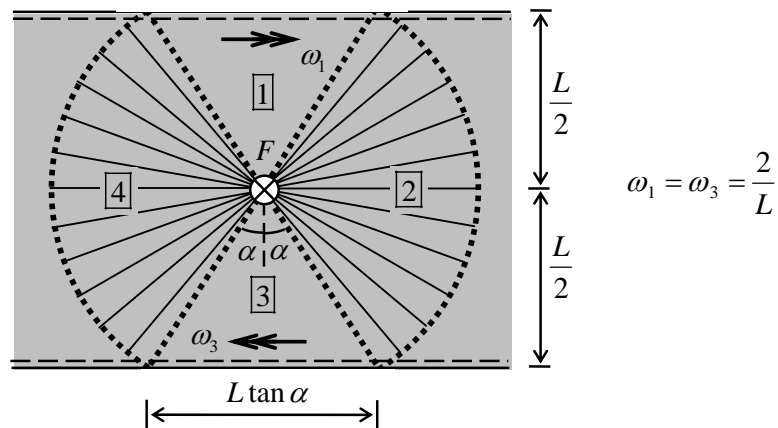
Rak-54.111 RAKENTEIDEN MEKANIikka B

Luentomoniste

Osa IV: Laattojen myötöviivateoriaa

Jukka Aalto

Mekanismi (c):



$$W_{\text{int}} = -\underbrace{[(2\pi - 4\alpha) \cdot (m + m)]}_{\text{viuhkat}} + \underbrace{2 \cdot mL \tan \alpha \cdot \frac{2}{L}}_{1 \& 3} = -4(\pi - 2\alpha + \tan \alpha)m,$$

$$W_{\text{ext}} = F \cdot 1$$

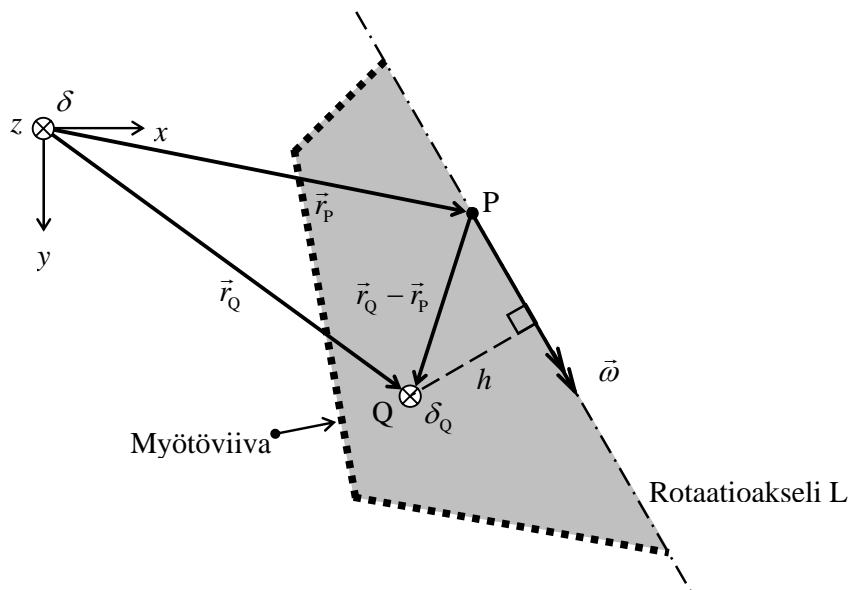
$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \Rightarrow F = 4(\pi - 2\alpha + \tan \alpha)m$$

Myötöviivateoriaa käytetään yleisesti teräsbetonilaattojen kuormankantokyvyn arviointiin. Se on plastisen rajakuorma-analyysin (limit analysis) kinemaattisen menetelmän eräs versio, jonka avulla voidaan määrittää plastisen rajakuorman yläkiarvoja (tai kääntäen: rajamitoituksessa määrittää tarvittavan täysplastisen momentin alakiarvoja). Myötöviivateoriaa käytettäessä laatan otaksutaan plastisoituvan myötöviivoja pitkin siten, että laatasta syntyy yhden vapausasteen mekanismi. Mekanismin liikkeessä määritetään taivutusmomenttien myötöviivoilla tekemä sisäinen virtuaalinen työ ja toisaalta ulkoisen kuorman tekemä virtuaalinen työ, joiden summan tulee hävitä tasapainossa olevalle laatalle. Tämä johtaa plastisen rajakuorman arvioon (mitoitettaessa: täysplastisen momentin arvioon). Vaikeutena on todeta, että laatan myötöehtoa ei missään kohdassa rikota. Ylläolevasta käynee selville, että myötöviivateoria on sauvarakenteiden mekaniismimenetelmän kanssa analoginen menetelmä.

1. Laattamekanismin kinematiikkaa

Myötöviivateorian mukaan laatta saavuttaa rajatilän siten, että siihen syntyy viivamaisia alueita, joihin muodonmuutokset keskittyvät. Laatasta syntyy nivelviivojen ja jäykkien laatan osien muodostama mekanismi. Nivelviivoja kutsutaan **myötöviivoiksi**. Ne ovat yleensä suoria. Seuraavassa tarkastellaan laattamekanismin liikettä.

Tarkastellaan jäykkää laatan osaa, joka saa differentiaalisen rotaation $\bar{\omega}$ laatan tasossa olevan kiinteän akselin L ympäri.



Kuva 1: Jäykän laatan osan pisteen Q taipuma.

Pisteen Q taipumalle saadaan

$$\delta_Q = \pm \omega h, \quad (1)$$

missä $\omega = |\vec{\omega}|$ ja h on pisteen Q etäisyys rotaatioakselista L . Kaavassa on + merkki, jos piste Q rotaatiovektorin suuntaan nähden rotaatioakselin oikealla puolella, muuten -merkki.

Pisteen Q siirtymävektorille $\vec{\delta}_Q = \delta_Q \vec{k}$ voidaan kirjoittaa

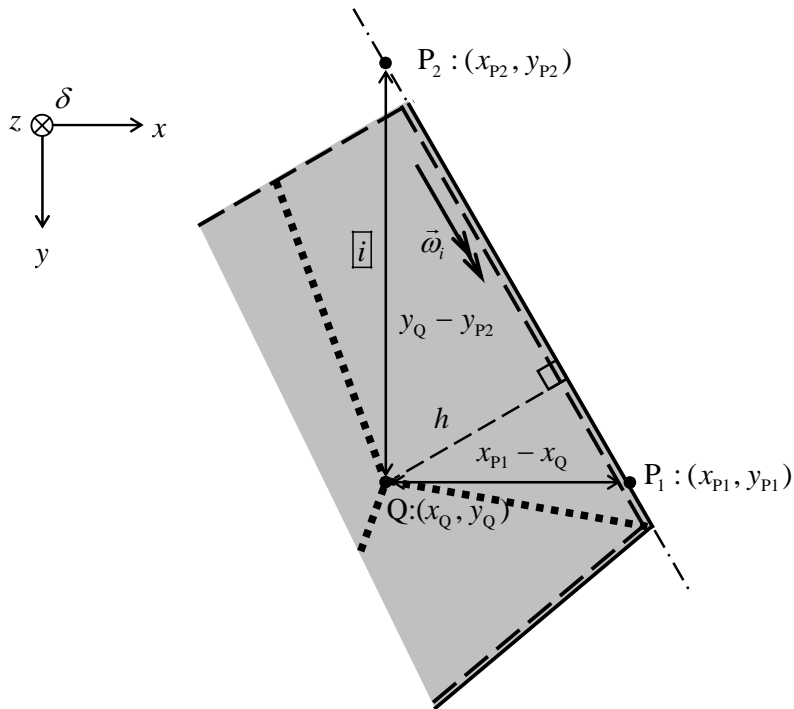
$$\vec{\delta}_Q = \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P), \quad (2)$$

missä \vec{r}_Q on pisteen Q paikkavektori ja \vec{r}_P on rotaatioakselille sijoitetun mielivaltaisen pisteen P paikkavektori. Yhtälön (2) komponenttiesitys saadaan seuraavasti

$$\begin{aligned} \delta_Q \vec{k} &= (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j}) \times [(x_Q - x_P) \vec{i} + (y_Q - y_P) \vec{j}] \\ &= [\omega_x (y_Q - y_P) - \omega_y (x_Q - x_P)] \vec{k} \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\delta_Q = \omega_x (y_Q - y_P) - \omega_y (x_Q - x_P). \quad (3)$$



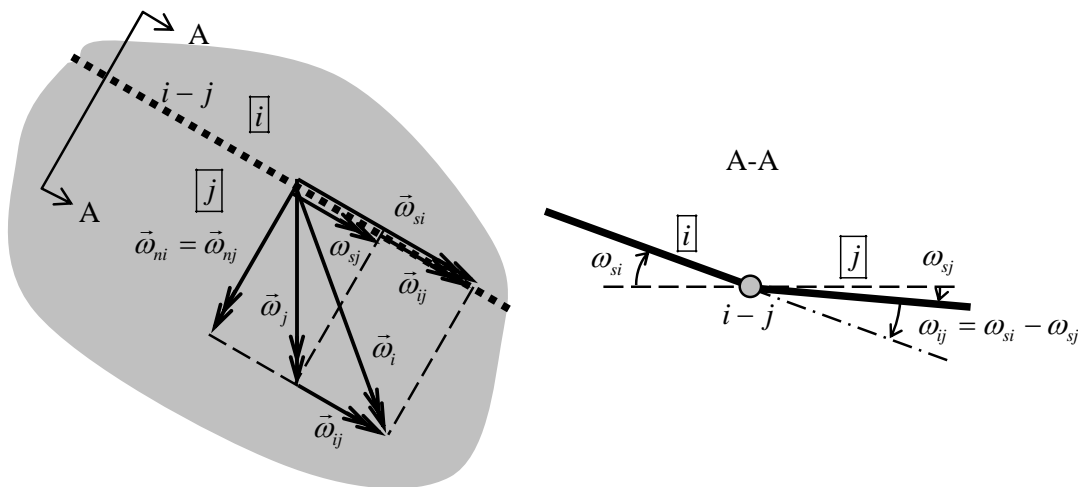
Kuva 2: Laatan osan i rotaation määrittäminen.

Tarkastellaan tilannetta, jossa laatan osan i pisteen Q taipuma δ_Q tunnetaan. (Kuvassa 2 piste Q sijaitsee kolmen myötöviivan leikkauskohdassa.) Laatan osan i rotaatiovektorin suuruus ω_i voidaan määrittää kaavalla

$$\omega_i = \frac{|\delta_Q|}{h}. \quad (4)$$

Sijoittamalla rotaatioakselin piste P_1 siten, että $y_{P_1} = y_Q$ ja piste P_2 siten, että $x_{P_2} = x_Q$ saadaan yhtälön (3) perusteella rotaatiovektorin $\vec{\omega}_i$ komponenteille tulokset

$$\omega_{xi} = \frac{\delta_Q}{y_Q - y_{P_2}}, \quad \omega_{yi} = \frac{\delta_Q}{x_{P_1} - x_Q} \quad (5)$$



Kuva 3: Kahden vierekkäisen laatan osan i ja j keskinäinen liike.

Tarkastellaan kahta vierekkäistä laatan osaa i ja j sekä niiden välistä myötöviivaa $i - j$ (vrt. kuva 3). Laatan osan i rotaatio laatan osan j suhteen määritellään kaavalla

$$\vec{\omega}_{ij} = \vec{\omega}_i - \vec{\omega}_j. \quad (6)$$

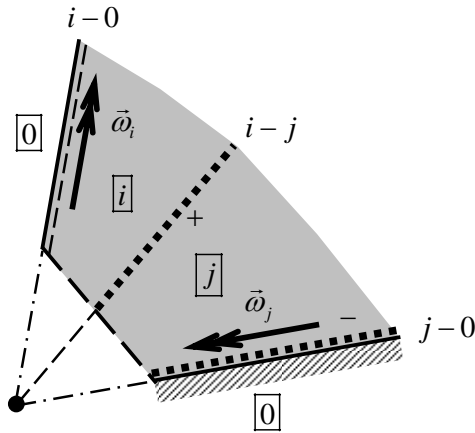
Koska laatan osat yhtyvät myötöviivalla, tulee niiden kiertyä yhtä paljon myötöviivan normaalin ympäri. Näin rotaatiovektoreiden $\vec{\omega}_i$ ja $\vec{\omega}_j$ myötöviivan normaalin suuntaisten komponenttien on toteutettava ehto $\vec{\omega}_{ni} = \vec{\omega}_{nj}$. Nyt saadaan

$$\vec{\omega}_{ij} = \vec{\omega}_i - \vec{\omega}_j = \vec{\omega}_{si} + \vec{\omega}_{ni} - \vec{\omega}_{sj} - \vec{\omega}_{nj} = \vec{\omega}_{si} - \vec{\omega}_{sj}, \quad (7)$$

missä $\vec{\omega}_{si}$ ja $\vec{\omega}_{sj}$ ovat rotaatiovektoreiden $\vec{\omega}_i$ ja $\vec{\omega}_j$ myötöviivan suuntaiset komponentit. Helposti voidaan nyt päätellä, että vektori $\vec{\omega}_{ij}$ on **myötöviivan $i - j$ suuntainen** ja että sen suuruus ω_{ij} ilmaisee laatan osien i ja j välisen **kulmanmuutoksen**. Lopuksi todetaan kaavan (6) perusteella, että $\vec{\omega}_{ij} = -\vec{\omega}_{ji}$.

Tärkeä sääntö:

Jos laatan osat i ja j kiertyvät kiinteiden akselien $i-0$ ja $j-0$ ympäri (kuva 4), niin niiden välinen myötöviiva $i-j$ (tai sen jatke) kulkee **akselien leikkauspisteen** kautta.













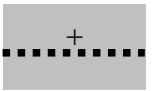
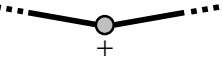
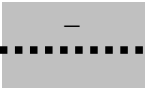
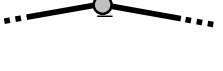
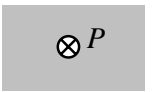
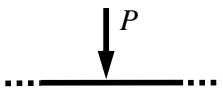
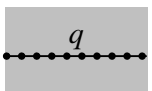
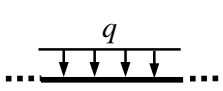
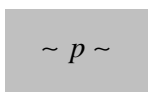
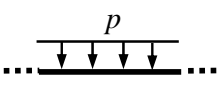


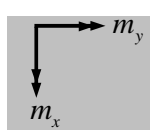
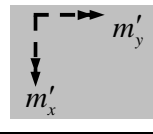
Kuva 4: Kiinteiden akselien $i-0$ ja $j-0$ ympäri kiertyvien laatan osien välinen myötöviiva $i-j$.

Myötöviivateoriaan liittyviä merkintöjä:

Analysoitaessa laattaprobleemia myötöviivateoriaa käyttäen joudutaan piirtämään kuvioita, joissa on verrattain paljon informaatiota. Kuvioden esittämiseen tarvitaan käyttökelpoisia merkintöjä, joista joitakin on jo ollut esillä. Tässä monisteessa käytetyt merkinät on koottu taulukkoon 1. Seuraavassa on joitain taulukkoon liittyviä huomautuksia.

- Myötöviivaa merkitään tässä paksulla katkoviivalla: ■■■■■■■■. Tavallisempi merkintä näyttää seuraavalta: ~~~~~~. Jälkimmäistä käytetään yleensä alan kirjallisuudessa. Sitä on myös mukava käyttää, kun kuvio piirretään käsin.
- Positiivisella myötöviivalla (+) kulmanmuutos myötöviivaa vastaan kohtisuorassa suunnassa tapahtuu siten, että laatan alapinta ”venyy”. Negatiivisella myötöviivalla (-) kulmanmuutos tapahtuu siten, että laatan alapinta ”puristuu”. Usein myötöviivojen merkit jätetään merkitsemättä kuvioon.
- Koska teräsbetoni-laatoilla ala- ja yläpinnan raudoitus on usein erilainen, on myös positiivisia ja negatiivisia myötöviivoja vastaavat täysplastiset momentit erisuuret. Edellisiin on taulukossa liitetty + merkki ja symbolit m_x ja m_y sekä jälkimmäisiin – merkki ja symbolit m'_x ja m'_y .
- Jos laatan ylä- ja alapinnassa on samanlainen raudoitus, on $m'_x = m_x$ ja $m'_y = m_y$. Jos laatan x - ja y -akselien suuntainen raudoitus on lisäksi samanlainen $m_x = m_y$.

Taulukko 1: Myötöviivateoriaan liittyviä merkintöjä.

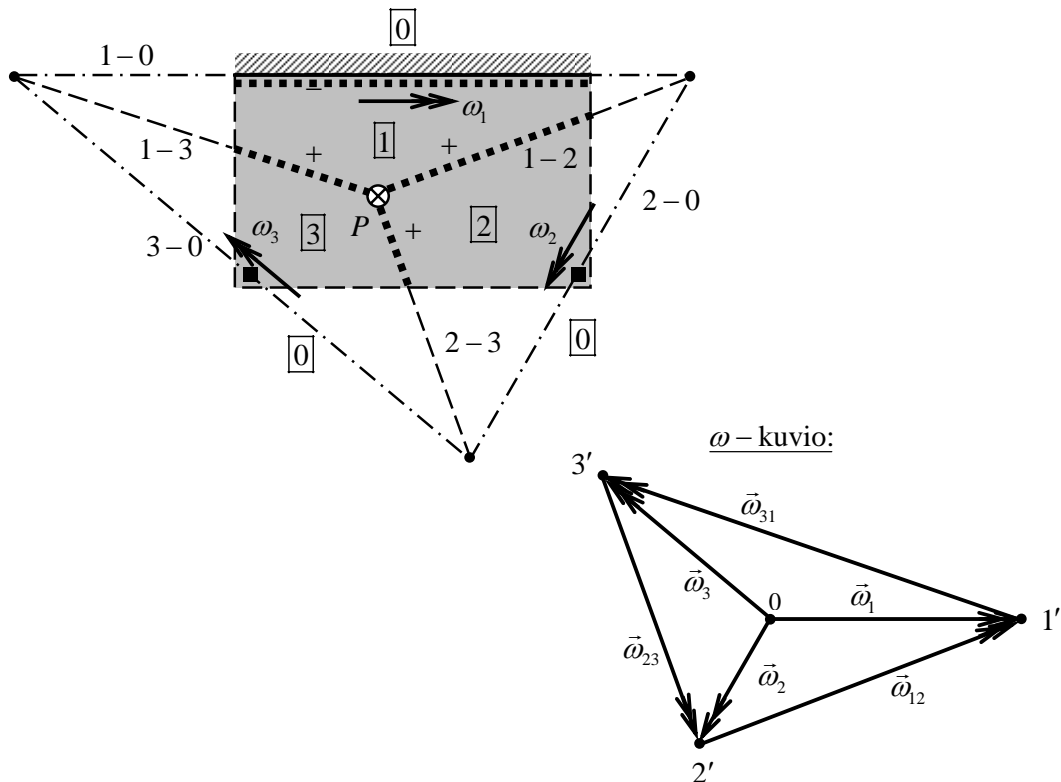
Tuenta	Päältä	Leikkaus
Vapaastituettu reuna		
Jäykästi kiinnitetty reuna		
Vapaa reuna		
Reunapalkki		
Pilari		
Positiivinen myötöviiva		
Negatiivinen myötöviiva		
Pistekuorma		
Viivakuorma		
Tasainen kuorma		
Rotaatioakseli		
Laatan täysplastiset momentit (+)		
Laatan täysplastiset momentit (-)		

Myötöviivoja koskevia sääntöjä:

1. Laatan mekanismilla on **yksi vapausaste**.
2. Myötöviivat ovat **suoria**.
3. Kahden laatan osan välinen myötöviiva kulkee näiden osien **pyörähdysakselien leikkauspisteen kautta**. Jos pyörähdysakselit ovat yhdensuuntaiset, niiden leikkauspiste on äärettömän kaukana, ja myötöviiva on siten niiden kanssa yhdensuuntainen.
4. Myötöviivojen leikkauspisteessä yhtyy aina **vähintään kolme** myötöviivaa.
5. Myötöviivat
 - yhtyvät yleensä **tukiviivoihin**,
 - kulkevat **pistemäisten tukien ja kuormien vaikutuspisteiden** kautta.

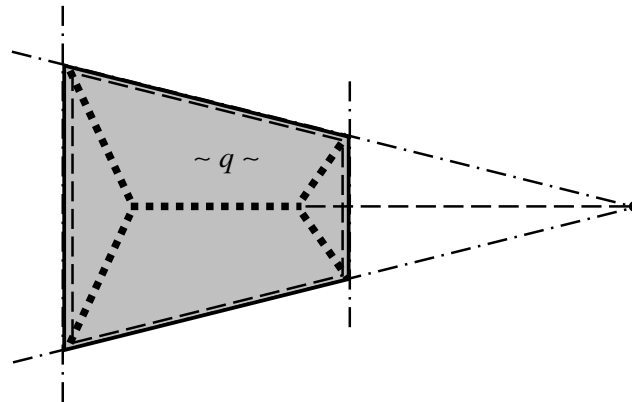
Esimerkkejä myötömekanismeista:

Esimerkki 1: Pistekuorman P kuormittama parvekelaatta.

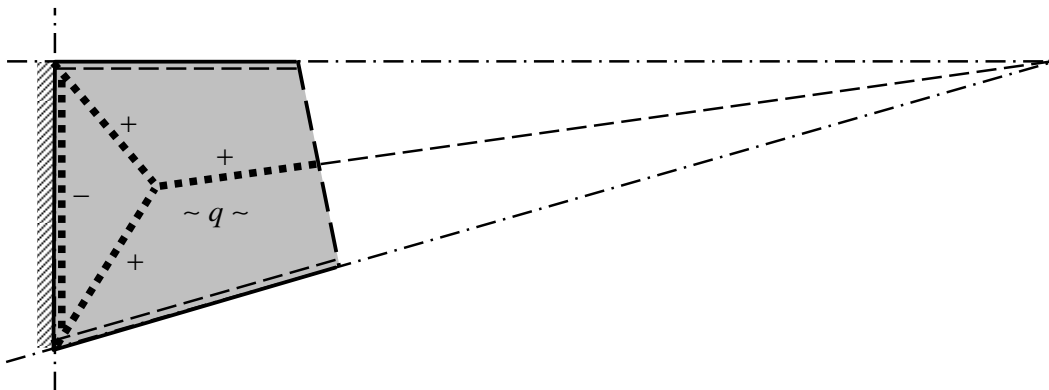


Huomautus: Kun laatan osien rotaatiot ω_1 , ω_2 ja ω_3 tunnetaan, voidaan myötöviivojen rotaatiot ω_{12} , ω_{23} ja ω_{31} määrittää ω - kuvion avulla (esimerkiksi graafisesti).

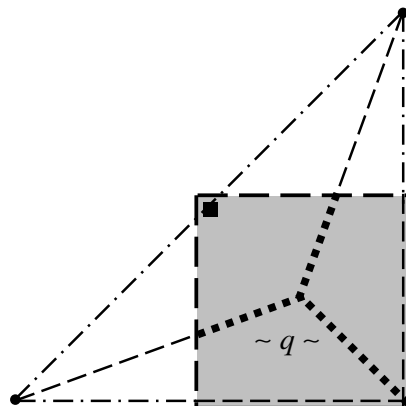
Esimerkki 2: Puolisuunnikkaan muotoinen, kaikilta reunoiltaan vapaasti tuettu laatta; tasainen kuorma q .



Esimerkki 3: Nelikulmion muotoinen, kahdelta vastakkaiselta reunaltaan vapaasti tuettu, yhdeltä reunaltaan jäykästi kiinnitetty ja yhdeltä reunaltaan vapaa laatta; tasainen kuorma q .



Esimerkki 4: Kahdelta reunalta vapaasti tuettu ja kahdelta reunalta vapaa sekä yhdestä nurkasta pilarilla tuettu neliölaatta; tasainen kuorma q .

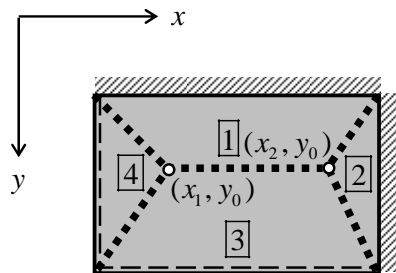


Laatan mekanismi on täysin määrätty, kun tunnetaan laatan eri osien kiertymäakselit ja kiertymäkulmien suhteet. Laatan mekanismin määrittämiseen **tarvittavien geometristen parametrien lukumäärä** p saadaan kaavasta

$$p = n + a - 1, \quad (8)$$

missä n on laatan osien lukumäärä, joihin myötäviivat jakavat laatan ja a on kiertymäakselien sijainnin määrittämiseen tarvittavien geometristen suureiden lukumäärä.

Esimerkki 1:



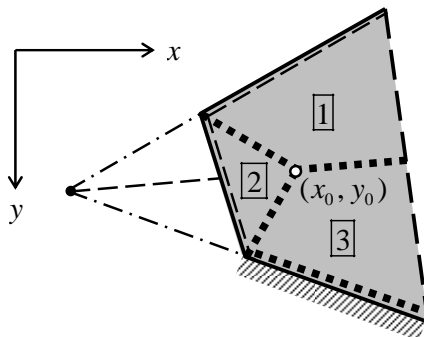
$$n = 4$$

$$a = 0$$

$$\Rightarrow p = 3$$

Parametrit: x_1, x_2 ja y_0

Esimerkki 2:



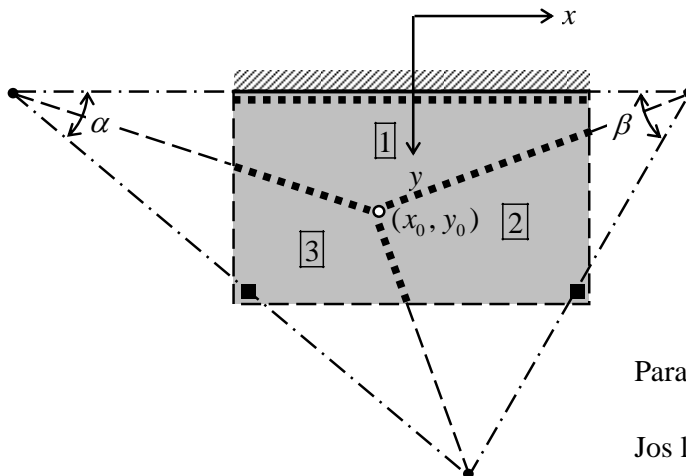
$$n = 3$$

$$a = 0$$

$$\Rightarrow p = 2$$

Parametrit: esim. x_0 ja y_0

Esimerkki 3:



$$n = 3$$

$$a = 2 (\alpha \text{ ja } \beta)$$

$$\Rightarrow p = 4$$

Parametrit: esim. α, β, x_0, y_0 .

Jos laatta ja kuorma ovat symmetrisiä y -akselin suhteen, on $\alpha = \beta$ ja $x_0 = 0$ ja $p = 2$.

2. Laatan myötöehto

2.1. Isotrooppinen homogeeninen laatta

Tarkastellaan laattaa, jonka aine on isotrooppista ja homogeenista, esim. **metallilaattaa**. Tällaiselle aineelle pätee **Misesin myötöehto** (Huber 1904, von Mises 1913, Hencky 1924), joka voidaan lausua muodossa

$$\sigma_e = \sigma_m \quad (9)$$

missä σ_e on **tehokas jännitys**, jolla on lauseke

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]} \quad (10)$$

ja σ_m on aineen **myötölujuus** eli **myötöraja** vedossa tai puristuksessa.

Laatassa otaksutaan vallitsevan jännitystila, jossa nolasta eroavat jännityskomponentit ovat $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ ja τ_{zx} . Näistä σ_x, σ_y ja τ_{xy} aiheutuvat taivutusmomenteista M_x, M_y ja M_{xy} sekä τ_{xz} ja τ_{yz} leikkausvoimista Q_x ja Q_y . Sauvarakenteiden plastisten menetelmien yhteydessä jätettiin leikkausvoiman vaikutus täysplastiseen momenttiin huomioon ottamatta. Laattojen yhteydessä voidaan menetellä vastaavasti. Tämän vuoksi leikkausjännitysten τ_{xz} ja τ_{yz} otaksutaan häviävän myötöehtoon (9) liittyvässä tehokkaan jännityksen lausekkeessa (10). Se saa näin ollen muodon

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}. \quad (11)$$

Laatan ymmärretään myötäävän laatan tarkasteltavassa kohdassa, kun tehokkaan jännityksen arvo on saavuttanut myötörajan kaikissa pisteissä palkin korkeussuunnassa. Myötörajalla jännitysten otaksutaan jakautuvan siten, että jännitysten ja momenttien yhteydet ovat

$$\sigma_x = \frac{4M_x}{h^2} \operatorname{sgn}(z), \quad \sigma_y = \frac{4M_y}{h^2} \operatorname{sgn}(z), \quad \tau_{xy} = \frac{4M_{xy}}{h^2} \operatorname{sgn}(z), \quad (12)$$

missä $\operatorname{sgn}(z)$ merkitsee z :n merkkiä. Sijoittamalla nämä lausekkeet tehokkaan jännityksen lausekkeeseen (10) saadaan

$$\sigma_e = \frac{4}{h^2} \sqrt{M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2}$$

Nähdään siis, että vertailujännitys on laatan paksuuden yli vakio. Sijoittamalla tämä myötöehtoon (9) saadaan

$$\sqrt{M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2} = \frac{1}{4} \sigma_m h^2 \quad (13)$$

ja edelleen

$$M_e = m \quad (14)$$

missä

$$M_e = \sqrt{M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2} \quad (15)$$

on **tehokas momentti** ja

$$m = \frac{1}{4} \sigma_m h^2 \quad (16)$$

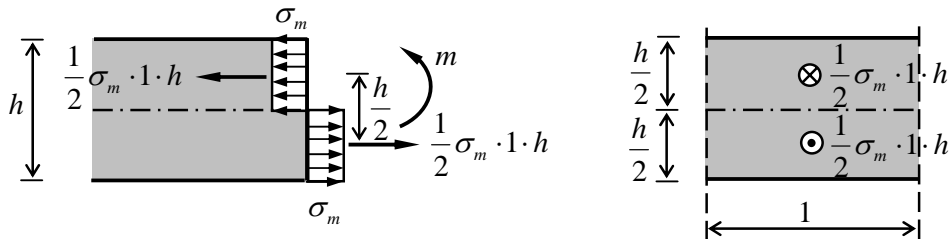
laatan **täysplastinen momentti**. Kaava (14) ilmaisee **homogeenisen laatan myötöehdon**. Se voidaan myös esittää muodossa

$$M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2 - m^2 = 0. \quad (17)$$

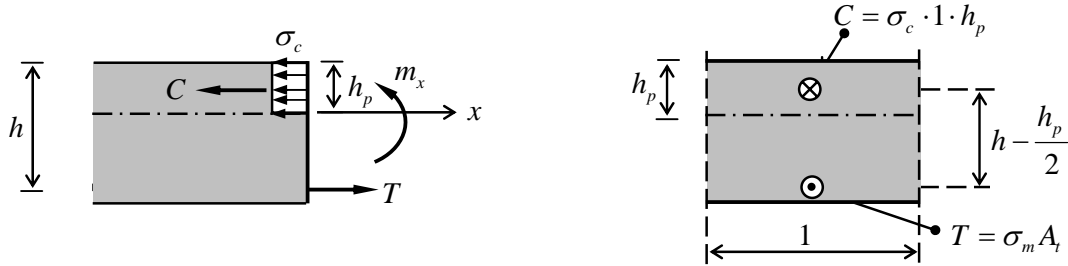
Homogeenisen laatan täysplastinen momentti lasketaan siis vastaavaa tapaan kuin palkin, jolla on ykkösen levyinen suorakaidepoikkileikkaus (vrt. kuva 5)

$$m = \frac{1}{2} \sigma_m \cdot 1 \cdot h \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4} \sigma_m h^2. \quad (18)$$

Huomautus: Laatan täysplastiselle momentille käytetään tässä merkintää m , vaikka merkintää M_p , jota käytettiin palkin täysplastiselle momentille, voitaisiin myös käyttää. Syynä tähän valintaan on toisaalta perinne ja toisaalta alaindeksien määrän väheneminen joissain tarkasteluissa.



Kuva 5: Homogeenisen laatan täysplastisen momentin määrittäminen



Kuva 6: Teräsbetonilaatan täysplastisen momentin m_x määrittäminen

2.2. Teräsbetonilaatta

Tarkastellaan teräsbetonilaattaa, jonka rauditus muodostaa suorakulmaisen verkon. Terästen ja x - ja y -koordinaattiakselien suuntien otaksutaan yhtyvän. Yksinkertaisuuden vuoksi tarkastelussa otetaan huomioon vain laatan alapinnan teräkset. Laatta on aliterästetty, niin että teräkset myötävät ennen kuin betonin puristuskapasiteetti on saavutettu. Rajatilassa teräkset myötävät ja betonin puristusjännitys on vakio σ_c (c =concrete) puristuspuolella ja betoni on haljennut nollaviivan alapuolella. Tarkastellaan x -akselia vastaan kohtisuoran leikkauksen (kuva 6) täysplastisen momentin m_x määrittämistä. Se lasketaan siis kuten ykkösen levyisen, x -akselin suuntaisen betonipalkin täysplastinen momentti. Poikkileikkauksen normaalivoiman tulee olla nolla, joten

$$N \equiv T - C = 0 \Rightarrow \sigma_m A_t - \sigma_c h_p = 0 \Rightarrow h_p = \frac{\sigma_m A_t}{\sigma_c}, \quad (19)$$

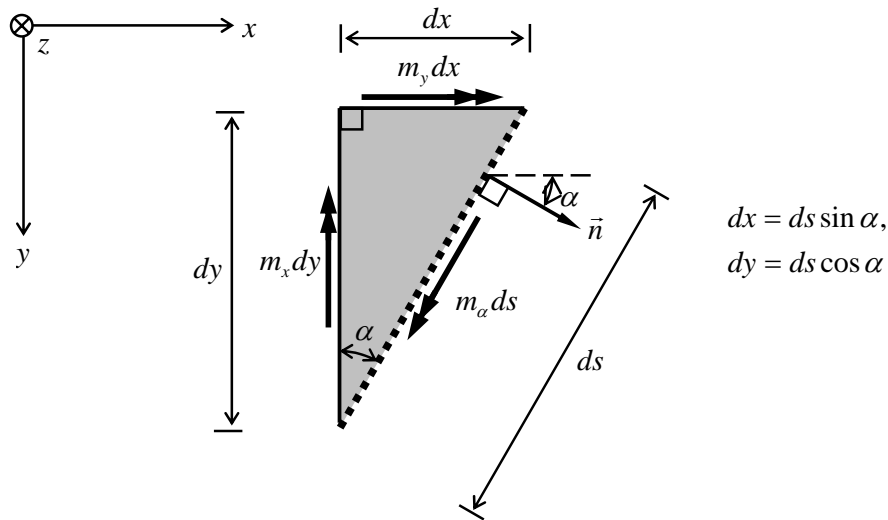
missä A_t on teräsmäärä leveyttä kohti ja h_p on puristusvyöhykkeen korkeus. Täysplastiselle momentille m_x saadaan nyt

$$m_x = T \cdot \left(h - \frac{h_p}{2}\right) = \sigma_m A_t h \left(1 - \frac{\sigma_m A_t}{2\sigma_c h}\right). \quad (20)$$

h on terästen painopisteen etäisyys laatan yläreunasta. Vastaavaan tapaan voidaan määrittää y -akselia vastaan kohtisuoran leikkauksen täysplastinen momentti m_y .

Tavallisesti teräsbetonilaatan teräsmäärät ja terästen etäisyydet yläreunasta ovat x - ja y -suuntaisille teräksille erisuuret. Näin myös täysplastiset momentit m_x ja m_y ovat erisuuret. Myös laatan ylä- ja alapinnan terästys on erilainen. Negatiivisen momentin vastaavia arvoja, terästen ollessa yläreunassa, merkitään vastaavasti m'_x ja m'_y .

Täysplastisen momentin suuruus teräsbetonilaatoilla riippuu myös myötöviivan suunnasta. Täysplastinen momentti m_α myötöviivalla, jonka normaali muodostaa kulman α x -akselin kanssa, saadaan tasapainoyhtälöstä myötöviivan suuntaisen akselin ympäri (vrt. kuva 7)



Kuva 7: Täysplastisen momentin määrittäminen suunnassa α

$$\swarrow \quad m_\alpha ds - m_x dy \cdot \cos \alpha - m_y dx \cdot \sin \alpha = 0.$$

Jakamalla yhtälö puolittain ds :llä saadaan **täysplastiselle momentille suunnassa α** tulos

$$\boxed{m_\alpha = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha}. \quad (21)$$

Toisaalta sisäinen taivutusmomentti suunnassa α on

$$\boxed{M_\alpha = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha}. \quad (22)$$

Myötöviivalla tulee sisäisen taivutusmomentin M_α olla täysplastisen momentin m_α suuruinen. Näin saadaan myötöehto

$$M_\alpha = m_\alpha. \quad (23)$$

Sijoittamalla sisäinen taivutusmomentti (22) ja täysplastinen momentti (21) myötöehtoon (23) saadaan se muotoon

$$M_x - m_x + (M_y - m_y) \tan^2 \alpha + 2M_{xy} \tan \alpha = 0. \quad (24)$$

Tämän ehdon tulee olla voimassa erisuuntaisilla myötöviivoilla eli mielivaltaisella kulman α eri arvolla. Derivoimalla yhtälö (24) vasen puoli α :n suhteen ja merkitemällä tulos nolllaksi saadaan (syy tähän selitetään liitteessä A)

$$2(M_y - m_y) \frac{\tan \alpha}{\cos^2 \alpha} + 2M_{xy} \frac{\tan \alpha}{\cos^2 \alpha} = 0 \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{M_{xy}}{M_y - m_y}. \quad (25)$$

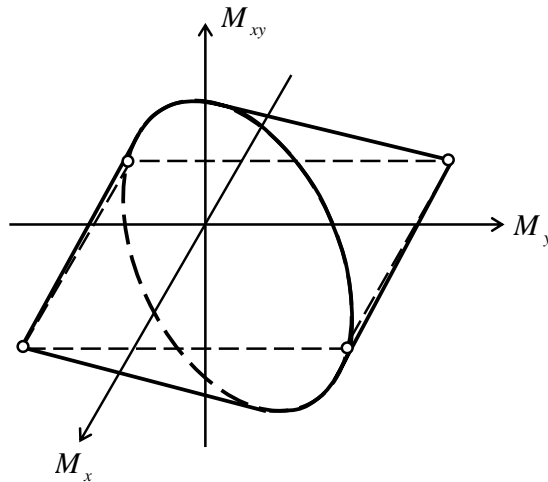
Sijoittamalla näin saatu $\tan \alpha$:n arvo yhtälöön (24) saadaan myötöehto muotoon

$$(M_x - m_x)(M_y - m_y) = M_{xy}^2. \quad (26)$$

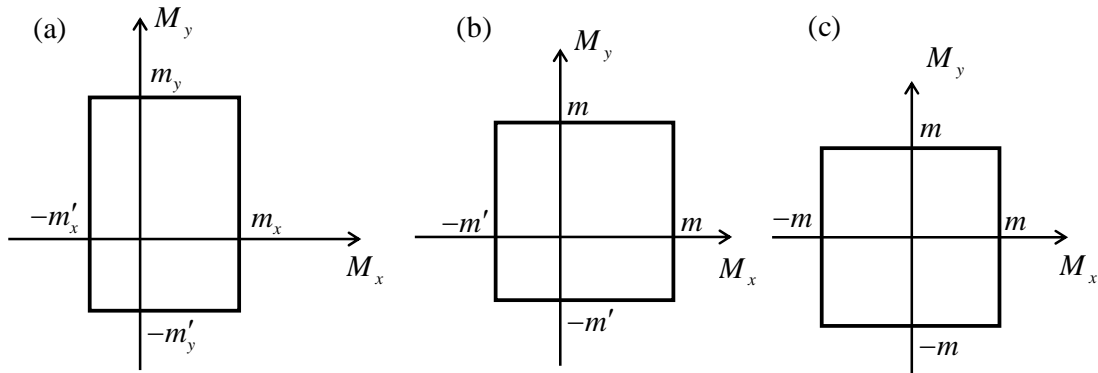
Yhtälöä (26) johdattaessa taivutusmomentti M_α otaksuttiin positiiviseksi ja m_α oli sitä vastaava täysplastinen momentti. Suorittamalla vastaava tarkastelu taivutusmomentin M_α ollessa negatiivinen ja m'_α :n ollessa sitä vastaava täysplastinen momentti, saadaan myötöehto

$$(M_x + m'_x)(M_y + m'_y) = M_{xy}^2. \quad (27)$$

Koordinaatistossa M_x, M_y, M_{xy} yhtälöt (26) ja (27) esittävät kahta, pohjat vastakkain olevaa kartiota (kuva 8). Näiden leikkaus M_x, M_y -tasossa on **suorakaide** (ks. kuva 9a). Tätä myötöehtoa nimitetään **Johansen'in myötöehdoksi**. Laatalle, jonka x - ja y -suunnan terästys on samanlainen ($m_x = m_y = m, m'_x = m'_y = m'$), leikkaus on **neliö** (kuva 9b) ja jos lisäksi ala ja yläpinnan terästys on samanlainen ($m' = m$), neliön **keskipiste on origossa** (kuva 9c).



Kuva 8: Johansen'in myötöehto



Kuva 9: Johansen'in myötöehto M_x, M_y tasossa: (a) yleinen tapaus, (b) x - ja y -suunnan terästys samanlainen, (c) x - ja y -suunnan sekä ala- ja yläpinnan terästys samanlainen.

3. Laattamekanismin sisäinen ja ulkoinen virtuaalinen työ

Laattamekanismin liikkuessa täysplastisten momenttien tekemä sisäinen virtuaalinen työ on

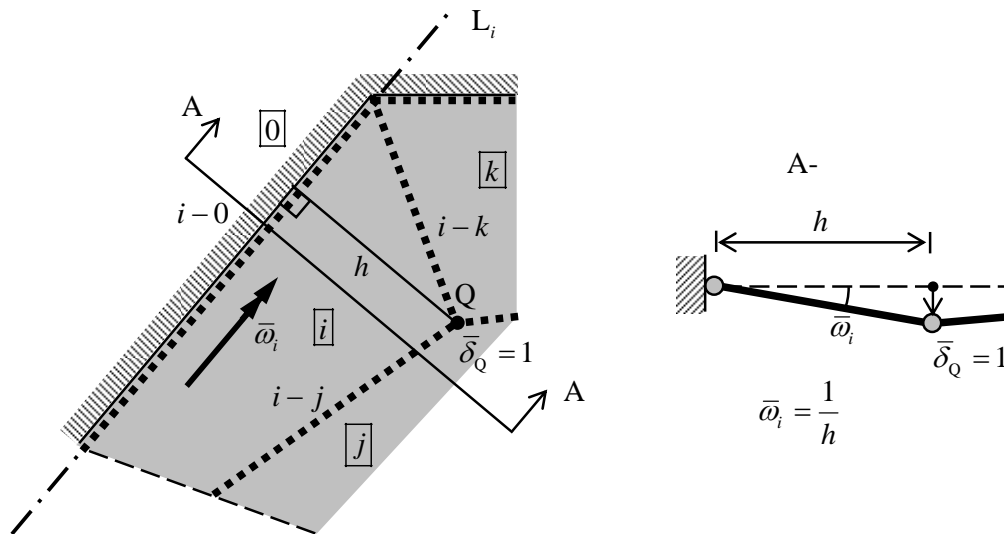
$$\boxed{\bar{W}_{\text{int}} = -\sum_{ij} m_{ij} L_{ij} \bar{\omega}_{ij}}, \quad (28)$$

missä summaus käy yli kaikkien myötöviivojen $i-j$, L_{ij} on myötöviivan $i-j$ pituus, m_{ij} on laatan täysplastinen momentti myötöviivalla $i-j$ sekä $\bar{\omega}_{ij}$ on laatan osan \boxed{i} virtuaalinen rotaatio laatan osan \boxed{j} suhteen (itseisarvo: $\bar{\omega}_{ij} = |\bar{\bar{\omega}}_{ij}|$). Kaava (28) voidaan lausua myös komponenttimuodossa

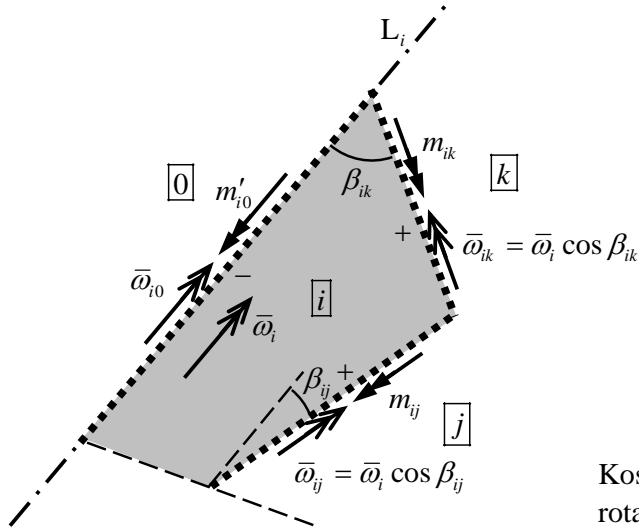
$$\bar{W}_{\text{int}} = -\sum_{ij} (m_x \cos^2 \alpha_{ij} + m_y \sin^2 \alpha_{ij}) L_{ij} \bar{\omega}_{ij} = -\sum_{ij} (m_x L_{ijy} \bar{\omega}_{ijy} + m_y L_{ijx} \bar{\omega}_{ijx}). \quad (29)$$

α_{ij} on myötöviivan $i-j$ normaalin suuntakulma x -akselin suhteen, $L_{ijy} = L_{ij} \cos \alpha_{ij}$, $\bar{\omega}_{ijy} = \bar{\omega}_{ij} \cos \alpha_{ij}$, jne. ovat myötöviivan ja rotaation komponentit koordinaattiakselien suunnilla.

Virtuaaliset kiertymäerot myötöviivoilla $\bar{\omega}_{ij} = |\bar{\bar{\omega}}_{ij}|$ voidaan määrittää mukavasti ω -kuviota hyväksi käyttäen, kunhan laatan osien virtuaaliset rotaatiot $\bar{\omega}_i$ on ensin määritetty. Ne saadaan seuraavasti: Valitaan sopiva myötöviivojen leikkauspiste Q (kuva 10), jonka virtuaaliseksi taipumaksi otetaan $\bar{\delta}_Q = 1$. Tällöin (esimerkiksi) laatan osan \boxed{i} virtuaaliselle rotaatiolle saadaan $\bar{\omega}_i = 1/h$, missä h on pisteen Q etäisyys rotaatioakselista $i-0$.



Kuva 10: Laatan osan \boxed{i} virtuaalisen rotaation määrittäminen, kun pisteen Q virtuaaliseksi taipumaksi on valittu $\bar{\delta}_Q = 1$.



Koska myötöviiva $i-0$ yhtyy rotaatioakseliin L_i ,

Kuva 11: Sisäisen virtuaalisen työn määrittäminen laatan osalle $[i]$; merkintöjä.

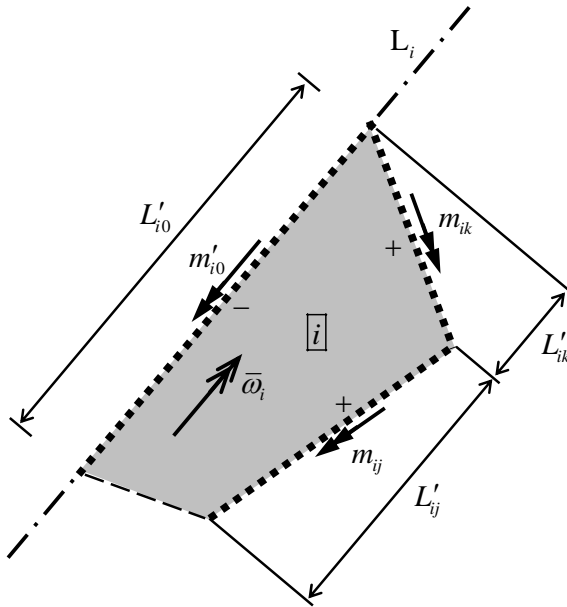
Laattamekanismin sisäisten voimien virtuaalinen työ voidaan aina laskea kaavan (28) avulla. Usein laskeminen käy kuitenkin helpommin laatan osa kerrallaan ns. **projektiomenettelyllä**. Tässä menettelyssä mekanismin sisäinen virtuaalinen työ lasketaan **laatan osa kerrallaan**. Se virtuaalinen työ, jonka myötöviivojen täysplastiset momentit tekevät, kun pelkästään laatan osa $[i]$ saa rotaation $\bar{\omega}_i$, kytketään tähän laatan osaan. Kuvan 11 tapauksessa virtuaaliset kiertymäerot myötöviivoilla $i-0$, $i-j$ ja $i-k$, kun pelkästään laatan osa $[i]$ kiertyy, ovat $\bar{\omega}_{i0} = \bar{\omega}_i \cos \beta_{i0}$, $\bar{\omega}_{ij} = \bar{\omega}_i \cos \beta_{ij}$ ja $\bar{\omega}_{ik} = \bar{\omega}_i \cos \beta_{ik}$, missä β_{i0} , β_{ij} ja β_{ik} ovat myötöviivojen $i-0$, $i-j$ ja $i-k$ sekä rotaatioakselin L väliset kulmat ($\leq 90^\circ$). Myötöviivojen täysplastisten momenttien laatan osaan $[i]$ tekemälle virtuaaliselle työlle saadaan näin

$$\begin{aligned} \bar{W}_{\text{int},i} &= -m'_{i0} L_{i0} \bar{\omega}_{i0} - m_{ij} L_{ij} \bar{\omega}_{ij} - m_{ik} L_{ik} \bar{\omega}_{ik} \\ &= -m'_{i0} L_{i0} \bar{\omega}_i \cos \beta_{i0} - m_{ij} L_{ij} \bar{\omega}_i \cos \beta_{ij} - m_{ik} L_{ik} \bar{\omega}_i \cos \beta_{ik} \\ &= -(m'_{i0} \overbrace{L_{i0}}^{L'_{i0}} \cos \beta_{i0} + m_{ij} \overbrace{L_{ij}}^{L'_{ij}} \cos \beta_{ij} + m_{ik} \overbrace{L_{ik}}^{L'_{ik}} \cos \beta_{ik}) \bar{\omega}_i, \end{aligned}$$

missä L_{i0} , L_{ij} ja L_{ik} ovat laatan osaan $[i]$ liittyvien myötöviivojen pituudet. Kaava saadaan muotoon

$$\bar{W}_{\text{int},i} = -(m'_{i0} L'_{i0} + m_{ij} L'_{ij} + m_{ik} L'_{ik}) \bar{\omega}_i, \quad (30)$$

missä L'_{i0} , L'_{ij} ja L'_{ik} ovat myötöviivojen $i-0$, $i-j$ ja $i-k$ **pituuksien projektiot** (kuva 11) **pyörähdysakselin L_i suunnalle**.



Kuva 12: Sisäisen virtuaalisen työn määrittäminen laatan osalle i

Kaavan (30) yleinen muoto on

$$\bar{W}_{\text{int},i} = -\sum_r (m_{ir} L'_{ir}) \bar{\omega}_i, \quad (31)$$

missä summaus käy yli laatan osan i reunoilla olevien myötöviivojen $i-r$, ts. kuvan tapauksessa r saa arvot $0, j$ ja k . Koko laattamekanismin sisäisten voimien virtuaalinen työ saadaan nyt summaamalla kunkin laatan osan osuudet

$$\bar{W}_{\text{int}} = \sum_i \bar{W}_{\text{int},i}. \quad (32)$$

Yhdistämällä tulokset (31) ja (32) saadaan laattamekanismin sisäiselle virtuaaliselle työlle myös lauseke

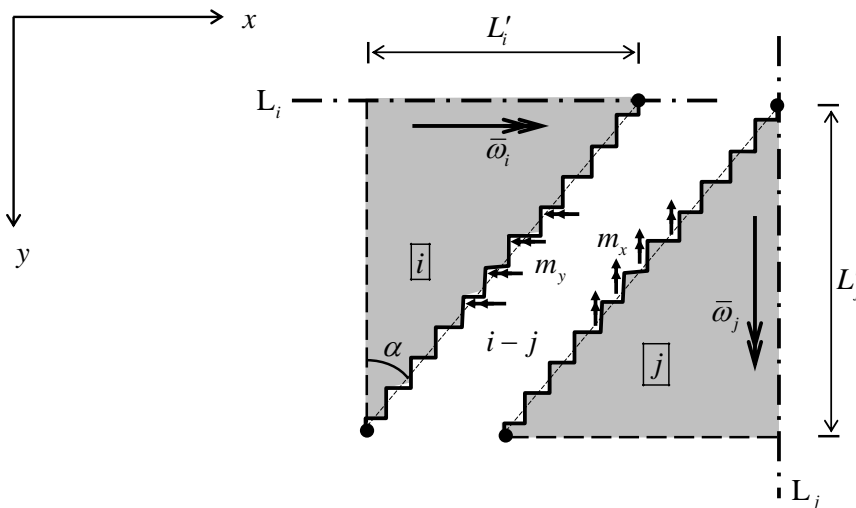
$$\bar{W}_{\text{int}} = -\sum_i \left[\sum_r (m_{ir} L'_{ir}) \bar{\omega}_i \right]. \quad (33)$$

Huomautus 1: Kaavoissa (31) ja (33) kaikkien myötöviivojen $i-r$ täysplastista momenttia on merkitty symbolilla m_{ir} . Jos myötöviiva on positiivinen (+), kysymyksessä on positiivisen myötöviivan täysplastinen momentti m_{ir} , jos taas myötöviiva on negatiivinen (-), kysymyksessä on negatiivisen myötöviivan täysplastinen momentti m'_{ir} .

Huomautus 2: Projektio menetely on tehokas keino laattamekanismin sisäisen virtuaalisen työn laskemiseksi, jota voidaan käyttää monissa käytännössä esiintyvissä tapauksissa. Sen heikkoutena kuitenkin on, että tietyissä olosuhteissa saadaan väärä tulos. Jotta projektio menetelmällä saataisiin oikea tulos, tulisi laattamekanismin kuhunkin myötöviivaan liittyvien laatan osien rotaatiovektoreiden myötöviivan suuntaisten komponenttien olla pareittain vastakkaisuuntaiset. Tämä tulos on perusteltu liitteessä B.

tien olla pareittain vastakkaisuuntaiset. Tämä tulos on perusteltu liitteessä B. Onneksi useimmissa käytännön tehtävissä nämä ehdot toteutuvat.

Huomautus 3: Kun laattamekanismin laatan osien rotaatioakselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset, voidaan, ortotrooppisen laatan ($m_x \neq m_y$ ja/tai $m'_x \neq m'_y$) tapauksessa, projektiomenetelmää vielä jonkin verran ”virtaviivaistaa”. Sen sijaan, että kullakin myötöviivalla $i - j$ määritettäisiin täysplastinen momentti m_{ij} kaavalla (21), voidaan laatan osaan, jonka rotaatioakseli on x -akselin suuntainen, liittyvillä myötöviivoilla käyttää täysplastista momenttia m_y ja laatan osaan, jonka rotaatioakseli on y -akselin suuntainen, liittyvillä myötöviivoilla käyttää täysplastista momenttia m_x . Asia voidaan perustella seuraavasti: Ajatellaan myötöviiva $i - j$ x - ja y -akselin suuntaisista osista muodostuvaksi murtoviivaksi kuvan 13 mukaisesti. Laatan osan $[i]$, jonka rotaatioakseli on x -akselin suuntainen, osuudeksi myötöviivan $i - j$ sisäisestä virtuaalisesta työstä saadaan $-m_y L'_i \bar{\omega}_i$ ja laatan osan $[j]$, jonka rotaatioakseli on y -akselin suuntainen, osuudeksi myötöviivan $i - j$ sisäisestä virtuaalisesta työstä saadaan $-m_x L'_j \bar{\omega}_j$. Näin myötöviivan $i - j$ sisäiseksi virtuaaliseksi työksi tulee $\bar{W}_{int,ij} = -m_y L'_i \bar{\omega}_i - m_x L'_j \bar{\omega}_j$. Käytettäessä projektiomenetelmää kaavojen (32) ja (33) hengessä laatan osan $[i]$ osuudeksi myötöviivan $i - j$ sisäisestä virtuaalisesta työstä saadaan $-m_y L'_i \bar{\omega}_i$ ja laatan osan $[j]$ osuudeksi myötöviivan $i - j$ sisäisestä virtuaalisesta työstä saadaan $-m_y L'_j \bar{\omega}_j$. Näin myötöviivan $i - j$ sisäiseksi virtuaaliseksi työksi tulee $\bar{W}_{int,ij} = -m_y L'_i \bar{\omega}_i - m_y L'_j \bar{\omega}_j$. Liitteessä C on vielä osoitettu, että esitetty projektiomenetelmän muunnelmä todella antaa myötöviivan $i - j$ sisäiselle virtuaaliselle työlle oikean tuloksen.



Kuva 13: Myötöviiva x - ja y -akselin suuntaisista osista muodostuvana murtoviivana.

Laattamekanismin **ulkoisten kuormien virtuaalinen työ** on

$$\bar{W}_{\text{ext}} = \int_{A_p} p(x, y) \bar{\delta}(x, y) dA + \int_{S_q} q(s) \bar{\delta}(x(s), y(s)) ds + \sum_i F_i \bar{\delta}(x_i, y_i) \quad (34)$$

missä $p(x, y)$ on jakautunut kuorma, $q(s)$ on viivakuorma, F_i on pistekuorma, $\bar{\delta}(x, y)$ on laatan virtuaalinen taipuma pisteessä (x, y) , $x(s)$ ja $y(s)$ määrittelevät koordinaatin s funktiona käyrän, jolla viivakuorma $q(s)$ vaikuttaa, x_i ja y_i ovat pistekuorman F_i vaikutuspisteen koordinaatit, A_p on jakautuneen kuorman $p(x, y)$ vaikutusalue laatalle ja S_q on viivakuorman $q(s)$ vaikutuskäyrä laatalle. Jos kuormat p ja q ovat tasaisia, ts. $p = p_0 = \text{vakio}$ ja $q = q_0 = \text{vakio}$, saadaan

$$\bar{W}_{\text{ext}} = p_0 \int_{A_p} \bar{\delta}(x, y) dA + q_0 \int_{S_q} \bar{\delta}(x(s), y(s)) ds + \sum_i F_i \bar{\delta}(x_i, y_i)$$

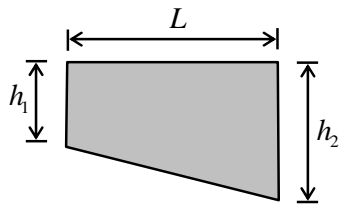
\Rightarrow

$$\bar{W}_{\text{ext}} = p_0 V_p + q_0 A_q + \sum_i F_i \bar{\delta}_i, \quad (35)$$

missä V_p on tilavuus, jonka taipumattoman laatan keskitaso (x, y -taso) ja taipuneen laatan keskipinta rajaavat tasaisen kuorman p_0 vaikutusalueella A_p , A_q on pinta-ala, jonka taipumattoman laatan keskitaso, taipuneen laatan keskipinta ja tasaisen viivakuorman q_0 vaikutuskäyrä (usein suora) S_q määrittelevät ja $\bar{\delta}_i = \bar{\delta}(x_i, y_i)$.

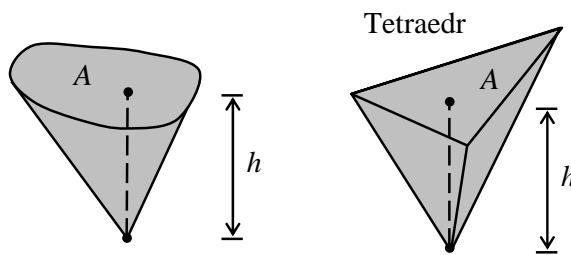
Kaavan (34) käyttämistä silmällä pitäen on hyvä kerrata joitain geometrian kaavoja, mm.

Puolisuunnikas:



$$A = \frac{1}{2}L(h_1 + h_2)$$

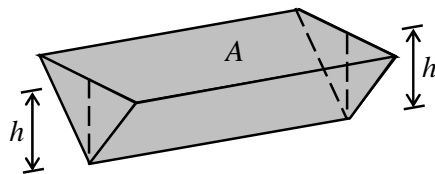
Kartio:



$$V = \frac{1}{3}Ah$$

Huom! Laskemalla yhteen ja vähentämällä tetraedrimaisia kappaleita voidaan määrittää useimmat kysymykseen tulevat tilavuudet.

Kolmiolieriö:



$$V = \frac{1}{2}Ah$$

4. Laatan plastinen rajakuorma

Tässä tarkastellaan **plastisen rajakuorman** määrittämistä **annetulle laatalle**. Lausutaan laatan kuormitus yhden ns. **kuormaparametrin** λ avulla muodossa

$$p(x, y) = \lambda \tilde{p}(x, y) \quad , \quad q(s) = \lambda \tilde{q}(s) \quad , \quad F_i = \lambda \tilde{F}_i \quad (36)$$

missä $\tilde{p}(x, y)$, $\tilde{q}(s)$ ja \tilde{F}_i ovat kuormaparametrin arvoa $\lambda=1$ vastaavat tasainen kuorma, viivakuorma ja i :s pistekuorma. Kuormaparametrin arvoa λ_p , jolla laatan sortuminen tapahtuu kutsutaan laatan **rajakuormaparametriksi**.

Valitun laattamekanismin ulkoisten kuormien virtuaalinen työ saa kaavan (36) perusteella muodon

$$\bar{W}_{\text{ext}} = \lambda \left[\int_{A_p} \tilde{p}(x, y) \bar{\delta}(x, y) dA + \int_{S_q} \tilde{q}(s) \bar{\delta}(x(s), y(s)) ds + \sum_i \tilde{F}_i \bar{\delta}_i \right] \quad (37)$$

Ao. mekanismeja vastaava kuormaparametrin arvo saadaan nyt helposti virtuaalisen työn yhtälöstä

$$\bar{W}_{\text{ext}} = -\bar{W}_{\text{int}} \quad (38)$$

Tutkitaan kaikki kysymykseen tulevat mekanismit. Se mekanismi, joka antaa pienimmän kuormaparametrin arvon on rajamekanismi, ja vastaava kuormaparametri on laatan raja-kuormaparametrin ylälikiarvo. Tämä yhdessä kaavojen (36) kanssa antaa laatan **raja-kuorman** (ylälikiarvon).

5. Laatan plastinen rajamitoitus

Tässä tarkastellaan laatan **mitoittamista** siten, että se **kantaa annetun kuorman**. Tätä toimenpidettä kutsutaan laatan **plastiseksi rajamitoitukseksi** ja se on käänteinen operaatio plastisen rajakuorman määrittämiselle. Jälkimmäisessä laatta mitoituksineen tunnetaan ja tehtävänä on selvittää, kuinka suuren kuorman se kantaa. Edellisessä lähde-tään liikkeelle tunnetusta kuormasta (käyttö-kuorma kerrottuna asianmukaisella kuor-makertoimella) ja tehtävänä on mitoittaa laatta eli määrittää tarvittava täysplastinen mo-mentti. Yleisessä tapauksessa laatan täysplastinen momentti voi olla erisuuri laatan eri osissa. Sen suhteellinen vaihtelu täytyy otaksua etukäteen ja näin se voidaan esittää momenttiparametrin μ avulla muodossa

$$m = \mu \tilde{m} \quad (39)$$

missä \tilde{m} on momenttiparametrin arvoa $\mu = 1$ vastaava laatan ao. kohdan täysplastinen momentti.

Valitun laattamekanismin sisäisten voimien virtuaalinen työ saa kaavan (28) perusteella muodon

$$\bar{W}_{\text{int}} = -\mu \sum_{ij} \tilde{m}_{ij} L_{ij} \bar{\omega}_{ij} \quad (40a)$$

tai kaavojen (31) ja (32) perusteella muodon

$$\bar{W}_{\text{int}} = -\mu \sum_i \left[\sum_r (\tilde{m}_{ir} L'_{ir}) \bar{\omega}_i \right] \quad (40b)$$

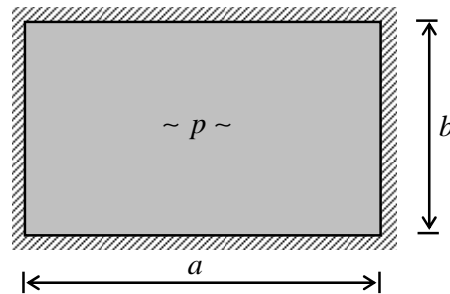
Tarkasteltua mekanismia vastaava momenttiparametrin arvo saadaan ratkaistuksi virtu-aalisen työn yhtälöstä (38).

Tutkitaan kaikki kysymykseen tulevat mekanismit. Se mekanismi, joka antaa suurim-man momenttiparametrin arvon on rajamekanismi ja ao. momenttiparametrin arvo μ_p määrää kaavan (39) kautta tarvittavan täysplastisen momentin alalikiarvon laatan eri osissa.

6. Esimerkkejä rajakuorman määrittämisestä ja rajamitoituksesta

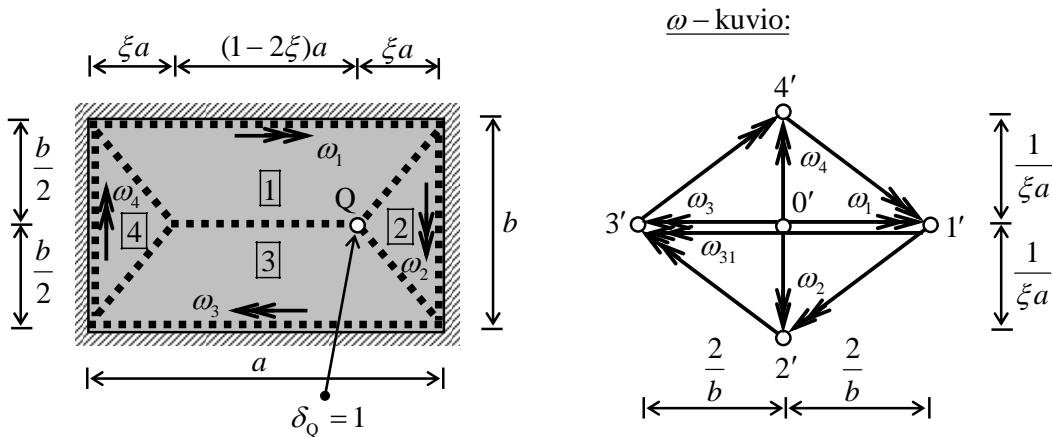
Huomautus: Jatkossa esitettävissä esimerkeissä **virtuaalista siirtymätilaa kuvaava yläviiva jätetään mukavuussyistä pois.**

Esimerkki 1: Tarkastellaan isotrooppista kaikilta reunoiltaan jäykästi kiinnitettyä suorakaidelaattaa, jota kuormittaa tasainen kuorma p . Laatan positiivista taivutusta vastaava täysplastinen momentti (=täysplastinen momentti kentässä) on m ja negatiivista taivutusta vastaava täysplastinen momentti (=täysplastinen momentti tuella) on $m' = \gamma m$. Määritetään plastinen rajakuorma.



Sisäisten voimien virtuaalinen työ:

Ratkaisutapa I: ω -kuvioita käyttäen.



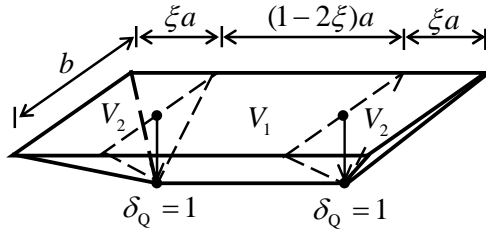
$$\omega_1 = \omega_3 = \frac{1}{\delta_Q} = \frac{2}{b}$$

$$\omega_2 = \omega_4 = \frac{\delta_Q}{\xi a} = \frac{1}{\xi a}$$

Koska laatta on isotrooppinen, $m_\alpha = m \cos^2 \alpha + m \sin^2 \alpha = m(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = m$. Täysplastinen momentti on siis sama kaikissa suunnissa: Myötöviivojen täysplastiset momentit, pituudet ja keskinäiset rotaatiot ovat:

Ulkoisten voimien virtuaalinen työ:

$$W_{\text{ext}} = pV_p = p(V_1 + 2V_2) = p\left[\frac{1}{2}(1-2\xi)a \cdot b \cdot \delta_Q + 2 \cdot \frac{1}{3}a\xi \cdot b \cdot \delta_Q\right] = \frac{3-2\xi}{6} \frac{a^2}{\alpha} p$$



Virtuaalisen työn periaate:

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \Leftrightarrow \frac{3-2\xi}{6} \frac{a^2}{\alpha} p = 2(1+\gamma) \frac{1+2\alpha^2\xi}{\alpha\xi} m$$

\Rightarrow

$$p = 12(1+\gamma) \frac{1+2\alpha^2\xi}{\xi(3-2\xi)} \frac{m}{a^2}$$

p:n minimointi:

$$\frac{dp}{d\xi} = 12(1+\gamma) \frac{4\alpha^2\xi^2 + 4\xi - 3}{\xi^2(3-2\xi)} \frac{m}{a^2} = 0 \Rightarrow \xi^2 + \frac{1}{\alpha^2}\xi - \frac{3}{4\alpha^2} = 0$$

$$\Rightarrow \xi = -\frac{1}{2\alpha^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4\alpha^4} + \frac{3}{4\alpha^2}} \Rightarrow \xi = \frac{\sqrt{1+3\alpha^2} - 1}{2\alpha^2}$$

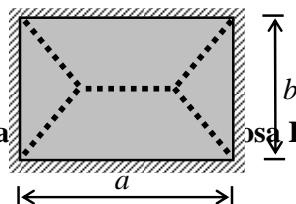
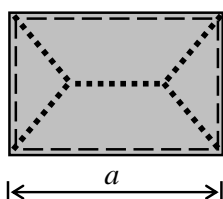
Rajakuorma:

$$p_p = 12(1+\gamma) \frac{1 + \sqrt{1+3\alpha^2} - 1}{\frac{\sqrt{1+3\alpha^2} - 1}{2\alpha^2} \left(3 - \frac{\sqrt{1+3\alpha^2} - 1}{\alpha^2}\right)} \frac{m}{a^2} = 24(1+\gamma) \frac{\alpha^4}{(\sqrt{1+3\alpha^2} - 1)^2} \frac{m}{a^2}$$

Huomautus: Kun kertoimelle γ annetaan arvot 0 ja 1, saadaan tämän tehtävän tuloksesta myös kaksi tärkeää erikoistapausta: (a) Tapaus $\gamma=0$ eli $m'=0$ merkitsee sitä, että tuille syntyvä myötöviiva toimii kuten vapaa tuki. Näin saamme erikoistapauksena vapaastuetun homogeenisen suorakaidelaatan rajakuorman. (b) Tapaus $\gamma=1$ eli $m'=m$ antaa jäykästi kiinnitetyn homogeenisen suorakaidelaatan rajakuorman.

(a) vapaasti tuettu ($\gamma=0$)

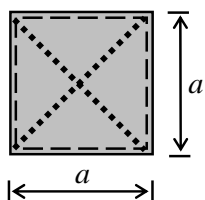
(b) jäykästi kiinnitetty ($\gamma=1$)



Tuloksia erikoistapauksille:

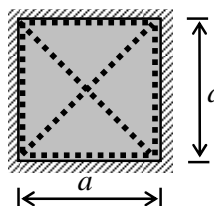
Neliölaatta ($\alpha=1$):

(a) vapaasti tuettu ($\gamma = 0$)



$$p_p = 24 \frac{m}{a^2}$$

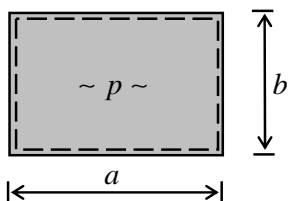
(b) jäykästi kiinnitetty ($\gamma = 1$)



$$p_p = 48 \frac{m}{a^2}$$

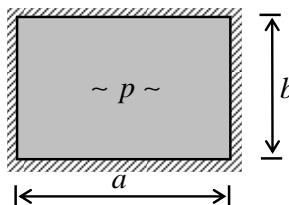
Suorakaidelaatta ($\alpha > 1$):

(a) vapaasti tuettu ($\gamma = 0$)



$$p_p = k_0(\alpha) \cdot 24 \frac{m}{b^2}$$

(b) jäykästi kiinnitetty ($\gamma = 1$)



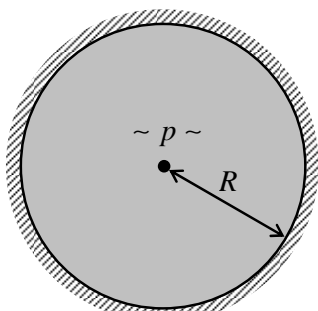
$$p_p = k_0(\alpha) \cdot 48 \frac{m}{b^2}$$

missä

$$k_0(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1 + 3\alpha^2} - 1} \right)^2$$

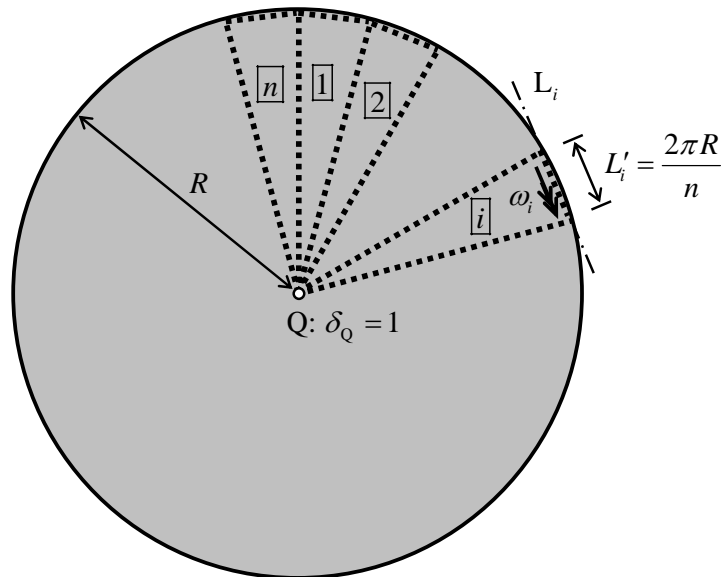
$\alpha=a/b$	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	∞
$k_0(\alpha)$	1,000	0,815	0,707	0,638	0,589	0,526	0,489	0,463	0,444	0,333

Esimerkki 2: Jäykästi kiinnitetty, isotrooppinen ympyrälaatta, jota kuormittaa tasainen kuorma p . Positiivista ja negatiivista taivutusta vastaavat täysplastiset momentit ovat m ja $m' = \gamma m$. Määritetään plastinen rajakuorma.



Sisäisten voimien virtuaalinen työ:

Käytetään projektiomenettelyä ja oheista laattamekanismia:



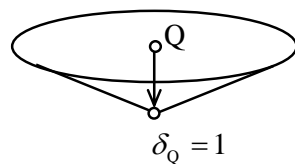
Mekanismin laatanosien lukumäärä n ajatellaan niin suureksi, että rotaatioakselin L_i etäisyydeksi pisteestä Q voidaan ottaa R . Tällöin

$$\omega_i = \frac{\delta_Q}{R} = \frac{1}{R}$$

ja saadaan

$$W_{\text{int}} = -\sum_{i=1}^n (mL_i' + m'L_i') \omega_i = -n \cdot \frac{2\pi R}{n} (m + m') \frac{1}{R} = \underline{\underline{-2\pi(m + m')}}$$

Ulkoisten voimien virtuaalinen työ:



$$V_p = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot 1 = \frac{1}{3} \pi R^2$$

$$W_{\text{ext}} = pV_p = p \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{3} p \pi R^2$$

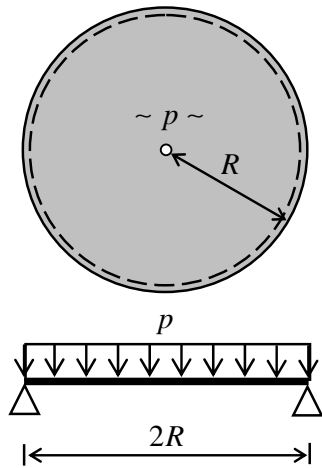
Rajakuorma:

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \Leftrightarrow \frac{1}{3} p \pi R^2 = 2\pi(m + m') \Rightarrow \underline{\underline{p_p = 6 \frac{m + m'}{R^2} = 6(1 + \gamma) \frac{m}{R^2}}}$$

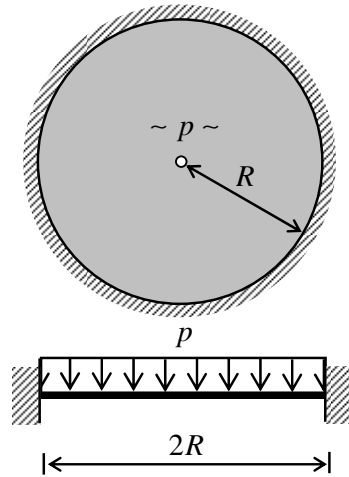
Erikoistapaukset:

(a) vapaasti tuettu ($\gamma = 0$):

(b) jäykästi kiinnitetty homogeeninen ($\gamma = 1$):



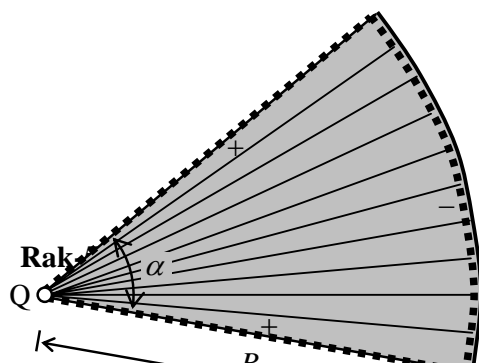
$$p_p = 6 \frac{m}{R^2}$$



$$p_p = 12 \frac{m}{R^2}$$

Viuhkamekanismi:

Esimerkissä 2 ympyrälaatalle käytettyä mekanismia kutsutaan **viuhkamekanismiksi**. Viuhkamekanismi voi olla myös ympyräsektorin muotoinen (kuva 13) ja se voi esiintyä osana monimutkaisempaa laattamekanismia.



$$W_{\text{int}} = -\alpha(m + m')$$

a B, luennot osa IV

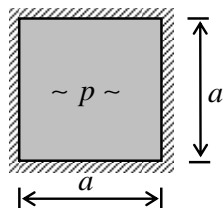
Kuva 14: Viuhkamekanismi.

Viuhkamekanismin sisäiselle virtuaaliselle työlle saadaan helposti

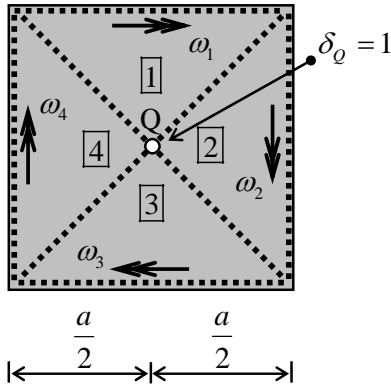
$$W_{\text{int}} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot [-2\pi(m + m')] = \underline{\underline{-\alpha(m + m')}} \quad (41)$$

Nähdään, että sen arvo riippuu vain viuhkan keskuskulmasta α sekä täysplastisista momenteista m ja m' , mutta ei säteestä R .

Esimerkki 3: Jäykästi kiinnitetty, isotrooppinen neliölaatta; tasainen kuorma p . Määritetään rajakuorma. Tämä ratkaistiin jo esimerkin 1 yhteydessä erikoistapauksena mekaniismilla (a). Käsitellään tässä myös toista mekaniismia (b).



Mekanismi (a):



$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \frac{1}{a/2} = \frac{2}{a}$$

$$W_{\text{int}} = -4 \cdot \frac{2}{a} \cdot (ma + ma) = -16m$$

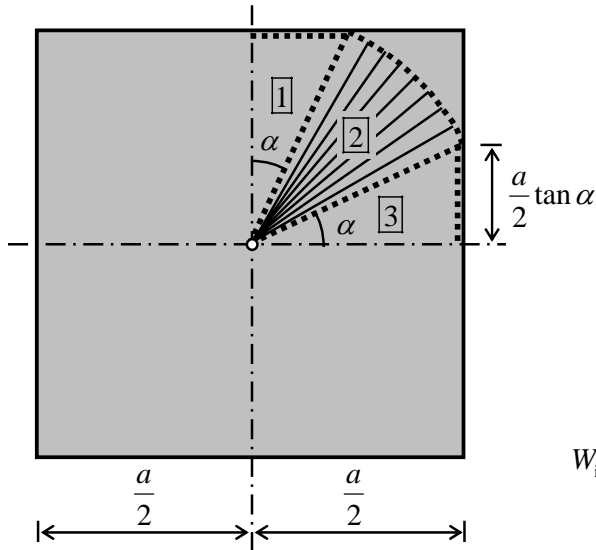
$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{3} a^2 \cdot 1 \cdot p = \frac{pa^2}{3}$$

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \Leftrightarrow \frac{pa^2}{3} = 16m \Rightarrow \underline{p_p = 48 \frac{m}{a^2}}$$

Tulos saatiin jo suorakaidelaattaesimerkissä.

Mekanismi (b):

Sisäisten voimien virtuaalinen työ/laatan neljännes:



Viuhkamekanismin 2 osuus:

$$\begin{aligned} W_{\text{int}}^2 &= -\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)(m + m) \\ &= -(\pi - 4\alpha)m \end{aligned}$$

Laatan osien 1 ja 3 osuus:

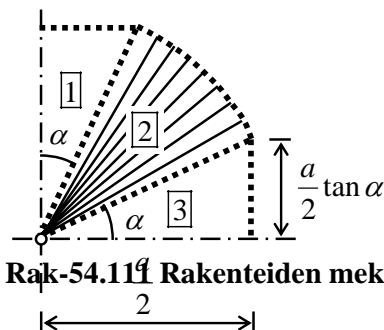
$$\omega_1 = \omega_3 = \frac{1}{a/2} = \frac{2}{a}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{int}}^1 = W_{\text{int}}^3 &= -\left(m \cdot \frac{a}{2} \tan \alpha + m \cdot \frac{a}{2} \tan \alpha\right) \cdot \frac{2}{a} \\ &= \underline{-2m \tan \alpha} \end{aligned}$$

Sisäinen virtuaalinen työ laatan neljänneestä kohti on

$$W_{\text{int}} = W_{\text{int}}^1 + W_{\text{int}}^2 + W_{\text{int}}^3 = \underline{-(\pi - 4\alpha + 4 \tan \alpha)m}$$

Ulkoisten voimien virtuaalinen työ/laatan neljännes:



$$A_1 = A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \tan \alpha = \frac{a^2}{8} \tan \alpha$$

$$A_2 = \frac{\frac{\pi}{2} - 2\alpha}{2\pi} \cdot \pi \left(\frac{a}{2 \cos \alpha}\right)^2 = \frac{\pi - 4\alpha}{16 \cos^2 \alpha} a^2$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{a^2}{16} \left(\frac{\pi - 4\alpha}{\cos^2 \alpha} + 4 \tan \alpha \right)$$

$$W_{\text{ext}} = V_p \cdot p = \frac{1}{3} \cdot A \cdot 1 \cdot p = \frac{a^2 p}{48} \left(\frac{\pi - 4\alpha}{\cos^2 \alpha} + 4 \tan \alpha \right)$$

Virtuaalisen työn periaate:

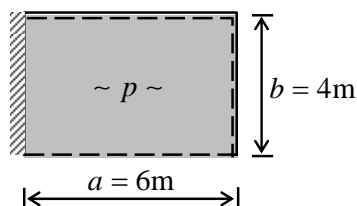
$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \Rightarrow p = \frac{(\pi - 4\alpha + 4 \tan \alpha)}{\frac{\pi - 4\alpha}{\cos^2 \alpha} + 4 \tan \alpha} 48 \frac{m}{a^2}$$

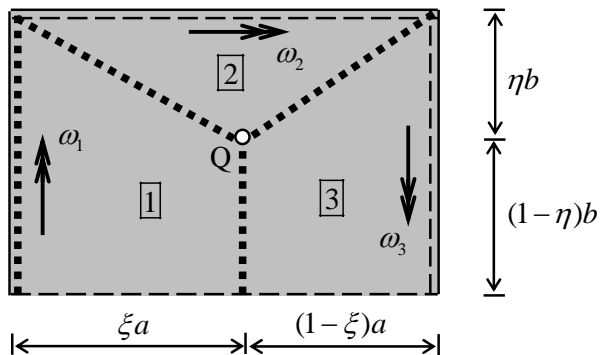
Rajakuorman määrittämiseksi etsitään p :n minimi. Lasketaan kertoimen arvoja eri α :n arvoilla.

α	$\frac{pa^2}{48m}$
0	1
$\pi/32$	0,991
$\pi/16$	0,971
$3\pi/32$	0,946
$\pi/8$	0,922
$5\pi/32$	0,907
$3\pi/16$	0,907
$7\pi/32$	0,932
$\pi/4$	1

Interpoloimalla saadaan arvio $\alpha \approx \frac{11}{64}\pi \approx 30,9^\circ$, jolloin $p_p \approx 0,905 \cdot \frac{48m}{a^2} \approx \underline{\underline{43,5 \frac{m}{a^2}}}$

Esimerkki 4: Oheisen ortotrooppisen suorakaidelaatan kaksi sivua on vapaasti tuettuja, yksi on jäykästi kiinnitetty ja yksi on vapaa. Täysplastiset momentit ovat $m_x = 4 \text{ kN}$, $m_y = 2 \text{ kN}$. Määritetään plastinen rajakuorma.



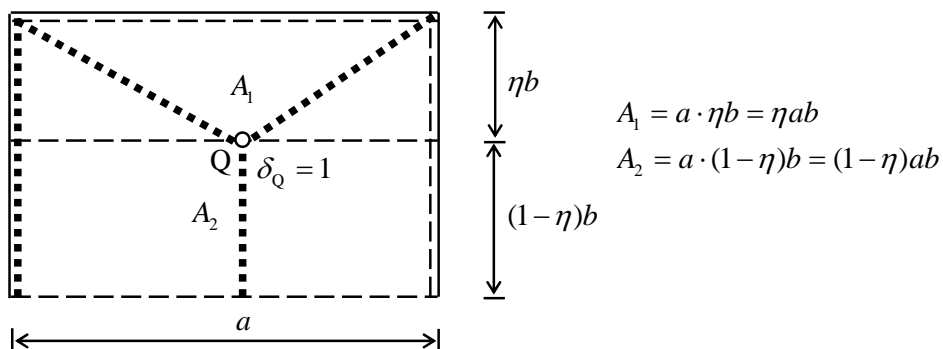


Laatan osien rotaatiot:

$$\omega_1 = \frac{1}{\xi a}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\eta b}, \quad \omega_3 = \frac{1}{(1-\xi)a}$$

Sisäisten voimien virtuaalinen työ:

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} &= -(2bm_x\omega_1 + am_y\omega_2 + bm_x\omega_3) = -\left[\frac{2b}{\xi a}m_x + \frac{a}{\eta b}m_y + \frac{b}{(1-\xi)a}m_x\right] \\ &= -\left[\frac{16}{3\xi} + \frac{3}{\eta} + \frac{8}{3(1-\xi)}\right] \text{kN} \end{aligned}$$



$$A_1 = a \cdot \eta b = \eta ab$$

$$A_2 = a \cdot (1-\eta)b = (1-\eta)ab$$

Ulkoinen virtuaalinen työ:

$$W_{\text{ext}} = \left(\frac{1}{3}A_1 \cdot 1 + \frac{1}{2}A_2 \cdot 1\right)p = \left[\frac{1}{3}\eta ab + \frac{1}{2}(1-\eta)ab\right]p = 4(3-\eta)m^2 \cdot p$$

Virtuaalisen työn yhtälö:

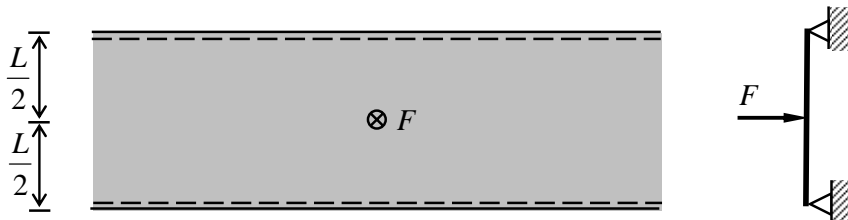
$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \Rightarrow p = \frac{\frac{16}{3\xi} + \frac{3}{\eta} + \frac{8}{3(1-\xi)} \text{ kN}}{4(3-\eta) \text{ m}^2}$$

Etsitään minimi laskemalla p :n arvoja [kN/m²]:

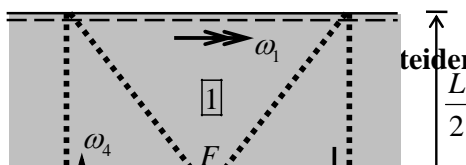
$\eta \setminus \xi$	0,4	0,5	0,6	0,7
0,4	2,43	2,26	2,22	2,31
0,5	2,38	2,20	2,16	2,25
0,6	2,37	2,19	2,14	2,24
0,7	2,40	2,21	2,16	2,26

Päätellään taulukon perusteella: $p_p \approx 2,14 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$.

Esimerkki 5: Isotrooppinen laattakaista (pitkän suorakaidelaatan keskialue) jota kuormittaa pistekuorma F sen keskialueella. Laatan täysplastinen momentti on m . Määritetään rajakuorma F_p .



Mekanismi (a):



$$\omega_1 = \omega_3 = \frac{\overset{\perp}{\delta}_F}{L/2} = \frac{2}{L}$$

$$\omega_2 = \omega_4 = \frac{\overset{\perp}{\delta}_F}{\xi L/2} = \frac{2}{\xi L}$$

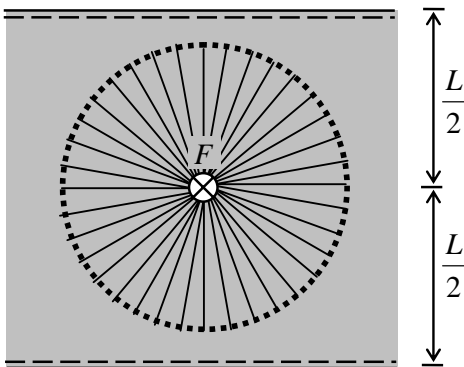
$$\begin{aligned} W_{\text{int}} &= - \left[2 \cdot m \xi L \frac{2}{L} + 2 \cdot (mL + mL) \frac{2}{\xi L} \right] \\ &= -4m \left(\xi + \frac{2}{\xi} \right) \end{aligned}$$

$$W_{\text{ext}} = F \cdot 1$$

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \Rightarrow F = 4m \left(\xi + \frac{2}{\xi} \right)$$

$$\frac{dF}{d\xi} = 4m \left(1 - \frac{2}{\xi^2} \right) = 0 \Rightarrow \xi = \sqrt{2} \Rightarrow F_p^{(a)} = 4m (\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 8\sqrt{2} m \approx \underline{11,31m}$$

Mekanismi (b):

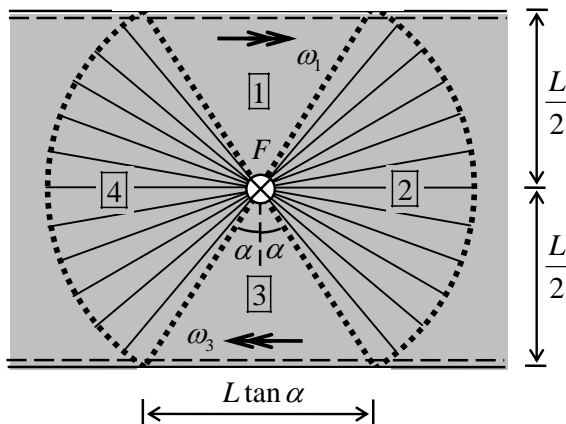


$$W_{\text{int}} = -2\pi (m + m) = -4\pi m$$

$$W_{\text{ext}} = F \cdot 1$$

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \Rightarrow F_p^{(b)} = 4\pi m \approx \underline{12,57m}$$

Mekanismi (c):



$$\omega_1 = \omega_3 = \frac{2}{L}$$

$$W_{\text{int}} = -\left[\underbrace{(2\pi - 4\alpha)(m + m)}_{\text{viuhkat}} + \underbrace{2 \cdot mL \tan \alpha \cdot \frac{2}{L}}_{1 \& 3} \right] = -4(\pi - 2\alpha + \tan \alpha)m, \quad W_{\text{ext}} = F \cdot 1$$

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{int}} \Rightarrow F = 4(\pi - 2\alpha + \tan \alpha)m$$

Tutkitaan F :ää laskemalla kertoimen arvoja α :n funktiona:

α	F/m
0	12,57
$\pi/16$	11,79
$\pi/8$	11,08
$3\pi/16$	10,53
$\pi/4$	10,28
$5\pi/16$	10,70
$3\pi/8$	12,79
$7\pi/8$	21,68
$\pi/2$	∞

Minimiarvo on 10,28 α :n arvolla $\pi/4$. Etsitään tarkka minimi myös derivoimalla:

$$\frac{dF}{d\alpha} = 4 \left(-2 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) m = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow F_p^{(c)} = (2\pi + 4)m \approx 10,28m$$

Vertaamalla eri mekanismeilla saatuja tuloksia päätellään, että

$$\underline{\underline{F_p = F_p^{(c)} = (2\pi + 4)m \approx 10,28m}}$$

Liite A: Matemaattinen huomautus

Tarkkaavaista lukijaa saattaa ihmetyttää, miksi myötöehtoa (26) johdettaessa yhtälön (24) vasen puoli derivoitiin parametrin α suhteen ja tulos merkittiin nolaksi. Selitykseksi tähän tarkastellaan muuttujien x , y , ja z välistä yhtälöä

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \tag{A1}$$

jonka otaksutaan olevan voimassa kaikilla parametrin α arvoilla. Se on siis voimassa myös α :n arvolla $\alpha + d\alpha$, jolloin yhtälö on

$$f(x, y, z, \alpha + d\alpha) = 0. \tag{A2}$$

Koska muutos $d\alpha$ otaksutaan differentiaaliseksi, voidaan kirjoittaa

$$f(x, y, z, \alpha + d\alpha) = \overbrace{f(x, y, z, \alpha)}^0 + \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, z, \alpha)d\alpha = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, z, \alpha)d\alpha, \quad (\text{A3})$$

Näin yhtälö (A2) perusteella saadaan yhtälö

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, z, \alpha) = 0. \quad (\text{A4})$$

Jos siis yhtälön (A1) tulee olla voimassa kaikilla parametrin α arvoilla, on myös yhtälön (A4) oltava voimassa. Yhtälöistä (A1) ja (A4) voidaan nyt, ainakin periaatteessa, eliminoida parametri α , jolloin saadaan muuttujien x , y , ja z välinen, muotoa

$$g(x, y, z) = 0 \quad (\text{A5})$$

oleva yhtälö.

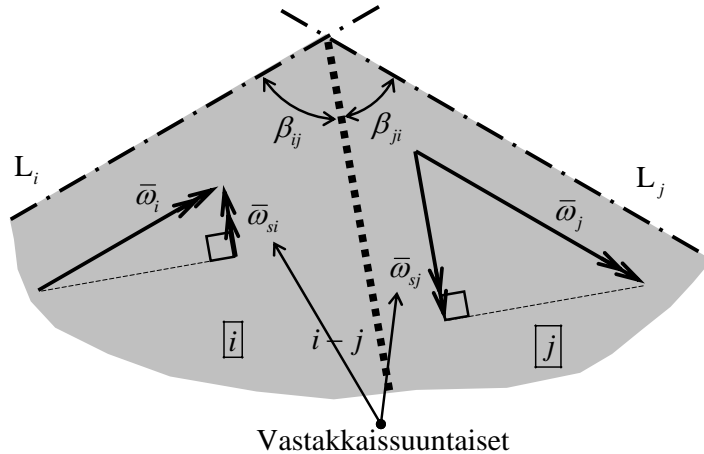
Liite B: Ehto sille, että projektiomenettelyä voidaan käyttää sisäisen virtuaalisen työn määrittämiseen kahden laatan osan välisellä myötöviivalla

Tarkastellaan laatan osien \boxed{i} ja \boxed{j} välistä myötöviivaa $i - j$. Sisäinen virtuaalinen työ myötöviivalla on

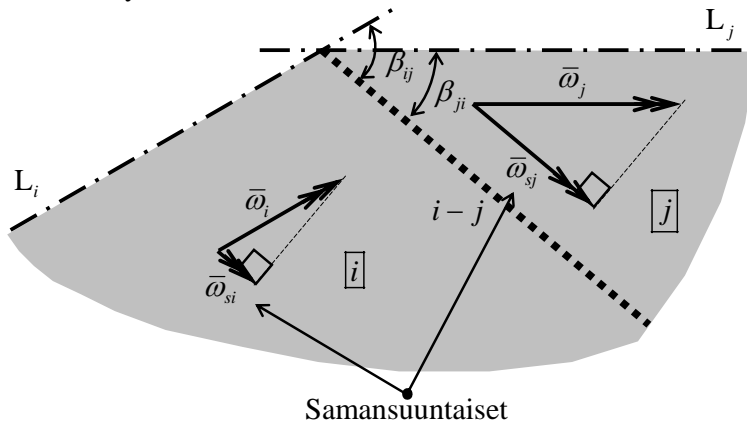
$$\bar{W}_{\text{int},ij} = -m_{ij}L_{ij}\bar{\omega}_{ij} = -m_{ij}L_{ij}\left|\bar{\omega}_{ij}\right| = -m_{ij}L_{ij}\left|\bar{\omega}_{si} - \bar{\omega}_{sj}\right|. \quad (\text{B1})$$

Projektiomenettelyllä sille saadaan

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{\text{int},ij} &= \overbrace{-m_{ij}L'_{ij}\bar{\omega}_i}^{\text{osa } i} - \overbrace{m_{ij}L'_{ij}\bar{\omega}_j}^{\text{osa } j} = -m_{ij}L_{ij}(\bar{\omega}_i \cos \beta_{ij} + \bar{\omega}_j \cos \beta_{ji}) \\ &= -m_{ij}L_{ij}(\bar{\omega}_{si} + \bar{\omega}_{sj}) = -m_{ij}L_{ij}(|\bar{\omega}_{si}| + |\bar{\omega}_{sj}|)\end{aligned}\quad (\text{B2})$$



Kuva B1: Tilanne, jossa myötöviivan $i - j$ sisäiselle virtuaaliselle työlle saadaan projektiomenetellyllä **oikea tulos**.



Kuva B2: Tilanne, jossa myötöviivan $i - j$ sisäiselle virtuaaliselle työlle saadaan projektiomenetellyllä **väärä tulos**.

Jotta projektiomenetellyllä saataisiin oikea tulos $\tilde{W}_{\text{int},ij} = \bar{W}_{\text{int},ij}$, tulee olla voimassa ehto $|\bar{\omega}_{si}| + |\bar{\omega}_{sj}| = |\bar{\omega}_{si} - \bar{\omega}_{sj}|$. Koska molemmat vektorit $\bar{\omega}_{si}$ ja $\bar{\omega}_{sj}$ ovat myötöviivan suuntaisia, ehto on voimassa, jos ne ovat **vastakkaissuuntaisia** (vrt. kuvat B1 ja B2).

Kuvassa B2 esitetty tilanne, jossa projektiomenetely ei toimi, on käytännössä varsin harvinainen. Tavallisimmissa käytännön probleemissa se antaa oikean tuloksen. Tämän vuoksi monissa alan oppikirjoissa tarkastelut on tehty pelkästään projektiomenetelyä käyttäen.

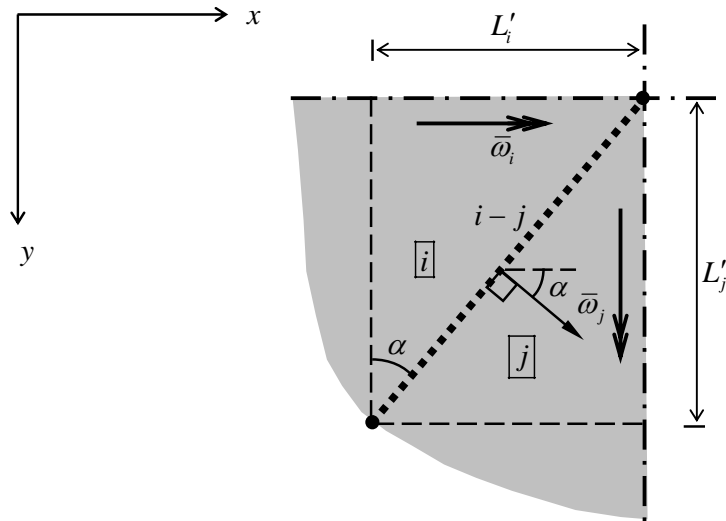
Liite C: Projektionmenettely ortotrooppiselle laatalle, jonka osien rotaatioakselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset.

Tarkastellaan laatan osia \boxed{i} ja \boxed{j} , joiden rotaatioakselit ovat x - ja y -akselien suuntaiset, sekä niiden välistä myötöviivaa $i-j$ (kuva C1). Virtuaalisen kulmanmuutoksen suuruudelle myötöviivalla saadaan

$$\bar{\omega}_{ij} = \left| \vec{\bar{\omega}}_{ij} \right| = \left| \vec{\bar{\omega}}_{si} - \vec{\bar{\omega}}_{sj} \right| = \left| \vec{\bar{\omega}}_{si} \right| + \left| \vec{\bar{\omega}}_{sj} \right| = \bar{\omega}_{si} + \bar{\omega}_{sj} = \bar{\omega}_i \cos \alpha + \bar{\omega}_j \sin \alpha. \quad (\text{C1})$$

Tämän yhtälöketjun kolmas yhtäsuuruusmerkki perustuu siihen, että tarkastelemme tiilannetta, jossa projektiomenettelyä voidaan soveltaa (vrt. liite B). Myötöviivalla $i - j$ on myös voimassa ehto $\bar{\omega}_{ni} = \bar{\omega}_{nj}$, joten saadaan

$$\bar{\omega}_{ni} = \bar{\omega}_{nj} \Rightarrow \bar{\omega}_i \cos \alpha - \bar{\omega}_j \sin \alpha = 0. \quad (C2)$$



Kuva C1: Kaksi laatan osaa, joiden rotaatioakselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset, sekä niiden välinen myötöviiva.

Yhtälöt (C1) ja (C2) muodostavat yhtälöparin, jonka ratkaisuna saadaan

$$\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_{ij} \sin \alpha, \quad \bar{\omega}_j = \bar{\omega}_{ij} \cos \alpha. \quad (C3)$$

Käyttäen esitettyä projektiomenettelyä saadaan sisäiselle virtuaaliselle työlle myötöviivalla $i - j$

$$\begin{aligned} \bar{W}_{\text{int},ij} &= -m_y L'_i \bar{\omega}_i - m_x L'_j \bar{\omega}_j = -m_y \cdot L_{ij} \sin \alpha \cdot \bar{\omega}_{ij} \sin \alpha - m_x \cdot L_{ij} \cos \alpha \cdot \bar{\omega}_{ij} \cos \alpha \\ &= -(m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha) L_{ij} \bar{\omega}_{ij} = \underline{\underline{-m_{ij} L_{ij} \bar{\omega}_{ij}}}. \end{aligned} \quad (C4)$$

Myötöviivan sisäiselle virtuaaliselle työlle saatiin siis kaavaa (28) vastaava oikea tulos.